
Literaturverzeichnis

- Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., . . . Wieland, G. (2002). mathbu. ch 7. Zug, Bern: Klett, Schulverlag Bern.
- Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., . . . Wieland, G. (2014). mathbuch 1 - 3: Mathematik, Lehrmittel Sekundarstufe 1. Zug, Bern: Klett, Berner Lehrmittel- und Medienverlag.
- Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster* (Vol. 7). Heidelberg: Springer-Verlag.
- Baalmann, W., Frerichs, V., Weitzel, H., Gropengießer, H., & Kattmann, U. (2004). Schüler- vorstellungen zu Prozessen der Anpassung–Ergebnisse einer Interviewstudie im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 10(1), 7-28.
- Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine: de l'erreur en mathématiques*. Paris: Éditions du Seuil.
- Barzel, B. (2006). *Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion*. Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik» Didaktik der Mathematik, Duisburg - Essen.
- Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic *Approaches to algebra* (pp. 115-136). Netherlands: Springer.
- Berlin, T. (2010). *Algebra erwerben und besitzen. Eine binationale empirische Studie in der Jahrgangsstufe 5*. Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik» Didaktik der Mathematik, Duisburg - Essen.
- BLK, H. (1997). Expertise „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. *Verfasst für die Bund-Länder-Kommission-Projektgruppe „Innovationen im Bildungswesen“*. Bonn: BLK (<http://blk.mat.uni-bayreuth.de/blk/blk/material/ipn.html>).
- Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren. In G. f. D. d. Mathematik (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*. Dortmund: Universitätsbibliothek Dortmund.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In C. A. F. S. A.P. (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

- Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2011). Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster.
- Böttinger, C. (2006). Arithmetische Darstellungen-Punktmusterdarstellungen *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, 40. Tagung*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.
- Bruder, R., Hefendehl-Hebecker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Heidelberg, Berlin: Springer.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität—Verstehen durch Anwenden. In H.-H. L. Bruder Regina, Schmidt - Thieme Barbara, Weigand Hans Georg (Ed.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 19-49). Heidelberg, Berlin: Springer.
- Cohors-Fresenborg, E. (2001). Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition im Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht, 2001* (pp. 145-148.). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Devlin, K. (1998). *Muster der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- EDK, D.-. (2015). Der Schweizer Lehrplan 21. Retrieved from <http://konsultation.lehrplan.ch/downloads.php>
- Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 52*(33), 1-7.
- Gallin, P., & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule*. Seelze: Kallmeier.
- Gerstenmaier, J., & Mandl, H. (2000). *Konstruktivistische Ansätze in der Psychologie, Forschungsbericht Nr. 123*. Retrieved from München:
- Gerster, H. S. R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. Retrieved from Retrieved from <https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/index/docId/16> (24.11.2016):
- Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education, 116* - 140.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in mathematics education, 25*(2), 116-140. doi:Doi:10.2307/749505
- Gropengießer, H. (2003). *Lernen und Lehren: Thesen und Empfehlungen zu einem professionellen Verständnis*. Retrieved from
- Hahn, S., & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung—Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(3-4), 163-198.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2003). Didaktik der Mathematik als Wissenschaft: Aufgaben, Chancen, Profile. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 105*(1), 3.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2007). Algebraisches Denken was ist das? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern—Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 48*(11), 1-7.
- Hefendehl-Hebeker, L., & Rezat, S. (2015). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebecker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 117-148). Heidelberg, Berlin: Springer.
- Hefendehl-Hebeker, L., & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebecker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 77-115). Heidelberg, Berlin: Springer.

- Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.
- Hollenstein, A. (2012). *Qualitative Datenanalyse: Skript und Anleitungen, "Forschungsmethoden der Erziehungswissenschaft 2", Vorlesung und Übung-FS und HS 2012*: Universität Bern, Institut für Erziehungswissenschaft.
- Hollenstein, A., & Eggenberg, F. (1998). *Mosima-Grundlagen: Materialien für offene Situationen im Mathematikunterricht*. Wien: Haupt.
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for research in mathematics education*, 38(3), 258-288.
- Kaput, J. J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In G. A. B. P. (Ed.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
- Krämer, S. (1988). *Symbolische Maschinen: die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgenossenschaft.
- Lacampagne, C. B., Blair, W., & Kaput, J. (1993). *The algebra initiative colloquium*. Retrieved from
- Lacampagne, C. B., Blair, W. D., & Kaput, J. J. (1995). *The Algebra Initiative Colloquium: Papers Presented at a Conference on Reform in Algebra, December 9-12, 1993*: US Department of Education, Office of Educational Research and Improvement, National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment.
- Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S., & Pekrun, R. (2008). Modellieren lehren und lernen in der Realschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 370-373.
- Leuders, T., & Büchter, A. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln-Lernen fördern-Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Lincevski I, S. A. (1994). Between Arithmetik and Algebra: In the search of a missino link the case of equations and inequalities. *Seminario Mathematico*, 52 (3), 279 - 307.
- Linnemath. (2010). 008 Knack die Box 03 Deu (Video Youtube). from NWFH
- Malle, G., & Wittmann, E. C. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.
- Molina, M., Castro, E., & Ambrose, R. (2005). Enriching arithmetic learning by promoting relational thinking. *The international journal of Learning*, 12(5), 265.
- Moses, R. P., & Cobb Jr, C. (2001). Organizing algebra: The need to voice a demand. *Social Policy*, 31(4), 4-4.
- Müller, G. N., Steinbring, H., & Wittmann, E. C. (1997). Jahre "mathe 2000". *Bilanz und Perspektiven*, 10.
- Müller, G. N., & Wittmann, E. C. (2005). *Mathematiklernen in jahrgangsbezogenen und jahrgangsgemischten Klassen mit dem Zahlenbuch*. Leipzig: E. Klett Grundschulverl.
- Nydegger, A. (2011). Wer wohnt wo? *Heft mathematik lehren 169* (pp. 13 - 15). Heidelberg: Friedrichverlag.
- Nydegger, A. (2012). *Vom Text zum Term: erfassen von Unsicherheiten und Klärungsversuchen beim Übersetzen vom Text zum Term*. Universität Bern, Bern.
- Oldenburg, R. (2009). *Structure of algebraic competencies*. Paper presented at the Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon, France.

- Oldenburg, R. (2013). *Untersuchungen zur Kompetenzstruktur in der Algebra*. Paper presented at the Algebra, Koblenz.
- Oldenburg, R., & Henz, D. (2015). Neues zum Umkehrfehler in der elementaren Algebra. In L. H. Caluori Franco (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, 49. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09.02. bis 13.02. 2015 in Basel*. Münster: WTM.
- Prediger, S. (2003). Was bedeutet das eigentlich, wenn ich zwei Gleichungen addiere, um eine Variable weg zu kriegen? *PM-Praxis der Mathematik in der Schule* (Vol. 45, pp. 132-135). Hallbergmoos: Aulis - Verlag.
- Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen.“ Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica*, 28(2), 23-47.
- Prediger, S. (2008). ... nee, so darf man das Gleich doch nicht denken! In B. T. Barzel B., Bertalan D., Fischer A. (Ed.), *Algebraisches Denken: Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker*. Hildesheim, Berlin:: Franzbecker.
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. In S. S. Fritz Annemarie (Ed.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I.* (pp. 213-234). Weinheim: Beltz.
- Prediger, S. (2011). Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen *Der Mathematikunterricht*, 57 (3) (Vol. 57, pp. 5-14). Heidelberg, Berlin: Friedrich Verlag.
- Prediger, S., & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung—Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. *Formate Fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte—historische Analysen—theoretische Grundlegungen. Fachdidaktische Forschungen*, 2, 29-46.
- Reusser, K. (1995). *Vom Text zur Situation zur Gleichung: Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben*. Universität Bern, Bern.
- Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. In K. C. Bednarz N., Lee L. (Ed.), *Approaches to algebra* (pp. 55-62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ross, J. (2015). Fachdidaktische Rückmeldung zu ZP10 im Fach Mathematik from Landesinstitut für Schulen NRW
- Roth, G. (2004). Warum sind Lehren und Lernen so schwierig? *Zeitschrift für Pädagogik*, 50(4), 496-506.
- Roth, J. (2015). Lehr-Lern-Labor Mathematik—Lernumgebungen (weiter-) entwickeln, Schülerverständnis diagnostizieren. In L. H. Caluori F. (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, 49. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09.02. bis 13.02. 2015 in Basel*. Münster: Waxmann.
- Ruf, U., & Gallin, P. (1999). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Seelze: Kallmeyer.
- Schill, A. (2014). Wege zu einem tragfähigen Variablenverständnis. In R. J. Ames J. (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM.
- Schneeberger, M. (2009). *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog*. Münster: Waxmann Verlag.
- Schörfling. (2009). Merkstoff Mathematik. Retrieved 02.10.2015, from <http://www.youblisher.com/p/1277622-Merkstoff-M1-01-08/>
- Schütte, S. (1994). *Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen*. Stuttgart: Klett.

- Schwank, I. (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. *ZDM*, 35(3), 70-78.
- Schwank, I., & Nowinska, E. (2007). Zur Vorbereitung algebraischen Denkens. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*.
- Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe: grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr*: Dt. Univ.-Verlag.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra *Learning mathematics* (pp. 87-124): Springer.
- Siebel, F. (2005). *Elementare Algebra und ihre Fachsprache: eine allgemein-mathematische Untersuchung*. Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft-HRW.
- Specht, B. J. (2007). 36 kleine lila z. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*.
- Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process? *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 223-241.
- Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). *Does the understanding of variable evolve through schooling?* Paper presented at the PME CONFERENCE, Haifa, Israel.
- Ulrich Kattmann, H. G., & Michael, K. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion—Ein Rahmen für naturwis-senschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*(3), 3-18.
- van Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Retrieved from Utrecht, NL:
- Vollrath, H.-J., & Weigand, H.-G. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. Mannheim: BI-Wiss.-Verlag
- Wagenschein, M. (1965). *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken: Pädagogische Schriften*. Stuttgart: E. Klett.
- Wagenschein, M. (1966). Zum Problem des genetischen Lehrens. *Zeitschrift für Pädagogik*, 12(4), 305-330.
- Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica*, 5(4), 185-211.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61(1), 37-46.
- Wittmann, E. C. (1990). Wider die Flut der 'bunten Hunde' und der 'grauen Päckchen' *Erich Ch. Wittmann & Gerhard N. Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen* (Vol. 1, pp. 152-166). Stuttgart: Klett.
- Wittmann, E. C. (2013). Strukturgenetische didaktische Analysen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*.
- Wittmann, E. C. (2014). Von allen guten Geistern verlassen. *Gesellschaft für Bildung und Wissen e.V.*
- Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Stuttgart: Klett.
- Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*, 42-65.

- Zeller, M., & Barzel, B. (2011). Der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht. In H. L. Haug R. (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster: WTM.
- Zwetschler, L. (2014). *Gleichwertigkeit von Termen-Konstruktion und Erforschung eines Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse*. Dissertation in Vorbereitung. TU Dortmund.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Algebraisierungsprozess fokussiert auf die beiden Sichtweisen . . .	4
Abbildung 2: Übersicht Theorieteil	7
Abbildung 3: Abstraktionsschritte hin zur algebraischen Sprache	10
Abbildung 4: Spielende mit Plättchen repräsentieren, Zahlenbuch Seite 50 . .	11
Abbildung 5: Begriffspaare zu relational – operational nach Schneider (2006) .	28
Abbildung 6: Adjektive zu Denk- oder Sichtweisen	29
Abbildung 7: Lösungsprozesse im Wechsel der beiden Denkweisen	33
Abbildung 8: Experiment Luchins aus Hollenstein (A Hollenstein & Eggenberg, 1998, p. 25)	37
Abbildung 9: Das Stufenmodell von Berlin (Berlin, 2010, p. 200)	40
Abbildung 10: Das vereinfachte Modell des Modellierungskreislaufs nach Blum (2007)	42
Abbildung 11: erweitertes Mathematisierungsmodell	46
Abbildung 12: Summanden addieren, Bildquelle Schörfling 2009	57
Abbildung 13: Mathbu.ch 7, Lernumgebung 10, Aufgabe 1 (Affolter et al., 2002).	58
Abbildung 14: Deutung der Variable falsch interpretiert	59
Abbildung 15: Funktionen der Variablen, eine Zusammenstellung gestützt auf Siebel (2005)	60
Abbildung 16: Die beiden Aufgabentypen verbunden und unverbunden.	67
Abbildung 17: Übersicht zu den verschiedenen Funktionen des Gleichheitszeichens.	70
Abbildung 18: Beispiel eines Waagemodells	74
Abbildung 19: mathbu.ch 7 Lernumgebung 10, Arbeitsheft (Affolter et al., 2002).	75
Abbildung 20: Vorgehen, Arbeitsschritte	80
Abbildung 21: Beteiligte Schülergruppen.	82

Abbildung 22: Moderation A, Aufgabe P1	88
Abbildung 23: Moderation A Aufgabe 2. Teil	89
Abbildung 24: Zeitliche Abfolge der Videoaufnahmen	90
Abbildung 25: Ausschnitt aus der Tabelle Kategoriensystem	93
Abbildung 26: Kategorien Unsicherheiten	94
Abbildung 27: Kategorien Strategien	95
Abbildung 28: Kategorien und Bereiche operational und relational	98
Abbildung 29: Modell Algebraisierungsprozess fokussiert auf die beiden Sichtweisen	99
Abbildung 30: Bezugsgrösse willkürlich gewählt _K19	109
Abbildung 31: Umgang mit Schlüsselwörtern _7K1	112
Abbildung 32 Vom Kürzel zur Variable _K19	120
Abbildung 33: Buchstaben umdeuten _K16	121
Abbildung 34: Klärung mithilfe von Hausdarstellung und Tabelle, (K19).	125
Abbildung 35: Pfeile zur Klärung der Relation _KL9	126
Abbildung 36: Substitution _K19_ (1. Teil).	127
Abbildung 37: Substitution 2_ K19 (2. Teil)	127
Abbildung 38: Rechenvorschrift statt Term, _K16	130
Abbildung 39: Bezugsgrösse mit Variable _K19	136
Abbildung 40: Strategie Relationen mit Zahlen überprüfen K19	137
Abbildung 41: Terme addieren (K19)	146
Abbildung 42: Terme addieren 3, K17.	147
Abbildung 43: Strategie Terme addieren 1, K16	148
Abbildung 44: Terme addieren K17	149
Abbildung 45: Gleichung als Strategie K19	152
Abbildung 46: Gleichung als Strategie _K19	153
Abbildung 47: Übersicht der hauptsächlichen Denkhandlungen im Algebraisierungsprozess	156
Abbildung 48: Erweitertes Mathematisierungsmodell ergänzt mit Erkenntnissen der Studie	159
Abbildung 49: Sichtweisen in mathematischem und Realmodell	161
Abbildung 50: Möglicher Lösungsverlauf beim Algebraisieren von Sachsituationen	161
Abbildung 51: Aufbau des Modells: Lösungsschritte	164
Abbildung 52: Modell Algebraisierungsprozess fokussiert auf die beiden Sichtweisen	167
Abbildung 53: Zahlenbeispiele operational K19.	172
Abbildung 54: Kommunikation Terme addieren KL9	174
Abbildung 55: mathbuch 2, Lernumgebung 10, verpackte Zahlen, Aufgabe 8 .	183

Abbildung 56: mathbuch 2, Lernumgebung ‘Verpackte Zahlen’, Aufgabe 8. .	184
Abbildung 57: mathbuch 2, Lernumgebung ‘Verpackte Zahlen’, Aufgabe 10. .	184
Abbildung 58: Verknüpfung Modell und Praxisbeispiel	185
Abbildung 59: Spannungsfeld der drei Aufgabentypen	190