Wichtige Ableitungsregeln

Da bei vielen Problemen eine Optimierung erforderlich ist, ist es von Vorteil, mit den wichtigsten Ableitungsregeln vertraut zu sein:

Regel	Funktion	Ableitung
Konstante	$f(x) = C$	$f'(x) = 0$
Potenzregel	$f(x) = a \cdot x^n$	$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$f(x) = u[v(x)]$	$f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$

Daneben gibt es noch spezielle Funktionen, die im ökonomischen Kontext immer wieder auftauchen:

Funktion	Ableitung
$f(x) = \sqrt{x} = x^{0,5}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = 0{,}5 \cdot x^{-0,5}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a \cdot e^x$	$f'(x) = f(x) = a \cdot e^x$

Bei einer Optimierung muss die erste Ableitung gleich null sein (Bedingung erster Ordnung). Ist die zweite Ableitung an diesem Punkt positiv, ist der Graph konvex und weist den Punkt als Minimum aus. Ist die zweite Ableitung an diesem Punkt negativ, ist der Graph konkav und weist den Punkt als Maximum aus:

Maximum: $f'(x) = 0, f''(x) < 0$
Minimum: $f'(x) = 0, f''(x) > 0$

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020
F. Bartholomae, M. Wiens, *Spieltheorie*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-28279-0

Da Auszahlungsfunktionen von mehr als einer Variablen abhängen, kann immer nur eine partielle Ableitung in Bezug auf die zu untersuchende Variable bestimmt werden. Partielle Ableitungen werden durch ∂ dargestellt. Hierbei spielen alle anderen Variablen keine Rolle, sodass diese Variablen bei den Ableitungsregeln einfach als Konstante angesehen werden und somit die Ableitungsregeln nur auf die zu berücksichtigende strategische Variable angewandt werden.

Glossar

Aktion Eine Aktion bezeichnet die kleinste Handlungseinheit in der Entscheidungstheorie. In der Spieltheorie besteht eine ***Strategie*** aus einem vollständigen Plan über alle Aktionen eines Spielers. *Siehe* Abschn. 1.1.

Arrow-Pratt-Maß Das Arrow-Pratt-Maß misst die ***Risikoeinstellung*** eines Entscheiders. *Siehe* Abschn. 1.3.

Auszahlung Die Auszahlungen beschreiben die Motivationen der Spieler und legen damit die Anreizstruktur des Spiels fest. Auszahlungen werden meistens in monetären Einheiten ausgedrückt, im Allgemeinen können Auszahlungen aber auch nicht-monetäre Größen umfassen (wie beispielsweise Freizeit oder das angenehme Gefühl von Genugtuung). *Siehe* Abschn. 2.2.

Bayes-Nash-Gleichgewicht Ein Bayes-Nash-Gleichgewicht stellt ein ***Nash-Gleichgewicht*** dar, in dem für eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Spielertypen keiner der Spieler bzw. Spielertypen einen Anreiz zum Abweichen hat. *Siehe* Abschn. 6.1.

Bayessche Formel Mithilfe der Bayesschen Formel (auch „Satz von Bayes“ genannt) lässt sich für zwei Ereignisse A und B die bedingte (Posteriori-)Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ berechnen, wenn die Priori-Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ sowie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ gegeben sind. Sofern also $P(B|A)$ bekannt ist, lässt sich so die Priori-Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zur Posteriori-Wahrscheinlichkeit „updaten“. *Siehe* Abschn. 6.1.

Diskontfaktor Ein Diskontfaktor beschreibt den Wert der Zukunft für einen Spieler bzw. die Geduld eines Spielers, in der Zukunft liegende ***Auszahlungen*** abzuwarten. *Siehe* Abschn. 5.1.

Diskontrate Die Diskontrate (oder auch der „Diskontsatz“) entspricht dem Zinssatz, also dem für Geld- und Kreditgeschäfte zugrunde gelegten Marktpreis. Die Diskontrate stellt aus ökonomischer Sicht die Opportunitätskosten für einen zeitlich begrenzten Ressourcenverzicht dar. Zwischen der Diskontrate i und dem ***Diskontfaktor*** δ besteht (unter der Annahme vollkommener Kapitalmärkte) der folgende theoretische, grundlegende Zusammenhang: $i = (1 - \delta)/\delta$. *Siehe* Abschn. 5.1.

Dominante Strategie Durch die Wahl einer dominanten ***Strategie*** kann sich ein Spieler nie verschlechtern und durch die Wahl einer strikt dominanten ***Strategie*** kann er sich stets verbessern, und zwar unabhängig von der ***Strategie***wahl seiner Gegenspieler. Ein

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

F. Bartholomae, M. Wiens, *Spieltheorie*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-28279-0

rationaler Spieler wird eine strikt dominante ***Strategie*** mit Sicherheit spielen. Verfügen alle Spieler über eine strikt dominante ***Strategie***, dann ergibt sich als Lösung des Spiels ein eindeutiges ***Nash-Gleichgewicht***. *Siehe* Abschn. 3.1.

Eigennutz Die Eigennutzannahme unterstellt, dass sich ein Akteur bei der Bewertung von Entscheidungsoptionen ausschließlich am eigenen Nutzen orientiert und somit den Nutzen anderer Individuen außer Acht lässt. Ein strikt eigennützig motivierter Akteur unterliegt somit keinerlei sozialer Motivation. Die Eigennutzannahme stellt neben der ***Rationalität***sannahme die zentrale Wesenseigenschaft des Homo Oeconomicus dar. *Siehe* Abschn. 2.2.

Einmalabweichungsprinzip Ein Strategieprofil s eines unendlich oft wiederholten Spiels erfüllt das Einmalabweichungs-Prinzip, wenn ein Spieler nach keiner Geschichte h^t des Spiels einen Anreiz hat, von s abzuweichen – unabhängig davon, ob sich die Spieler in der betrachteten Periode auf oder abseits des Gleichgewichtspfades befinden. *Siehe* Abschn. 5.3.

Entscheidung unter Risiko Bei einer Entscheidung unter Risiko ist zwar nicht bekannt, welcher Zustand vorliegt, es sind aber die Wahrscheinlichkeiten der Zustände $\rho(z_j)$ bekannt. *Siehe* Abschn. 1.3.

Externer Effekt Ein externer Effekt bezeichnet die Auswirkung der Handlung von Akteur i auf eine unbeteiligte Person(engruppe) j, die Akteur i bei seiner Entscheidung nicht berücksichtigt. *Siehe* Abschn. 3.4.

Extensive Form Unter der extensiven Form (auch Extensivform) wird die Darstellung eines Spiels als Spielbaum verstanden. *Siehe* Abschn. 2.3 *und* Kap. 4.

First-Mover Advantage Wenn der First-Mover die Möglichkeit hat, das Spielergebnis eines ***Sequenziellen Spiels*** dadurch zu seinen Gunsten zu beeinflussen, dass er als Erster zum Zug kommt, so spricht man von einem First-Mover Advantage. *Siehe* Abschn. 4.2.

Fokuspunkt Ein Fokuspunkt stellt eine Art Anhalts- oder Orientierungspunkt für die Spieler bei der Gleichgewichtsauswahl dar und kann somit die Überwindung eines ***Koordinationsproblems*** erleichtern. Ergibt er sich aus dem Spiel, etwa durch besonders attraktive *Auszahlung*skombinationen, die sich als Lösung anbieten, oder durch den Einsatz von ***Strategien*** als Kommunikationsmittel, dann spricht man von einem *endogenen* Fokuspunkt. Liegen hilfreiche Anhaltspunkte nur außerhalb des Spiels (Hintergrundinformationen, Normen etc.), dann spricht man von einem *exogenen* Fokuspunkt. *Siehe* Abschn. 3.4.

Gemischte Strategie Eine gemischte Strategie ordnet jeder reinen Strategie eine Wahrscheinlichkeit zu. *Siehe* Abschn. 3.3.

Imperfekte Information Ein Spieler, der über imperfekte Information verfügt, kann (mindestens) eine ***Strategie***wahl seines Gegenspielers nicht beobachten. Ist – im Gegensatz dazu – die ***Strategie***wahl des Gegenspielers für den betreffenden Spieler beobachtbar, so spricht man von perfekter Information. In einem ***Simultanspiel*** verfügen definitionsgemäß alle Spieler über imperfekte Information. *Siehe* Abschn. 2.3 *und* Kap. 4.

Indifferenzkurve Die Indifferenzkurve ist der geometrische Ort aller ***Auszahlung***skombinationen, die dem Individuum den gleichen Nutzen stiften. *Siehe* Abschn. 1.3.

Informationsasymmetrie Eine Informationsasymmetrie (oder auch Zustand asymmetrischer Information) liegt vor, wenn der Informationsstand der Spieler (etwa über ***Aktio-***

nen oder ***Auszahlungen***) unterschiedlich ist. Im Gegensatz dazu spricht man bei identischem Informationsstand der Spieler von symmetrischer Information. *Siehe* Abschn. 2.3; ***Imperfekte Information; Unvollständige Information***.

Interessenkonflikt Ein Interessenkonflikt liegt vor, wenn die von einem Spieler angestrebte günstige ***Auszahlung*** für den anderen Spieler ungünstig ist, sodass dieser einen anderen Spielausgang anstrebt (und umgekehrt). Ein sehr hoher Grad an Interessenkonflikt liegt in einem ***Konstantsummenspiel*** vor, bei dem der Zugewinn des einen Spielers exakt dem Verlust des anderen entspricht. *Siehe* Abschn. 2.2.

Kardinale Nutzenfunktion Bei einer kardinalen Nutzenfunktion (oder auch „kardinalen Präferenzen") sind quantitative Angaben zu Nutzenunterschieden ökonomisch interpretierbar. So sind Aussagen darüber möglich (und ökonomisch von Bedeutung), ob ein Entscheidungsträger in Situation X einen doppelt oder drei Mal so hohen Nutzen hat wie in einer Vergleichssituation Y. *Siehe* Abschn. 1.3.

Konstantsummenspiel Bei einem Konstantsummenspiel addieren sich die ***Auszahlungen*** der Spieler bei allen möglichen Stratgiekombinationen jeweils auf den gleichen Wert. *Siehe* Abschn. 2.2.

Koordinationsproblem In Spielen, in denen mehrere ***Nash-Gleichgewichte*** vorliegen, stehen die Spieler vor dem Problem der Gleichgewichtsauswahl, das heißt, sie müssen einen Weg finden, sich explizit oder implizit auf ein Gleichgewicht zu verständigen. Bei einem Koordinationsproblem besteht die Gefahr, dass die Abstimmung auf ein effizientes ***Nash-Gleichgewicht*** scheitert, entweder weil die in Frage kommenden Gleichgewichte für die Spieler unterschiedlich attraktiv sind (***Interessenkonflikt*** hinsichtlich der Gleichgewichte) oder aufgrund von Missverständnissen in der Kommunikation. Ein Beispiel für ein Spiel mit einem Koordinationsproblem ist das Spiel „Kampf der Geschlechter". *Siehe* Abschn. 3.4.

Kooperationsproblem Es liegt in Spielen ein Kooperationsproblem vor, wenn ein paretoeffizienter und für die Spieler akzeptabler Spielausgang (effiziente „Kompromisslösung") kein ***Nash-Gleichgewicht*** darstellt, die Spieler also einen Anreiz haben, von dieser Konstellation abzuweichen und schließlich in einem ineffizienten Nash-Gleichgewicht landen. Ein Beispiel für ein Spiel mit einem Kooperationsproblem ist das Gefangenendilemma. *Siehe* Abschn. 3.4.

Kooperative Spieltheorie In der kooperativen Spieltheorie unterliegen alle Überlegungen der Annahme, dass die Spieler bindende Absprachen treffen können. *Siehe* ***Nichtkooperative Spieltheorie***.

Lotterie Eine Lotterie wird durch jeden möglichen ***Zustand der Welt***, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten sowie durch die zugehörigen ***Auszahlung***en bestimmt. *Siehe* Abschn. 1.3.

Maximin-Strategie Bei einer Maximin-Strategie geht der Spieler davon aus, dass ihm der Gegenspieler den größtmöglichen Schaden zufügen möchte, weshalb er sich für die Strategie entscheidet, bei der das für ihn am wenigsten schlechte Ergebnis resultiert. Mit Ausnahme von ***Konstantsummenspielen*** ist die Anwendung dieser Strategie nicht plausibel, da sie eine extrem pessimistische Einstellung des Spielers unterstellt. *Siehe* Abschn. 1.4.

Nullsummenspiel Ein Nullsummenspiel ist ein spezielles ***Konstantsummenspiel***, bei dem sich die ***Auszahlungen*** der Spieler bei allen möglichen Stratgiekombinationen jeweils auf null addieren. *Siehe* Abschn. 2.2.

Ordinale Nutzenfunktion Bei einer ordinalen Nutzenfunktion (oder auch „ordinalen Präferenzen“) sind quantitative Angaben zu Nutzenunterschieden ökonomisch nicht interpretierbar, das heißt, die Präferenzordnung gibt nur Auskunft darüber, ob ein Güterbündel besser oder schlechter ist, aber nicht „um wie viel“ besser oder schlechter. Es kommt bei einer ordinalen Nutzenfunktion somit nur auf die Ordnung bzw. Reihung der Optionen (etwa Güterbündel oder ***Auszahlung***en) an. *Siehe* Abschn. 1.3.

Pareto-Optimalität Eine Situation ist pareto-optimal, wenn es nicht mehr möglich ist, einen Spieler besser zu stellen, ohne gleichzeitig einen anderen Spieler schlechter zu stellen. *Siehe* Abschn. 3.4.

Perfekte Information *Siehe* ***Imperfekte Information***.

Nichtkooperative Spieltheorie In der nichtkooperativen Spieltheorie unterliegen alle Überlegungen der Annahme, dass die Spieler keine bindenden Absprachen treffen können. *Siehe* ***Kooperative Spieltheorie***.

Nash-Gleichgewicht Ein Nash-Gleichgewicht beschreibt ein ***Strategie***profil wechselseitig bester Antworten. In einem Nash-Gleichgewicht hat kein Spieler einen Anreiz zum Abweichen. Ein Nash-Gleichgewicht ist effizient, wenn kein ***Externer Effekt*** vorliegt. *Siehe* Abschn. 2.4*,* 3.2 *und* *3.4*.

Rationalität Die Annahme (strikter) Rationalität gibt vor, dass jeder Spieler eine konsistente, zielgerichtete Entscheidung trifft und dabei keine systematischen Fehler macht. Die Rationalitätsannahme stellt neben der ***Eigennutz***annahme die zentrale Wesenseigenschaft des Homo Oeconomicus dar. *Siehe* Abschn. 2.3.

Rationalisierbare Strategien Rationalisierbare ***Strategien*** überleben die Prozedur der iterativen Elimination strikt dominierter ***Strategien***. Nur rationalisierbare Strategien werden von einem rationalen Spieler in Betracht gezogen. *Siehe* Abschn. 3.1.

Risikoeinstellung Unter Risikoeinstellung (oder auch „Risikopräferenz“) wird der Grad der Risikoneigung eines Individuums verstanden. Je nach Risikoeinstellung wird Risiko unterschiedlich bewertet: Bei einem risikoaversen Individuum führt höheres Risiko zu einer Nutzeneinbuße, bei einem risikoneutralen zu keiner Nutzenänderung und bei einem risikofreudigen zu einem Nutzenzuwachs. *Siehe* Abschn. 1.3.

Rückwärtsinduktion Ein ***Sequenzielles Spiel*** wird mittels Rückwärtsinduktion gelöst. Dabei beginnt man zuerst mit der Entscheidung des zweiten (letzten) Spielers und passt daran die Entscheidung des ersten (zuvor ziehenden) Spielers an. Mithilfe der Rückwärtsinduktion wird das ***Teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht*** ermittelt. *Siehe* Abschn. 4.1 *und* 4.2.

Second-Mover Advantage Wenn der Second-Mover die Möglichkeit hat, das Spielergebnis eines ***Sequenziellen Spiels*** dadurch zu seinen Gunsten zu beeinflussen, dass er als zweiter zum Zug kommt, so spricht man von einem Second-Mover Advantage. *Siehe* Abschn. 4.2.

Sequenzielles Spiel Bei einem sequenziellen (oder auch mehrstufigen) Spiel treffen die Spieler ihre ***Aktion***en nacheinander, wodurch der Spielzug des First-Movers für den Second-Mover beobachtbar wird. In Bezug auf die Beobachtbarkeit der Spielzüge sind sequenzielle Spiele somit stets Spiele mit ***Informationsasymmetrie***. *Siehe* Kap. 4.

Sicherheitsgerade Die Sicherheitsgerade repräsentiert alle ***Auszahlung***skombinationen, die sicher sind, das heißt, die in jedem *Zustand der Welt* die gleiche ***Auszahlung*** liefern. *Siehe* Abschn. 1.3.

Signalspiel Ein Signalspiel ist ein ***Sequenzielles Spiel*** mit ***Unvollständiger Information*** des Second-Movers, der (zumindest teilweise) in der Lage ist, aus der vorausgehenden *Aktion* seines Gegenspielers – dem „Signal" – Informationen über dessen Typ abzuleiten. *Siehe* Abschn. 6.3.

Simultanspiel Ein Simultanspiel ist ein Spiel mit symmetrischer und ***Imperfekter Information***, bei dem somit alle Spieler die Züge ihrer Gegenspieler nicht beobachten können. Die Bezeichnung „simultan" ist insofern etwas ungenau, da es bei einem Simultanspiel nicht auf die Gleichzeitigkeit, sondern auf die Beobachtbarkeit der Spielzüge ankommt. *Siehe* Kap. 3.

Soziale Motivation Ein Spieler mit sozialer Motivation bewertet nicht nur sein eigenes Spielergebnis, sondern achtet auch auf die Auszahlungen der anderen Spieler. *Siehe* Abschn. 2.2.

Stackelberg-Gleichgewicht Ein Stackelberg-Gleichgewicht (oder auch Stackelberg-Lösung) ist das ***Teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht*** eines ***Sequenziellen Spiels*** zwischen zwei Unternehmen, bei dem der Marktführer – der sogenannte Stackelberg-Führer – einen ***First-Mover Advantage*** hat. *Siehe* Abschn. 4.3.

Strategie Eine Strategie ist ein vollständiger Plan über alle ***Aktion****en*. Im einfachsten Fall kann eine Strategie aus nur einer einzigen ***Aktion*** bestehen. *Siehe* Abschn. 2.1.

Strategische Form Unter der strategischen Form (auch Normalform) wird die Darstellung eines Spiels als Matrix verstanden. *Siehe* Abschn. 2.1 *und* Kap. 3.

Superspiel Unter einem Superspiel versteht man ein unendlich wiederholtes Spiel mit stationärer Struktur, bei dem in jeder Periode das gleiche Basisspiel mit festen ***Auszahlungen*** gespielt wird. In einem unendlich oft wiederholten Spiel mit stationärer Struktur sieht die Zukunft des Spiels von jeder Periode aus gesehen gleich aus. *Siehe* Abschn. 5.1 *und* 5.3.

Teilspiel An einem Entscheidungsknoten X fängt ein (eigenständiges) Teilspiel an, wenn alle nachfolgenden Knoten mit dem Rest des Spiels nur über diesen Knoten X verbunden sind. *Siehe* Abschn. 4.2.

Teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht In einem teilspielperfekten ***Nash-Gleichgewicht*** besteht in keinem ***Teilspiel*** ein Anreiz zum Abweichen. Zur Ermittlung des teilspielperfekten Nash-Gleichgewichts wird das Konzept der ***Rückwärtsinduktion*** angewandt. *Siehe* Abschn. 4.2.

Trigger-Strategie Eine Trigger-Strategie beschreibt eine ***Strategie***, die einmal durch eine ***Aktion*** ausgelöst eine bestimmte Aktionsabfolge vorschreibt. Bei einer Grim-Trigger-Strategie besteht die ausgelöste Abfolge aus einer einzigen Strafaktion, die unendlich lange („auf ewig") gespielt wird. *Siehe* Abschn. 5.3.

Ungewissheit Ungewissheit liegt immer dann vor, wenn die Eintrittswahrscheinlichkeit der Zustände unbekannt ist. *Siehe* Abschn. 1.2.

Unvollständige Information Ein Spieler, der über unvollständige Information verfügt, kann den Typen seines Gegenspielers nicht identifizieren. Ist dem Spieler hingegen der Typ des Gegenspielers bekannt, so spricht man von vollständiger Information. Ein Spiel mit unvollständiger Information wird auch als Bayessches Spiel bezeichnet. *Siehe* Abschn. 2.3 *und* Kap. 6.

Verhandlungsspiel Unter einem Verhandlungsspiel versteht man in der Regel ein sequenzielles ***Konstantsummenspiel***, bei dem danach unterschieden werden muss, ob die Spieler bindende Absprachen treffen können oder nicht. Verhandlungsspiele, in denen keine bindenden Absprachen möglich bzw. vorgesehen sind, bezeichnet man als nicht-kooperative Verhandlungsspiele, ein Beispiel hierfür wäre das Rubinstein-Verhandlungsspiel. Das Teilgebiet der Spieltheorie, das sich mit Verhandlungen auf Basis bindender Absprachen befasst, ist die ***Kooperative Spieltheorie.****Siehe* Abschn. 7.1.11.

Vollständige Information *Siehe* ***Unvollständige Information***.

Zustand der Welt Als Zustand der Welt (oder auch „Kontingenz") werden die Realisierungen der einzelnen Ergebnisse bezeichnet. *Siehe* Abschn. 1.1.

Weiterführende Literatur

Kapitel 1

Bamberg G, Coenenberg AG (2008) Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 14. Aufl. München: Kapitel 5

Kapitel 2

Dixit A, Skeath S (2014) Games of strategy, 4. Aufl. W. W. Norton & Company, New York: Kapitel 1–3
Dutta PK (1999) Strategy and games, theory and practice. MIT Press, Cambridge

Kapitel 3

Dixit A, Skeath S (2014) Games of strategy, 4. Aufl. W. W. Norton & Company, New York: Kapitel 1–3
Holler MJ, Illing G (2006) Einführung in die Spieltheorie, 6. Aufl. Springer, Berlin
Morasch K, Bartholomae F, Wiens M (2010) Spieltheoretische Grundkonzepte. wisu 39(8–9): 1135–1140

Kapitel 4

Bester H (2012) Theorie der Industrieökonomik, 6. Aufl. Springer Gabler, Berlin: Kapitel 6.2.2
Dixit A, Skeath S (2014) Games of strategy, 4. Aufl. W. W. Norton & Company, New York: Kapitel 6 und 10
Kydland FE, Prescott EC (1972) Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans. J Polit Econ 4:103–124
Tirole J (1988) The theory of industrial organization. MIT-Press, Cambridge, MA: Kapitel 11.1 bis 11.3

Kapitel 5

Mailath GJ, Samuelson L (2006) Repeated games and reputations: long-run relationships. Oxford University Press, Oxford/New York