

matischen Wissenschaften wertvolle Hilfsmittel beizutragen. Die Mengenlehre stellt hiernach nicht nur einen wesentlichen Teil, sondern geradezu das Fundament der mathematischen Wissenschaft dar, ein Anspruch, der ihr nur vom Standpunkt der Intuitionisten (§ 12) begreiflicher Weise bestritten wird.

Die großen Erfolge, die die Mengenlehre in all den genannten Beziehungen schon gegenwärtig aufzuweisen hat, haben bewirkt, daß diese Disziplin trotz ihrer Jugend heute einen wichtigen, ja einen bevorzugten Platz innerhalb des Gebietes der Mathematik einnimmt; ein innerhalb der Gesamtwissenschaft so führender Forscher wie *Hilbert* bezeichnet sie als „einen der fruchtreichsten und kräftigsten Wissenszweige der Mathematik überhaupt“<sup>1)</sup>. Wenn bis in das letzte Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts hinein *Cantor* und seine Ideen nur bei einem beschränkten Kreise seiner mathematischen Zeitgenossen Anerkennung und Würdigung gefunden haben, so hat sich dies seither ziemlich rasch völlig verändert; die Mengenlehre wird nunmehr innerhalb der Mathematik allgemein benutzt und weit über die Grenzen der Fachmathematiker hinaus studiert. Diese ihre heutige Wertschätzung aber liegt zu einem wesentlichen Teil an dem nämlichen Umstand, der ihr zunächst die allgemeine Anerkennung vorenthielt: sie stellt einen der größten und kühnsten Schritte dar, die die mathematische Entwicklung jemals getan hat, einen Schritt, der eine wissenschaftliche Revolution von nicht geringerer Tragweite bedeutet als das *Kopernikanische* Weltsystem in der Astronomie, als die *Einsteinsche* Relativitätstheorie oder die *Plancksche* Quantenlehre in der Physik.

### Literatur.

Es sollen hier (in historischer Reihenfolge) nur einige wenige, vollständig der Mengenlehre gewidmete Schriften angeführt werden. Die meisten ausführlicheren modernen Lehrbücher der Funktionentheorie, unter denen aus historischen Gründen *E. Borels* auf S. 58 angeführte Schrift hervorzuheben ist, enthalten übrigens eine mehr oder minder weitgehende Einführung in die Mengenlehre.

1. *G. Cantor* hat seine zahlreichen, die allmähliche Entwicklung der Ideen deutlich zeigenden einschlägigen Aufsätze von 1874 bis 1897 in verschiedenen Bänden des Journ. f. d. reine u. angew. Math. (77 und 84), der Math. Annalen, der Acta Mathematica (2, 4, 7), der Ztschr. f. Philosophie u. philos. Kritik (Neue Folge, 88, 91, 92) und in anderen Zeitschriften veröffentlicht; viele davon sind in fremde Sprachen übertragen worden (vgl. namentlich die französischen Übersetzungen im 2. Band der Acta Mathematica). Besonders hervor-

<sup>1)</sup> *Hilbert* (Zitat von S. 222), S. 411.

zuheben sind die Abhandlungen „Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“, I—VI in den Math. Ann. **15**, **17**, **20**, **21**, **23** (1879—1884), von denen die fünfte (vorletzte) und wichtigste auch als selbständige Schrift u. d. T. „Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre“ (Leipzig 1883) erschienen ist, sowie die beiden *Cantors* Lebenswerk abschließenden „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“, I und II, im 46. u. 49. Bd. der Math. Annalen (1895 u. 1897); die drei letztgenannten Arbeiten werden in diesem Buch angeführt als „*Cantor*, Grundlagen“ bzw. „*Cantor*, Beiträge I bzw. II“. Die Aufsätze aus der Z. f. Phil. u. phil. Kritik sind gleichfalls als selbständige Schrift erschienen: Zur Lehre vom Transfiniten, 1. Abt., Halle 1890. Neben einer (von *A. Wangerin* stammenden) Biographie *Cantors* in der Zeitschrift „Leopoldina“ (der Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle), Jahrg. 1918, S. 10—13, ist vor allem auf die auf S. 1 angeführten *Cantor*-Erinnerungen von *A. Schoenflies* zu verweisen; an beiden Stellen auch Verzeichnisse seiner Schriften.

Fast alle in den §§ 2—11 des vorliegenden Buches entwickelten Ergebnisse und Beweise, soweit nichts anderes bei ihnen vermerkt ist, gehen auf die genannten Arbeiten *Cantors* zurück. Da diese auch leicht verständlich sind, kann ihre Lektüre warm empfohlen werden.

2. *Schoenflies*, *A.*: Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannichfaltigkeiten. 1. Teil (Leipzig 1900), 2. Teil (Leipzig 1908); Jahresber. d. Deutsch. Mathematiker-Vereinigung, 8. Bd. und 2. Ergänzungsband. Eine moderne Umarbeitung der ersten Hälfte des 1. Teils ist erschienen u. d. T.: Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen, 1. Hälfte (Leipzig u. Berlin 1913); in diesem Buch angeführt als „*Schoenflies*, Mengenlehre“.

Dieses ursprünglich auf Veranlassung der Deutschen Mathematikervereinigung entstandene Werk ist weniger zur *Einführung* in die Mengenlehre bestimmt, als es vielmehr den vorliegenden Stoff in seiner gewaltigen Fülle zu sammeln und seinem historischen und sachlichen Zusammenhang nach darzustellen versucht. Demgemäß sind die Beweise nicht immer vollständig ausgeführt, so daß das Werk nicht eigentlich als Lehrbuch in Betracht kommt, vielmehr als — erstaunlich inhaltsreiches — Nachschlagewerk und als Ausgangspunkt für den Forscher.

3. *Hessenberg*, *G.*: Grundbegriffe der Mengenlehre (Göttingen 1906). („*Hessenberg*“) Diese als Sonderdruck aus der Neuen Folge der „Abhandlungen der *Friesschen* Schule“ (I. Bd., 4. Heft) erschienene Schrift sei namentlich demjenigen empfohlen, dem es weniger um eine Fülle mathematischer Ergebnisse zu tun ist als um eine leicht lesbare und zusammenhängende Darstellung der Gedankengänge,

die für den Begriff des Unendlichgroßen, seine Begründung und seine Kritik mathematisch wie logisch entscheidend sind. Vom gleichen Verfasser ist übrigens eine besonders moderne, aber sehr gedrängte und nur dem mathematisch geübten Leser zu empfehlende Darstellung der Grundzüge der Mengenlehre erschienen im „Taschenbuch f. Mathematiker u. Physiker“, 3. Jahrgang (Leipzig 1913). („Hessenberg, Taschenbuch“)

4. Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914). („Hausdorff“) Dieses Buch stellt das erste und bisher einzige eigentliche *Lehrbuch* der Mengenlehre in deutscher Sprache dar. Es behandelt unter Innehaltung bestimmter weiter Grenzen einen außerordentlich reichen Stoff, darunter auch vieles von den eigenen ausgedehnten Forschungen des Verfassers, und enthält zu allen vorkommenden Sätzen die vollständig ausgeführten Beweise; immerhin erfordert die Lektüre, namentlich des 1. Kapitels, Geübtheit im mathematischen Denken.

Kürzere Übersichten über die Mengenlehre und ihre Entwicklung nebst Literaturangaben findet man z. B. in der Encyclopädie der math. Wissenschaften, I. Bd., I A 5 (*A. Schoenflies*); in der französischen Bearbeitung dieses Artikels in der Encyclopédie des Sciences Math., T. I, 7 (*R. Baire*), ferner in (*Pascal*) Repertorium d. höheren Mathematik, 2. Aufl., I. Bd. (Leipzig u. Berlin 1910), S. 17—30 (*H. Hahn*).

In bezug auf die wichtigste mathematische Anwendung der abstrakten Mengenlehre, nämlich die Theorie der Punktmengen (und die an sie anschließende Lehre von den Funktionen und ihren Integralen), seien neben *Schoenflies* und *Hausdorff* noch etwa die folgenden Werke erwähnt, von denen namentlich die zwei letztgenannten als besonders reichhaltig hervorzuheben sind:

*Lebesgue, H.*: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (Paris 1904).

*Baire, R.*: Leçons sur les fonctions discontinues (Paris 1905).

*Young, W. H.* and *Grace Chisholm Young*: The theory of sets of points (Cambridge 1906).

*Pierpont, J.*: Lectures on the theory of functions of real variables, Vol. 1 (Boston 1905), 2 (1912).

*de la Vallée Poussin, Ch.-J.*: Intégrales de *Lebesgue*, fonctions d'ensemble, classes de *Baire* (Paris 1916).

*Carathéodory, C.*: Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig und Berlin 1918).

*Hahn, H.*: Theorie der reellen Funktionen, 1. Bd. (Berlin 1921); 2. Band in Vorbereitung. Dieses Werk stellt gleichzeitig die Ergänzung von *Schoenflies*, Mengenlehre, dar.

## Namenverzeichnis.

Der Name *G. Cantors*, der in den §§ 1—11 fast ständig anzuführen wäre, ist fortgelassen, ebenso die meisten Zitate aus den auf S. 246 f. angeführten Büchern.

**Aristoteles** 2.

**Baire**, R. 247.

**Becker**, O. 165 f., 169, 171.

**Beetle**, R. D. 226.

**Behmann**, H. 227.

**Bernays**, P. 222, 235.

**Bernstein**, F. 58, 173, 182.

**Boehm**, K. 185, 222.

**Bois-Reymond**, P. du 242.

**Bolyai**, Joh. 220.

**Bolzano**, B. 215, 241 f.

**Borel**, E. 58, 152, 164, 245.

**Brouwer**, L. E. J. 79, 158, 164—173, 239 f.

**Burali-Forti**, C. 152, 154, 175, 209, 214.

**Carathéodory**, C. 247.

**Carnap**, R. 181.

**Cassirer**, E. 150, 222.

**Cauchy**, A. L. 243.

**Chwistek**, L. 152, 178.

**Cohen**, H. 160.

**Couturat**, L. 181, 233.

**Dedekind**, R. 18, 105 f., 172, 205, 215 f., 234, 244.

**Descartes** 2.

**Einstein**, A. 245.

**Eneström**, G. 61.

**Enriques**, Fr. 222.

**Epstein**, P. 12, 16, 27, 33, 83, 106, 111.

**Euclid** 109, 220, 224, 228.

**Fraenkel**, A. 45, 162, 187 f., 197, 212, 217 ff., 225 ff.

**Frege**, G. 181, 234.

**Fürst** 4.

**Gauß**, C. F. 1, 6, 220, 241.

**Gmeiner**, J. A. 231.

**Grelling**, K. 151 f., 155 f., 222.

**Gutberlet**, C. 2.

**Gutzmer**, A. 164.

**Hahn**, H. 231, 242, 247.

**Hamel**, G. 204.

**Hamilton**, W. R. 164.

**Hankel**, H. 242.

**Hartogs**, F. 187, 207, 212.

**Hausdorff**, F. 64, 104 f., 132, 203, 214, 247.

**Heine**, E. 242.

**Hellinger**, E. 79.

**Hertz**, P. 229.

**Hessenberg**, G. 44, 132, 135, 152, 156, 169, 187, 212, 219, 222, 244, 246 f.

**Hilbert**, D. 165, 171, 173 f., 178, 183, 185, 188, 204, 220—223, 230—241, 245.

**Höfler**, A. 222, 242.

**Hölder**, O. 16, 90, 105 f.

**Huntington**, E. V. 207.

**Husserl**, E. 165, 222.

**Jacobsthal**, E. 162.

**Jašek**, M. 241.

**Jourdain**, Ph. E. B. 181.

**Kant** 155, 166.

**Klein**, F. 78 f., 244.

**Knopp**, K. 33, 111, 113.

**König**, J. 77, 85, 152, 156, 178, 182 ff., 200.

**Korselt**, A. 58.

**Kowalewski**, G. 241.

**Kronecker**, L. 2, 164 f., 171 f.

**Krull**, W. 204.

**Kummer**, E. E. 4.

**Kuratowski**, C. 151, 212, 219.

**Laßwitz**, K. 4.

**Lebesgue**, H. 116, 203, 243, 247.

**Leibniz** 2.

**Levi**, B. 208.

**Lindemann**, F. und L. 150.

**Lipps**, H. 152, 156.

**Lobatschewskij**, N. J. 220.

**Locke** 2.

**Loewy**, A. 16, 33, 90, 105, 111, 113, 231.

- London, Fr. 222.  
Lüroth, J. 79.
- M**ach, E. 186.  
Mirimanoff, D. 152, 218.  
Mollerup, J. 178.  
Moore, E. H. 221, 226.  
Moszkowski 4.  
Müller, Al. 150.
- N**atorp, P. 160—163.  
Nelson, A. 152, 155 f.
- P**adoa, A. 222, 226.  
Pasch, M. 171, 220, 222.  
Peano, G. 181, 220 ff., 231 f.  
Perron, O. 222, 236.  
Pierpont, J. 247.  
Planck, M. 245.  
Poincaré, H. 150, 152, 156, 164 ff.,  
174 ff., 188, 203, 232 f., 236, 240.  
Prihonsky, Fr. 242.
- R**ichard, J. 156, 214.  
Riemann, B. 243.  
Rüstow, A. 155.  
Russell, B. 44, 152—156, 174, 176—184,  
188, 214, 236, 240.  
Rychlík, K. 241.
- S**chepp, A. 161.  
Schlick, M. 222.  
Schmidt, E. 208.
- Schoenflies, A. 1, 2, 141 ff., 179, 219,  
246 f.  
Schröder, E. 58, 90, 181.  
Siegel, C. 181.  
Sierpiński, W. 187, 200, 204 f.  
Simon, M. 169.  
Skolem, Th. 187 f.  
Smith, H. J. St. 117.  
Spinoza 2.  
Stäckel, P. VIII.  
Steinitz, E. 204.  
Study, E. 222.
- T**ajtelbaum-Tarski, A. 206.
- V**allée Poussin, Ch.-J. de la 247.  
Veblen, O. 227.  
Veronese, G. 161 ff., 220.
- W**angerin, A. 246.  
Weber, H. 12, 16, 27, 33, 83, 106, 111.  
Weierstraß, C. 78, 106, 165, 241.  
Weyl, H. 164—175, 197, 239.  
Whitehead, A. N. 152, 176—184.
- Y**oung, G. Ch. 247.  
Young, W. H. 247.
- Z**aremba, S. 222.  
Zeno 7.  
Zermelo, E. 15, 51, 58, 128, 141, 149,  
151, 165, 171, 174—179, 183—221,  
226 f., 232, 234, 240 f., 244.  
Ziehen, Th. 158—160.

# Sachverzeichnis.

In der Regel ist nur die Stelle aufgeführt, wo der betreffende Begriff zum  
erstenmal (vielfach gesperrt) vorkommt und erklärt wird.

	Seite		Seite
a	45	$\emptyset$	120
c	45	$\pi$	10
f	47	$\omega$	99
$\mathbb{D}$	54 f.	$*\omega$	99
$\mathbb{B}$	69	0 (Nullmenge)	15
$\mathbb{S}$	54, 61 f., 191	$N_0$	134
U	51, 193	$N_v$	134
$\varepsilon$	189	=	11, 188, 237
$\#$	189	$\neq$	188, 237
$\eta$	117	$\sim$	15
		$\sphericalangle$	93
		$\sphericalangle \sphericalangle$	48, 129
		$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle$	48, 129
		$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle$	91, 145
		$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle$	92
		+	54 f., 61 f., 65, 192
		-	145
		.	67 ff.

**Abbildung** 13, 213.  
 —, ähnliche 93.  
 abgeschlossen 112.  
 Abschnitt 129.  
 Addition von Mengen 55, 61 f.  
 — von geordneten Mengen 100, 103.  
 — von Kardinalzahlen 65.  
 — von Ordnungstypen 100, 103.  
 — von Ordnungszahlen 126.  
 ähnlich 93.  
 äquivalent 12, 212.  
 Äquivalenzsatz 54.  
 Alef 45, 134.  
 Anfangszahl 134.  
 Antinomien 151 ff.  
 Anwendungen d. Mengenlehre 116, 243.  
 assoziatives Gesetz der Addition 65.  
 — der Multiplikation 71.  
 Auswahl 142, 199—211.  
 Auswahlmenge 196.  
 Auswahlprinzip 199—211.  
 Axiome 179, 185 f.  
 Axiom der Aussonderung 195, 198.  
 — der Auswahl 196, 199 bis 211.

**Axiom der Beschränktheit** 219.  
 — der Bestimmtheit 190.  
 — der Paarung 190 f.  
 — der Potenzmenge 193.  
 — der Reduzibilität 181.  
 — der Teilmengen 195, 198.  
 — des Unendlichen 216 f.  
 — der Vereinigung 191.  
 Axiomatik der Kardinalzahlen 45, 212.  
 axiomatische Methode 179, 185 f., 220 ff.  
**Begriffsschrift** 181.  
 Belegung 81.  
 Belegungsmenge 82.  
**Cantors Satz** 51 f.  
**Definite Eigenschaft** 197.  
 Dezimalbrüche 32 f.  
 Diagonalverfahren 36.  
 dicht, in sich 111.  
 dicht, nirgends 114.  
 dicht, überall 106.  
 Dimension(enzahl) 78.  
 distributives Gesetz 71.  
 Dritten, Satz vom ausgeschlossenen 167.  
 Durchschnitt 54 f.

**Element** 3, 10, 189.  
 elementefremd 63, 189.  
 enthalten sein 11, 189.  
 Entscheidbarkeit 169, 227  
 Epsilonzahl 133.  
 erstes Element 93.  
**Formalismus** 164.  
 Funktion 45, 81, 172, 198.  
 —, stetige 87.  
**Gammafolge** 145.  
 genetische Methode 221.  
 gleich (von Mengen) 11, 187.  
 — (von geordneten Mengen) 92.  
 größer (von Kardinalzahlen) 48.  
 — (von Ordnungszahlen) 129.  
 Grundbeziehung 185.  
**Identisch** 187 f.  
 immanente Realität 163.  
 Induktion, transfinite 133.  
 —, vollständige 133, 238.  
 Infinitesimalmethode 161, 163.  
 Inhalt (von Punktmengen) 243.  
 Integral, Lebesguesches 243.  
 Intuitionismus 164.

- Kardinalzahl** 43.  
 —, endliche 42.  
 —, unendliche oder transfinite 43.  
**Kettentheorie** 244.  
 kleiner (von Kardinalzahlen) 48.  
 — (von Ordnungszahlen) 129.  
 kommutatives Gesetz der Addition 65.  
 — — der Multiplikation 71.  
**Komplex** 64, 69.  
**Kontinuum** 45, 169.  
 Kontinuumproblem 50, 150, 207.  
**Letztes Element** 93.  
 Linearkontinuum 118, 120.  
 Lösbarkeit 169.  
 Logistik 181, 236.  
 Lücke 107.  
**Mächtigkeit** 43.  
 — des Kontinuums 45.  
**Menge** 3, 10f., 171, 179 bis 186.  
 —, abgezählte 21.  
 —, abzählbare 20.  
 —, endliche 16, 18f.  
 —, geordnete 92, 213.  
 —, unendliche oder transfinite 16, 18.  
 —, wohlgeordnete 122.  
 Metamathematik 235.  
 Multiplikation von Mengen 67, 69.  
 — von Kardinalzahlen 70.  
 — von Ordnungstypen 103f.  
 — von Ordnungszahlen 126.  
**Nullmenge** 15, 124.  
**Ordnung** (im allgemeinen) 91.  
 — der Elemente einer Menge 88—93, 213f.  
 Ordnung der Kardinalzahlen 48.  
 — der Ordnungszahlen 129.  
 Ordnungstypus 98.  
 Ordnungszahl 125.  
**Paar, geordnetes** 67f.  
 Paarmenge 191.  
 Paradoxien 151ff.  
 Pasigraphie 181.  
 perfekt 112.  
 Philosophie 2, 152, 178, 184, 228—242.  
 Potenzierung von Kardinalzahlen 80, 82.  
 — von Ordnungstypen 105.  
 — von Ordnungszahlen 127, 132.  
 Potenzmenge 83, 193.  
 nicht-prädikative Definition 174.  
 Pragmatismus 164.  
 Produkt von Mengen 67, 69, 211.  
 — von Kardinalzahlen 70.  
 — von Ordnungstypen 103f.  
 — von Ordnungszahlen 126.  
 Punkt, rationaler 25.  
 Punktmenge (lineare) 105f.  
**Religion** 2, 118f.  
 Rest 213.  
**Schnitt** 106.  
 —, stetiger 107.  
 Sprung 107.  
 stetig (von Punkt Mengen) 112.  
 Subtraktion 59, 79.  
 Summand 62, 192.  
 Summe von Mengen 54f., 61f.  
 — von geordneten Mengen 100, 103.  
 — von Kardinalzahlen 65.  
 — von Ordnungstypen 100, 103.  
 Summe von Ordnungszahlen 126.  
**Teilmenge** 15, 189.  
 transiente Realität 163.  
 Trichotomie 53.  
 Typentheorie 180.  
**Unabhängigkeit** eines Axiomensystems 223.  
 —, vollständige 226.  
 — der Grundbegriffe 226.  
 Unendlich, aktuales 6, 160ff.  
 — potientiell 6, 160ff.  
 Unendlichkleines 160ff.  
 Untermenge 15.  
**Verbindungs- menge** 67, 69, 211.  
 Vereinigungsmenge 54, 61f., 191.  
 Vergleichbarkeit von Kardinalzahlen und Mengen 59, 140, 149.  
 — von Ordnungszahlen und wohlgeordneten Mengen 130, 135ff.  
 verschieden (von Mengen) 188.  
 Vollständigkeit eines Axiomensystems 226ff.  
**Widerspruchslosigkeit** eines Axiomensystems 228ff.  
 Wohlordnung 141ff.  
 — des Kontinuums 149f., 209f.  
 Wohlordnungssatz 141.  
**Zahl, algebraische** 9, 27.  
 —, irrationale 27, 106.  
 —, natürliche 5, 172, 244.  
 —, rationale 22.  
 —, reelle 7, 33.  
 —, transzendente 9, 40.  
 Zahlengerade 8, 105.  
 Zahlenklasse 134.  
 zwischen 93.