Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben

I Lineare Algebra

Abschnitt 1

1) a) $\mathbf{s_1} = \begin{pmatrix} -26 \\ -17 \\ 19 \\ -21 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{s_2} = \begin{pmatrix} 23 \\ 10 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{s_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 43 \\ 9 \end{pmatrix}$ d) $\mathbf{s_4} = \begin{pmatrix} -68 \\ 16 \\ 56 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) a) $2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 66$ b) $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + 2\mathbf{d}) = 161$

c) $(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (2\mathbf{c} + 3\mathbf{d}) = 461$

3) $|\mathbf{a}| = \sqrt{15}$; $|\mathbf{b}| = 5\sqrt{2}$; $|\mathbf{c}| = \sqrt{55}$; $|\mathbf{d}| = \sqrt{78}$; $|\mathbf{e}| = \sqrt{56}$

Abschnitt 2

1) $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

2) Symmetrisch: **B**, **C**, **E**. Schiefsymmetrisch: **A**, **D**.

3) Wir zerlegen die quadratische Matrix **A** wie folgt:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}) + \frac{1}{2}\underbrace{(\mathbf{A}^{\mathbf{T}} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}})}_{\mathbf{O}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}})}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}})}_{\mathbf{C}} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

B ist *symmetrisch*, **C** dagegen *schiefsymmetrisch:*

$$\mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}} + \mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}) = \mathbf{B} \quad \Rightarrow$$

B ist wegen $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ symmetrisch.

$$\mathbf{C}^{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}} - \mathbf{A}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}) = -\mathbf{C} \quad \Rightarrow$$

C ist wegen $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ schiefsymmetrisch.

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*, DOI 10.1007/978-3-658-07790-7

4) a) $\begin{pmatrix} 3+1+5 & 2+8+0 & 5-2+10 \\ -1+3+0 & 2+0-2 & 3+1+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -43 & -10 & -81 \\ -9 & 26 & -73 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -35 & -15 \\ -26 & 22 \\ -57 & -59 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -3 & 18 & -15 \\ 26 & -32 & 12 \end{pmatrix}$

5) a) $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 0 \\ -3 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -9 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

d) Der Ausdruck $\mathbf{A} - 2\,\mathbf{C} + \mathbf{B}$ ist *nicht definiert*: $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ sind (2,3)-Matrizen, $\mathbf{B}$ dagegen eine (3,2)-Matrix (die Addition ist nur für Matrizen vom gleichen Typ definiert).

6) a)

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
\cline{5-7}
 & & & & 3 & 4 & 2 \\
 & & & \mathbf{A} & 1 & 5 & 3 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 \\
\cline{2-7}
 & 3 & 4 & 2 & 13 & 34 & 18 \\
\mathbf{A} & 1 & 5 & 3 & 8 & 32 & 17 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\
\cline{2-7}
\multicolumn{4}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2}
\end{array}$$

Analog:

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} -21 & 10 & 12 \\ -4 & -9 & -6 \\ -16 & -20 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -13 & 19 & 15 \\ -21 & 10 & 12 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 32 & 17 \\ -5 & -3 & -1 \\ -12 & -13 & -8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

b) Die Matrizenprodukte („Potenzen") $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ und $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^2$ existieren *nicht*, da $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ *nichtquadratische* Matrizen sind.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

7) a) Erst $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, dann $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ bilden (doppeltes Falk-Schema).

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c}
\cline{5-10}
 & & & & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & \\
 & & & \mathbf{B} & 0 & 2 & 1 & 2 & 5 & 1 & \mathbf{C} \\
 & & & & -1 & 5 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\
\cline{2-10}
\mathbf{A} & 2 & 4 & 1 & 5 & 15 & 7 & 13 & 82 & 37 & \\
 & 1 & 3 & 5 & -2 & 32 & 9 & 59 & 169 & 35 & \\
\cline{2-10}
\multicolumn{4}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}} & \multicolumn{3}{c}{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}} &
\end{array}$$

b) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 11 \\ 3 & 11 & 3 \\ 11 & 26 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 13 & 82 & 37 \\ 59 & 169 & 35 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ bilden, dann transponieren und schließlich $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})^{\mathbf{T}}$ bilden.

$$\begin{array}{cc|ccc|ccc|}
\cline{6-8}
 & & & (\mathbf{B}+\mathbf{C})^{\mathbf{T}} & & 1 & 2 & -2 \\
 & & & & & 1 & 7 & 6 \\
 & & & & & 4 & 2 & 2 \\
\cline{3-8}
\mathbf{A} & & 2 & 4 & 1 & 10 & 34 & 22 \\
 & & 1 & 3 & 5 & 24 & 33 & 26 \\
\cline{3-8}
\multicolumn{8}{r}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}+\mathbf{C})^{\mathbf{T}}}
\end{array}$$

d) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 32 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$; e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ist *nicht* definiert (Zeilenzahl von $\mathbf{A} <$ Spaltenzahl von $\mathbf{B}$). Daher existiert auch $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^{\mathbf{T}}$ nicht.

Abschnitt 3

1) $\det \mathbf{A} = -10 - 12 = -22$; $\det \mathbf{B} = ab - ab = 0$; $\det \mathbf{C} = 6x - 11x = -5x$

2) $\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}}_{D_1} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix}$ $\quad D_1 = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$

$D_2 = 0 + 224 + 6 - 0 + 42 - 8 = 264$

$D_3 = 96 + 0 + 140 - 0 - 6 + 224 = 454$

3) a) $(1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1{,}562; \quad \lambda_2 = -2{,}562$

b) $(1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 3$ (Diagonalmatrix)

4) a) $\det \mathbf{A}$ enthält zwei *proportionale* Spalten (die 2. Spalte ist das -2-fache der 1. Spalte).

b) $\det \mathbf{B}$ enthält einen *Nullvektor* (2. Spalte).

c) $\det \mathbf{C}$ enthält zwei *gleiche* Zeilen (1. und 3. Zeile).

d) $\det \mathbf{D}$ enthält zwei *proportionale* Zeilen (die 1. Zeile ist das -3-fache der 3. Zeile).

5) a) $\det \mathbf{A} = -5(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{128} + 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{8} = 5 \cdot 128 + 3 \cdot 8 = 664$

b) $\det \mathbf{A} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \\ 9 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{-316} + 4(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}}_{-245} = -316 - 4 \cdot (-245) = 664$

6) a) Entwicklung nach der *4. Zeile* (diese enthält 2 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}_{28} + 2(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{-43} = 2 \cdot 28 - 2 \cdot (-43) = 142$$

b) Entwicklung nach der *2. Spalte* (diese enthält 2 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}_{-27} + 1(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}_{9} = 2 \cdot (-27) - 9 = -63$$

7) a) $\mathbf{A}$ ist eine (untere) *Dreiecksmatrix*: $\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-2) \cdot 5 = -10$

b) $\mathbf{B}$ ist eine *Diagonalmatrix*: $\det \mathbf{B} = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$

8) a) Zur 1. Zeile wird das -2-fache der 2. Zeile addiert. Die neue Determinante enthält dann zwei *gleiche* Zeilen (1. und 3. Zeile, jeweils grau unterlegt) und verschwindet daher:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) Zur 4. Spalte addieren wir das 2-fache der 1. Spalte und erhalten eine Determinante mit zwei *proportionalen* Spalten (3. und 4. Spalte, jeweils grau unterlegt; die 4. Spalte ist das 3-fache der 3. Spalte), die daher verschwindet:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

9) a) $\det \mathbf{C} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) = (-20) \cdot (-5) = 100$

b) $\det \mathbf{C} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) = 68 \cdot 83 = 5644$

10) Durch Entwicklung nach der *1. Zeile* erhält man:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -2 & 5 \\ 10 & 20 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 20 & 50 \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 50 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} \vec{e}_z =$$

$$= -200\,\vec{e}_x - 0\,\vec{e}_y + 40\,\vec{e}_z = -200\,\vec{e}_x + 40\,\vec{e}_z$$

(alle Komponenten in der Einheit Nm)

11) Es ist: $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 15 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a},\ \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind *komplanar.*

12) a) Wir addieren der Reihe nach zur 2., 3. und 4. Spalte das -3-fache, 1-fache bzw. 6-fache der 1. Spalte und entwickeln anschließend nach der 1. Zeile (diese enthält 3 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 7 & 23 \\ -2 & 4 & 1 & -9 \\ -2 & 3 & -1 & -8 \end{vmatrix} = -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -8 & 7 & 23 \\ 4 & 1 & -9 \\ 3 & -1 & -8 \end{vmatrix}}_{10} = -10$$

b) Wir addieren zunächst zur 2. Spalte das -4-fache und zur 5. Spalte das -1-fache der 1. Spalte und entwickeln dann nach der 1. Zeile (diese enthält 4 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 & -3 & -5 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 & -5 \\ -8 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Jetzt addieren wir in der verbliebenen 4-reihigen Determinante zur 1. Spalte das -4-fache der 4. Spalte und entwickeln dann nach der 3. Zeile (diese enthält 3 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 \\ 17 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -19 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2\,(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 17 & -2 & -3 \\ -19 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{-48} = -96$$

Abschnitt 4

1) $\det \mathbf{A} = 4 + 0 + 0 + 2 - 15 + 0 = -9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ist *regulär.*

$\det \mathbf{B} = 36 - 8 + 0 - 24 - 4 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}$ ist *singulär.*

$\det \mathbf{C}$ nach der 2. Spalte entwickeln (diese enthält 3 Nullen), die verbliebene 3-reihige Determinante dann nach *Sarrus* berechnen:

$$\det \mathbf{C} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 6 - 4 - 4 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} \text{ ist } \textit{singulär.}$$

2) a) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \neq 0$

$\mathbf{A}$ ist also *regulär*. Algebraische Komplemente A_{ik} berechnen und daraus die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ bestimmen:

$A_{11} = \sin\varphi\,; \quad A_{12} = \cos\varphi\,; \quad A_{21} = -\cos\varphi\,; \quad A_{22} = \sin\varphi$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

b) $\det \mathbf{A} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ist *regulär*. Inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 \\ -0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

c) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(1)(-1) = 1 \neq 0$ (Dreiecksmatrix)

Somit ist $\mathbf{A}$ *regulär*. Berechnung der algebraischen Komplemente (Adjunkten) A_{ik} und der *inversen* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\,; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\,; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\,;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\,; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\,; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) $\det \mathbf{A} = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ist *regulär*. Inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & 6 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

3) $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Somit: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ist *orthogonal*; $\det \mathbf{A} = 1$; $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Somit: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}$ ist *orthogonal*; $\det \mathbf{B} = -1$; $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}$

4) Die Matrix $\mathbf{A}$ kann *nicht* orthogonal sein, da ihre Zeilen- und Spaltenvektoren *nicht* normiert sind (Vektorlängen $\neq 1$). $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ sind dagegen *orthogonale* Matrizen:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

5) $\det \mathbf{A} = 1$; Algebraische Komplemente: $A_{11} = A_{12} = -A_{21} = A_{22} = 1/\sqrt{2}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

6) Für beide Matrizen gilt: Die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren sind jeweils *orthonormiert*, die Matrizen daher *orthogonal*: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \mathbf{E}$.

7) Die Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

sind *normiert* und *orthogonal*:

$$|\mathbf{a}_1| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = 1; \qquad |\mathbf{a}_2| = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 5^2} = 1;$$

$$|\mathbf{a}_3| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{150}} (-2 + 2 + 0) = 0$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} (-2 + 2 + 0) = 0$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{180}} (1 + 4 - 5) = 0$$

Ebenso zeigt man, dass die *Zeilenvektoren* ein orthonormiertes System bilden.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \quad \det \mathbf{A} = -1$$

8) $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \mathbf{2}$. *Begründung:* Wegen $\det \mathbf{A} = 0$ ist $\mathbf{A}$ *singulär* und somit $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < 3$. Es gibt aber eine von null verschiedene *2-reihige* Unterdeterminante, z. B. (gestrichen: 1. Zeile und 1. Spalte)

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = \mathbf{3}$. *Begründung:* $\mathbf{B}$ ist vom Typ (3,4), daher kann $\operatorname{Rg}(\mathbf{A})$ *höchstens gleich* 3 sein. Streicht man in $\mathbf{B}$ die 4. Spalte, so erhält man eine von null verschiedene *3-reihige* Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 14 + 2 - 7 - 8 + 6 = -5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = 3$$

Rg $(\mathbf{C}) = \mathbf{2}$. *Begründung:* $\mathbf{C}$ ist vom Typ (4,3). Daher gilt Rg $(\mathbf{C}) \le 3$. Es verschwinden *alle* 3-reihigen Unterdeterminanten, eine von null verschiedene *2-reihige* Unterdeterminante ist jedoch vorhanden (wir streichen die 3. und 4. Zeile und die 3. Spalte):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rg}\,(\mathbf{C}) = 2$$

Rg $(\mathbf{D}) = \mathbf{2}$. *Begründung:* $\mathbf{D}$ ist vom Typ (2,3), daher gilt Rg $(\mathbf{D}) \le 2$. Es gibt aber eine von null verschiedene *2-reihige* Unterdeterminante (wir streichen die 3. Spalte):

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rg}\,(\mathbf{D}) = 2$$

9) Die Matrix wird mit Hilfe der angegebenen Umformungen auf *Trapezform* gebracht.

a) ① Zeile 1 mit Zeile 3 vertauschen.
② Zur 2. Zeile das -3-fache und zur 3. Zeile das -2-fache der 1. Zeile addieren.
③ Zur 3. Zeile das $-2{,}5$-fache der 2. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3{,}5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Rg}\,(\mathbf{A}) = 3 \quad \text{(keine Nullzeile)}$$

b) ① Zur 2. Zeile das -2-fache und zur 3. Zeile das -3-fache der 1. Zeile addieren.
② Zeile 2 durch 3 und Zeile 4 durch 5 dividieren.
③ Zur 3. Zeile das -2-fache und zur 4. Zeile das -1-fache der 2. Zeile addieren.
④ Spalte 3 mit Spalte 4 vertauschen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Rg}\,(\mathbf{B}) = 3 \quad \text{(1 Nullzeile)}$$

c) ① Zur 3. Zeile das 2-fache der 1. Zeile addieren.
② Zur 3. Zeile das -3-fache der 2. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Rg}\,(\mathbf{C}) = 3 \quad \text{(keine Nullzeile)}$$

d) ① Der Reihe nach zur 2., 3. und 4. Zeile das 2-fache, 5-fache bzw. 1-fache der 1. Zeile addieren.
② Von der 3. Zeile das 3-fache und von der 4. Zeile das 1-fache der 2. Zeile subtrahieren.
③ Zeile 3 durch -3 dividieren und dann zur 4. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Rg}\,(\mathbf{D}) = 3 \quad \text{(1 Nullzeile)}$$

10) ① 1. und 4. Zeile miteinander vertauschen.

② Der Reihe nach zur 2., 3., 4. und 5. Zeile das 5-fache, 3-fache, 2-fache bzw. 3-fache der 1. Zeile addieren.

③ Von der 5. Zeile zunächst die 3. Zeile und anschließend von der 3. Zeile die 2. Zeile subtrahieren.

④ Die 5. Zeile durch 3 dividieren und anschließend mit der 2. Zeile vertauschen.

⑤ Zur 4. Zeile das 7-fache und zur 5. Zeile das 16-fache der 2. Zeile addieren.

⑥ Zur 4. Zeile das 1-fache und zur 5. Zeile das 3-fache der 3. Zeile addieren.

⑦ Von der 5. Zeile die 4. Zeile subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 5 \quad \text{(keine Nullzeile)}$$

A ist somit eine *reguläre* Matrix.

Abschnitt 5

1) Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ wird mit Hilfe der angegebenen Zeilenumformungen in die *Trapezform* gebracht. Das lineare Gleichungssystem liegt dann in der *gestaffelten* Form vor und wird schrittweise von unten nach oben gelöst (Nullzeilen grau unterlegt).

a) ① Reihenfolge der Zeilen wie folgt vertauschen: $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

② Zur 2. Zeile das -2-fache und zur 3. Zeile das 5-fache der 1. Zeile addieren.

③ Die 2. Zeile durch 7 und die 3. Zeile durch 24 dividieren.

④ Zur 3. Zeile die 2. Zeile addieren.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 16 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= 16 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Lösung:} \\ &x_1 = 1; \quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

b) ① Zur 2. Zeile das 3-fache und zur 3. Zeile das -8-fache der 1. Zeile addieren.

② Zur 3. Zeile das 2-fache der 2. Zeile addieren.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 8 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 1 \\ 5x_2 + 6x_3 + x_4 &= 8 \\ -6x_3 + 4x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen ($x_4 = \lambda$ wurde als Parameter gewählt):

$$x_1 = \frac{7}{15} - \frac{1}{3}\lambda; \quad x_2 = \frac{16}{5} - \lambda; \quad x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda; \quad x_4 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

c) ① Die mit -1 multiplizierte 2. Zeile mit der 1. Zeile vertauschen.

② Zur 3. Zeile das 2-fache und zur 4. Zeile das 3-fache der 1. Zeile addieren.

③ Von der 3. Zeile das 2-fache und von der 4. Zeile das 4-fache der 2. Zeile subtrahieren.

④ Von der 2. Zeile das 3-fache und von der 4. Zeile das 1-fache der 3. Zeile subtrahieren.
⑤ Zeile 2 mit Zeile 3 vertauschen.
⑥ Zur 3. Zeile das 4-fache der 4. Zeile addieren.
⑦ Zur 4. Zeile das 10-fache der 3. Zeile addieren, dann die 4. Zeile durch -91 dividieren.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 12 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 12x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ & & & - & x_3 & - & 9x_4 & = & 8 \\ & & & & & & x_4 & = & -1 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -1$

2) Durch die folgenden *Zeilenumformungen* lässt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ in die *Trapezform* bringen:

① Der Reihe nach zur 2., 3. und 4. Zeile das 2-fache, -5-fache bzw. -2-fache der 1. Zeile addieren.
② Zur 3. Zeile das 3-fache und zur 4. Zeile das -2-fache der 2. Zeile addieren.
③ Von der 4. Zeile die durch 4 dividierte 3. Zeile subtrahieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 3 \quad \text{(1 Nullzeile)} \\ \text{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = 4 \quad \text{(keine Nullzeile)} \\ \text{Somit } \text{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A}). \text{ Das System ist } \textit{nicht} \text{ lösbar.} \end{cases}$$

3) Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ bringen wir durch folgende *Zeilenumformungen* in die *Trapezform*:

① Der Reihe nach zur 2., 3. und 4. Zeile das 2-fache, -1-fache bzw. -3-fache der 1. Zeile addieren.
② Zur 2. und 4. Zeile jeweils das 3-fache der 3. Zeile addieren.
③ Zur 4. Zeile das 8-fache der 2. Zeile addieren, dann die Zeilen 2 und 3 miteinander vertauschen.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 3 \quad \text{(1 Nullzeile)} \\ r = n = 3; \quad \text{Das homogene System ist } \textit{nur trivial} \text{ lösbar.} \end{array}\right\}$$

4) Das homogene Gleichungssystem ist *nichttrivial* lösbar, wenn $r < n = 3$ ist. Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ bringen wir mit Hilfe der folgenden Zeilenumformungen in die *Trapezform*:

① Von der 3. und 4. Zeile jeweils das 3-fache der 1. Zeile subtrahieren.
② Von der 3. Zeile das 1-fache und von der 4. Zeile das 2-fache der 2. Zeile subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 2 \quad \text{(2 Nullzeilen)} \\ r = 2; \quad n = 3 \quad \text{d. h.} \quad r < n \\ \text{Das homogene System ist somit } \textit{nichttrivial} \text{ lösbar.} \end{array}\right\}$$

Das *gestaffelte* Gleichungssystem lautet (mit den vom Parameter λ abhängigen Lösungen):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = -3\lambda; \quad x_2 = \lambda; \quad x_3 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

5) Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ wird durch die folgenden Zeilenumformungen in die *Trapezform* gebracht:

① Zeile 1 mit Zeile 2 vertauschen.

② Zur 2. Zeile das 2-fache und zur 3. Zeile das -1-fache der 1. Zeile addieren.

③ Zur 3. Zeile die 2. Zeile addieren, dann die 2. Zeile durch -3 dividieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 2 \quad \text{(1 Nullzeile)} \\ r = 2, \quad n = 3 \quad \text{d. h.} \quad r < n \\ \text{Das homogene System ist daher } \textit{nichttrivial} \text{ lösbar.} \end{cases}$$

Das *gestaffelte* System lautet (mit den vom Parameter λ abhängigen Lösungen):

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad x_1 = \lambda; \quad x_2 = \lambda; \quad x_3 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

6) Die Koeffizientendeterminante $\det \mathbf{A}$ muss jeweils *verschwinden*:

a) $\det \mathbf{A} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1$

b) Die Koeffizientendeterminante wird zweimal nacheinander nach der jeweils *1. Zeile* entwickelt:

$$\det \mathbf{A} = (2 + \lambda)(2 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 + \lambda)(2 - \lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$\lambda_{1/2} = \pm 2$

7) Wir bringen zunächst die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ durch die angeführten *Umformungen* in die *Trapezform.*

a) ① Von der 2. Zeile die 1. Zeile subtrahieren.

② Zur 3. Zeile das 2-fache der 2. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 3 \\ r = n = 3 \\ \text{Das homogene System ist nur } \textit{trivial} \text{ lösbar.} \end{cases}$$

b) ① Zeile 1 mit Zeile 2 vertauschen.

② Zur 2. Zeile das 2-fache und zur 4. Zeile das -4-fache der 1. Zeile addieren.

③ Zur 2. Zeile die 4. Zeile addieren, dann durch -2 dividieren.

④ Zur 3. Zeile das -2-fache und zur 4. Zeile das 7-fache der 2. Zeile addieren.

⑤ Zur 4. Zeile das 2-fache der 3. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 4 \\ r = n = 4 \\ \text{Das homogene System ist nur } \textit{trivial} \text{ lösbar.} \end{cases}$$

Lösung: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (triviale Lösung)

8) Wir führen in der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ die folgenden Umformungen durch:

① Zur 2. Zeile das 2-fache und zur 3. Zeile das 1-fache der 1. Zeile addieren.

② Von der 3. Zeile die 2. Zeile subtrahieren.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2 \quad (1 \text{ Nullzeile}); \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = 3$$

Das Gleichungssystem ist wegen $\operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) \neq \operatorname{Rg}(\mathbf{A})$ *unlösbar.*

9) Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird jeweils auf *Trapezform* gebracht.

a) ① Von der 3. Zeile das 2-fache der 1. Zeile subtrahieren.

② Von der 3. Zeile zunächst das 5-fache der 2. Zeile subtrahieren, dann die 3. Zeile durch 22 dividieren.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= 8 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = 3 \quad \Rightarrow$ Das System besitzt *genau eine* Lösung: $x_1 = -11$; $x_2 = 8$; $x_3 = 0$.

b) ① Zeile 1 mit Zeile 2 vertauschen.

② Zur 2. Zeile das 2-fache und zur 3. Zeile das 4-fache der 1. Zeile addieren.

③ Reihenfolge der Zeilen wie folgt vertauschen: $4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ (Zeile 1 bleibt)

④ Von der 3. Zeile das 21-fache und von der 4. Zeile das 34-fache der 2. Zeile subtrahieren.

⑤ Von der 4. Zeile das 3-fache der 3. Zeile subtrahieren, dann die 3. Zeile durch -2 und die 4. Zeile durch -98 dividieren.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -38 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= -13 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 &= -1 \\ 3x_3 - 38x_4 &= 3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = 4 \quad \Rightarrow$ Das System besitzt *genau eine* Lösung: $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$

c) ① Von der 2. und 3. Zeile jeweils die 1. Zeile subtrahieren und von der 4. Zeile das 4-fache der 1. Zeile subtrahieren.

② Die 2. Zeile zunächst durch 2 dividieren, dann diese Zeile von der 3. und 4. Zeile subtrahieren.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = 2$ (je 2 Nullzeilen) $\Rightarrow$ Das System ist *lösbar*, die Lösungsmenge enthält $n - r = 4 - 2 = 2$ Parameter (wir wählen x_3 und x_4 als Parameter und setzen $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$):

$$x_1 = -2\lambda + 5\mu; \quad x_2 = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{2}; \quad x_3 = \lambda; \quad x_4 = \mu \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

d) ① Der Reihe nach zur 3., 4. und 5. Zeile das 4-fache, – 2-fache bzw. – 5-fache der 1. Zeile addieren.

② Der Reihe nach zur 3., 4. und 5. Zeile das – 4-fache, 1-fache bzw. 2-fache der 2. Zeile addieren.

③ Zur 3. Zeile das 2-fache der 4. Zeile addieren, dann die 4. Zeile mit 12 und die 5. Zeile mit 7 multiplizieren.

④ Von der 5. Zeile die 4. Zeile subtrahieren.

⑤ Die 4. Zeile durch 12 dividieren, zur 5. Zeile das 13-fache der 3. Zeile addieren, dann die 5. Zeile durch – 32 dividieren.

⑥ Zeile 3 mit Zeile 4 vertauschen.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 6 & 42 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 4 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & -121 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 43 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 1 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 42 \\ 7x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 32 \\ x_4 - 23x_5 &= -121 \\ 8x_5 &= 43 \end{aligned}$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{c}) = 5 \quad \Rightarrow$ Das System besitzt *genau eine* Lösung: $x_1 = -0{,}875$; $x_2 = 4{,}5$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2{,}625$; $x_5 = 5{,}375$

10) Das quadratische System ist genau dann *eindeutig* lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante einen *von null verschiedenen* Wert hat. Dies ist jeweils der Fall.

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{vmatrix} = -8\,; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 18 & 7 & 4 \\ 30 & 13 & 4 \end{vmatrix} = 24\,;$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 18 & 4 \\ 3 & 30 & 4 \end{vmatrix} = -24\,; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 18 \\ 3 & 13 & 30 \end{vmatrix} = 0$

Lösung: $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = -3\,; \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 3\,; \quad x_3 = \dfrac{D_3}{D} = 0$

b) $D = 98\,; \quad D_1 = -36\,; \quad D_2 = 10\,; \quad D_3 = -4$

Lösung: $x_1 = -18/49\,; \quad x_2 = 5/49\,; \quad x_3 = -2/49$

c) $D = 62\,; \quad D_1 = 29\,; \quad D_2 = 14\,;$ *Lösung:* $x_1 = 29/62\,; \quad x_2 = 7/31$

d) $D = 628\,; \quad D_1 = 0\,; \quad D_2 = 4396\,; \quad D_3 = 1884$

Lösung: $x_1 = 0\,; \quad x_2 = 7\,; \quad x_3 = 3$

11) $I_1 + I_2 + I_3 - I = 0$ (Knotenpunktregel)

$$\left.\begin{aligned} 100\,I_1 \qquad\qquad + 60\,I &= 10 \\ 200\,I_2 \qquad + 60\,I &= 10 \\ 100\,I_3 + 60\,I &= 10 \end{aligned}\right\} \text{(Maschenregel)}$$

Das lineare Gleichungssystem reduziert sich unter Berücksichtigung der Symmetrie ($R_1 = R_3$ und damit $I_1 = I_3$) auf 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$\begin{aligned} 2I_1 + I_2 - \quad I &= 0 \\ 10I_1 \qquad + 6I &= 1 \\ 20I_2 + 6I &= 1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 6 \\ 0 & 20 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel:

$D = -500$; $D_1 = -20$; $D_2 = -10$; $D_3 = -50$

Lösung: $I_1 = D_1/D = 0{,}04\ \text{A}$; $I_2 = D_2/D = 0{,}02\ \text{A}$; $I_3 = I_1 = 0{,}04\ \text{A}$;

$I = D_3/D = 0{,}1\ \text{A}$

12) Die Matrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{E})$ wird durch die folgenden Zeilenumformungen auf die gewünschte Form $(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$ gebracht:

① Von der 1. Zeile das 3-fache der 2. Zeile subtrahieren, dann beide Zeilen miteinander vertauschen.

② Zur 1. Zeile das -2-fache und zur 2. Zeile das 6-fache der 3. Zeile addieren.

③ Von der 3. Zeile die 2. Zeile subtrahieren, dann durch 6 dividieren.

④ Zur 1. Zeile das -4-fache und zur 2. Zeile das 8-fache der 3. Zeile addieren.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}}\right) \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 4/6 & -6/6 & 8/6 \\ -2/6 & 6/6 & -4/6 \\ -1/6 & 3/6 & -5/6 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^{-1}}\right)$$

Zeilenumformungen in der Matrix $(\mathbf{B} \mid \mathbf{E})$:

① Zur 1. Zeile zunächst die 2. Zeile und dann das -5-fache der 3. Zeile addieren.

② Zeile 1 durch -9 dividieren, Zeile 2 mit Zeile 3 vertauschen.

③ Von der 2. Zeile das 3-fache und von der 3. Zeile das 2-fache der 1. Zeile subtrahieren.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{B}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}}\right) \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} -1/9 & -1/9 & 5/9 \\ 3/9 & 3/9 & -6/9 \\ 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{matrix}}_{\mathbf{B}^{-1}}\right)$$

Zeilenumformungen in der Matrix $(\mathbf{C} \mid \mathbf{E})$:

① Reihenfolge der Zeilen wie folgt vertauschen: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

② Von der 3. Zeile das 3-fache der 1. Zeile subtrahieren.

③ Zur 1. Zeile das -5-fache und zur 3. Zeile das 11-fache der 2. Zeile addieren.

④ Die 3. Zeile durch -7 dividieren, dann das 3-fache dieser Zeile von der 1. Zeile subtrahieren.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{C}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}}\right) \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 3/7 & -2/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 7/7 \\ -1/7 & 3/7 & -11/7 \end{matrix}}_{\mathbf{C}^{-1}}\right)$$

13) a) Das Vektorsystem enthält den *Nullvektor* $(\mathbf{c} = \mathbf{0})$.

b) $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ sind *kollinear* (*antiparallel*): $\mathbf{c} = -3\,\mathbf{a}$.

c) $\mathbf{a}_3$ ist als *Linearkombination* von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ darstellbar: $\mathbf{a}_3 = 2\,\mathbf{a}_1 - 2\,\mathbf{a}_2$

d) Die Anzahl der Vektoren $(n = 4)$ ist *größer* als die Dimension des Raumes $(m = 2)$, aus dem sie stammen (im $\mathbb{R}^2$ gibt es *maximal zwei* linear unabhängige Vektoren).

14) a) $$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 3$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = n = 3 \quad \Rightarrow$ Vektoren sind *linear unabhängig*

b) $$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 3$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = n = 3 \quad \Rightarrow$ Vektoren sind *linear unabhängig*

c) Die Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}\,\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt eine von null verschiedene *2-reihige* Unterdeterminante, z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad (3.\ \text{Zeile in } \mathbf{A} \text{ gestrichen})$$

Somit ist $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2$ und wegen $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = n = 2$ sind die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ *linear unabhängig*.

15) Die Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ wird mit Hilfe der folgenden elementaren Zeilenumformungen auf *Trapezform* gebracht:

① Von der 2. Zeile das 2-fache und von der 4. Zeile das 1-fache der 1. Zeile subtrahieren.

② Von der 3. Zeile die 2. Zeile subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\} \begin{array}{l} \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2 \quad (2\ \text{Nullzeilen}) \\ \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < n = 3 \\ \text{Die Vektoren sind } \textit{linear abhängig}. \end{array} \right.$$

Vektor $\mathbf{c}$ als *Linearkombination von* $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$: $\mathbf{c} = 4\,\mathbf{a} + \mathbf{b}$

16) $$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0 \quad (2\ \text{gleiche Zeilen}) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < 3$$

Somit: $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < n = 3 \quad \Rightarrow$ Die Vektoren sind *linear abhängig* und damit *komplanar*.

17) $\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda + 8$

Bedingung: $r < n = 3 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = -\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = 4$

18) a) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Die Vektoren sind *linear unabhängig*.

b) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$ Die Vektoren sind *linear abhängig*.

Abschnitt 6

1) a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 + \mathrm{j} & 6 - \mathrm{j} \\ 3 + \mathrm{j} & 10 - 2\mathrm{j} & 3 + \mathrm{j} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 13 - 5\mathrm{j} & 14 - 11\mathrm{j} & 26 - 8\mathrm{j} \\ 14 + 8\mathrm{j} & 27 + 15\mathrm{j} & 7 + 8\mathrm{j} \end{pmatrix}$

c) $2\begin{pmatrix} 3 + \mathrm{j} & 2 \\ 2 - \mathrm{j} & 1 + \mathrm{j} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 + 2\mathrm{j} & 4 - 3\mathrm{j} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{j} & 1 + \mathrm{j} \\ 2 & 5 \\ 3 - \mathrm{j} & 1 + \mathrm{j} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 2\mathrm{j} - 3 + 3 - 3\mathrm{j} & 4 - 0 + 3 + 3\mathrm{j} \\ 4 - 2\mathrm{j} - 6 - 6\mathrm{j} + 6 & 2 + 2\mathrm{j} - 12 + 9\mathrm{j} + 15 \\ 4 - 3 + 9 - 3\mathrm{j} & 2 - 3 + 3 + 3\mathrm{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - \mathrm{j} & 7 + 3\mathrm{j} \\ 4 - 8\mathrm{j} & 5 + 11\mathrm{j} \\ 10 - 3\mathrm{j} & 2 + 3\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

2) a)

$$\begin{array}{c|cc|cc|} \cline{4-5} & & \mathbf{A} & 2 + \mathrm{j} & 1 + \mathrm{j} \\ & & & 2 & 1 - \mathrm{j} \\ \cline{2-5} \mathbf{A} & 2 + \mathrm{j} & 1 + \mathrm{j} & c_{11} & c_{12} \\ & 2 & 1 - \mathrm{j} & c_{21} & c_{22} \\ \cline{2-5} \multicolumn{5}{r}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2} \end{array}$$

$c_{11} = (2 + \mathrm{j})^2 + (1 + \mathrm{j})\,2 = 5 + 6\mathrm{j}$
$c_{12} = (2 + \mathrm{j})(1 + \mathrm{j}) + (1 + \mathrm{j})(1 - \mathrm{j}) =$
$= 3 + 3\mathrm{j}$
$c_{21} = 2\,(2 + \mathrm{j}) + (1 - \mathrm{j})\,2 = 6$
$c_{22} = 2\,(1 + \mathrm{j}) + (1 - \mathrm{j})^2 = 2$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 + 6\mathrm{j} & 3 + 3\mathrm{j} \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 + 9\mathrm{j} & 8 \\ 5 + 9\mathrm{j} & 9 - 5\mathrm{j} \end{pmatrix}$

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 - 2\mathrm{j} & -2 - 4\mathrm{j} \\ -3 + 14\mathrm{j} & -2 + 6\mathrm{j} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 11 + 15\mathrm{j} & 15 + 9\mathrm{j} \\ -20 + 5\mathrm{j} & 12 + 19\mathrm{j} \end{pmatrix}$

b) Die Matrizenprodukte („Potenzen“) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^2$ existieren *nicht*.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 + 3\mathrm{j} \\ 6 - 3\mathrm{j} & 3 + 8\mathrm{j} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 + 2\mathrm{j} & 6 + 11\mathrm{j} & -1 + \mathrm{j} \\ 2 - \mathrm{j} & 2 + 5\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 5 - 2\mathrm{j} & 7 - 8\mathrm{j} & 4 + \mathrm{j} \end{pmatrix}$

3) $\det \mathbf{A} = 6 - (1 + \mathrm{j})(1 - \mathrm{j}) = 4\,; \quad \det \mathbf{B} = -6 - (1 - \mathrm{j})(-1 - \mathrm{j}) = -4\,;$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \\ 1 & 2\mathrm{j} & 3 \\ \mathrm{j} & -3 & 3\mathrm{j} \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{C}} \begin{matrix} \mathrm{j} & -1 \\ 1 & 2\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -3 \end{matrix} \qquad \det \mathbf{C} = -6\mathrm{j} - 3\mathrm{j} + 3\mathrm{j} - 2\mathrm{j} + 9\mathrm{j} + 3\mathrm{j} = 4\mathrm{j}$$

4) a) $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{j} & 1-2\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 0 & 2+2\mathrm{j} & 1 \\ 1+\mathrm{j} & 5-3\mathrm{j} & -\mathrm{j} \end{pmatrix}; \quad \overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{j} & 0 & 1+\mathrm{j} \\ 1-2\mathrm{j} & 2+2\mathrm{j} & 5-3\mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & 1 & -\mathrm{j} \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 10-5\mathrm{j} & 1+2\mathrm{j} \\ 3+2\mathrm{j} & 4-2\mathrm{j} \\ 5-5\mathrm{j} & 1+2\mathrm{j} \end{pmatrix}; \quad \overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 10-5\mathrm{j} & 3+2\mathrm{j} & 5-5\mathrm{j} \\ 1+2\mathrm{j} & 4-2\mathrm{j} & 1+2\mathrm{j} \end{pmatrix}$

5) $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & 0 \\ -\mathrm{j} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$: *hermitesch*

$\overline{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^*)^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2-\mathrm{j} & 1-2\mathrm{j} \\ 2+\mathrm{j} & 1 & 5-4\mathrm{j} \\ 1+2\mathrm{j} & 5+4\mathrm{j} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}$: *hermitesch*

$\overline{\mathbf{C}} = (\mathbf{C}^*)^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{j} & 1+\mathrm{j} \\ -1+\mathrm{j} & 3\mathrm{j} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2\mathrm{j} & -1-\mathrm{j} \\ 1-\mathrm{j} & -3\mathrm{j} \end{pmatrix} = -\mathbf{C}$

Somit: $\mathbf{C} = -\overline{\mathbf{C}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}$: *schiefhermitesch*

$\overline{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}^*)^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{j} & 2 & 5-5\mathrm{j} \\ -2 & -\mathrm{j} & 8-\mathrm{j} \\ -5-5\mathrm{j} & -8-\mathrm{j} & -2\mathrm{j} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2\mathrm{j} & -2 & -5+5\mathrm{j} \\ 2 & \mathrm{j} & -8+\mathrm{j} \\ 5+5\mathrm{j} & 8+\mathrm{j} & 2\mathrm{j} \end{pmatrix} = -\mathbf{D}$

Somit: $\mathbf{D} = -\overline{\mathbf{D}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}$: *schiefhermitesch*

6) $\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{schief-symmetrisch}} + \mathrm{j} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$: *schiefhermitesch*; $\det \mathbf{A} = 25$

$\mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}} + \mathrm{j} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{schief-symmetrisch}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}$: *hermitesch*; $\det \mathbf{B} = -18$

$$\mathbf{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{schief-symmetrisch}} + \mathrm{j} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}: \textit{schiefhermitesch}; \quad \det \mathbf{C} = -33\,\mathrm{j}$$

$$\mathbf{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}} + \mathrm{j} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{schief-symmetrisch}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}: \textit{hermitesch}; \quad \det \mathbf{D} = -7$$

7) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{j} & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j} \end{vmatrix} = -\mathrm{j}^2 - \mathrm{j}^2 = 2$

Wäre $\mathbf{A}$ *unitär*, so müsste $\det \mathbf{A} = +1$ oder -1 sein. $\mathbf{A}$ ist also *nicht* unitär.

8) $$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j} & -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j} \\ -2\mathrm{j} & \sqrt{3} - \mathrm{j} & \sqrt{3} + \mathrm{j} \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2\mathrm{j} & -2 \\ 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j} & \sqrt{3} + \mathrm{j} & 2 \\ -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j} & \sqrt{3} - \mathrm{j} & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow$$

Somit: $\mathbf{A}$ ist *unitär*.

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4 + (1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j})(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}) + (-1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j})(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}) = \\ &= 4 + 1 + 3 + 1 + 3 = 12 \\ c_{12} &= 4\mathrm{j} + (1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j})(\sqrt{3} + \mathrm{j}) + (-1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j})(\sqrt{3} - \mathrm{j}) = \\ &= 4\mathrm{j} + \sqrt{3} + \mathrm{j} - 3\mathrm{j} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \mathrm{j} - 3\mathrm{j} - \sqrt{3} = 0 \\ c_{13} &= -4 + 2(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}) - 2(-1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}) = -4 + 2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{j} + 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{j} = 0 \end{aligned}$$

$c_{21} = 0; \quad c_{22} = 12; \quad c_{23} = 0; \quad c_{31} = 0; \quad c_{32} = 0; \quad c_{33} = 12$

$$\mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{j} & 1 \\ \mathrm{j} & -1 - \mathrm{j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & -1 + \mathrm{j} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Somit: $\mathbf{B}$ ist *unitär*.

$$\mathbf{C} = \mathrm{j} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{j}\,\mathbf{E}; \quad \mathbf{C}^* = -\mathrm{j}\,\mathbf{E}; \quad \overline{\mathbf{C}} = (\mathbf{C}^*)^{\mathbf{T}} = -\mathrm{j}\,\mathbf{E}^* = -\mathrm{j}\,\mathbf{E}$$

$\mathbf{C} \cdot \overline{\mathbf{C}} = \mathrm{j}\,\mathbf{E} \cdot (-\mathrm{j}\,\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad$ Somit: $\mathbf{C}$ ist *unitär*.

Abschnitt 7

Hinweis: α, β und γ sind reelle Parameter.

1) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\quad (\mathbf{A} - 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} -x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0; \quad x_1 = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ $\quad (\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$-x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_1 = -\beta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normierte Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 1$

Normierte Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 6$

Normierte Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 3$

Normierte Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det(\mathbf{B} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 1$

Normierte (komplexe) Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{j} \end{pmatrix}$

$\det(\mathbf{C} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 1 \pm \mathrm{j}$

$\boxed{\lambda_1 = 1 + \mathrm{j}}$ $(\mathbf{C} - (1 + \mathrm{j})\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\mathrm{j} & -1 \\ 1 & -\mathrm{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{j}x_1 - \phantom{\mathrm{j}}x_2 &= 0 \\ x_1 - \mathrm{j}x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_2 = -\mathrm{j}x_1 = -\mathrm{j}\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\mathrm{j}\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 1 - \mathrm{j}}$ $(\mathbf{C} - (1 - \mathrm{j})\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathrm{j} & -1 \\ 1 & \mathrm{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}x_1 - \phantom{\mathrm{j}}x_2 &= 0 \\ x_1 + \mathrm{j}x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_2 = \mathrm{j}x_1 = \mathrm{j}\beta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \mathrm{j}\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix}$$

Normierte (komplexe) Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{j} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix}$

3) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = 3$

$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2 = -6$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 2$

$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2 = -2$

c) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 1$

$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2 = -1$

4) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = 3$

$\boxed{\lambda_1 = -1}$ $(\mathbf{A} + 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= -\alpha \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ $(\mathbf{A} - 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \beta \\ x_2 &= -\beta \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3 = 3}$ $(\mathbf{A} - 3\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -2\gamma \\ x_2 = -3\gamma \\ x_3 = \gamma \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -3; \quad \lambda_3 = 5$

$\boxed{\lambda_{1/2} = -3} \quad (\mathbf{B} + 3\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 proportionale Zeilen (Gleichungen), somit 2 unabhängige Parameter (wir setzen $x_2 = \alpha$ und $x_3 = \beta$):

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_2 + 3x_3 = -2\alpha + 3\beta; \quad x_2 = \alpha; \quad x_3 = \beta$

Eigenvektoren ($\beta = 0$ bzw. $\alpha = 0$ setzen): $\mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_3 = 5} \quad (\mathbf{B} - 5\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -\gamma \\ x_2 = -2\gamma \\ x_3 = \gamma \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = 1$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -4 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 2; \quad \lambda_3 = 4$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & a \\ b & a-\lambda & a \\ a & a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 - (2a+b)\lambda^2 - (a-b)^2\lambda + 2a^3 - 3a^2b + b^3 = 0$

Mit Hilfe des *Horner-Schemas* zeigt man, dass $\lambda_1 = 2a + b$ eine Lösung dieser charakteristischen Gleichung ist. Aus dem 1. reduzierten Polynom erhält man dann die restlichen Eigenwerte $\lambda_2 = a - b$ und $\lambda_3 = -a + b$.

	1	$-(2a+b)$	$-(a-b)^2$	$(2a^3 - 3a^2b + b^3)$
$\lambda_1 = 2a+b$		$+(2a+b)$	0	$-(a-b)^2(2a+b)$
	1	0	$-(a-b)^2$	0

NR.: $-(a-b)^2(2a+b) = -(a^2 - 2ab + b^2)(2a+b) =$

$= -(2a^3 + a^2b - 4a^2b - 2ab^2 + 2ab^2 + b^3) = -(2a^3 - 3a^2b + b^3)$

1. *reduziertes* Polynom: $\lambda^2 - (a-b)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = \pm(a-b)$

6) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_{2/3} = \pm \mathrm{j}$

$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ -10 & 1 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 - 10\lambda^2 - \lambda + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 1; \quad \lambda_3 = 10$

$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 10; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -10$

c) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 1; \quad \lambda_3 = 7$

$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 7$

7) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 6; \quad \lambda_3 = 9$

$\boxed{\lambda_1 = 3} \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ 2x_3} &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= -2\alpha \\ x_3 &= 2\alpha \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 6} \quad (\mathbf{A} - 6\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ 2x_3} &= 0 \\ 2x_1 \phantom{{}+ 2x_2} + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -2\beta \\ x_2 &= \beta \\ x_3 &= 2\beta \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3 = 9} \quad (\mathbf{A} - 9\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ 2x_3} &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2\gamma \\ x_2 &= 2\gamma \\ x_3 &= \gamma \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist symmetrisch, die Eigenwerte paarweise verschieden. Daher sind die Eigenvektoren *orthogonal* und die aus ihnen gebildete 3-reihige Matrix $\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{x}}_1\, \tilde{\mathbf{x}}_2\, \tilde{\mathbf{x}}_3)$ eine *orthogonale* Matrix.

8) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -4 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$\lambda_{1/2} = 2; \quad \lambda_{3/4} = \pm \mathrm{j}$

Die Determinanten wurden nacheinander nach der jeweils 1. Spalte entwickelt (diese enthält 3 bzw. 2 Nullen).

9) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ 7 & 3-\lambda & -1 \\ -4 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda^3 + \lambda^2 - 30\lambda - 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -4; \quad \lambda_2 = -3; \quad \lambda_3 = 6$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die aus den Eigenvektoren gebildete Determinante ist von null verschieden (die Normierungskonstanten dürfen weggelassen werden):

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_3$ sind *linear unabhängig*

$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 72$

10) In allen 3 Fällen gilt: *Eigenwerte = Hauptdiagonalelemente*.

A: $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 5; \quad \lambda_3 = 8$ (*untere Dreiecksmatrix*)

B: $\lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = 5; \quad \lambda_3 = 0; \quad \lambda_4 = 1$ (*Diagonalmatrix*)

C: $\lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = 5$ (*obere Dreiecksmatrix*)

11) Die Systemmatrix ist eine (untere) *Dreiecksmatrix*. Die Eigenwerte lauten daher (sie sind identisch mit den Hauptdiagonalelementen): $\lambda_1 = -k_1; \ \lambda_2 = -k_2; \ \lambda_3 = 0$.

12) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 1$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda_1 = -4; \quad \lambda_2 = 6$

$\boxed{\lambda_1 = -4}$ $\quad (\mathbf{A} + 4\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + 8x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2\alpha \\ x_2 &= \alpha \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 6}$ $\quad (\mathbf{A} - 6\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} -8x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \beta \\ x_2 &= -2\beta \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

13) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm 3\,\mathrm{j}$

14) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda_{1/2} = -1; \quad \lambda_3 = 2$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_{2/3} = 2 \pm \sqrt{2}$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -\alpha \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \alpha \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}}$ $\quad (\mathbf{A} - (2 + \sqrt{2})\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rl} -\sqrt{2}\,x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 - \sqrt{2}\,x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 - \sqrt{2}\,x_3 & = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = \beta \\ x_2 = \sqrt{2}\,\beta \\ x_3 = \beta \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}}$ $\quad (\mathbf{A} - (2 - \sqrt{2})\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{rl} \sqrt{2}\,x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + \sqrt{2}\,x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 + \sqrt{2}\,x_3 & = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = \gamma \\ x_2 = -\sqrt{2}\,\gamma \\ x_3 = \gamma \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrix $\mathbf{A}$ ist symmetrisch und hat paarweise verschiedene Eigenwerte; die Eigenvektoren sind *orthogonal*.

Eigenvektoren: $\quad \tilde{\mathbf{x}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

15) $\quad \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 1; \quad \lambda_3 = 4$$

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 3; \quad \lambda_3 = 6$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & b-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(a - \lambda)\,[\lambda^2 - (a + b)\,\lambda + a\,b - 2] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = a; \quad \lambda_{2/3} = \frac{1}{2}\left(a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 8}\right)$$

16) $$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 & 4-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 & 4-\lambda \\ 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(4-\lambda)^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 & 4-\lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-\lambda^2+4\lambda\,=\,\lambda(4-\lambda)} =$$

$$= -\lambda(4-\lambda)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3/4} = 4$$

Der Reihe nach durchgeführte Zeilenumformungen in der Determinante:

① Zur 1. Zeile das $(3-\lambda)$-fache der 3. Zeile und zur 2. und 4. Zeile jeweils die 3. Zeile addieren.

② Die neue 4-reihige Determinante nach der 1. Spalte entwickeln (diese enthält 3 Nullen).

③ Aus der 2. und 3. Zeile der jetzt 3-reihigen Determinante den jeweils gemeinsamen Faktor $4-\lambda$ vor die Determinante ziehen und die verbliebene 3-reihige Determinante nach Sarrus berechnen.

17) $$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2\mathrm{j} \\ -2\mathrm{j} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 5$$

$\boxed{\lambda_1 = 0}$ $$(\mathbf{A}-0\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2\mathrm{j} \\ -2\mathrm{j} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2\mathrm{j}x_2 &= 0 \\ -2\mathrm{j}x_1 + \phantom{2\mathrm{j}}x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= 2\mathrm{j}\alpha \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 5}$ $$(\mathbf{A}-5\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2\mathrm{j} \\ -2\mathrm{j} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2\mathrm{j}x_2 &= 0 \\ -2\mathrm{j}x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2\mathrm{j}\beta \\ x_2 &= \beta \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta\begin{pmatrix} 2\mathrm{j} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{j} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2\mathrm{j} \\ 1 \end{pmatrix}$

II Fourier-Reihen

Hinweis: Die Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte).

Abschnitt 1

1) $$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2) \cdot \cos(nx)\, dx = 2 \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos(nx)\, dx =$$

$$= 2 \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x \cdot \cos(nx)}{n^2} + \frac{(n^2 x^2 - 2) \cdot \sin(nx)}{n^3} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi}{n^2} \right) = - \frac{4}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

(Integrale: 232 und 233, jeweils mit $a = n$)

$b_n = 0$ ($f(x)$ ist eine *gerade* Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$f(x) = \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos x + \frac{1}{2^2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3x) + \ldots \right)$$

2) $$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 0$$

(Integral: 232 mit $a = n$ und $n \in \mathbb{N}^*$)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cdot \cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(- \frac{2\pi}{n} \right) = - \frac{2}{n}$$

(Integral: 208 mit $a = n$ und $n \in \mathbb{N}^*$)

$$f(x) = \pi - 2 \left(\frac{1}{1} \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \ldots \right)$$

3) $f(x) = |x|, \ -\pi \le x \le \pi$; *gerade* Funktion (Integration von 0 bis π, daher Faktor 2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2} = \left\{\begin{matrix} -\dfrac{4}{\pi} \cdot \dfrac{1}{n^2} & & n = 1, 3, 5, \ldots \\ & \text{für} & \\ 0 & & n = 2, 4, 6, \ldots \end{matrix}\right\}$$

(Integral: 232 mit $a = n$; $\cos(n\pi) = (-1)^n$)

$b_n = 0$ ($f(x)$ ist eine *gerade* Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos x + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos(5x) + \ldots\right)$$

4) $$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{x} \cdot e^{-jnx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jn)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-jn)x}}{1-jn}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(1-jn)\pi} - e^{-(1-jn)\pi}}{1-jn} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1+jn}{\underbrace{(1-jn)(1+jn)}_{\text{3. Binom}}}[e^{\pi} \cdot e^{-jn\pi} - e^{-\pi} \cdot e^{jn\pi}] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1+jn}{1+n^2}[e^{\pi} \cdot (-1)^n - e^{-\pi} \cdot (-1)^n] = (-1)^n \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1+jn}{1+n^2}$$

(Integral: 312 mit $a = 1 - jn$; der Bruch wurde mit $1 + jn$ erweitert)

Hinweis: $e^{\pm jn\pi} = \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \pm j \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{0} = (-1)^n$ (Eulersche Formel)

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+jn}{1+n^2} \cdot e^{jnx} \quad (\textit{komplexe}\ \text{Darstellung})$$

Fourier-Reihe in *reeller* Darstellung:

$$a_0 = 2c_0 = 2 \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n = c_n + c_n^* = (-1)^n \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(1+jn) + (1-jn)}{1+n^2} =$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{1+n^2}$$

$$b_n = j(c_n - c_n^*) = j(-1)^n \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(1+jn) - (1-jn)}{1+n^2} =$$

$$= -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \frac{n}{1+n^2}$$

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\cos(nx)}{1+n^2} - \frac{n \cdot \sin(nx)}{1+n^2}\right]$$

Abschnitt 2

1) $u(t)$: *gerade* Funktion (Integration von 0 bis $\pi/2$, daher Faktor 2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{u} \cdot \cos t \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \Big[\sin t \Big]_0^{\pi/2} = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot 1 = \frac{2\hat{u}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{u} \cdot \cos t \cdot \cos(nt) \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos(nt) \, dt$$

Fallunterscheidung: $n = 1$ (Integral: 229 mit $a = 1$) bzw. $n > 1$ (Integral: 252 mit $a = 1$ und $b = n$)

$$a_1 = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\hat{u}}{2}$$

$$a_n = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos(nt) \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \left[\frac{\sin(1-n)x}{2(1-n)} + \frac{\sin(1+n)x}{2(1+n)} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(1+n) \cdot \sin(1-n)\pi/2 + (1-n) \cdot \sin(1+n)\pi/2}{(1-n)(1+n)} =$$

$$= \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(1+n) \cdot \cos(n\pi/2) + (1-n) \cdot \cos(n\pi/2)}{(1-n)(1+n)} = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\cos(n\pi/2)}{(n-1)(n+1)}$$

Hinweis: $\sin(1-n)\pi/2 = \sin(1+n)\pi/2 = \cos(n\pi/2)$

Fallunterscheidung: n = gerade = $2k$ bzw. n = ungerade = $2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{n = 2k:}$ $\cos(n\pi/2) = \cos(k\pi) = (-1)^k = (-1)^{\frac{n}{2}}$

$\boxed{n = 2k+1:}$ $\cos(n\pi/2) = \cos(k\pi + \pi/2) = -\sin(k\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n=2k+1} = 0$

$$a_{n=2k} = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)(n+1)} = \frac{2\hat{u}}{\pi} (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot \frac{1}{(n-1)(n+1)} \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots)$$

$b_n = 0$ (*gerade* Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{\pi} + \frac{\hat{u}}{2} \cdot \cos t + \frac{2\hat{u}}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2t) - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6t) - + \ldots \right)$$

2) $$y(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} (2\hat{y}/\pi)\, t & & 0 \le t \le \pi/2 \\ (2\hat{y}/\pi)(\pi - t) & \text{für} & \pi/2 \le t \le 3\pi/2 \\ (2\hat{y}/\pi)(t - 2\pi) & & 3\pi/2 \le t \le 2\pi \end{array} \right\} \quad \text{(Periode: } 2\pi)$$

$a_n = 0$ (*ungerade* Funktion, daher kein konstantes Glied und keine Kosinusglieder; $n \in \mathbb{N}$)

$$b_n = \frac{2\hat{y}}{\pi^2}\left[\int_0^{\pi/2} t \cdot \sin(nt)\,dt + \pi \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin(nt)\,dt - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} t \cdot \sin(nt)\,dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} t \cdot \sin(nt)\,dt - \right.$$

$$\left. - 2\pi \cdot \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin(nt)\,dt\right] = \frac{2\hat{y}}{\pi^2}(I_1 + \pi \cdot I_2 - I_3 + I_4 - 2\pi \cdot I_5)$$

Auswertung der Integrale ($I_1, I_3, I_4 \to$ Integral 208 mit $a = n$; $I_2, I_5 \to$ Integral 204 mit $a = n$):

$$I_1 = \left[\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cdot \cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} - \frac{\pi \cdot \cos(n\pi/2)}{2n}$$

$$I_3 = \left[\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cdot \cos(nt)}{n}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} =$$

$$= \frac{\sin(3n\pi/2)}{n^2} - \frac{3\pi \cdot \cos(3n\pi/2)}{2n} - \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} + \frac{\pi \cdot \cos(n\pi/2)}{2n}$$

$$I_4 = \left[\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cdot \cos(nt)}{n}\right]_{3\pi/2}^{2\pi} = -\frac{2\pi}{n} - \frac{\sin(3n\pi/2)}{n^2} + \frac{3\pi \cdot \cos(3n\pi/2)}{2n}$$

$$I_2 = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\cos(n\pi/2)}{n} - \frac{\cos(3n\pi/2)}{n}$$

$$I_5 = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{3\pi/2}^{2\pi} = -\frac{1}{n} + \frac{\cos(3n\pi/2)}{n}$$

$$b_n = \frac{2\hat{y}}{\pi^2}(I_1 + \pi \cdot I_2 - I_3 + I_4 - 2\pi \cdot I_5) = \frac{4\hat{y}}{\pi^2 n^2}[\sin(n\pi/2) - \underbrace{\sin(3n\pi/2)}_{(-1)^n \cdot \sin(n\pi/2)}] =$$

$$= \frac{4\hat{y}}{\pi^2 n^2} \cdot \sin(n\pi/2) \cdot [1 - (-1)^n]$$

Hinweis: $\sin(3n\pi/2) = \sin(n\pi/2 + n\pi) = (-1)^n \cdot \sin(n\pi/2)$

Fallunterscheidung: $n =$ gerade $= 2k$ bzw. $n =$ ungerade $= 2k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{n = 2k:}$ $\sin(n\pi/2) = \sin(k\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{n=2k} = 0$

$\boxed{n = 2k - 1:}$ $\sin(n\pi/2) = \sin(k\pi - \pi/2) = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}$

$$b_{n=2k-1} = \frac{4\hat{y}}{\pi^2 n^2}(-1)^{k+1} \cdot 2 = \frac{8\hat{y}}{\pi^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$y(t) = \frac{8\hat{y}}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{1^2} \cdot \sin t - \frac{1}{3^2} \cdot \sin(3t) + \frac{1}{5^2} \cdot \sin(5t) - + \ldots\right)$$

3) $\omega_0 = 2\pi/T; \quad \omega_0 T = 2\pi; \quad \omega_0 T/2 = \pi$

$$a_0 = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} \frac{2\hat{u}}{T}\, t\, dt + \int_{T/2}^{T} \hat{u}\, dt\right] = \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[\frac{1}{2}\, t^2\right]_0^{T/2} + \frac{2\hat{u}}{T}\left[t\right]_{T/2}^{T} = \frac{3}{2}\,\hat{u}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} \frac{2\hat{u}}{T} t \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt + \int_{T/2}^{T} \hat{u} \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt\right] =$$

$$= \frac{4\hat{u}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^{T/2} t \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt}_{\text{Integral 232 mit } a\, =\, n\omega_0} + \frac{2\hat{u}}{T} \cdot \underbrace{\int_{T/2}^{T} \cos(n\omega_0 t)\, dt}_{\text{Integral 228 mit } a\, =\, n\omega_0} =$$

$$= \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2} + \frac{t \cdot \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{T/2} + \frac{2\hat{u}}{T}\left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{T/2}^{T} =$$

$$= \frac{4\hat{u}}{(\omega_0 T)^2 n^2}\left[\cos(n\omega_0 T/2) + \frac{n\omega_0 T}{2} \cdot \sin(n\omega_0 T/2) - 1\right] +$$

$$+ \frac{2\hat{u}}{(\omega_0 T)\, n}\left[\sin(n\omega_0 T) - \sin(n\omega_0 T/2)\right] =$$

$$= \frac{\hat{u}}{\pi^2 n^2}\left[\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} + n\pi \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_{0} - 1\right] + \frac{\hat{u}}{\pi n}\left[\underbrace{\sin(2n\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(n\pi)}_{0}\right] =$$

$$= \frac{\hat{u}}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \left\{\begin{array}{ccc} -\dfrac{2\hat{u}}{\pi^2} \cdot \dfrac{1}{n^2} & & n = 1, 3, 5, \ldots \\ & \text{für} & \\ 0 & & n = 2, 4, 6, \ldots \end{array}\right\}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} \frac{2\hat{u}}{T}\, t \cdot \sin(n\omega_0 t)\, dt + \int_{T/2}^{T} \hat{u} \cdot \sin(n\omega_0 t)\, dt\right] =$$

$$= \frac{4\hat{u}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^{T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t)\, dt}_{\text{Integral 208 mit } a\, =\, n\omega_0} + \frac{2\hat{u}}{T} \cdot \underbrace{\int_{T/2}^{T} \sin(n\omega_0 t)\, dt}_{\text{Integral 204 mit } a\, =\, n\omega_0} =$$

$$= \frac{4\hat{u}}{T^2}\left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{T/2} + \frac{2\hat{u}}{T}\left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{T/2}^{T} =$$

$$= \frac{4\hat{u}}{(\omega_0 T)^2 n^2}\left[\sin(n\omega_0 T/2) - \frac{n\omega_0 T}{2} \cdot \cos(n\omega_0 T/2)\right] +$$

$$+ \frac{2\hat{u}}{\omega_0 T n}\left[-\cos(n\omega_0 T) + \cos(n\omega_0 T/2)\right] =$$

$$= \frac{\hat{u}}{\pi^2 n^2}\left[\underbrace{\sin(n\pi)}_{0} - n\pi \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\right] + \frac{\hat{u}}{\pi n}\left[-\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1} + \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\right] = -\frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$$

$$u(t) = \frac{3}{4}\,\hat{u} - \frac{2\,\hat{u}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3\,\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos(5\,\omega_0 t) + \ldots\right) -$$

$$- \frac{\hat{u}}{\pi}\left(\frac{1}{1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\,\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\,\omega_0 t) + \ldots\right)$$

4) $y(t) = -\frac{\hat{y}}{T}\,t + \hat{y}, \quad 0 \le t < T; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega_0 T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left(-\frac{\hat{y}}{T}\,t + \hat{y}\right) dt = \frac{2}{T}\left[-\frac{\hat{y}}{2T}\,t^2 + \hat{y}\,t\right]_0^T = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2}\,\hat{y}\,T = \hat{y}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left(-\frac{\hat{y}}{T}\,t + \hat{y}\right) \cdot \cos(n\,\omega_0 t)\,dt =$$

$$= -\frac{2\,\hat{y}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^T t \cdot \cos(n\,\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 232 mit } a = n\,\omega_0} + \frac{2\,\hat{y}}{T} \cdot \underbrace{\int_0^T \cos(n\,\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 228 mit } a = n\,\omega_0} =$$

$$= -\frac{2\,\hat{y}}{T^2}\left[\frac{\cos(n\,\omega_0 t)}{n^2\,\omega_0^2} + \frac{t \cdot \sin(n\,\omega_0 t)}{n\,\omega_0}\right]_0^T + \frac{2\,\hat{y}}{T}\left[\frac{\sin(n\,\omega_0 t)}{n\,\omega_0}\right]_0^T =$$

$$= -\frac{2\,\hat{y}}{(\omega_0 T)^2\,n^2}\,[\cos(n\,\omega_0 T) + n\,\omega_0 T \cdot \sin(n\,\omega_0 T) - 1] + \frac{2\,\hat{y}}{(\omega_0 T)\,n} \cdot \sin(n\,\omega_0 T) =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{2\,\pi^2\,n^2}\,[\underbrace{\cos(2\,n\,\pi)}_{1} + 2\,\pi\,n \cdot \underbrace{\sin(2\,n\,\pi)}_{0} - 1] + \frac{\hat{y}}{\pi\,n} \cdot \underbrace{\sin(2\,n\,\pi)}_{0} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left(-\frac{\hat{y}}{T}\,t + \hat{y}\right) \cdot \sin(n\,\omega_0 t)\,dt =$$

$$= -\frac{2\,\hat{y}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^T t \cdot \sin(n\,\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 208 mit } a = n\,\omega_0} + \frac{2\,\hat{y}}{T} \cdot \underbrace{\int_0^T \sin(n\,\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 204 mit } a = n\,\omega_0} =$$

$$= -\frac{2\,\hat{y}}{T^2}\left[\frac{\sin(n\,\omega_0 t)}{n^2\,\omega_0^2} - \frac{t \cdot \cos(n\,\omega_0 t)}{n\,\omega_0}\right]_0^T + \frac{2\,\hat{y}}{T}\left[-\frac{\cos(n\,\omega_0 t)}{n\,\omega_0}\right]_0^T =$$

$$= -\frac{2\,\hat{y}}{(\omega_0 T)^2\,n^2}\,[\sin(n\,\omega_0 T) - n\,\omega_0 T \cdot \cos(n\,\omega_0 T)] + \frac{2\,\hat{y}}{(\omega_0 T)\,n}\,[-\cos(n\,\omega_0 T) + 1] =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{2\pi^2 n^2}\,[\underbrace{\sin(2n\pi)}_{0} - 2\pi n \cdot \underbrace{\cos(2n\pi)}_{1}] + \frac{\hat{y}}{\pi n}\,[-\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1} + 1] = \frac{\hat{y}}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{\hat{y}}{\pi}\left[\frac{1}{1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \ldots\right]$$

5) $y = \hat{y} \cdot |\sin(\omega_0 t)| = \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 t)$, $\quad 0 \le t \le T$; $\quad$ Periode: $T = \pi/\omega_0$; $\quad \omega_0 T = \pi$

$$a_0 = \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \int_0^T \sin(\omega_0 t)\,dt = \frac{2\hat{y}}{\omega_0 T}\Big[-\cos(\omega_0 t)\Big]_0^T = \frac{2\hat{y}}{\pi}\,[-\cos\pi + 1] = \frac{4\hat{y}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \int_0^T \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Fallunterscheidung: $n = 1$ (Integral 254 mit $a = \omega_0$) bzw. $n > 1$ (Integral 285 mit $a = \omega_0$ und $b = n\omega_0$)

$$a_1 = \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \int_0^T \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t)\,dt = \frac{2\hat{y}}{T}\left[\frac{\sin^2(\omega_0 t)}{2\omega_0}\right]_0^T = \frac{\hat{y}}{\omega_0 T} \cdot \sin^2(\omega_0 T) = \frac{\hat{y}}{\pi} \cdot \sin^2\pi = 0$$

$$a_n = \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \int_0^T \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2\hat{y}}{T}\left[-\frac{\cos(\omega_0 + n\omega_0)t}{2(\omega_0 + n\omega_0)} - \frac{\cos(\omega_0 - n\omega_0)t}{2(\omega_0 - n\omega_0)}\right]_0^T =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{\omega_0 T}\left[\frac{\cos(n+1)\,\omega_0 t}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\,\omega_0 t}{n-1}\right]_0^T =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{\omega_0 T}\left[\frac{\cos(n+1)\,\omega_0 T - 1}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\,\omega_0 T - 1}{n-1}\right] =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\,\pi - 1}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\,\pi - 1}{n-1}\right] = \frac{2\hat{y}\,[(-1)^{n+1} - 1]}{\pi(n-1)(n+1)} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 0 & & n = 3, 5, 7, \ldots \\ & \text{für} & \\ -\dfrac{4\hat{y}}{\pi} \cdot \dfrac{1}{(n-1)(n+1)} & & n = 2, 4, 6, \ldots \end{matrix}\right\}$$

Hinweis: $\cos(1-n)\,\omega_0 t = \cos(n-1)\,\omega_0 t$; $\cos(n+1)\,\pi = \cos(n-1)\,\pi = (-1)^{n+1}$

$b_n = 0 \qquad$ ($y(t)$ ist eine *gerade* Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$y(t) = \frac{2\hat{y}}{\pi} - \frac{4\hat{y}}{\pi}\left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \ldots\right]$$

III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

Abschnitt 1

1) a) $y - 2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq 2x, \quad x \in \mathbb{R}$ (*grau* unterlegter Bereich in Bild A-1)

b) $(x^2 - 1)(9 - y^2) \geq 0$ (beide Faktoren müssen somit *gleiches* Vorzeichen haben)

$x^2 - 1 \geq 0, \; 9 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| \geq 1, \; |y| \leq 3$ (*hellgrauer* Bereich, Bild A-2)

$x^2 - 1 \leq 0, \; 9 - y^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq 1, \; |y| \geq 3$ (*dunkelgrauer* Bereich, Bild A-2)

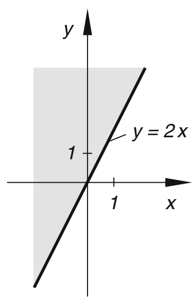


Bild A-1

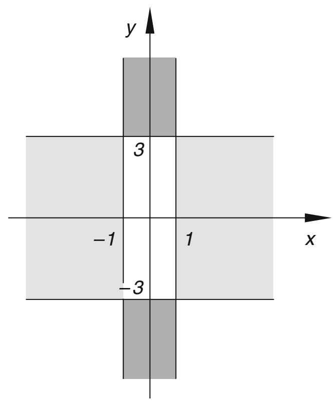


Bild A-2

c) $x + y \geq 0, \quad x - y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq -x, \quad y \neq x, \quad x \in \mathbb{R}$ (*grau* unterlegter Bereich in Bild A-3, die Punkte auf der Halbgeraden $y = x$ mit $x \geq 0$ gehören *nicht* dazu!)

d) $x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \geq 1$ (*grau* unterlegter Bereich in Bild A-4)

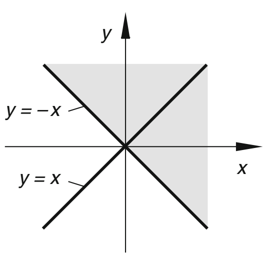


Bild A-3

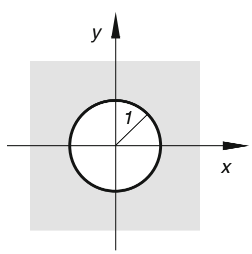


Bild A-4

2) $S_x = \left(\frac{1}{2}\,; 0\,; 0\right); \quad S_y = \left(0\,; -\frac{1}{5}\,; 0\right); \quad S_z = \left(0\,; 0\,; \frac{1}{3}\right)$

Gleichung der Ebene nach z auflösen, dann die Koordinaten x und y des gegebenen Punktes einsetzen und die berechnete Höhenkoordinate z_{Ebene} mit der Höhenkoordinate des Punktes vergleichen.

Ergebnis: A liegt in der Ebene, B oberhalb der Ebene, C und D unterhalb der Ebene.

3) a) $x^2 + y^2 - 2y = \text{const.} = C \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 = C + 1 \quad (\text{mit } C \ge -1)$

Konzentrische Kreise um den Mittelpunkt $M = (0; 1)$ (siehe Bild A-5)

b) $3x + 6y = \text{const.} = C \quad \Rightarrow \quad y = -0{,}5\,x + C/6 \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

Parallele Geradenschar (Steigung: $m = -0{,}5$; siehe Bild A-6)

c) $\sqrt{y - x^2} = \text{const.} = C \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + C^2 \quad (\text{mit } C \ge 0)$

Parabelschar (nach oben geöffnete Normalparabeln oberhalb der x-Achse, siehe Bild A-7)

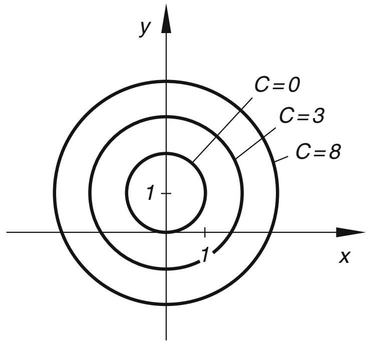


Bild A-5

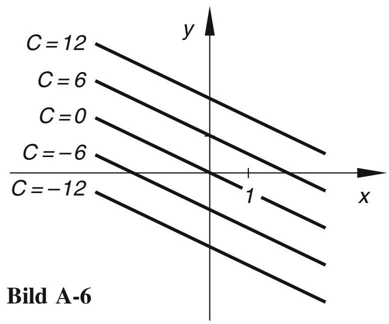


Bild A-6

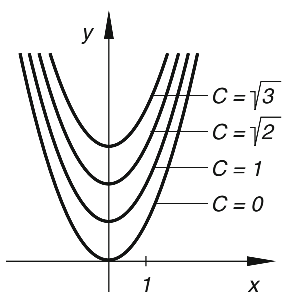


Bild A-7

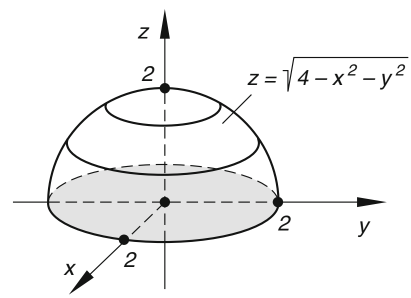


Bild A-8

4) Die Substitution $x \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$ liefert die *Rotationsfläche* mit der Gleichung $z = \sqrt{4 - r^2} = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \le 4$ (*Halbkugel* mit dem Radius $R = 2$, siehe Bild A-8)

Schnitt mit der *x*, *y-Ebene: Kreis* mit dem Radius $R = 2$

Schnitt mit der *x*, *z-* bzw. *y*, *z-Ebene: Halbkreis* mit dem Radius $R = 2$

Abschnitt 2

1) a) $z_x = 12\,(3x - 5y)^3; \quad z_y = -20\,(3x - 5y)^3; \quad z_{xx} = 108\,(3x - 5y)^2;$

$z_{yy} = 300\,(3x - 5y)^2; \quad z_{xy} = z_{yx} = -180\,(3x - 5y)^2$

b) $w_u = -6v \cdot \sin(3uv)$; $w_v = -6u \cdot \sin(3uv)$; $w_{uu} = -18v^2 \cdot \cos(3uv)$;
$w_{vv} = -18u^2 \cdot \cos(3uv)$; $w_{uv} = w_{vu} = -6 \cdot \sin(3uv) - 18uv \cdot \cos(3uv)$

c) $$z = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x + y)(x - y)}{x + y} = x - y \quad (\text{mit } y \neq -x)$$
$z_x = 1$; $z_y = -1$; $z_{xx} = 0$; $z_{yy} = 0$; $z_{xy} = z_{yx} = 0$

d) $z_r = 3(1 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi}$; $z_\varphi = 3r^2 \cdot e^{r\varphi}$; $z_{rr} = 3\varphi(2 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi}$;
$z_{\varphi\varphi} = 3r^3 \cdot e^{r\varphi}$; $z_{r\varphi} = z_{\varphi r} = 3r(2 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi}$

e) $$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 - 2xy}}; \quad z_y = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2xy}};$$
$$z_{xx} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 2xy} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y)(x - y)}{x^2 - 2xy} =$$
$$= \frac{(x^2 - 2xy) - (x - y)^2}{(x^2 - 2xy)\sqrt{x^2 - 2xy}} = -\frac{y^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}};$$
$$z_{yy} = -\frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}; \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}$$

f) $$z = e^{-x+y} + \ln x - \ln y; \quad z_x = -e^{-x+y} + \frac{1}{x}; \quad z_y = e^{-x+y} - \frac{1}{y};$$
$$z_{xx} = e^{-x+y} - \frac{1}{x^2}; \quad z_{yy} = e^{-x+y} + \frac{1}{y^2}; \quad z_{xy} = z_{yx} = -e^{-x+y}$$

g) $$z_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{(y^2 + x^2)\,y} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad z_y = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$
$$z_{xx} = \frac{0(x^2 + y^2) - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad z_{yy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$
$$z_{xy} = z_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

h) $$z = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2); \quad z_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad z_y = \frac{y}{x^2 + y^2};$$
$$z_{xx} = \frac{1(x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad z_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$
$$z_{xy} = z_{yx} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

i) $u_x = \dfrac{1(2x+t) - 2(x-2t)}{(2x+t)^2} = \dfrac{5t}{(2x+t)^2}; \quad u_t = -\dfrac{5x}{(2x+t)^2};$

$u_{xx} = \dfrac{0(2x+t)^2 - 2(2x+t)2 \cdot 5t}{(2x+t)^4} = -\dfrac{20t}{(2x+t)^3}; \quad u_{tt} = \dfrac{10x}{(2x+t)^3};$

$u_{xt} = u_{tx} = \dfrac{10x - 5t}{(2x+t)^3}$

j) $z_t = a \cdot \cos(at + \varphi); \quad z_\varphi = \cos(at + \varphi); \quad z_{tt} = -a^2 \cdot \sin(at + \varphi);$

$z_{\varphi\varphi} = -\sin(at + \varphi); \quad z_{t\varphi} = z_{\varphi t} = -a \cdot \sin(at + \varphi)$

2) $z_x = 5(1 - xy) \cdot e^{-xy} + \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \pi \cdot \sin(\pi x + y) \quad \Rightarrow \quad z_x(1;0) = 6$

$z_y = -5x^2 \cdot e^{-xy} + \dfrac{y}{x^2 + y^2} - \sin(\pi x + y) \quad \Rightarrow \quad z_y(0;1) = 0{,}159$

$z_{xy} = 5(-2x + x^2 y) \cdot e^{-xy} - \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \pi \cdot \cos(\pi x + y) \quad \Rightarrow \quad z_{xy}(-1;0) = 13{,}142$

$z_{yy} = 5x^3 \cdot e^{-xy} + \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \cos(\pi x + y) \quad \Rightarrow \quad z_{yy}(5;0) = 626{,}04$

$z_{xyx} = 5(4xy - x^2y^2 - 2) \cdot e^{-xy} + \dfrac{6x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} + \pi^2 \cdot \sin(\pi x + y) \quad \Rightarrow$

$z_{xyx}(-1;0) = -10$

3) a) $z_{xy} = z_{yx} = 3 - \cos(x - y) + 15x^2y^4$

b) $z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx} = \sin(x - y) + 30xy^4$

4) $u = a(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + b$ (symmetrisch in x, y, z)

$u_x = a\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -ax(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

$u_{xx} = -a[1(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2})^{-3/2} - 3x^2(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2})^{-5/2}] = -a(r^{-3} - 3x^2r^{-5})$

Analog: $u_{yy} = -a(r^{-3} - 3y^2r^{-5}); \quad u_{zz} = -a(r^{-3} - 3z^2r^{-5})$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -a(3r^{-3} - 3(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2})r^{-5}) = -a(3r^{-3} - 3r^{-3}) = 0$

5) $z_x = \dfrac{3}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{3x^2}{x^2 + y^2} + (y^2 - \pi) \cdot \sin(xy^2 - \pi x) \quad \Rightarrow \quad z_x(1;0) = 3$

$z_y = \dfrac{3xy}{x^2 + y^2} + 2xy \cdot \sin(xy^2 - \pi x) \quad \Rightarrow \quad z_y(1;0) = 0$

6) $xz_x + yz_y = x\dfrac{a}{y} \cdot e^{x/y} + y\left(-\dfrac{ax}{y^2} \cdot e^{x/y}\right) = \left(\dfrac{ax}{y} - \dfrac{ax}{y}\right) \cdot e^{x/y} = 0$

7) a) $\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = y \cdot e^{xy} \cdot 2t + x \cdot e^{xy} \cdot 1 = t \cdot e^{t^3} \cdot 2t + t^2 \cdot e^{t^3} = 3t^2 \cdot e^{t^3}$

b) $\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = (\ln y) \cdot \cos t + \dfrac{x}{y}(-\sin t) = \cos t \cdot \ln(\cos t) - \dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$

c) $\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = 2x \cdot \sin(2y) \cdot 2t + 2x^2 \cdot \cos(2y) \cdot 3t^2 =$

$= 2t^2 \cdot \sin(2t^3) \cdot 2t + 2t^4 \cdot \cos(2t^3) \cdot 3t^2 = 4t^3 \cdot \sin(2t^3) + 6t^6 \cdot \cos(2t^3)$

8) Parameter: x; Parametergleichungen: $x = x, \quad y = x^3$

$\dot{z}(x) = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \dfrac{y}{\cos^2(xy)} \cdot 1 + \dfrac{x}{\cos^2(xy)} \cdot 3x^2 = \dfrac{x^3 + 3x^3}{\cos^2(x^4)} = \dfrac{4x^3}{\cos^2(x^4)}$

9) Parameter: x; Parametergleichungen: $x = x, \quad y = x^2$

$\dot{z}(x) = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \dfrac{4x^3}{x^4 + y} \cdot 1 + \dfrac{1}{x^4 + y} \cdot 2x = \dfrac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2} = \dfrac{4x^2 + 2}{x^3 + x} \quad \Rightarrow$

$\dot{z}(x = 1) = 3$

10) a) $\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \left(2xy^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot 2t + 2x^2 y \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}} =$

$= \left(2t^3 + \dfrac{1}{2t}\right) 2t + 2t^4 \sqrt{t} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = 4t^4 + 1 + t^4 = 5t^4 + 1$

b) $z = t^4 \cdot t + t = t^5 + t; \quad \dot{z} = 5t^4 + 1$

11) a) $z_x = (2x - x^2 - y^2) \cdot e^{-x}; \quad z_y = 2y \cdot e^{-x}; \quad z_x(0; 1) = -1; \quad z_y(0; 1) = 2$

$z - 1 = -1(x - 0) + 2(y - 1) \quad \Rightarrow \quad z = -x + 2y - 1$

b) $z_x = 3y^{-1/2} - 2\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y); \quad z_y = -\dfrac{3}{2} xy^{-3/2} - 4\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y);$

$z_x(2; 1) = 3; \quad z_y(2; 1) = -3; \quad P = (2; 1; 8); \quad z = 3x - 3y + 5$

12) a) $dz = z_x\, dx + z_y\, dy = (12x^2 y - 3 \cdot e^y)\, dx + (4x^3 - 3x \cdot e^y)\, dy$

b) $dz = z_x\, dx + z_t\, dt = \dfrac{4t^2 + 2t}{(2t - 4x)^2}\, dx + \dfrac{2t^2 - 8tx - 2x}{(2t - 4x)^2}\, dt$

c) $dz = z_x\, dx + z_y\, dy = \dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{(x - y)^2}\, dx + \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{(x - y)^2}\, dy$

d) $u = \dfrac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, symmetrisch in x, y, z; $\quad u_x = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$

Analog: $u_y, u_z \quad \Rightarrow \quad du = u_x\, dx + u_y\, dy + u_z\, dz = \dfrac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{x^2 + y^2 + z^2}$

13) $O(r; h) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h); \quad dr = \Delta r = 0{,}5\,\text{cm}; \quad dh = \Delta h = -0{,}5\,\text{cm}$

$\Delta O \approx dO = \dfrac{\partial O}{\partial r}\, dr + \dfrac{\partial O}{\partial h}\, dh = (2\pi h + 4\pi r)\, dr + 2\pi r\, dh = 109{,}96\,\text{cm}^2$

$\Delta O_{\text{exakt}} = O(r + \Delta r; h + \Delta h) - O(r; h) =$

$= 2\pi(r + \Delta r)(r + \Delta r + h + \Delta h) - 2\pi r(r + h) = 109{,}96\,\text{cm}^2$

14) $dr = \frac{\partial r}{\partial x}\,dx + \frac{\partial r}{\partial y}\,dy + \frac{\partial r}{\partial z}\,dz = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$dx = \Delta x = -0{,}1$; $dy = \Delta y = 0{,}2$; $dz = \Delta z = -0{,}1$; $\Delta r \approx dr = 0{,}134$

$\Delta r_{\text{exakt}} = r(B) - r(A) = 0{,}143$

15) $V(r_a; r_i; h) = \pi(r_a^2 - r_i^2)\,h$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r_a}\,dr_a + \frac{\partial V}{\partial r_i}\,dr_i + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi r_a h\,dr_a - 2\pi r_i h\,dr_i + \pi(r_a^2 - r_i^2)\,dh$$

$\Delta V \approx dV = -512{,}71\,\text{cm}^3$

$\Delta V_{\text{exakt}} = V(r_a + \Delta r_a; r_i + \Delta r_i; h + \Delta h) - V(r_a; r_i; h) = -527{,}78\,\text{cm}^3$

16) $dT = \frac{\partial T}{\partial L}\,dL + \frac{\partial T}{\partial C}\,dC = \frac{\pi}{\sqrt{LC}}\,(C\,dL + L\,dC)$

Mit $L = L_0$, $C = C_0$ und $T_0 = 2\pi\sqrt{L_0 C_0}$ und den *absoluten* Änderungen $dL = \Delta L$, $dC = \Delta C$ gilt dann *näherungsweise*:

Absolute Änderung: $\Delta T \approx dT = \frac{\pi}{\sqrt{L_0 C_0}}\,(C_0\,\Delta L + L_0\,\Delta C)$

Prozentuale Änderung: $\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\Delta C}{C_0}\right) = \frac{1}{2}(-5\,\% + 3\,\%) = -1\,\%$

Die Schwingungsdauer *verringert* sich also näherungsweise um $1\,\%$.

17) $z_x = -\frac{5y^2}{x^2}$; $z_y = \frac{10y}{x}$; $z_x(1; 2) = -20$; $z_y(1; 2) = 20$

Linearisierte Funktion in der Umgebung des Arbeitspunktes $P = (1; 2; 20)$:
$z = -20x + 20y$

Näherungswert: $z = 14$; Exakter Funktionswert: $z = 14{,}73$

18) $\frac{\partial I}{\partial R_1} = U \cdot \frac{1(R_1 R_2) - R_2(R_1 + R_2)}{R_1^2 R_2^2} = -\frac{U}{R_1^2}$; $\frac{\partial I}{\partial R_2} = -\frac{U}{R_2^2}$; $\frac{\partial I}{\partial U} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$

$$\begin{aligned}\Delta I \approx dI &= \left(\frac{\partial I}{\partial R_1}\right)_0 \Delta R_1 + \left(\frac{\partial I}{\partial R_2}\right)_0 \Delta R_2 + \left(\frac{\partial I}{\partial U}\right)_0 \Delta U = \\ &= \left(-\frac{U}{R_1^2}\right)\Delta R_1 + \left(-\frac{U}{R_2^2}\right)\Delta R_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)\Delta U = \\ &= -\left(0{,}025\,\frac{A}{\Omega}\right)\Delta R_1 - \left(0{,}4\,\frac{A}{\Omega}\right)\Delta R_2 + \left(0{,}25\,\frac{A}{V}\right)\Delta U\end{aligned}$$

19) *Absolute* Änderung: $\Delta W \approx dW = \frac{\partial W}{\partial b}\,\Delta b + \frac{\partial W}{\partial h}\,\Delta h = \frac{1}{6}\,h^2\,\Delta b + \frac{1}{3}\,b\,h\,\Delta h$

Prozentuale Änderung: $\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta b}{b} + 2 \cdot \frac{\Delta h}{h} = 5\,\% - 20\,\% = -15\,\%$

20) a) $y'(P) = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{x(x^2 + y^2 - 1)}{y(x^2 + y^2 + 1)}$ b) $y'(P_1) = -\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot(0)}{\frac{1}{2}\cdot(2)} = 0$

21) $P_0 = (2;\ -2)$; $F(x;y) = x^2 + xy + y^2 - 4 = 0$; $y' = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}$;

$m = y'(P_0) = 1$; Tangente: $\dfrac{y + 2}{x - 2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = x - 4$

22) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $S_1 = (0;0)$; $S_{2/3} = (0;\ \pm 2)$

$y'(P) = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{x^2 + 1}{3y^2 - 4}$; $y'(S_1) = \tan\alpha_1 = \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arctan\dfrac{1}{4} = 14{,}0^\circ$

$y'(S_{2/3}) = \tan\alpha_{2/3} = -\dfrac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{2/3} = \arctan\left(-\dfrac{1}{8}\right) + 180^\circ = 172{,}9^\circ$

23) $F(x;y) = x^3 - 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0$; $y'(P) = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{3x^2 - 6x}{8y}$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;\ x_2 = 2$

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1;\ x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{2}$

Waagerechte Tangenten in den Punkten $P_{1/2} = (0;\ \pm 1)$ und $P_{3/4} = (2;\ \pm\sqrt{2})$.

24) a) $z_x = 3(y^2 + 4x^2 - 8x)$; $z_y = 6(x - 1)y$; $z_{xx} = 24(x - 1)$;

$z_{yy} = 6(x - 1)$; $z_{xy} = 6y$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 3(y^2 + 4x^2 - 8x) = 0 \\ z_y &= 6(x - 1)y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x = 1;\ y = \pm 2 \\ &y = 0;\ x = 0 \ \text{bzw.}\ x = 2 \end{aligned}$$

$(1;\pm 2)$: $\Delta = -144 < 0 \quad \Rightarrow$ *Kein* Extremwert

$(0;0)$: $\Delta = 144 > 0$ und $z_{xx}(0;0) = -24 < 0 \quad \Rightarrow$ *Maximum*

$(2;0)$: $\Delta = 144 > 0$ und $z_{xx}(2;0) = 24 > 0 \quad \Rightarrow$ *Minimum*

Extremwerte: Maximum $P_1 = (0;0;1)$; Minimum $P_2 = (2;0;-15)$

b) $z_x = (2x - x^2 - y^2)\cdot e^{-x}$; $z_y = 2y\cdot e^{-x}$; $z_{xx} = (2 - 4x + x^2 + y^2)\cdot e^{-x}$;

$z_{yy} = 2\cdot e^{-x}$; $z_{xy} = -2y\cdot e^{-x}$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= (2x - x^2 - y^2)\cdot e^{-x} = 0 \\ z_y &= 2y\cdot e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x = 0;\ y = 0 \\ &x = 2;\ y = 0 \end{aligned}$$

$(0;0)$: $\Delta = 4 > 0$ und $z_{xx}(0;0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ *Minimum*

$(2;0)$: $\Delta = -4\cdot e^{-4} < 0 \quad \Rightarrow$ *Kein* Extremwert

Extremwert: Minimum $P_1 = (0;0;0)$

c) $z_x = y + \frac{27}{x^2}$; $z_y = x - \frac{27}{y^2}$; $z_{xx} = -\frac{54}{x^3}$; $z_{yy} = \frac{54}{y^3}$; $z_{xy} = 1$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= y + \frac{27}{x^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad y = -\frac{27}{x^2} \\ z_y &= x - \frac{27}{y^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad y^2 = \frac{27}{x} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y \text{ eliminieren: } y^2 = \left(-\frac{27^2}{x^2}\right)^2 = \frac{27}{x} \quad\Rightarrow \\ &x^3 = 27 \quad\Rightarrow\quad x = 3;\quad y = -3 \end{aligned}$$

(3; −3): $\Delta = 3 > 0$ und $z_{xx}(3;\, -3) = -2 < 0 \quad\Rightarrow$ *Maximum*

Extremwert: Maximum $P_1 = (3;\, -3;\, -27)$

d) $z_x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$; $z_y = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$; $z_{xx} = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$;

$z_{yy} = \frac{1 + x^2}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$; $z_{xy} = \frac{-xy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$

$z_x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0;\quad z_y = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 0$

(0; 0): $\Delta = 1 > 0$ und $z_{xx}(0;0) = 1 > 0 \quad\Rightarrow$ *Minimum*

Extremwert: Minimum $P_1 = (0;0;1)$

e) $z_x = 6x^2 - 3y$; $z_y = -3x + 9y^2$; $z_{xx} = 12x$; $z_{yy} = 18y$; $z_{xy} = -3$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 6x^2 - 3y = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 2x^2 \\ z_y &= -3x + 9y^2 = \quad\Rightarrow\quad 3y^2 = x \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y \text{ eliminieren: } 3y^2 = 3(2x^2)^2 = x \\ &12x^4 = x \quad\Rightarrow\quad (12x^3 - 1)\,x = 0 \quad\Rightarrow \end{aligned}$$

$x_1 = 0;\quad y_1 = 0;\quad x_2 = \sqrt[3]{1/12} = 0{,}44;\quad y_2 = 0{,}38$

(0; 0): $\Delta = -9 < 0 \quad\Rightarrow$ *Kein* Extremwert

(0,44; 0,38): $\Delta = 27 > 0$ und $z_{xx}(0{,}44;\, 0{,}38) = 5{,}24 > 0 \quad\Rightarrow$ *Minimum*

Extremwert: Minimum $P_1 = (0{,}44;\, 0{,}38;\, 0{,}83)$

25) *Flächenfunktion:* $A = A(x;y) = 4xy$

Nebenbedingung: $\varphi(x;y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ (Ellipsengleichung)

Hilfsfunktion: $F(x;y;\lambda) = A(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x;y) = 4xy + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 4y + 2\lambda b^2 x = 0 \\ F_y &= 4x + 2\lambda a^2 y = 0 \end{aligned}\right\} \lambda \text{ eliminieren: } \lambda = -\frac{2y}{b^2 x} = -\frac{2x}{a^2 y} \quad\Rightarrow\quad a^2y^2 = b^2x^2$$

$F_\lambda = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad b^2x^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2 = a^2$

Maximum: $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $y = \frac{b}{2}\sqrt{2}$; $A_{\max} = 2ab$

26) *Mantelfläche:* $M = \pi r s$; $s = \frac{r}{\sin\beta}$; $h = r \cdot \cot\beta \quad\Rightarrow\quad M = M(r;\beta) = \frac{\pi r^2}{\sin\beta}$

Nebenbedingung: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \cot\beta = 10 \quad\Rightarrow$

$\varphi(r;\beta) = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \cot\beta - 10 = 0$

Hilfsfunktion: $F(r;\beta;\lambda) = M(r;\beta) + \lambda \cdot \varphi(r;\beta) = \dfrac{\pi r^2}{\sin\beta} + \lambda\left(\dfrac{1}{3}\pi r^3 \cdot \cot\beta - 10\right)$

$$F_r = \frac{2\pi r}{\sin\beta} + \lambda\pi r^2 \cdot \underbrace{\cot\beta}_{\cos\beta/\sin\beta} = \frac{\pi r}{\sin\beta}\underbrace{(2 + \lambda r \cdot \cos\beta)}_{0} = 0$$

$$F_\beta = -\frac{\pi r^2 \cdot \cos\beta}{\sin^2\beta} - \lambda\frac{\pi r^3}{3 \cdot \sin^2\beta} = -\frac{\pi r^2}{3 \cdot \sin^2\beta}\underbrace{(3 \cdot \cos\beta + \lambda r)}_{0} = 0$$

$$F_\lambda = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \cot\beta - 10 = 0$$

λ eliminieren: $\lambda = \dfrac{-2}{r \cdot \cos\beta} = \dfrac{-3 \cdot \cos\beta}{r} \quad\Rightarrow\quad \cos^2\beta = \dfrac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \beta = 35{,}264°$

Minimum: $\beta = 35{,}264°$, d. h. $\alpha = 2\beta \approx 70{,}53°$; $M_{\min} = 19{,}44\ \mathrm{dm}^2$

27) *Hilfsfunktion:* $F(x;y;\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y &= 1 + 2\lambda y = 0 \end{aligned}\right\}\ \lambda \text{ eliminieren: } \lambda = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y} \quad\Rightarrow\quad x = y$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad x^2 + x^2 - 1 = 2x^2 - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad x^2 = 1/2$$

Maximum: $x = y = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$; $z_{\max} = \sqrt{2}$

Minimum: $x = y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$; $z_{\min} = -\sqrt{2}$

28) $y_1' = a \cdot e^{ax}$; $y_2' = -b \cdot e^{-bx}$; Im Schnittpunkt $S = (0; 1)$ gilt:

$y_1'(0) \cdot y_2'(0) = -ab = -1$ (Tangenten stehen senkrecht aufeinander)

Nebenbedingung: $-ab = -1$ oder $\varphi(a;b) = ab - 1 = 0$

Fläche A: $A = A(a;b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-bx}\,dx = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Hilfsfunktion: $F(a;b;\lambda) = A(a;b) + \lambda \cdot \varphi(a;b) = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \lambda(ab - 1)$

$$\left.\begin{aligned} F_a &= -\frac{1}{a^2} + \lambda b = 0 \\ F_b &= -\frac{1}{b^2} + \lambda a = 0 \end{aligned}\right\}\ \lambda \text{ eliminieren: } \lambda = \frac{1}{a^2 b} = \frac{1}{a b^2} \quad\Rightarrow\quad a = b$$

$$F_\lambda = ab - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad a \cdot a - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad a^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad a = 1$$

Minimum: $a = b = 1$; $A_{\min} = 2$

29) *Flächenfunktion:* $A = A(x;y) = xy$

Nebenbedingung: $U = 2x + 2y = \text{const.} = c \quad\Rightarrow\quad \varphi(x;y) = 2x + 2y - c = 0$

Hilfsfunktion: $F(x;y;\lambda) = A(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x;y) = xy + \lambda(2x + 2y - c)$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = y + 2\lambda = 0 \\ F_y = x + 2\lambda = 0 \end{array}\right\} \lambda \text{ eliminieren: } \lambda = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$$F_\lambda = 2x + 2y - c = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2x - c = 4x - c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = c/4$$

Maximum: $x = y = c/4$; $A_{\max} = c^2/16$

30) *Abstand des Punktes* $P = (x;\ y;\ z)$*:* $d = d(x;\ y;\ z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Nebenbedingung (Gleichung der Ebene): $\varphi(x;\ y;\ z) = 2x + 3y + z - 14 = 0$

Hilfsfunktion: $F(x;\ y;\ z;\ \lambda) = d(x;\ y;\ z) + \lambda \cdot \varphi(x;\ y;\ z) =$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda(2x + 3y + z - 14)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2\lambda = \dfrac{x}{d} + 2\lambda = 0 \\ F_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 3\lambda = \dfrac{y}{d} + 3\lambda = 0 \\ F_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda = \dfrac{z}{d} + \lambda = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda \text{ eliminieren:} \\ \lambda = -\dfrac{x}{2d} = -\dfrac{y}{3d} = -\dfrac{z}{d} \quad \Rightarrow \\ x : y : z = 2 : 3 : 1 \quad \Rightarrow \\ x = 2z; \quad y = 3z \end{array}$$

$$F_\lambda = 2x + 3y + z - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4z + 9z + z - 14 = 14z - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

Minimum: $x = 2$; $y = 3$; $z = 1$; $d_{\min} = \sqrt{14}$

Lösung: Von allen Punkten der Ebene hat der Punkt $P = (2;\ 3;\ 1)$ den *kleinsten* Abstand vom Koordinatenursprung.

31) $a = c \cdot \sin\alpha$; $\quad \overline{a} = \overline{c} \cdot \sin\overline{\alpha} = 4{,}24$ cm

$$\Delta a_{\max} = \left|\frac{\partial a}{\partial c}\,\Delta c\right| + \left|\frac{\partial a}{\partial \alpha}\,\Delta\alpha\right| = |\sin\overline{\alpha} \cdot \Delta c| + |\overline{c} \cdot \cos\overline{\alpha} \cdot \underbrace{\Delta\alpha}_{\text{Bogenmaß!}}| = 0{,}165 \text{ cm} \approx 0{,}17 \text{ cm}$$

Messergebnis: $a = (4{,}24 \pm 0{,}17)$ cm

32) $\overline{T} = 2\pi\sqrt{\overline{L}\,\overline{C}} = 6{,}28$ ms

$$\Delta T_{\max} = \left|\frac{\partial T}{\partial C}\,\Delta C\right| + \left|\frac{\partial T}{\partial L}\,\Delta L\right| = \frac{\pi}{\sqrt{\overline{L}\,\overline{C}}}(\overline{L}\,\Delta C + \overline{C}\,\Delta L) = 0{,}28 \text{ ms}$$

Messergebnis: $T = (6{,}28 \pm 0{,}28)$ ms

33) a) $\overline{R}_1 = \dfrac{\sum_i R_{1i}}{6} = \dfrac{582\ \Omega}{6} = 97\ \Omega$; $\quad \sum_i (R_{1i} - \overline{R}_1)^2 = 4{,}16\ \Omega^2$;

$$\Delta R_1 = \sqrt{\frac{4{,}16}{5 \cdot 6}}\ \Omega = 0{,}37\ \Omega;$$

Messergebnis: $R_1 = \overline{R}_1 \pm \Delta R_1 = (97{,}0 \pm 0{,}37)\ \Omega$

Analog: $\overline{R}_2 = 41{,}5\ \Omega$; $\quad \Delta R_2 = 0{,}38\ \Omega$;

Messergebnis: $R_2 = \overline{R}_2 \pm \Delta R_2 = (41{,}5 \pm 0{,}38)\ \Omega$

b) $\overline{R} = \dfrac{\overline{R}_1 \, \overline{R}_2}{\overline{R}_1 + \overline{R}_2} = 29{,}06\,\Omega$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2 (R_1 + R_2) - 1 \cdot R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\,; \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$\Delta R_{\max} = \left| \frac{\partial R}{\partial R_1} \Delta R_1 \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial R_2} \Delta R_2 \right| = \frac{\overline{R}_2^2 \, \Delta R_1 + \overline{R}_1^2 \, \Delta R_2}{(\overline{R}_1 + \overline{R}_2)^2} = 0{,}22\,\Omega$$

Messergebnis: $R = (29{,}06 \pm 0{,}22)\,\Omega$

34) a) Lösungsweg wie in 33); $b = (18{,}0 \pm 0{,}10)\,\text{cm}$; $h = (10{,}0 \pm 0{,}11)\,\text{cm}$

b) $\overline{W} = \dfrac{1}{6}\, \overline{b}\, \overline{h}^2 = 300\,\text{cm}^3$

$$\Delta W_{\max} = \left| \frac{\partial W}{\partial b} \Delta b \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial h} \Delta h \right| = \frac{1}{6}\, \overline{h}^2\, \Delta b + \frac{1}{3}\, \overline{b}\, \overline{h}\, \Delta h = 8{,}27\,\text{cm}^3 \approx 8{,}3\,\text{cm}^3$$

Messergebnis: $W = (300 \pm 8{,}3)\,\text{cm}^3$

35) $m = m(R; \varrho) = \varrho V = \dfrac{4}{3}\pi \varrho R^3$; $\overline{m} = \dfrac{4}{3}\pi \overline{\varrho}\, \overline{R}^3 = 19\,015{,}5\,\text{g} \approx 19{,}016\,\text{kg}$

$$\Delta m_{\max} = \left| \frac{\partial m}{\partial R} \Delta R \right| + \left| \frac{\partial m}{\partial \varrho} \Delta \varrho \right| = 4\pi \overline{\varrho}\, \overline{R}^2\, \Delta R + \frac{4}{3}\pi \overline{R}^3\, \Delta \varrho = 1538{,}1\,\text{g} \approx 1{,}538\,\text{kg}$$

Messergebnis: $m = (19{,}016 \pm 1{,}538)\,\text{kg}$

Abschnitt 3

Hinweis: Die gewöhnlichen Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte). In vielen Fällen lassen sich die Mehrfachintegrale als *Produkte* gewöhnlicher Integrale darstellen.

1) a) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx \cdot \int_1^e \frac{1}{y}\,dy = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \cdot \Big[\ln|y| \Big]_1^e = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

b) $\displaystyle\int_{y=0}^{1-x} (2xy - x^2 - y^2)\,dy = \left[xy^2 - x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{1-x} =$

$$= x(1-x)^2 - x^2(1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^3 = \frac{1}{3}(7x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 (7x^3 - 12x^2 + 6x - 1)\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{7}{4} x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x \right]_0^3 = \frac{77}{4}$$

2) Kurvenschnittpunkte (Bild A-9): $\cos x = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1{,}455$ (berechnet mit dem Startwert $x_0 = 1{,}5$)

$$A = 2 \cdot \int_{x=0}^{1{,}455} \int_{y=x^2-2}^{\cos x} 1 \, dy \, dx = 2 \cdot \int_{0}^{1{,}455} (\cos x - x^2 + 2) \, dx =$$

$$= 2 \left[\sin x - \frac{1}{3} x^3 + 2x \right]_0^{1{,}455} = 5{,}753$$

3) Kurvenschnittpunkte (Bild A-10): $x^2 = -x + 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0 \quad \Rightarrow$
$x_1 = -3; \quad x_2 = 2$

$$A = \int_{x=-3}^{2} \int_{y=x^2}^{-x+6} 1 \, dy \, dx = \int_{-3}^{2} (-x + 6 - x^2) \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 + 6x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

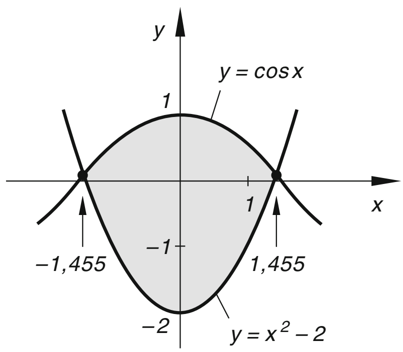


Bild A-9

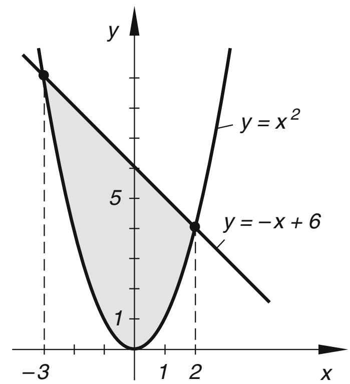


Bild A-10

4) $$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a\varphi} r \, dr \, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \varphi^2 \, d\varphi = \frac{1}{6} a^2 \left[\varphi^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3 \quad \text{(Bild A-11)}$$

5) $$A = \int_{\varphi=\pi/3}^{3\pi/2} \int_{r=0}^{e^{0{,}1\varphi}} r \, dr \, d\varphi = \int_{\pi/3}^{3\pi/2} \frac{1}{2} \cdot e^{0{,}2\varphi} \, d\varphi = \frac{5}{2} \left[e^{0{,}2\varphi} \right]_{\pi/3}^{3\pi/2} = 3{,}333 \quad \text{(Bild A-12)}$$

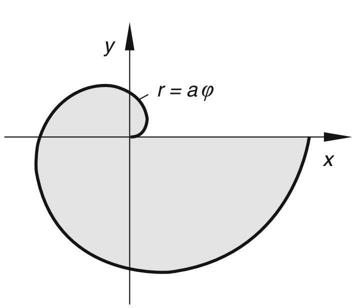


Bild A-11

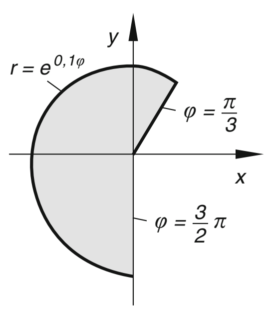


Bild A-12

6)

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin(2\varphi)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Die Kurve verläuft wegen $\sin(2\varphi) \ge 0$ nur im 1. und 3. Quadrant (identische Teilflächen; Bild A-13 zeigt den Kurvenverlauf im 1. Quadrant).

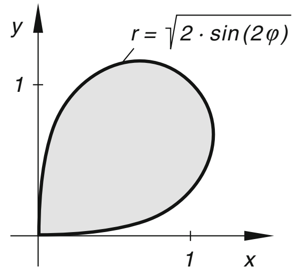


Bild A-13

$$A = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\sqrt{2\cdot\sin(2\varphi)}} r\,dr\,d\varphi = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi)\,d\varphi = \Big[-\cos(2\varphi)\Big]_0^{\pi/2} = 2$$

7) Kurvenschnittpunkte (Bild A-14): $-x(x-3) = -2x \;\Rightarrow\; x^2 - 5x = x(x-5) = 0 \;\Rightarrow$ $x_1 = 0;\; x_2 = 5$

a) $$A = \int_{x=0}^{5} \int_{y=-2x}^{-x^2+3x} 1\,dy\,dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

b) $$x_S = \frac{6}{125} \cdot \int_{x=0}^{5} \int_{y=-2x}^{-x^2+3x} x\,dy\,dx = \frac{6}{125} \cdot \int_0^5 x(-x^2 + 3x + 2x)\,dx =$$

$$= \frac{6}{125} \cdot \int_0^5 x(-x^2 + 5x)\,dx = \frac{6}{125} \cdot \int_0^5 (-x^3 + 5x^2)\,dx =$$

$$= \frac{6}{125}\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3\right]_0^5 = 2{,}5$$

$$y_S = \frac{6}{125} \cdot \int_{x=0}^{5} \int_{y=-2x}^{-x^2+3x} y\,dy\,dx =$$

$$= \frac{3}{125} \cdot \int_0^5 [(-x^2 + 3x)^2 - (-2x)^2]\,dx =$$

$$= \frac{3}{125} \cdot \int_0^5 (x^4 - 6x^3 + 5x^2)\,dx =$$

$$= \frac{3}{125}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3\right]_0^5 = -2{,}5$$

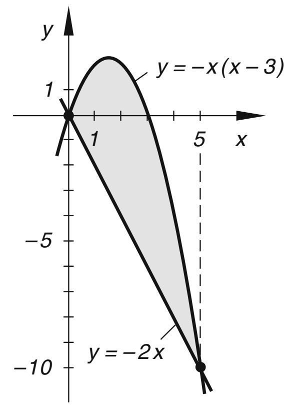


Bild A-14

8) Die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur x-Achse (siehe Bild III-61 in Kap. III, Abschnitt 3.1.3), der Schwerpunkt S liegt daher auf der x-Achse: $y_S = 0$.

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cdot \cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2} \left[\varphi + 2 \cdot \sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi + \pi) = \frac{3}{2}\pi \quad \text{(Integral: 229 mit } a = 1\text{)}$$

$$x_S = \frac{2}{3\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r^2 \cdot \cos\varphi\, dr\, d\varphi = \frac{2}{9\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^3 \cdot \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{9\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + 3 \cdot \cos^2\varphi + 3 \cdot \cos^3\varphi + \cos^4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{9\pi} \left[\sin\varphi + 3\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right) + 3\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right) + \frac{\cos^3\varphi \cdot \sin\varphi}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right) \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{9\pi}\left(3\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{2}{9\pi} \cdot \frac{15}{4}\pi = \frac{5}{6}$$

(Integrale: 229, 230 mit $a = 1$ und 231 mit $n = 4$ und $a = 1$)

9) Kurvenschnittpunkte (Bild A-15): $2 - 3x^2 = -x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$
Die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse, der Schwerpunkt S liegt daher auf der y-Achse: $x_S = 0$.

$$A = 2 \cdot \int_{x=0}^{1} \int_{y=-x^2}^{2-3x^2} 1\, dy\, dx = 2 \cdot \int_0^1 (2 - 2x^2)\, dx = 2\left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$y_S = \frac{3}{8} \cdot 2 \cdot \int_{x=0}^{1} \int_{y=-x^2}^{2-3x^2} y\, dy\, dx =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \int_0^1 [(2 - 3x^2)^2 - (-x^2)^2]\, dx =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \int_0^1 (4 - 12x^2 + 8x^4)\, dx =$$

$$= \frac{3}{8}\left[4x - 4x^3 + \frac{8}{5}x^5\right]_0^1 = 0{,}6$$

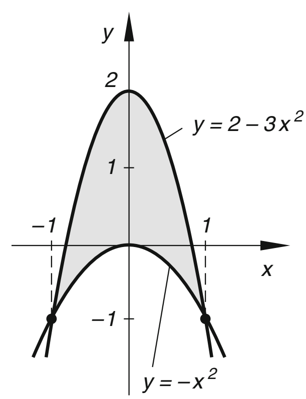


Bild A-15

10) Die Integrale jeweils in *zwei* Teilintegrale aufspalten, da die Gerade $y = x$ im Intervall $-1 \le x \le 0$ *untere* Berandung, im Intervall $0 \le x \le 3$ dagegen *obere* Berandung ist. Flächeninhalt (elementar berechnet): $A = 5$

$$x_S = \frac{1}{5}\left[\int_{x=-1}^{0}\int_{y=x}^{0} x\,dy\,dx + \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{x} x\,dy\,dx\right] = \frac{1}{5}\left[\int_{-1}^{0}(-x^2)\,dx + \int_{0}^{3} x^2\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3}\right] = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3} + 9\right) = \frac{26}{15}$$

$$y_S = \frac{1}{5}\left[\int_{x=-1}^{0}\int_{y=x}^{0} y\,dy\,dx + \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{x} y\,dy\,dx\right] = \frac{13}{15}$$

11) Nach Bild A-16:

$$A = \int_{x=1}^{5}\int_{y=0,1x-0,1}^{\ln x} 1\,dy\,dx = \int_{1}^{5}(\ln x - 0{,}1\,x + 0{,}1)\,dx =$$

$$= \left[x \cdot \ln x - x - 0{,}05\,x^2 + 0{,}1\,x\right]_1^5 = 3{,}247 \quad \text{(Integral: 332)}$$

$$x_S = \frac{1}{3{,}247}\cdot\int_{x=1}^{5}\int_{y=0,1x-0,1}^{\ln x} x\,dy\,dx = \frac{1}{3{,}247}\cdot\int_{1}^{5}(x \cdot \ln x - 0{,}1\,x^2 + 0{,}1\,x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3{,}247}\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{20}x^2\right]_1^5 = 3{,}445 \quad \text{(Integral: 337)}$$

$$y_S = \frac{1}{3{,}247}\cdot\int_{x=1}^{5}\int_{y=0,1x-0,1}^{\ln x} y\,dy\,dx = \frac{1}{6{,}494}\cdot\int_{1}^{5}\left((\ln x)^2 - \frac{1}{100}x^2 + \frac{2}{100}x - \frac{1}{100}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{6{,}494}\left[x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x - \frac{1}{300}x^3 + \frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{100}x\right]_1^5 = 0{,}715$$

(Integral: 333)

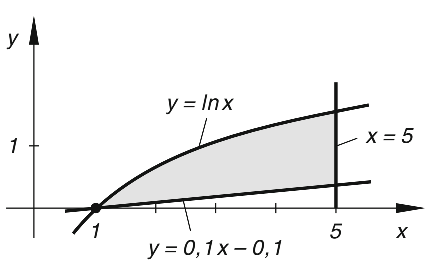


Bild A-16

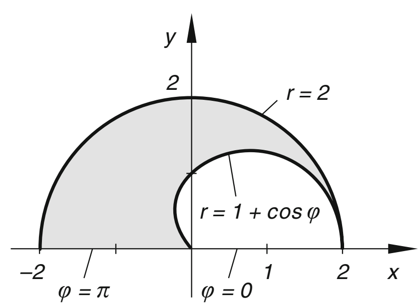


Bild A-17

12) Nach Bild A-17:

$$A = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=1+\cos\varphi}^{2} r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\pi} [4 - (1 + \cos\varphi)^2] \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\pi} (3 - 2 \cdot \cos\varphi - \cos^2\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2} \left[3\varphi - 2 \cdot \sin\varphi - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{5}{4} \pi \quad \text{(Integral: 229 mit } a = 1)$$

$$x_S = \frac{4}{5\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=1+\cos\varphi}^{2} r^2 \cdot \cos\varphi \, dr \, d\varphi = \frac{4}{15\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} [8 - (1 + \cos\varphi)^3] \cdot \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{15\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} (7 \cdot \cos\varphi - 3 \cdot \cos^2\varphi - 3 \cdot \cos^3\varphi - \cos^4\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{15\pi} \left[7 \cdot \sin\varphi - 3 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) - 3 \left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \right) - \frac{\cos^3\varphi \cdot \sin\varphi}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \right]_0^{\pi} = \frac{4}{15\pi} \left(-\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{8}\pi \right) = \frac{4}{15\pi} \left(-\frac{15}{8}\pi \right) = -0{,}5$$

(Integrale: 229, 230 mit $a = 1$; 231 mit $n = 4$ und $a = 1$)

$$y_S = \frac{4}{5\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=1+\cos\varphi}^{2} r^2 \cdot \sin\varphi \, dr \, d\varphi = \frac{4}{15\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} [8 - (1 + \cos\varphi)^3] \cdot \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{15\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} (7 \cdot \sin\varphi - 3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - 3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi - \sin\varphi \cdot \cos^3\varphi) \, dy =$$

$$= \frac{4}{15\pi} \left[-7 \cdot \cos\varphi - \frac{3}{2} \cdot \sin^2\varphi + \cos^3\varphi + \frac{1}{4} \cdot \cos^4\varphi \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{15\pi} \left(7 - 1 + \frac{1}{4} + 7 - 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{15\pi} \cdot 12 = \frac{16}{5\pi} = 1{,}019$$

(Integrale: 254 mit $a = 1$; 256 mit $a = 1$ und $n = 2$ bzw. $n = 3$)

13) $$I_x = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{R} r^3 \cdot \sin^2\varphi \, dr \, d\varphi = \int_{0}^{\pi/2} \sin^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_{0}^{R} r^3 \, dr =$$

$$= \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^{R} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{\pi}{16} R^4$$

$I_y = I_x = \frac{\pi}{16} R^4$ (aus Symmetriegründen); $\quad I_p = I_x + I_y = \frac{\pi}{8} R^4$

(Integral: 205 mit $a = 1$)

14) Kurvenschnittpunkte: $\cos x = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm \pi/3 \quad \Rightarrow \quad a = -\pi/3\,; \quad b = \pi/3$

a) $$A = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{\pi/3} \int\limits_{y=0{,}5}^{\cos x} 1\, dy\, dx = 2 \cdot \int\limits_{0}^{\pi/3} (\cos x - 0{,}5)\, dx = 2 \left[\sin x - 0{,}5\, x \right]_0^{\pi/3} = 0{,}685$$

b) $x_S = 0$ (aus Symmetriegründen, die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse)

$$y_S = \frac{1}{0{,}685} \cdot 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{\pi/3} \int\limits_{y=0{,}5}^{\cos x} y\, dy\, dx = \frac{1}{0{,}685} \cdot \int\limits_{0}^{\pi/3} (\cos^2 x - 0{,}25)\, dx =$$

$$= \frac{1}{0{,}685} \cdot \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} - 0{,}25\, x \right]_0^{\pi/3} = 0{,}698 \quad \text{(Integral: 229 mit } a = 1\text{)}$$

c) $$I_x = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{\pi/3} \int\limits_{y=0{,}5}^{\cos x} y^2\, dy\, dx = \frac{2}{3} \cdot \int\limits_{0}^{\pi/3} (\cos^3 x - 0{,}125)\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - 0{,}125\, x \right]_0^{\pi/3} = 0{,}346 \quad \text{(Integral: 230 mit } a = 1\text{)}$$

$$I_y = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{\pi/3} \int\limits_{y=0{,}5}^{\cos x} x^2\, dy\, dx = 2 \cdot \int\limits_{0}^{\pi/3} (x^2 \cdot \cos x - 0{,}5\, x^2)\, dx =$$

$$= 2 \left[2x \cdot \cos x + (x^2 - 2) \cdot \sin x - \frac{1}{6}\, x^3 \right]_0^{\pi/3} = 0{,}147 \quad \text{(Integral: 233 mit } a = 1\text{)}$$

$$I_p = I_x + I_y = 0{,}493$$

15) Profil spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

$$I_x = 2 \left[\int\limits_{x=0}^{a} \int\limits_{y=0}^{2a} y^2\, dy\, dx + \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=0}^{a} y^2\, dy\, dx \right] = 2 \left[\int\limits_{0}^{a} \frac{8}{3}\, a^3\, dx + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{3}\, a^3\, dx \right] =$$

$$= 2 \left[\frac{8}{3}\, a^3 \left[x \right]_0^a + \frac{1}{3}\, a^3 \left[x \right]_a^b \right] = 2 \left(\frac{7}{3}\, a^4 + \frac{1}{3}\, a^3 b \right) = \frac{2}{3}\, a^3 (7a + b)$$

$$I_y = 2 \left[\int\limits_{x=0}^{a} \int\limits_{y=0}^{2a} x^2\, dy\, dx + \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=0}^{a} x^2\, dy\, dx \right] = 2 \left(\frac{1}{3}\, a^4 + \frac{1}{3}\, a b^3 \right) = \frac{2}{3}\, a (a^3 + b^3)$$

$$I_p = I_x + I_y = \frac{2}{3}\, a (8a^3 + a^2 b + b^3)$$

16) $$I_p = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{\sqrt[4]{\cos(\varphi/4)}} r^3\, dr\, d\varphi = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{4} \cdot \cos(\varphi/4)\, d\varphi = \left[\sin(\varphi/4) \right]_0^{\pi} = 0{,}707$$

17) a) *Kreisgleichung* in Polarkoordinaten: $r = 2R \cdot \cos\varphi, \; -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$

Herleitung: $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ in die vorgegebene Kreisgleichung einsetzen. Die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur x-Achse (Faktor 2 bei den nachfolgenden Integralen).

$$I_x = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2R \cdot \cos\varphi} r^3 \cdot \sin^2\varphi \, dr \, d\varphi = 8R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cdot \cos^4\varphi \, d\varphi =$$

$$= 8R^4 \left[\frac{\sin^3\varphi \cdot \cos^3\varphi}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin(4\varphi)}{32} \right) \right]_0^{\pi/2} = 8R^4 \cdot \frac{1}{32}\pi = \frac{\pi}{4} R^4$$

(Integrale: 258 mit $a = 1$, $m = 2$ und $n = 4$; 257 mit $a = 1$)

$$I_y = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2R \cdot \cos\varphi} r^3 \cdot \cos^2\varphi \, dr \, d\varphi = 8R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi \, d\varphi =$$

$$= 8R^4 \left[\frac{\cos^5\varphi \cdot \sin\varphi}{6} + \frac{5 \cdot \cos^3\varphi \cdot \sin\varphi}{24} + \frac{5}{8} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{5}{4}\pi R^4$$

(Integrale: 231 mit $a = 1$ und $n = 6$ bzw. $n = 4$; 229 mit $a = 1$)

$$I_p = I_x + I_y = \frac{3}{2}\pi R^4$$

b) *x-Achse* ist Schwerpunktachse: $I_x = I_{x_0} = \dfrac{\pi}{4} R^4$

y-Achse verläuft im Abstand $d = R$ parallel zur Schwerpunktachse S_y:

$$I_y = I_S + A\,d^2 = I_{y_0} + A\,d^2 = \frac{\pi}{4} R^4 + \pi R^4 = \frac{5}{4}\pi R^4$$

z-Achse verläuft im Abstand $d = R$ parallel zur Schwerpunktachse S_z:

$$I_p = I_S + A\,d^2 = I_{p_0} + A\,d^2 = \frac{\pi}{2} R^4 + \pi R^4 = \frac{3}{2}\pi R^4$$

18) Nach Aufgabe 13) ist $I_x = I_y = \dfrac{\pi}{8} R^4$ und $I_p = \dfrac{\pi}{4} R^4$. Aus Bild A-18 folgt dann für die durch den Schwerpunkt $S = \left(0; \dfrac{4}{3\pi} R\right)$ gehenden Achsen nach dem *Steinerschen Satz*:

Schwerpunktachse S_x: $I_x = I_{S_x} + A\,y_S^2 \quad \Rightarrow \quad I_{S_x} = I_x - A\,y_S^2 = 0{,}110\,R^4$

Schwerpunktachse S_y (= *y-Achse*):

$$I_y = I_{S_y} \quad \Rightarrow \quad I_{S_y} = \frac{\pi}{8} R^4$$

Schwerpunktachse S_p (parallel zur z-Achse):

$$I_p = I_{S_p} + A\,y_S^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_{S_p} = I_p - A\,y_S^2 = 0{,}502\,R^4$$

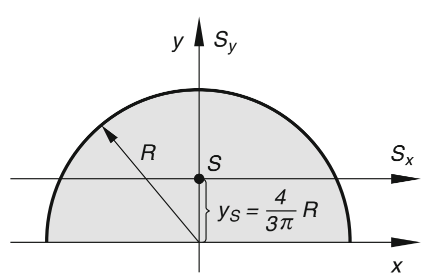


Bild A-18

19) a) $$\int_{z=0}^{\pi} x^2 y \cdot \cos(yz)\,dz = x^2 y \cdot \int_{z=0}^{\pi} \cos(yz)\,dz = x^2 y \left[\frac{\sin(yz)}{y}\right]_{z=0}^{\pi} = x^2 \cdot \sin(\pi y)$$

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=1}^{4} x^2 \cdot \sin(\pi y)\,dy\,dx = \int_0^1 x^2\,dx \cdot \int_1^4 \sin(\pi y)\,dy =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \cdot \left[-\frac{\cos(\pi y)}{\pi}\right]_1^4 = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{2}{3\pi}$$

b) $$\int_{z=y}^{y^2} y \cdot \sin x \cdot z\,dz = y \cdot \sin x \cdot \int_{z=y}^{y^2} z\,dz = y \cdot \sin x \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=y}^{y^2} = \frac{1}{2}(y^5 - y^3) \cdot \sin x$$

$$I = \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} \frac{1}{2}(y^5 - y^3) \cdot \sin x\,dy\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \cdot \int_0^1 (y^5 - y^3)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{6}y^6 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{24}$$

20) Gleichung der Ellipse im x, z-Koordinatensystem: $b^2 x^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2$. Mit der Substitution $x \rightarrow r$ erhält man hieraus die Funktionsgleichung der Oberfläche des *Rotationsellipsoids* (in Zylinderkoordinaten):

$$b^2 r^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$$

(obere und untere Begrenzungsfläche, sie liefern die Grenzen der z-Integration). Projektionsbereich in der x, y-Ebene ist der *Kreis* mit dem Radius a: $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Aus *Symmetriegründen* ist dann (die x, y-Ebene halbiert den Körper, Faktor 2 im Integral):

$$V = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \int_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \frac{b}{a} r\sqrt{a^2 - r^2}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{2b}{a} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\,dr}_{\text{Integral 142}} = \frac{2b}{a} \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - r^2)^3}\right]_0^a =$$

$$= \frac{4\pi b}{a} \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b \quad \text{(Integral: 142)}$$

21) Gleichung des Kreises: $x^2 + z^2 = R^2$. Die Substitution $x \rightarrow r$ liefert hieraus die Gleichung der Kugeloberfläche (in Zylinderkoordinaten): $r^2 + z^2 = R^2$. *Obere* Begrenzungsfläche ist $z = \sqrt{R^2 - r^2}$, *untere* Begrenzungsfläche die zur x, y-Ebene parallele *Ebene* $z = R - h$. Die Projektion der Kugelhaube in die x, y-Ebene ergibt einen *Kreis* vom Radius R_0, für den nach Bild III-101 (Seite 341) gilt: $R_0^2 + (R - h)^2 = R^2$, d. h. $R_0 = \sqrt{2Rh - h^2}$. Daher gilt für die Projektionsfläche (Kreisfläche): $0 \le r \le R_0$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0} \int_{z=R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0} r\left[\sqrt{R^2-r^2}-(R-h)\right] dr\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{R_0} \left[r\sqrt{R^2-r^2}\right.}_{\text{Integral 142 mit } a\,=\,R} \left. -(R-h)\,r\right] dr =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(R^2-r^2)^3} - \frac{1}{2}(R-h)\,r^2\right]_0^{R_0} =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(\underbrace{R^2-R_0^2}_{(R-h)^2})^3} - \frac{1}{2}(R-h)\underbrace{R_0^2}_{2Rh-h^2} + \frac{1}{3}R^3\right] =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(R-h)^3 - \frac{1}{2}(R-h)(2Rh-h^2) + \frac{1}{3}R^3\right] = \frac{\pi}{3}h^2(3R-h)$$

Berechnung des *Schwerpunktes* $S = (0; 0; z_S)$ auf der z-Achse:

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0} \int_{z=R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi = \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0} \frac{1}{2}\,r\,[\underbrace{R^2-r^2-(R-h)^2}_{-r^2+2Rh-h^2\,=\,-r^2+R_0^2}]\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2V} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^{R_0} (-r^3+R_0^2\,r)\,dr = \frac{\pi}{V}\left[-\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}R_0^2 r^2\right]_0^{R_0} = \frac{\pi}{V} \cdot \frac{1}{4}R_0^4 =$$

$$= \frac{\pi R_0^4}{4V} = \frac{3\pi(2Rh-h^2)^2}{4\pi h^2(3R-h)} = \frac{3h^2(2R-h)^2}{4h^2(3R-h)} = \frac{3(2R-h)^2}{4(3R-h)}$$

22) Gleichung des (rotierenden) *Kreises*: $(x-R)^2 + z^2 = r_0^2$. Mit der Substitution $x \to r$ erhält man hieraus die Gleichung des *Torus* (in Zylinderkoordinaten): $(r-R)^2 + z^2 = r_0^2$. Damit ist $z = \sqrt{r_0^2 - (r-R)^2}$ mit $R - r_0 \le r \le R + r_0$ die Gleichung der *oberen* Randfläche und $z = 0$ die *untere* Randfläche (die x, y-Ebene *halbiert* den Torus, daher Faktor 2 bei der Integration). Die Projektion des Torus in die x, y-Ebene ergibt den in Bild A-19 skizzierten *Kreisring* mit dem Innenradius $r_i = R - r_0$ und dem Außenradius $r_a = R + r_0$.

$$V = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R-r_0}^{R+r_0} \int_{z=0}^{\sqrt{r_0^2-(r-R)^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R-r_0}^{R+r_0} r\sqrt{r_0^2-(r-R)^2}\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_{R-r_0}^{R+r_0} r\sqrt{r_0^2 - (\underbrace{r-R}_{u})^2}\,dr$$

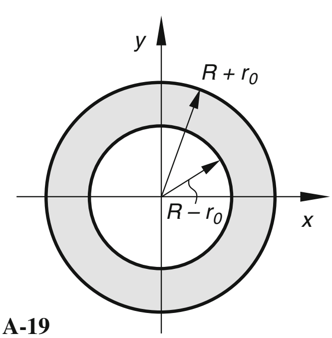


Bild A-19

Substitution: $u = r - R, \ r = u + R, \ dr = du$; untere bzw. obere Grenze: $-r_0$ bzw. r_0

$$V = 4\pi \cdot \int_{-r_0}^{r_0} (u + R)\sqrt{r_0^2 - u^2}\, du = 4\pi \cdot \int_{-r_0}^{r_0} \left(u\sqrt{r_0^2 - u^2} + R\sqrt{r_0^2 - u^2} \right) du =$$

$$= 4\pi \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(r_0^2 - u^2)^3} + \frac{R}{2}\left(u\sqrt{r_0^2 - u^2} + r_0^2 \cdot \arcsin\left(\frac{u}{r_0}\right)\right)\right]_{-r_0}^{r_0} =$$

$$= 4\pi\left[\frac{R}{2}\,(r_0^2 \cdot \underbrace{\arcsin 1}_{\pi/2} - r_0^2 \cdot \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\pi/2})\right] = 4\pi \cdot \frac{R}{2}\, r_0^2 \cdot \pi = 2\pi^2 R r_0^2$$

(Integrale: 142 und 141, jeweils mit $a = r_0$)

23) Wir denken uns die Wassermenge m im *Schwerpunkt* $S = (0; 0; z_S)$ der mit Wasser gefüllten Halbkugel vereinigt. Für die *Mindestarbeit* (Hubarbeit!) gilt dann:

$W_{\min} = m g z_S$ (Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$)

Schwerpunktberechnung (auf zwei verschiedene Arten)

a) Wir beziehen uns auf Aufgabe 21) (Kugelhaube). Für $h = R$ geht die Kugelhaube in eine *Halbkugel* über, deren Schwerpunkt vom Mittelpunkt der Kugel die Entfernung $\frac{3}{8}R$ besitzt. Der Schwerpunkt der gefüllten Halbkugel liegt somit auf der z-Achse im Abstand von $\frac{5}{8}R = \frac{15}{8}$ m über dem *tiefsten* Punkt. Somit gilt für die Höhenkoordinate des Schwerpunktes:

$$z_S = 10\,\text{m} + \frac{15}{8}\,\text{m} = \frac{95}{8}\,\text{m} = 11{,}875\,\text{m}$$

b) Berechnung der Schwerpunktskoordinate über ein *Dreifachintegral*: Der kugelförmige Behälter entsteht durch Drehung des Kreises $x^2 + (z - 13)^2 = 9$ um die z-Achse. Die Kugeloberfläche lautet damit in Zylinderkoordinaten (Substitution $x \to r$): $r^2 + (z - 13)^2 = 9$

Untere Randfläche: $z = 13 - \sqrt{9 - r^2}$

Obere Randfläche: $z = 13$ (Ebene parallel zur x, y-Ebene)

Projektion in die x, y-Ebene ergibt den *Integrationsbereich* (Kreisfläche) $0 \le r \le 3$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Volumen der Halbkugel: $V = 18\pi$ (in m^3).

$$z_S = \frac{1}{18\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3} \int_{z=13-\sqrt{9-r^2}}^{13} r\,z\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{18\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3} \frac{1}{2}\, r\,[\underbrace{169 - (13 - \sqrt{9 - r^2})^2}_{26\sqrt{9 - r^2} - 9 + r^2}]\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{36\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^3 (26\,r\sqrt{9 - r^2} - 9r + r^3)\,dr}_{\text{Integral 142 mit } a = 3} =$$

$$= \frac{1}{36\pi} \cdot 2\pi\left[-\frac{26}{3}\sqrt{(9 - r^2)^3} - \frac{9}{2}\,r^2 + \frac{1}{4}\,r^4\right]_0^3 = 11{,}875 \quad (\text{in m})$$

Berechnung der Mindestarbeit

Mit der Wassermenge $m = \varrho V = \varrho \left(\frac{2}{3} \pi R^3 \right) = 56\,548{,}7\,\mathrm{kg}$ folgt dann:

$W_{\min} = m g z_S = 6\,587\,566\,\mathrm{Nm}$

24) Gleichung des Kegelmantels in Zylinderkoordinaten (siehe hierzu Bild III-75 in Kap. III):

$z = -\frac{H}{R}(r - R)$ mit $0 \le r \le R$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$

Kegelvolumen: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

$$z_S = \frac{3}{\pi R^2 H} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi = \frac{3H}{2\pi R^4} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r\,(r - R)^2\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{3H}{2\pi R^4} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^R (r^3 - 2Rr^2 + R^2 r)\,dr =$$

$$= \frac{3H}{2\pi R^4} \cdot 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{2}{3} R r^3 + \frac{1}{2} R^2 r^2 \right]_0^R = \frac{3H}{R^4} \cdot \frac{1}{12} R^4 = \frac{H}{4}$$

25) Randflächen (siehe Bild A-20): $z = 3$ (oben) und $z = \sqrt{r}$ (unten):

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \int_{z=\sqrt{r}}^{3} r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} r\,(3 - \sqrt{r})\,dr\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^9 (3r - r^{3/2})\,dr = 2\pi \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{2}{5} r^{5/2} \right]_0^9 = 48{,}6\,\pi$$

$$z_S = \frac{1}{48{,}6\,\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \int_{z=\sqrt{r}}^{3} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi = \frac{1}{48{,}6\,\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{9} \frac{1}{2} r\,(9 - r)\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 48{,}6\,\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^9 (9r - r^2)\,dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot 48{,}6} \cdot 2\pi \left[\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^9 =$$

$$= \frac{1}{48{,}6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot 729 = 2{,}5$$

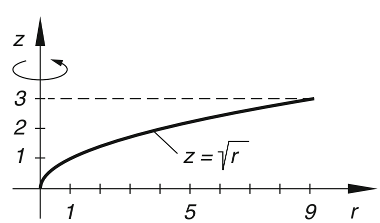


Bild A-20

Schwerpunkt: $S = (0;\,0;\,2{,}5)$

26) a) Obere Halbkugel (siehe Bild III-76 in Kap. III) in Zylinderkoordinaten: $r^2 + z^2 = R^2$ (mit $z \ge 0$). Somit: $z = \sqrt{R^2 - r^2}$ mit $0 \le r \le R$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$J = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} r^3 \, dz \, dr \, d\varphi = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r^3 \sqrt{R^2 - r^2} \, dr \, d\varphi =$$

$$= \varrho \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} \, dr}_{\text{Integral 144 mit } a = R} = 2\pi\varrho \left[\frac{1}{5} \sqrt{(R^2 - r^2)^5} - \frac{R^2}{3} \sqrt{(R^2 - r^2)^3} \right]_0^R =$$

$$= 2\pi\varrho \left(-\frac{1}{5} R^5 + \frac{1}{3} R^5 \right) = 2\pi\varrho \cdot \frac{2}{15} R^5 = \frac{4}{15} \pi\varrho R^5$$

b) Nach a) folgt für das Massenträgheitsmoment einer *Vollkugel*, bezogen auf einen *Durchmesser* (Symmetrieachse = Schwerpunktachse):

$$J_S = 2J = \frac{8}{15} \pi\varrho R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \quad \left(\text{Masse } m = \varrho V = \varrho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

Der Abstand zwischen der Symmetrieachse und der Tangente beträgt $d = R$. Der *Satz von Steiner* liefert dann für das auf eine *Tangente* bezogene Massenträgheitsmoment J_T:

$$J_T = J_S + m R^2 = \frac{2}{5} m R^2 + m R^2 = \frac{7}{5} m R^2$$

27) $$J_S = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{z=0}^{H} r^3 \, dz \, dr \, d\varphi = \varrho \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 \, dr \cdot \underbrace{\int_0^H 1 \, dz}_{H} =$$

$$= \varrho \cdot 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{R_1}^{R_2} \cdot H = \frac{1}{2} \pi\varrho H (R_2^4 - R_1^4)$$

28) a) $R_1 = 0, \quad R_2 = R \quad \Rightarrow \quad J_S = \frac{1}{2} \pi\varrho H R^4 = \frac{1}{2} m R^2$ (Masse: $m = \varrho V = \varrho\pi R^2 H$)

b) Nach *Steiner* (Abstand Mantellinie − Symmetrieachse: $d = R$):

$$J_M = J_S + m d^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

29) Nach Bild III-75 in Kap. III (siehe auch Lösung zur Aufgabe 24):

$$J = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} r^3 \, dz \, dr \, d\varphi = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{H}{R} (R r^3 - r^4) \, dr \, d\varphi =$$

$$= \frac{\varrho H}{R} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^R (R r^3 - r^4) \, dr = \frac{\varrho H}{R} \cdot 2\pi \left[\frac{1}{4} R r^4 - \frac{1}{5} r^5 \right]_0^R =$$

$$= \frac{2\pi\varrho \mathrm{H}}{R} \cdot \frac{1}{20} R^5 = \frac{1}{10} \pi\varrho H R^4 = \frac{3}{10} m R^2 \quad \left(\text{Masse: } m = \varrho V = \frac{1}{3} \pi\varrho R^2 H \right)$$

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

Hinweise

1) Abkürzung: Dgl = Differentialgleichung
2) $C, C_1, C_2, C_3 \ldots$ bzw. K: reelle Integrationskonstanten
3) Die anfallenden Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte).
4) Vorgehensweise bei der Bestimmung der Parameter im Lösungsansatz für eine *partikuläre* Lösung y_p: Den Ansatz y_p aus der entsprechenden *Tabelle* entnehmen und in die Dgl einsetzen. Die erhaltene *Bestimmungsgleichung* mit den noch unbekannten Parametern und der unabhängigen Variablen (in der Regel x bzw. t) haben wir grau unterlegt. Der *Koeffizientenvergleich* (fehlende Glieder mit dem Faktor 0 ergänzen) führt dann zu einem eindeutig lösbaren *linearen Gleichungssystem.*

Abschnitt 1

1) y und y' in die Dgl einsetzen (Ergebnis: $0 = 0$). y enthält genau *einen* Parameter C und ist somit die *allgemeine* Lösung der Dgl. Lösungskurve durch P: $y = \dfrac{16x}{1 + x}$.
2) y, y' und y'' in die Dgl einsetzen (Ergebnis: $0 = 0$). y ist die *allgemeine* Lösung der Dgl, da diese Funktion *zwei* unabhängige Parameter (C_1 und C_2) enthält.
3) Man differenziert $u_C(t)$ und setzt anschließend Funktion und Ableitung in die Dgl ein und erhält die *Identität* $u_0 = u_0$.
4) $s(t) = 5 \cdot \cos t, \qquad v(t) = -5 \cdot \sin t$

Abschnitt 2

1) a) *Isoklinen:* $y = 2ax,\ x > 0$ ($a \in \mathbb{R}$; Halbgeraden)

Richtungsfeld: Bild A-21 (Feld spiegelsymmetrisch zur x-Achse; gezeichnet: 1. Quadrant)

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x} + \ln|C| = \ln|C\sqrt{x}|$$

Lösung: $y = C\sqrt{x},\ x > 0$

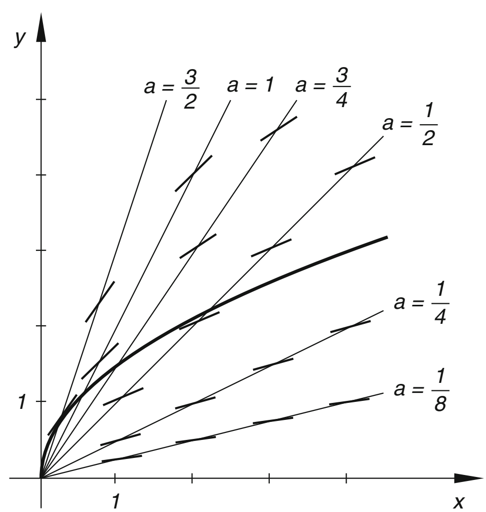


Bild A-21

b) *Isoklinen:* $y = \text{const.} = a$ ($a \in \mathbb{R}$; Parallelen zur x-Achse)

Richtungsfeld: Bild A-22 (Feld spiegelsymmetrisch zur x-Achse; gezeichnet: 1. und 2. Quadrant)

Trennung der Variablen:

$\dfrac{dy}{y} = dx; \quad \ln|y| = x + \ln|K|$

Lösung: $y = \pm K \cdot e^x = C \cdot e^x$

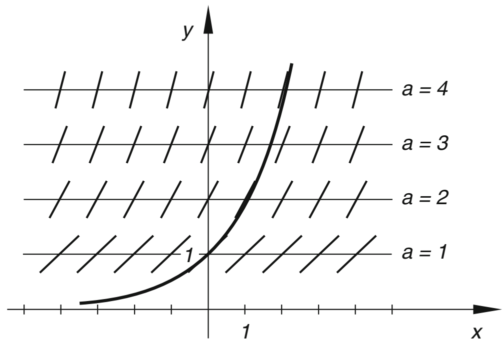


Bild A-22

2) a) $u = \dfrac{y}{x}; \quad y = xu; \quad y' = u + xu' \quad \Rightarrow \quad u' = \dfrac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad u = 4 \cdot \ln|Cx|;$

Lösung: $y = xu = 4x \cdot \ln|Cx|$

b) $u = x + y + 1; \quad y = u - x - 1; \quad y' = u' - 1 \quad \Rightarrow \quad u' = 1 + u^2 \quad \Rightarrow$

$u = \tan(x + C)$ (*Trennung der Variablen*); Lösung: $y = \tan(x + C) - x - 1$

c) $u = \dfrac{y}{x}$ (siehe a)) $\Rightarrow \quad xu' = \left(u - \dfrac{1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\ln|Cx|}$

(*Trennung der Variablen*; Integral: 1 mit $a = 1$, $b = -1/2$ und $n = -2$)

Lösung: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x}{\ln|Cx|} \quad (C \neq 0)$

d) $u = \dfrac{y}{x}$ (siehe a)) $\Rightarrow \quad xu' = \sin u \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\tan\left(\dfrac{u}{2}\right)\right| = \ln|Cx| \quad \Rightarrow$

$\tan\left(\dfrac{u}{2}\right) = Cx \quad \Rightarrow \quad u = 2 \cdot \arctan(Cx)$

(*Trennung der Variablen*; Integral: 214 mit $a = 1$); Lösung: $y = 2x \cdot \arctan(Cx)$

3) $u = \dfrac{y}{x}; \quad y = xu; \quad y' = u + xu' \quad \Rightarrow \quad uu' = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \pm\sqrt{2 \cdot \ln|Cx|}$

(*Trennung der Variablen*) $\Rightarrow \quad y = xu = \pm x\sqrt{2 \cdot \ln|Cx|} \quad (C \neq 0)$

Lösung: $y_p = x\sqrt{2 \cdot \ln|ex|}$

4) a) $\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x}{1 - Cx}$

b) $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{x}{1 + x^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad y = C\sqrt{1 + x^2}$ (Integral: 32 mit $a = 1$)

c) $\dfrac{dy}{(1 - y)^2} = dx \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{du}{u^2} = dx \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{1}{x + C} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x + C - 1}{x + C}$

(Integral: 1 mit $a = -1$, $b = 1$ und $n = -2$ oder Integralsubstitution $u = 1 - y$, $du = -dy$)

d) $\sin y\,dy = -x\,dx \quad \Rightarrow \quad \cos y = \dfrac{1}{2}x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = \arccos\left(\dfrac{1}{2}x^2 + C\right)$

5) a) $\dfrac{dy}{y} = -\cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot e^{-\sin x}$; Lösung: $y_p = 2\pi \cdot e^{1-\sin x}$

b) $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x(x+1)} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{Cx}{x+1}$ (Integral: 12 mit $a = b = 1$)

Lösung: $y_p = \dfrac{x}{x+1}$

c) $y^2\,dy = (1 - x^2)\,dx \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{3x - x^3 + 3C}$

Lösung: $y_p = \sqrt[3]{3x - x^3 + 3}$

6) a) *Substitution:* $u = \dfrac{y}{x}$; $y = xu$; $y' = u + xu' \quad \Rightarrow \quad xu' = u^2 \quad \Rightarrow$

$u = -\dfrac{1}{\ln|Cx|}$ (*Trennung der Variablen*) $\Rightarrow \quad y = xu = -\dfrac{x}{\ln|Cx|}$

Lösung: $y_p = -\dfrac{x}{\ln|ex|}$

b) *Trennung der Variablen:* $y\,dy = 2 \cdot e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{2 \cdot e^{2x} + 2C}$

Lösung: $y_p = \sqrt{2 \cdot e^{2x} + 2}$

7) a) $\dfrac{dx}{(a-x)(b-x)} = \dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-b}\right) dx = k\,dt \quad \Rightarrow$

$\ln|x-a| - \ln|x-b| = \ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right| = (a-b)(kt + C) \quad \Rightarrow$

$\dfrac{x-a}{x-b} = K \cdot e^{(a-b)kt}$ mit $K = e^{(a-b)C}$; $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \dfrac{a}{b}$

Lösung: $x(t) = ab\,\dfrac{e^{(a-b)kt} - 1}{a \cdot e^{(a-b)kt} - b}, \quad t \ge 0$

b) Für $a > b$ und $t \to \infty$ folgt (Regel von L'Hospital): $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = b$

Die Reaktion kommt daher zum Stillstand, wenn alle Atome vom Typ B „verbraucht“ sind.

8) a) $\dfrac{dv}{v - \dfrac{mg}{k}} = -\dfrac{k}{m}\,dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{mg}{k}$

b) $v(t) = \left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{mg}{k}, \quad t \ge 0$ (Bild A-23)

c) $v_{\max} = \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \dfrac{mg}{k}$

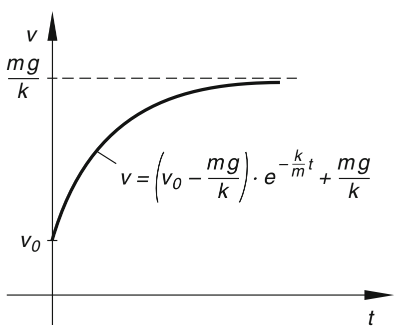


Bild A-23

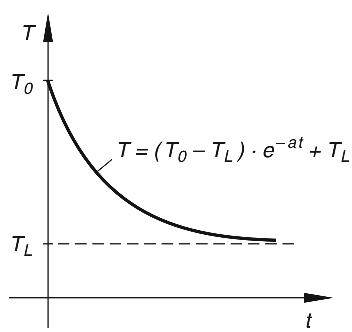


Bild A-24

9) $\dfrac{du_C}{u_C} = -\dfrac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad u_C = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$; *Lösung:* $u_C(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$

10) $\dfrac{dT}{T - T_L} = -a\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln(T - T_L) = -at + \ln K \quad \Rightarrow \quad T = K \cdot e^{-at} + T_L$

Lösung: $T(t) = (T_0 - T_L) \cdot e^{-at} + T_L, \quad t \geq 0$ (Bild A-24)

Endtemperatur: $T_E = \lim\limits_{t \to \infty} T(t) = T_L$

Der Körper nimmt schließlich die Temperatur T_L der vorbeiströmenden Luft an.

11) a) $(y - 1)\,dx + (x + 1)\,dy = 0; \quad \dfrac{\partial}{\partial y}(y - 1) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x + 1) = 1 \quad \Rightarrow$ exakte Dgl

$u_x = y - 1; \quad u_y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad u = \int u_x\,dx = \int (y - 1)\,dx = (y - 1)\,x + K(y);$

$u_y = x + K'(y) = x + 1 \quad \Rightarrow \quad K'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad K(y) = y + C_1 \quad \Rightarrow$

$u = x(y - 1) + y + C_1$; *Lösung:* $u = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x + C}{x + 1}$

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy - x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\,x^2 = 2x \quad \Rightarrow$ exakte Dgl; $u_x = 2xy - x; \quad u_y = x^2$

$u = \int u_y\,dy = \int x^2\,dy = x^2 y + K(x); \quad u_x = 2xy + K'(x) = 2xy - x \quad \Rightarrow$

$K'(x) = -x \quad \Rightarrow \quad K(x) = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = x^2 y - \dfrac{1}{2}\,x^2 + C_1$

Lösung: $u = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{1}{2}$

c) $(e^x \cdot y + \sin x)\,dx + (e^x + y)\,dy = 0; \quad \dfrac{\partial}{\partial y}(e^x \cdot y + \sin x) = \dfrac{\partial}{\partial x}(e^x + y) = e^x$

$u_x = e^x \cdot y + \sin x; \quad u_y = e^x + y \quad \Rightarrow \quad u = \int u_x\,dx = \int (e^x \cdot y + \sin x)\,dx =$

$= e^x \cdot y - \cos x + K(y); \quad u_y = e^x + K'(y) = e^x + y \quad \Rightarrow \quad K'(y) = y \quad \Rightarrow$

$K(y) = \dfrac{1}{2}\,y^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = e^x \cdot y + \dfrac{1}{2}\,y^2 - \cos x + C_1$

Lösung (in impliziter Form): $u = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad e^x \cdot y + \dfrac{1}{2}\,y^2 - \cos x = C$

12) a) $[(1 + x^2)^2 - 2xy]\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$

$\dfrac{\partial}{\partial y}[(1 + x^2)^2 - 2xy] = -2x \neq \dfrac{\partial}{\partial x}(1 + x^2) = 2x \quad \Rightarrow$ nichtexakte Dgl

Ansatz: $\dfrac{\partial}{\partial y}\,\lambda(x)\,[(1 + x^2)^2 - 2xy] = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\lambda(x) \cdot (1 + x^2) \quad \Rightarrow$

$\lambda'(x) = \dfrac{-4x}{1 + x^2} \cdot \lambda(x) \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) = \dfrac{C_1}{(1 + x^2)^2}$ (Integral: 32 mit $a = 1$)

Integrierender Faktor (wir setzen $C_1 = 1$): $\lambda(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)^2}$

$u_x = 1 - \dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}; \quad u_y = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad u = \int u_y \, dy = \int \dfrac{1}{1+x^2} \, dy =$

$= \dfrac{y}{1+x^2} + K(x); \quad u_x = -\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2} + K'(x) = 1 - \dfrac{2xy}{(1+x^2)^2} \quad \Rightarrow$

$K'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad K(x) = x + C_2 \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{y}{1+x^2} + x + C_2$

Lösung: $u = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad y = -x^3 + Cx^2 - x + C$

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 1 \neq \dfrac{\partial}{\partial x} 1 = 0 \quad \Rightarrow$ nichtexakte Dgl

Ansatz: $\dfrac{\partial}{\partial y} \lambda(x) \cdot (x^2 + y) = \dfrac{\partial}{\partial x} \lambda(x) \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) = \lambda'(x) \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) = C_1 \cdot e^x$

Integrierender Faktor (wir setzen $C_1 = 1$): $\lambda(x) = e^x$

$u_x = (x^2 + y) \cdot e^x; \quad u_y = e^x \quad \Rightarrow \quad u = \int u_y \, dy = \int e^x \, dy = e^x \cdot y + K(x);$

$u_x = e^x \cdot y + K'(x) = (x^2 + y) \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad K'(x) = x^2 \cdot e^x \quad \Rightarrow$

$K(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + C_2$ (Integrale: 313 und 314, jeweils mit $a = 1$) $\Rightarrow$

$u = e^x \cdot y + (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + C_2$

Lösung: $u = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot e^{-x} - x^2 + 2x - 2$

13)

a) Linear, homogen	b) Nichtlinear (y^2-Term)	c) Linear, inhomogen
d) Linear, inhomogen	e) Nichtlinear ($y' y^2$-Term)	f) Nichtlinear ($\sqrt{y}$-Term)
g) Linear, inhomogen	h) Nichtlinear (y^2-Term)	i) Linear, inhomogen
j) Linear, inhomogen	k) Nichtlinear ($y' \sqrt{y}$-Term)	l) Linear, inhomogen

14) a) $y = K(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad K'(x) = 4x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \Rightarrow \quad K(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + C$

$\left(\textit{Substitution: } u = \dfrac{1}{2}x^2\right)$; *Lösung:* $y = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + 4$

b) $y = \dfrac{K(x)}{x+1}; \quad K'(x) = e^{2x} + x \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow \quad K(x) = \dfrac{1}{4}(2x+1) \cdot e^{2x} + C$

(Integrale: 312, 313 mit $a = 2$); *Lösung:* $y = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{(2x+1) \cdot e^{2x} + C_1}{x+1}$

c) $y = \dfrac{K(x)}{x}; \quad K'(x) = x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad K(x) = \sin x - x \cdot \cos x + C$

(Integral: 208 mit $a = 1$); *Lösung:* $y = \dfrac{\sin x - x \cdot \cos x + C}{x}$

d) $y = \dfrac{K(x)}{\cos x}; \quad K'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad K(x) = x + C$; *Lösung:* $y = \dfrac{x + C}{\cos x}$

e) $y = K(x) \cdot e^{2 \cdot \sin x}; \quad K'(x) = \cos x \cdot e^{-2 \cdot \sin x} \quad \Rightarrow \quad K(x) = -\dfrac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot \sin x} + C$

(*Substitution:* $u = -2 \cdot \sin x$); *Lösung:* $y = C \cdot e^{2 \cdot \sin x} - \dfrac{1}{2}$

f) $y = K(x) \cdot x; \quad K'(x) = 1 + \dfrac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad K(x) = x - \dfrac{4}{x} + C;$

Lösung: $y = x^2 + Cx - 4$

15) $i(t) = K(t) \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot \cos t}$; $K'(t) = \sin(2t) \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot \cos t} = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot \cos t} \quad \Rightarrow$

$K(t) = \dfrac{1}{2}(2 \cdot \cos t + 1) \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot \cos t} + C$ (*Substitution:* $u = -2 \cdot \cos t$; Integral: 313 mit $a = 1$); $i(t) = C \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot \cos t} + \cos t + \dfrac{1}{2}$

Lösung: $i_p(t) = -\dfrac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2+2 \cdot \cos t} + \cos t + \dfrac{1}{2}$

16) y: *Allgemeine Lösung*; y_p: *Partikuläre* Lösung

a) $y = K(x) \cdot x$; $K'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad K(x) = \sin x + C$;
$y = Cx + x \cdot \sin x$; $y_p = 2x + x \cdot \sin x$

b) $y = K(x) \cdot \cos x$; $K'(x) = 10 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad K(x) = -10 \cdot \cos x + C$;
$y = C \cdot \cos x - 10 \cdot \cos^2 x$; $y_p = -12 \cdot \cos x - 10 \cdot \cos^2 x$

c) $y = \dfrac{K(x)}{x}$; $K'(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad K(x) = x(\ln x - 1) + C$ (Integral: 332);
$y = \dfrac{C}{x} + \ln x - 1$; $y_p = \dfrac{2}{x} + \ln x - 1$

17) a) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-4x}$ b) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-2x}$ c) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{8}{3}x}$

d) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{b}{a}x}$ e) $n_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$ f) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{6x}$

g) $i_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ h) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-9x}$ i) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{5}{3}ax}$

18) a) $y_0 = K \cdot \mathrm{e}^{3x}$; $y = K(x) \cdot \mathrm{e}^{3x}$; $K'(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-2x} \quad \Rightarrow$

$K(x) = -\dfrac{1}{4}(2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{-2x} + C$ (Integral: 313 mit $a = -2$)

$y = C \cdot \mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{4}(2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{x}$

b) $y_p = (ax + b) \cdot \mathrm{e}^{x}$; $\underbrace{-2a}_{1}x + \underbrace{(a - 2b)}_{0} = x \quad \Rightarrow \quad a = -1/2$; $b = -1/4$;

$y_p = -\dfrac{1}{4}(2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{x}$; $y = y_0 + y_p = C \cdot \mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{4}(2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{x}$

19) a) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-x}$; $y_p = ax + b$; $\underbrace{a}_{2}x + \underbrace{(a + b)}_{0} = 2x \quad \Rightarrow \quad a = 2$; $b = -2$;

$y_p = 2x - 2$; $y = y_0 + y_p = C \cdot \mathrm{e}^{-x} + 2x - 2$

b) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-2x}$; $y_p = A \cdot \mathrm{e}^{5x}$; $\underbrace{7A}_{4} \cdot \mathrm{e}^{-2x} = 4 \cdot \mathrm{e}^{-2x} \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{4}{7}$;

$y_p = \dfrac{4}{7} \cdot \mathrm{e}^{5x}$; $y = y_0 + y_p = C \cdot \mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{4}{7} \cdot \mathrm{e}^{5x}$

c) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-x}$; $y_p = Ax \cdot \mathrm{e}^{-x}$ (Störglied und y_0 sind vom *gleichen* Typ);
$\underbrace{A}_{1} \cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad A = 1$; $y_p = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$; $y = y_0 + y_p = (x + C) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

d) $y_0 = C \cdot e^{4x}$; $y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;

$$\underbrace{(-4A - B)}_{5} \cdot \sin x + \underbrace{(A - 4B)}_{0} \cdot \cos x = 5 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{20}{17}; \quad B = -\frac{5}{17};$$

$$y_p = -\frac{20}{17} \cdot \sin x - \frac{5}{17} \cdot \cos x; \quad y = y_0 + y_p = C \cdot e^{4x} - \frac{20}{17} \cdot \sin x - \frac{5}{17} \cdot \cos x$$

e) $y_0 = C \cdot e^{5x}$; $y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;

$$\underbrace{(-5A - B)}_{4} \cdot \sin x + \underbrace{(A - 5B)}_{1} \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x + \cos x \quad \Rightarrow$$

$$A = -\frac{19}{26}; \quad B = -\frac{9}{26}; \quad y_p = -\frac{19}{26} \cdot \sin x - \frac{9}{26} \cdot \cos x;$$

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{5x} - \frac{19}{26} \cdot \sin x - \frac{9}{26} \cdot \cos x$$

f) $y_0 = C \cdot e^{6x}$; $y_p = Ax \cdot e^{6x}$ (Störglied und y_0 sind vom *gleichen* Typ);

$$\underbrace{A}_{3} \cdot e^{6x} = 3 \cdot e^{6x} \quad \Rightarrow \quad A = 3; \quad y_p = 3x \cdot e^{6x}; \quad y = y_0 + y_p = (3x + C) \cdot e^{6x}$$

20) a) *Trennung der Variablen:* $\dfrac{dy}{y^2 + 1} = x\,dx \quad \Rightarrow \quad \arctan y = \dfrac{1}{2}x^2 + C \quad \Rightarrow$

$$y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

b) *Trennung der Variablen:* $\dfrac{dy}{y} = \sin x\,dx \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot e^{-\cos x}$

c) *Trennung der Variablen:* $\dfrac{dy}{y} = x\,dx \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

d) *Trennung der Variablen, Variation der Konstanten:* $y = \dfrac{K(x)}{x}$; $K'(x) = 2 \cdot \ln x \quad \Rightarrow$

$K(x) = 2x(\ln x - 1) + C$ (Integral: 332); $y = 2(\ln x - 1) + \dfrac{C}{x}$

e) *Trennung der Variablen:* $\dfrac{dy}{y + 1} = 5x^4\,dx \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot e^{x^5} - 1$

f) Aufsuchen einer *partikulären* Lösung: $y_0 = K \cdot e^{5x}$;
Ansatz: $y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x + C \cdot \sin(3x) + D \cdot \cos(3x)$;

$$\underbrace{(A - 5B)}_{2} \cdot \cos x + \underbrace{(-5A - B)}_{0} \cdot \sin x + \underbrace{(3C - 5D)}_{0} \cdot \cos(3x) +$$

$$+ \underbrace{(-5C - 3D)}_{-1} \cdot \sin(3x) = 2 \cdot \cos x - \sin(3x) \quad \Rightarrow$$

$$A = 1/13; \quad B = -5/13; \quad C = 5/34; \quad D = 3/34;$$

$$y_p = \frac{1}{13} \cdot \sin x - \frac{5}{13} \cdot \cos x + \frac{5}{34} \cdot \sin(3x) + \frac{3}{34} \cdot \cos(3x);$$

$$y = y_0 + y_p = K \cdot e^{5x} + \frac{1}{13} \cdot \sin x - \frac{5}{13} \cdot \cos x + \frac{5}{34} \cdot \sin(3x) + \frac{3}{34} \cdot \cos(3x)$$

21) a) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-4x}; \quad y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d;$

$$\underbrace{4a}_{1}x^3 + \underbrace{(3a + 4b)}_{0}x^2 + \underbrace{(2b + 4c)}_{-1}x + \underbrace{(c + 4d)}_{0} = x^3 - x \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{4}; \quad b = -\frac{3}{16}; \quad c = -\frac{5}{32}; \quad d = \frac{5}{128}; \quad y_p = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x + \frac{5}{128};$$

$$y = y_0 + y_p = C \cdot \mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x + \frac{5}{128}$$

Lösung: $y = 112{,}18 \cdot \mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x + \frac{5}{128}$

b) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{x}; \quad y_p = Ax \cdot \mathrm{e}^{x}$ (Störglied und y_0 sind vom gleichen Typ);

$A \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad A = 1; \quad y_p = x \cdot \mathrm{e}^x; \quad y = y_0 + y_p = (x + C) \cdot \mathrm{e}^x;$

Lösung: $y = (x + 1) \cdot \mathrm{e}^x$

c) $y_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-3x}; \quad y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x;$

$$\underbrace{(A + 3B)}_{-1} \cdot \cos x + \underbrace{(3A - B)}_{0} \cdot \sin x = -\cos x \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{10}; \quad B = -\frac{3}{10};$$

$$y_p = -\frac{1}{10} \cdot \sin x - \frac{3}{10} \cdot \cos x; \quad y = y_0 + y_p = C \cdot \mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{10} \cdot \sin x - \frac{3}{10} \cdot \cos x$$

Lösung: $y = \frac{53}{10} \cdot \mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{10} \cdot \sin x - \frac{3}{10} \cdot \cos x$

22) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $i_0 = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$

a) *Ansatz:* $i_p = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad i_p = \frac{u_0}{R}; \qquad i = i_0 + i_p = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{u_0}{R}$

Lösung: $i = \frac{u_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad t \geq 0$ (Bild A-25)

b) $i_p = At + B; \quad \underbrace{(RA)}_{a}t + \underbrace{(LA + RB)}_{0} = at \quad \Rightarrow \quad A = a/R; \quad B = -aL/R^2;$

$$i_p = \frac{a}{R}t - \frac{aL}{R^2}; \quad i = i_0 + i_p = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{a}{R}t - \frac{aL}{R^2}$$

Lösung: $i = \frac{aL}{R^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - 1\right) + \frac{a}{R}t, \quad t \geq 0$

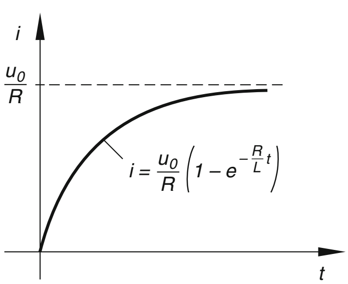


Bild A-25

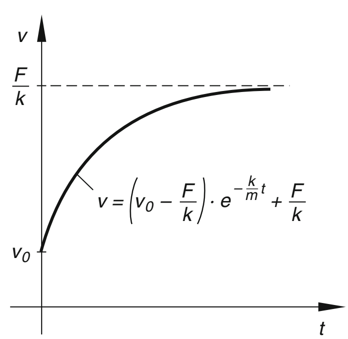


Bild A-26

23) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $v_{\text{homogen}} = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$; $v_p = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad v_p = \frac{F}{k}$;

$$v(t) = v_{\text{homogen}} + v_p = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}$$

Lösung: $v(t) = \left(v_0 - \frac{F}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}, \quad t \geq 0$ (Bild A-26)

Endgeschwindigkeit: $v_E = \lim\limits_{t \to \infty} v(t) = \frac{F}{k}$

24) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $i_0 = C \cdot e^{-20t}$; $i_p = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t)$;

$$\underbrace{(20A - 2B)}_{10} \cdot \sin(2t) + \underbrace{(2A + 20B)}_{0} \cdot \cos(2t) = 10 \cdot \sin(2t) \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{50}{101}; \quad B = -\frac{5}{101}; \quad i_p = \frac{50}{101} \cdot \sin(2t) - \frac{5}{101} \cdot \cos(2t);$$

$$i = i_0 + i_p = C \cdot e^{-20t} + \frac{50}{101} \cdot \sin(2t) - \frac{5}{101} \cdot \cos(2t)$$

Lösung: $i = \frac{5}{101}\left[e^{-20t} + 10 \cdot \sin(2t) - \cos(2t)\right]$

i_0: *Exponentiell* abklingender *Gleichstrom*; i_p: *Wechselstrom* mit der Periode $T = \pi$

25) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $v_0 = C \cdot e^{-\frac{t}{T}}$; $v_p = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad v_p = K\hat{u}$;

$v = v_0 + v_p = C \cdot e^{-\frac{t}{T}} + K\hat{u}$; Lösung: $v = K\hat{u}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \quad t \geq 0$ (Bild A-27)

26) a) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $u_{C_0} = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$; $u_{C_p} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad u_{C_p} = u_0$

$$u_C = u_{C_0} + u_{C_p} = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + u_0$$

b) *Lösung:* $u_C = u_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad t \geq 0$ (Bild A-28)

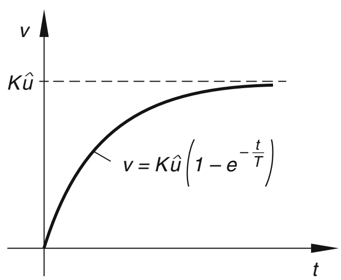


Bild A-27

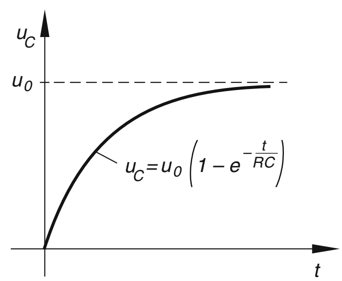


Bild A-28

27) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $v_0 = C \cdot e^{-\frac{t}{T}}$; $v_p = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$;

$$A\omega T \cdot \cos(\omega t + \varphi) + A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = K_D E \omega \cdot \cos(\omega t)$$

Additionstheoreme für Kosinus und Sinus verwenden, dann ordnen nach Kosinus- bzw. Sinusgliedern, schließlich Koeffizientenvergleich durchführen:

$$\underbrace{A(\omega T \cdot \cos\varphi + \sin\varphi)}_{K_D E \omega} \cdot \cos(\omega t) + \underbrace{A(-\omega T \cdot \sin\varphi + \cos\varphi)}_{0} \cdot \sin(\omega t) = K_D E \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & A(\omega T \cdot \cos\varphi + \sin\varphi) = K_D E \omega \\ \text{(II)} & A(-\omega T \cdot \sin\varphi + \cos\varphi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{(I)}^2 + \text{(II)}^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{K_D E \omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi = \frac{1}{\omega T} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega T}\right)$$

$$v_p = \frac{K_D E \omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega T}\right)\right)$$

$$v = v_0 + v_p = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} + \frac{K_D E \omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega T}\right)\right)$$

Nach Ablauf einer gewissen „Einschwingphase“ erhält man ein *sinusförmiges* Ausgangssignal mit der Periode $T = 2\pi/\omega$ des Eingangssignals. Amplitude A und Phase φ sind dabei noch *frequenzabhängige* Größen (sog. *Frequenzgang*).

28) Durch die Substitution $u = y^2$, $u' = 2yy'$ (Kettenregel!) geht die Dgl in die lineare Dgl $u' - 0{,}5\,u = -0{,}5\,(1 + x^2)$ über, die durch Aufsuchen einer partikulären Lösung gelöst wird; $u_0 = C \cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}$;

$$u_p = ax^2 + bx + c; \quad \underbrace{-0{,}5\,a}_{-0{,}5} x^2 + \underbrace{(2a - 0{,}5\,b)}_{0} x + \underbrace{(b - 0{,}5\,c)}_{-0{,}5} = -0{,}5\,x^2 - 0{,}5 \quad \Rightarrow$$

$$a = 1; \quad b = 4; \quad c = 9; \quad u_p = x^2 + 4x + 9;$$

$$u = u_0 + u_p = C \cdot \mathrm{e}^{0{,}5x} + x^2 + 4x + 9$$

Lösung: $y = \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{C \cdot \mathrm{e}^{0{,}5x} + x^2 + 4x + 9}$

Abschnitt 3

1) a) Konstante Koeffizienten, inhomogen
b) Variable Koeffizienten, homogen
c) Konstante Koeffizienten, homogen
d) Konstante Koeffizienten, inhomogen
e) Variable Koeffizienten, inhomogen
f) Konstante Koeffizienten, homogen

2) Nach ein- bzw. zweimaliger Integration:

$$s(t) = -\frac{1}{2}\,g t^2 + v_0 t + s_0 = -(4{,}905\,\mathrm{ms}^{-2})\,t^2 + (30\,\mathrm{ms}^{-1})\,t + 10\,\mathrm{m}$$

$$v(t) = -g t + v_0 = -(9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2})\,t + 30\,\mathrm{ms}^{-1}$$

3) Durch Einsetzen in die Dgl zeigt man zunächst, dass $y_1(x)$ und $y_2(x)$ (partikuläre) Lösungen sind. Sie bilden eine *Fundamentalbasis* der Dgl, da ihre Wronski-Determinante *nicht verschwindet*: $W(y_1; y_2) = \mathrm{e}^{4x} \neq 0$

4) $y(x) = \mathrm{e}^{(1{,}5+2\mathrm{j})x} = \mathrm{e}^{1{,}5x}\,[\cos(2x) + \mathrm{j} \cdot \sin(2x)]$ ist eine komplexe Lösung der Dgl, wie man durch Einsetzen verifizieren kann ($\mathrm{j}^2 = -1$ beachten). Daher sind auch *Realteil* $y_1(x) = \mathrm{e}^{1{,}5x} \cdot \cos(2x)$ und *Imaginärteil* $y_2(x) = \mathrm{e}^{1{,}5x} \cdot \sin(2x)$ (reelle) Lösungen der Dgl, die sogar wegen $W(y_1; y_2) = 2 \cdot \mathrm{e}^{3x} \neq 0$ eine *reelle* Fundamentalbasis der Dgl bilden.

5) Man zeigt zunächst durch Einsetzen in die Dgl, dass x_1 und x_2 Lösungen sind. Sie sind *linear unabhängig*, da ihre Wronski-Determinante von null verschieden ist: $W(x_1; x_2) = -e^{-2t} \neq 0$. Die *allgemeine* Lösung der Dgl ist daher als Linearkombination der Lösungen x_1 und x_2 darstellbar: $x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 = e^{-t}(C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t)$

6) a) $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -3; \quad y_0 = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-3x}$

b) $\lambda_{1/2} = -5; \quad x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-5t}$

c) $\lambda_{1/2} = 1 \pm 3j; \quad x = e^{t}(C_1 \cdot \sin(3t) + C_2 \cdot \cos(3t))$

d) $\lambda_{1/2} = \pm 2j; \quad \varphi = C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)$

e) $\lambda_{1/2} = -2 \pm 3j; \quad y = e^{-2x}(C_1 \cdot \sin(3x) + C_2 \cdot \cos(3x))$

f) $\lambda_1 = -0{,}5; \quad \lambda_2 = -3; \quad q = C_1 \cdot e^{-0{,}5t} + C_2 \cdot e^{-3t}$

g) $\lambda_{1/2} = 3; \quad x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{3t}$

h) $\lambda_{1/2} = a; \quad y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{ax}$

7) a) $\lambda_{1/2} = -2 \pm j; \quad y = e^{-2x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x);$

$y' = -e^{-2x}[(2C_1 + C_2) \cdot \sin x + (2C_2 - C_1) \cdot \cos x]$

Lösung: $y = \pi \cdot e^{-2x}(2 \cdot \sin x + \cos x)$

b) $\lambda_1 = -4; \quad \lambda_2 = -16; \quad y = C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^{-16x};$

$y' = -4C_1 \cdot e^{-4x} - 16C_2 \cdot e^{-16x};$ *Lösung:* $y = \frac{1}{6}(e^{-4x} - e^{-16x})$

c) $\lambda_{1/2} = 0{,}5; \quad x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{0{,}5t}; \quad \dot{x} = (C_1 + 0{,}5C_2 + 0{,}5C_1 t) \cdot e^{0{,}5t}$

Lösung: $x = (-3{,}5t + 5) \cdot e^{0{,}5t}$

8) a) Aperiodischer Grenzfall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + 2 = 0$ hat eine *doppelte* (reelle) Lösung.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{p^2}{4} - 2}_{0}} = -\frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad p = 2\sqrt{2}$$

b) *Allgemeine* Lösung ($\lambda_{1/2} = -\sqrt{2}$): $x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-\sqrt{2}t}$

$\dot{x} = (C_1 - \sqrt{2}C_2 - \sqrt{2}C_1 t) \cdot e^{-\sqrt{2}t}$

Spezielle Lösung (Bild A-29):

$x = [(10\sqrt{2} - 1)t + 10] \cdot e^{-\sqrt{2}t}$

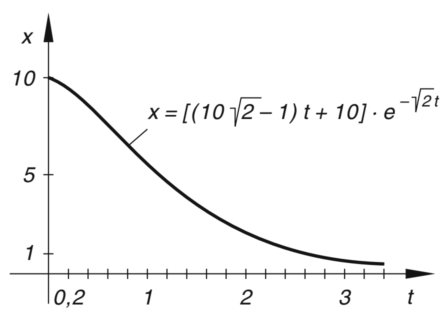


Bild A-29

9) $y(x) = \dfrac{F}{6EI}(3lx^2 - x^3)$ (nach 2-maliger Integration)

10) Es ist $a = 2$, $b = 1$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ besitzt die *doppelte* Lösung $\lambda_{1/2} = -1$.

a) $b = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

b) $b = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

c) $c = 1$, $\beta = 1$; Weder 1 noch $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}$ sind Lösungen der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow \quad y_p = A \cdot \mathrm{e}^x + B \cdot \sin x + C \cdot \cos x$

d) $c = -1$; -1 ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow$
$y_p = Ax^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

e) $n = 1$, $\beta = 4$, $c = 3$; $c + \beta\mathrm{j} = 3 + 4\mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow \quad y_p = \mathrm{e}^{3x}[(a_1 x + a_0) \cdot \sin(4x) + (b_1 x + b_0) \cdot \cos(4x)]$

f) $n = 0$, $\beta = 1$, $c = -1$; $c + \beta\mathrm{j} = -1 + \mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow \quad y_p = \mathrm{e}^{-x}[A \cdot \sin x + B \cdot \cos x]$

11) a) $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -3; \quad y_0 = C_1 \cdot \mathrm{e}^x + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}; \quad y_p = ax^2 + bx + c;$

$$\underbrace{-3a}_{3}x^2 + (\underbrace{4a - 3b}_{-4})x + (\underbrace{2a + 2b - 3c}_{0}) = 3x^2 - 4x \quad \Rightarrow$$

$a = -1; \quad b = 0; \quad c = -2/3 \quad \Rightarrow \quad y_p = -x^2 - \dfrac{2}{3};$

$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot \mathrm{e}^x + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x} - x^2 - \dfrac{2}{3}$

b) $\lambda_{1/2} = \pm 1; \quad y_0 = C_1 \cdot \mathrm{e}^x + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-x}; \quad y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d;$

$$\underbrace{-a}_{1}x^3 \underbrace{-\,b}_{-2}x^2 + (\underbrace{6a - c}_{0})x + (\underbrace{2b - d}_{-4}) = x^3 - 2x^2 - 4 \quad \Rightarrow$$

$a = -1; \quad b = 2; \quad c = -6; \quad d = 8; \quad y_p = -x^3 + 2x^2 - 6x + 8;$

$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot \mathrm{e}^x + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-x} - x^3 + 2x^2 - 6x + 8$

c) $\lambda_{1/2} = 1; \quad x_0 = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^t; \quad x_p = A \cdot \mathrm{e}^{2t}; \quad A \cdot \mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t} \quad \Rightarrow \quad A = 1;$

$x_p = \mathrm{e}^{2t}; \quad x = x_0 + x_p = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}$

d) $\lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = -1; \quad y_0 = C_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-x}; \quad y_p = Ax \cdot \mathrm{e}^{3x}$

($c = 3$; 3 ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung);

$4A \cdot \mathrm{e}^{3x} = -2 \cdot \mathrm{e}^{3x} \quad \Rightarrow \quad 4A = -2 \quad \Rightarrow \quad A = -0{,}5; \quad y_p = -0{,}5x \cdot \mathrm{e}^{3x};$

$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-x} - 0{,}5x \cdot \mathrm{e}^{3x}$

e) $\lambda_{1/2} = -5; \quad x_0 = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^{-5t}; \quad x_p = A \cdot \sin(5t) + B \cdot \cos(5t);$

$$\underbrace{50A}_{3} \cdot \cos(5t) \underbrace{-\,50B}_{0} \cdot \sin(5t) = 3 \cdot \cos(5t) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{50}; \quad B = 0;$$

$x_p = \dfrac{3}{50} \cdot \sin(5t); \quad x = x_0 + x_p = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^{-5t} + \dfrac{3}{50} \cdot \sin(5t)$

f) $\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = -12; \quad y_0 = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-12x}; \quad y_p = ax^2 + bx + c;$

$$\underbrace{-24a}_{2}x^2 + \underbrace{(20a - 24b)}_{-6}x + \underbrace{(2a + 10b - 24c)}_{0} = 2x^2 - 6x \quad \Rightarrow$$

$$a = -\frac{1}{12}; \quad b = \frac{13}{72}; \quad c = \frac{59}{864}; \quad y_p = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{13}{72}x + \frac{59}{864};$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-12x} - \frac{1}{12}x^2 + \frac{13}{72}x + \frac{59}{864}$$

g) $\lambda_{1/2} = \pm 1; \quad x_0 = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t}; \quad x_p = (at + b) \cdot \sin t + (ct + d) \cdot \cos t;$

$$\underbrace{(2a - 2d)}_{0} \cdot \cos t - \underbrace{2c}_{0} \cdot t \cdot \cos t + \underbrace{(-2b - 2c)}_{0} \cdot \sin t - \underbrace{2a}_{1} \cdot t \cdot \sin t = t \cdot \sin t \quad \Rightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2}; \quad b = c = 0; \quad d = -\frac{1}{2}; \quad x_p = -\frac{1}{2}(t \cdot \sin t + \cos t);$$

$$x = x_0 + x_p = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t} - \frac{1}{2}(t \cdot \sin t + \cos t)$$

h) $\lambda_{1/2} = -6; \quad y_0 = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-6x}; \quad y_p = Ax^2 \cdot e^{-6x}$ ($c = -6$; -6 ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung); $2A = 3 \quad \Rightarrow \quad A = 1{,}5;$

$$y_p = 1{,}5x^2 \cdot e^{-6x}; \quad y = y_0 + y_p = (1{,}5x^2 + C_1 x + C_2) \cdot e^{-6x}$$

i) $\lambda_{1/2} = \pm 2j; \quad y_0 = C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x);$

$$y_p = x[A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)] + ax^2 + bx + c + C \cdot e^{-x}$$

($\beta = 2$; $\beta j = 2j$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung);

$$\underbrace{4A}_{0} \cdot \cos(2x) - \underbrace{4B}_{10} \cdot \sin(2x) + \underbrace{4a}_{2}x^2 + \underbrace{4b}_{-1}x + \underbrace{(2a + 4c)}_{0} + \underbrace{5C}_{1} \cdot e^{-x} =$$

$$= 10 \cdot \sin(2x) + 2x^2 - x + e^{-x} \quad \Rightarrow$$

$$A = 0; \quad B = -5/2; \quad C = 1/5; \quad a = 1/2; \quad b = -1/4; \quad c = -1/4;$$

$$y_p = -\frac{5}{2}x \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot e^{-x};$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot \sin(2x) + \left(C_2 - \frac{5}{2}x\right) \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot e^{-x}$$

j) $\lambda_{1/2} = -1; \quad y_0 = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-x};$

$$y_p = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{x} + dx + e + A \cdot \sin x + B \cdot \cos x;$$

$$[\underbrace{4a}_{1}x^2 + \underbrace{(8a + 4b)}_{0}x + \underbrace{(2a + 4b + 4c)}_{0}] \cdot e^{x} + \underbrace{2A}_{-1} \cdot \cos x - \underbrace{2B}_{0} \cdot \sin x +$$

$$+ \underbrace{d}_{1}x + \underbrace{(2d + e)}_{0} = x^2 \cdot e^{x} - \cos x + x] \quad \Rightarrow$$

$$a = 1/4; \quad b = -1/2; \quad c = 3/8; \quad d = 1; \quad e = -2; \quad A = -1/2; \quad B = 0;$$

$$y_p = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) \cdot e^{x} + x - 2 - \frac{1}{2} \cdot \sin x;$$

$$y = y_0 + y_p = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) \cdot e^{x} + x - 2 - \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

12) a) $\lambda_{1/2} = -3 \pm \mathrm{j}; \quad x_0 = \mathrm{e}^{-3t}(C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t);$

$$x_p = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t; \quad \underbrace{(9A - 6B)}_{0} \cdot \sin t + \underbrace{(6A + 9B)}_{1} \cdot \cos t = \cos t \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{2}{39}; \quad B = \frac{1}{13}; \quad x_p = \frac{2}{39} \cdot \sin t + \frac{1}{13} \cdot \cos t;$$

$$x = x_0 + x_p = \mathrm{e}^{-3t}(C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t) + \frac{2}{39} \cdot \sin t + \frac{1}{13} \cdot \cos t$$

$$\dot{x} = -\mathrm{e}^{-3t}[(3C_1 + C_2) \cdot \sin t + (3C_2 - C_1) \cdot \cos t] + \frac{2}{39} \cdot \cos t - \frac{1}{13} \cdot \sin t$$

Lösung: $x = \mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{145}{39} \cdot \sin t - \frac{1}{13} \cdot \cos t\right) + \frac{2}{39} \cdot \sin t + \frac{1}{13} \cdot \cos t$

b) $\lambda_{1/2} = -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{2}; \quad y_0 = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cdot \sin(\sqrt{2}\,x) + C_2 \cdot \cos(\sqrt{2}\,x));$

$$y_p = A \cdot \mathrm{e}^{-2x}; \quad 3A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1/3; \quad y_p = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{-2x};$$

$$y = y_0 + y_p = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cdot \sin(\sqrt{2}\,x) + C_2 \cdot \cos(\sqrt{2}\,x)) + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

$$y' = -\mathrm{e}^{-x}[(C_1 + \sqrt{2}\,C_2) \cdot \sin(\sqrt{2}\,x) + (C_2 - \sqrt{2}\,C_1) \cdot \cos(\sqrt{2}\,x)] - \frac{2}{3} \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

Lösung: $y = \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \sin(\sqrt{2}\,x) - \frac{1}{3} \cdot \cos(\sqrt{2}\,x)\right) + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{-2x}$

c) $\lambda_{1/2} = -1 \pm 4\mathrm{j}; \quad x_0 = \mathrm{e}^{-t}[C_1 \cdot \sin(4t) + C_2 \cdot \cos(4t)];$

$$x_p = A \cdot \sin(5t) + B \cdot \cos(5t);$$

$$\underbrace{(-8A - 10B)}_{2} \cdot \sin(5t) + \underbrace{(10A - 8B)}_{0} \cdot \cos(5t) = 2 \cdot \sin(5t) \quad \Rightarrow$$

$$A = -4/41; \quad B = -5/41; \quad x_p = -\frac{4}{41} \cdot \sin(5t) - \frac{5}{41} \cdot \cos(5t);$$

$$x = x_0 + x_p = \mathrm{e}^{-t}[C_1 \cdot \sin(4t) + C_2 \cdot \cos(4t)] - \frac{4}{41} \cdot \sin(5t) - \frac{5}{41} \cdot \cos(5t)$$

$$\dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}[(C_1 + 4C_2) \cdot \sin(4t) + (C_2 - 4C_1) \cdot \cos(4t)] - \\ - \frac{20}{41} \cdot \cos(5t) + \frac{25}{41} \cdot \sin(5t)$$

Lösung:

$$x = \mathrm{e}^{-t}[2{,}2576 \cdot \sin(4t) - 2{,}8220 \cdot \cos(4t)] - 0{,}0976 \cdot \sin(5t) - 0{,}1220 \cdot \cos(5t)$$

13) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -10; \quad y_0 = C_1 + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-10x}; \quad y_p = (ax^2 + bx + c) \cdot \mathrm{e}^x;$

$$\underbrace{11a}_{1}x^2 + \underbrace{(24a + 11b)}_{0}x + \underbrace{(2a + 12b + 11c)}_{0} = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{11}; \quad b = -\frac{24}{121}; \quad c = \frac{266}{1331}; \quad y_p = \frac{1}{1331}(121x^2 - 264x + 266) \cdot \mathrm{e}^x;$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-10x} + \frac{1}{1331}(121x^2 - 264x + 266) \cdot \mathrm{e}^x$$

$$y' = -10C_2 \cdot \mathrm{e}^{-10x} + \frac{1}{1331}(121x^2 - 22x + 2) \cdot \mathrm{e}^x$$

Lösung: $y = (0{,}0909x^2 - 0{,}1983x + 0{,}1998) \cdot \mathrm{e}^x - 0{,}0998 \cdot \mathrm{e}^{-10x} + 1{,}9$

14) a) $\ddot{x} - 6{,}54\,x = 0; \quad \lambda_{1/2} = \pm 2{,}5573; \quad x = C_1 \cdot e^{2{,}5573\,t} + C_2 \cdot e^{-2{,}5573\,t};$

$\dot{x} = 2{,}5573\,(C_1 \cdot e^{2{,}5573\,t} - C_2 \cdot e^{-2{,}5573\,t})$

Lösung: $x = 0{,}375\,(e^{2{,}5573\,t} + e^{-2{,}5573\,t}) = 0{,}75 \cdot \cosh(2{,}5573\,t) \quad (t \text{ in s}, \ x \text{ in m})$

b) $x(T) = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{\operatorname{arcosh} 2}{2{,}5573} = 0{,}515 \ \text{(in s)}$

Abschnitt 4

1) a) $\lambda_{1/2} = \pm 2\,j; \quad x = C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t);$

$\dot{x} = 2\,[C_1 \cdot \cos(2t) - C_2 \cdot \sin(2t)]; \quad$ *Lösung:* $x(t) = 0{,}5 \cdot \sin(2t) + 2 \cdot \cos(2t)$

b) $\lambda_{1/2} = \pm j; \quad x = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t; \quad \dot{x} = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t$

Lösung: $x(t) = -2 \cdot \sin t + \cos t$

c) $\lambda_{1/2} = \pm a\,j; \quad x = C_1 \cdot \sin(at) + C_2 \cdot \cos(at);$

$\dot{x} = a\,[C_1 \cdot \cos(at) - C_2 \cdot \sin(at)]; \quad$ *Lösung:* $x(t) = \dfrac{v_0}{a} \cdot \sin(at)$

2) a) *Schwingungsgleichung:* $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \left(\text{mit } \omega_0^2 = c/m\right)$

$\omega_0 = \sqrt{c/m} = 9{,}13\ \text{s}^{-1}; \quad f_0 = 1{,}45\ \text{s}^{-1}; \quad T_0 = 0{,}69\ \text{s}$

b) $\lambda_{1/2} = \pm j\,\omega_0; \quad x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (\text{mit } \omega_0 = 9{,}13\ \text{s}^{-1})$

c) $\dot{x} = \omega_0\,[C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - C_2 \cdot \sin(\omega_0 t)]$

$x(0) = C_2 = 0; \quad \dot{x}(0) = \omega_0 C_1 = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0{,}055$

Lösung: $x(t) = 0{,}055\ \text{m} \cdot \sin(9{,}13\ \text{s}^{-1} \cdot t)$ (Bild A-30)

d) $x(2{,}5\ \text{s}) = -0{,}041\ \text{m}$

$v(2{,}5\ \text{s}) = \dot{x}(2{,}5\ \text{s}) =$

$= -0{,}337\ \text{m/s}$

$a(2{,}5\ \text{s}) = \ddot{x}(2{,}5\ \text{s}) =$

$= 3{,}395\ \text{m/s}^2$

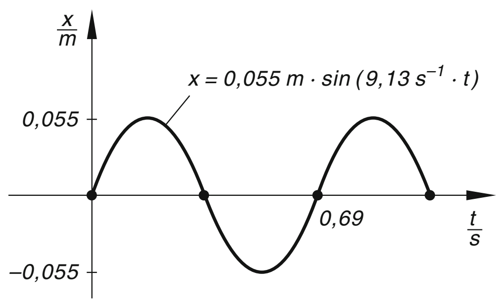


Bild A-30

3) a) $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (\text{mit } \omega_0^2 = g/l); \quad \lambda_{1/2} = \pm j\,\omega_0;$

$\varphi = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad \dot{\varphi} = \omega_0\,[C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - C_2 \cdot \sin(\omega_0 t)]$

b) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}; \quad f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}; \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

c) $\varphi(0) = C_2 = \varphi_0; \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

Lösung: $\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t), \quad t \geq 0$

4) a) $\lambda_{1/2} = -2 \pm 5\,\mathrm{j}; \quad x = \mathrm{e}^{-2t}[C_1 \cdot \sin(5t) + C_2 \cdot \cos(5t)];$

$\dot{x} = \mathrm{e}^{-2t}[-(2C_1 + 5C_2) \cdot \sin(5t) + (5C_1 - 2C_2) \cdot \cos(5t)]$

Lösung: $x(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cdot \cos(5t)$

b) $\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}\,\mathrm{j}; \quad x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)\right];$

$\dot{x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left[-\frac{1}{2}(C_1 + \sqrt{7}\,C_2) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right) + \frac{1}{2}(\sqrt{7}\,C_1 - C_2) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)\right]$

Lösung: $x(t) = \frac{6}{7}\sqrt{7} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)$

c) $\lambda_{1/2} = -1 \pm 2\,\mathrm{j}; \quad x = \mathrm{e}^{-t}[C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)];$

$\dot{x} = \mathrm{e}^{-t}[-(C_1 + 2C_2) \cdot \sin(2t) + (2C_1 - C_2) \cdot \cos(2t)]$

Lösung: $x(t) = \mathrm{e}^{-t}[5 \cdot \sin(2t) + 10 \cdot \cos(2t)]$

5) a) *Schwingungsgleichung:* $\ddot{x} + 16\,\dot{x} + 256x = 0; \quad \lambda_{1/2} = -8 \pm 8\sqrt{3}\,\mathrm{j}$

$x = \mathrm{e}^{-8t}[C_1 \cdot \sin(8\sqrt{3}\,t) + C_2 \cdot \cos(8\sqrt{3}\,t)];$

$\dot{x} = -8 \cdot \mathrm{e}^{-8t}[(C_1 + \sqrt{3}\,C_2) \cdot \sin(8\sqrt{3}\,t) - (\sqrt{3}\,C_1 - C_2) \cdot \cos(8\sqrt{3}\,t)]$

b) $\omega_d = 8\sqrt{3}\,\mathrm{s}^{-1} = 13{,}856\,\mathrm{s}^{-1}; \quad f_d = 2{,}205\,\mathrm{s}^{-1}; \quad T_d = 0{,}453\,\mathrm{s}$

c) *Lösung:* $x(t) = \mathrm{e}^{-8t}[0{,}1155 \cdot \sin(8\sqrt{3}\,t) + 0{,}2 \cdot \cos(8\sqrt{3}\,t)]$ (Bild A-31)

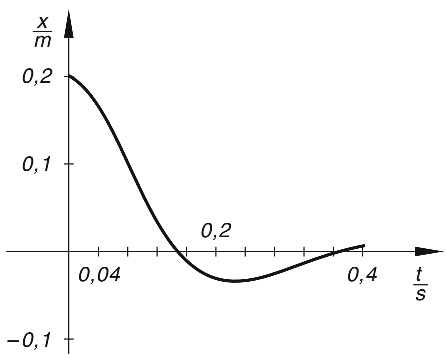


Bild A-31

6) a) $\lambda_{1/2} = -2{,}5; \quad x = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^{-2{,}5t}; \quad \dot{x} = (C_1 - 2{,}5\,C_2 - 2{,}5\,C_1 t) \cdot \mathrm{e}^{-2{,}5t}$

Lösung: $x(t) = (13{,}5\,t + 5) \cdot \mathrm{e}^{-2{,}5t}$

b) $\lambda_{1/2} = -0{,}5; \quad x = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}; \quad \dot{x} = (C_1 - 0{,}5\,C_2 - 0{,}5\,C_1 t) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$

Lösung: $x(t) = (-0{,}5\,t + 1) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$

7) a) Der *aperiodische Grenzfall* tritt ein für $\delta = \omega_0$:

$$\delta = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \Rightarrow \quad b = 2\sqrt{cm} = 16\,\mathrm{kg/s}$$

Für $\delta > \omega_0$, d. h. $b > 16$ kg/s verhält sich das System *aperiodisch.*

b) *Schwingungsgleichung* (im Grenzfall): $0{,}5\,\ddot{x} + 16\dot{x} + 128\,x = 0$; $\lambda_{1/2} = -16$;

$x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-16t}$; $\dot{x} = (C_1 - 16\,C_2 - 16\,C_1 t) \cdot e^{-16t}$

Lösung (Bild A-32): $x(t) = (3{,}2\,t + 0{,}2) \cdot e^{-16t}$, $t \geq 0$ (t in s, x in m)

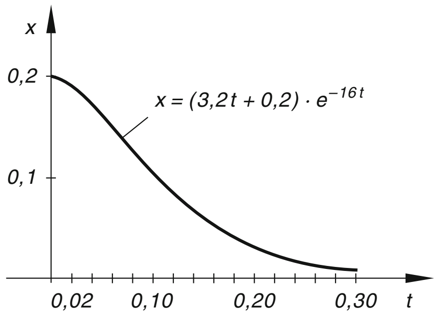


Bild A-32

8) a) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -5$; $x = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{-5t}$; $\dot{x} = -C_1 \cdot e^{-t} - 5\,C_2 \cdot e^{-5t}$

Lösung: $x(t) = 13 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^{-5t}$

b) $\lambda_1 = -0{,}2$; $\lambda_2 = -0{,}8$; $x = C_1 \cdot e^{-0{,}2t} + C_2 \cdot e^{-0{,}8t}$;

$\dot{x} = -0{,}2\,C_1 \cdot e^{-0{,}2t} - 0{,}8\,C_2 \cdot e^{-0{,}8t}$

Lösung: $x(t) = -4 \cdot e^{-0{,}2t} + 6 \cdot e^{-0{,}8t}$

c) $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -4$; $x = C_1 \cdot e^{-3t} + C_2 \cdot e^{-4t}$; $\dot{x} = -3\,C_1 \cdot e^{-3t} - 4\,C_2 \cdot e^{-4t}$

Lösung: $x(t) = 20 \cdot e^{-3t} - 15 \cdot e^{-4t}$

9) Schwingungsgleichung: $\ddot{x} + 40\,\dot{x} + 204 = 0$; $\lambda_1 = -6$; $\lambda_2 = -34$

$x = C_1 \cdot e^{-6t} + C_2 \cdot e^{-34t}$

$\dot{x} = -6\,C_1 \cdot e^{-6t} - 34\,C_2 \cdot e^{-34t}$

Lösung (Bild A-33):

$x(t) = 0{,}1\ \text{m}\left(e^{-\frac{6}{\text{s}}t} - e^{-\frac{34}{\text{s}}t}\right)$

(t in s)

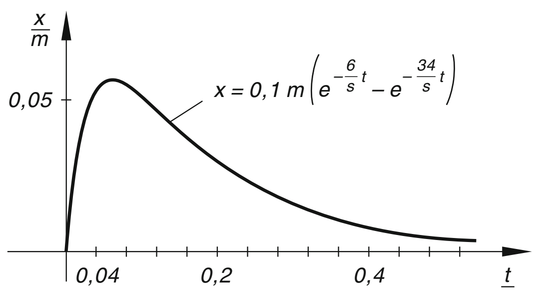


Bild A-33

10) $\lambda_{1/2} = \pm\,j\,\omega_0$; $x_0 = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$;

Aufsuchen einer partikulären Lösung:

$x_p = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad x_p = \dfrac{a}{\omega_0^2}$; $x = x_0 + x_p = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t) + \dfrac{a}{\omega_0^2}$;

$\dot{x} = \omega_0\,[\,C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - C_2 \cdot \sin(\omega_0 t)\,]$

Lösung (Bild A-34): $x(t) = \dfrac{a}{\omega_0^2}\,[\,1 - \cos(\omega_0 t)\,] = \dfrac{m\,a}{c}\,[1 - \cos(\omega_0 t)]$, $t \geq 0$

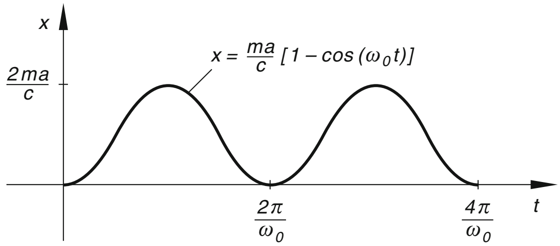


Bild A-34

11) a) $\lambda_{1/2} = -2 \pm 5\mathrm{j}$; $x_0 = \mathrm{e}^{-2t}[C_1 \cdot \sin(5t) + C_2 \cdot \cos(5t)]$;

Störglied: $g(t) = 2 \cdot \sin(2t)$ ($\beta = 2$; $\beta\mathrm{j} = 2\mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow$ $x_p = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t)$;

$$\underbrace{(25A - 8B)}_{2} \cdot \sin(2t) + \underbrace{(8A + 25B)}_{0} \cdot \cos(2t) = 2 \cdot \sin(2t) \quad \Rightarrow$$

$A = 0{,}0726$; $B = -0{,}0232$; $x_p = 0{,}0726 \cdot \sin(2t) - 0{,}0232 \cdot \cos(2t)$

Allgemeine Lösung:

$x(t) = \mathrm{e}^{-2t}[C_1 \cdot \sin(5t) + C_2 \cdot \cos(5t)] + 0{,}0726 \cdot \sin(2t) - 0{,}0232 \cdot \cos(2t)$

Stationäre Lösung (Bild A-35):

$x(t) = x_p = 0{,}0726 \cdot \sin(2t) - 0{,}0232 \cdot \cos(2t) = 0{,}0762 \cdot \sin(2t - 0{,}3093)$

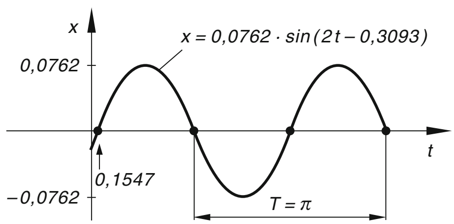


Bild A-35

b) $\lambda_{1/2} = -3$; $x_0 = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^{-3t}$; *Störglied:* $g(t) = \cos t - \sin t$ ($\beta = 1$; $\beta\mathrm{j} = \mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow$ $x_p = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t$;

$$\underbrace{(6A + 8B)}_{1} \cdot \cos t + \underbrace{(8A - 6B)}_{-1} \cdot \sin t = \cos t - \sin t \quad \Rightarrow$$

$A = -0{,}02$; $B = 0{,}14$; $x_p = -0{,}02 \cdot \sin t + 0{,}14 \cdot \cos t$

Allgemeine Lösung: $x(t) = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^{-3t} - 0{,}02 \cdot \sin t + 0{,}14 \cdot \cos t$

Stationäre Lösung (Bild A-36):

$x(t) = x_p = -0{,}02 \cdot \sin t + 0{,}14 \cdot \cos t = 0{,}1414 \cdot \sin(t + 1{,}7127)$

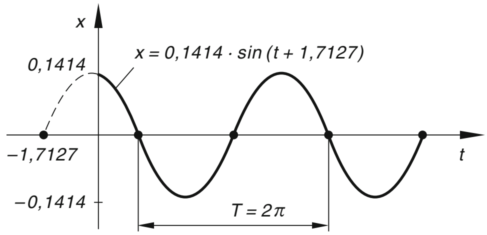


Bild A-36

12) a) Schwingungsgleichung (*reelle* Form): $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin(\omega t)$; $\lambda_{1/2} = -1 \pm 2\mathrm{j}$;

$x_0 = \mathrm{e}^{-t}\,[C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)]$

Schwingungsgleichung in *komplexer* Form: $\ddot{\underline{x}} + 2\dot{\underline{x}} + 5\underline{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

Komplexer Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung:

$\underline{x}_p = A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \varphi)} = A \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

$$A \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}(-\omega^2 + \mathrm{j}2\omega + 5) = 1 \quad \Rightarrow \quad (5 - \omega^2) + \mathrm{j}(2\omega) = \frac{1}{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Aus Bild A-37 folgt:

$$\left(\frac{1}{A}\right)^2 = (5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

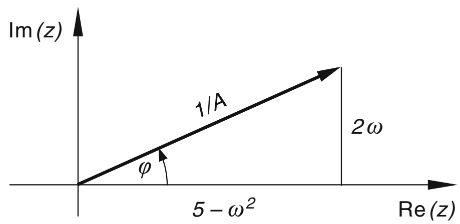


Bild A-37

$$\tan\varphi = \frac{2\omega}{5 - \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{2\omega}{5 - \omega^2}\right) & \omega < \sqrt{5} \\ \pi/2 & \text{für} \quad \omega = \sqrt{5} \\ \arctan\left(\dfrac{2\omega}{5 - \omega^2}\right) + \pi & \omega > \sqrt{5} \end{cases}$$

Partikuläre Lösung in *reeller* Form:

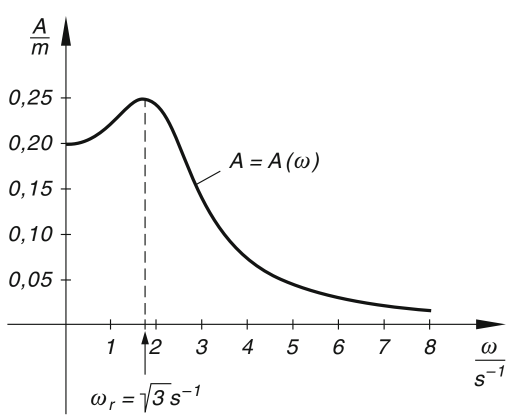
$x_p = \mathrm{Re}(\underline{x}_p) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Allgemeine Lösung (in *reeller* Form):

$$x(t) = x_0 + x_p = \mathrm{e}^{-t}[C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)] + A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

b) *Stationäre* Lösung: $x(t) = x_p = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Resonanzkurve $A = A(\omega)$: Bild A-38; Frequenzgang $\varphi = \varphi(\omega)$: Bild A-39



Resonanzstelle (Maximum der Kurve):

$\omega = \omega_r = \sqrt{3}\,\mathrm{s}^{-1}$

$A_{\max} = 0{,}25\ \mathrm{m}$

Bild A-38

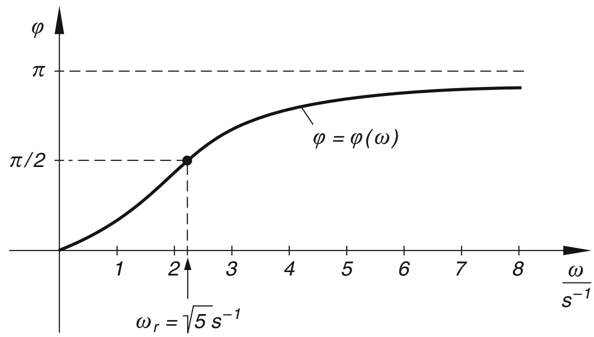


Bild A-39

c) $A(\omega = 1) = 0{,}2236; \quad \varphi(\omega = 1) = 0{,}4636$

$x(t) = 0{,}2236 \text{ m} \cdot \sin(1 \text{ s}^{-1} \cdot t - 0{,}4636)$ (Bild A-40)

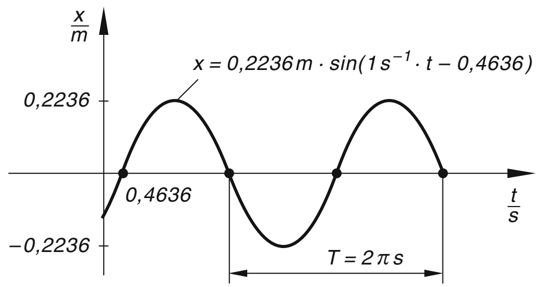


Bild A-40

13) Schwingungsgleichung: $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + 2500 \dfrac{di}{dt} + 10^6 i = 7{,}5 \cdot 10^5 \cdot \cos(500t)$

Ansatz für eine partikuläre Lösung: $i_p(t) = A \cdot \sin(500t) + B \cdot \cos(500t)$;

$\underbrace{(5A + 3B)}_{3} \cdot \cos(500t) + \underbrace{(3A - 5B)}_{0} \cdot \sin(500t) = 3 \cdot \cos(500t) \quad \Rightarrow$

$A = 15/34; \quad B = 9/34$

Stationäre Lösung (Bild A-41):

$$i(t) \approx i_p(t) = \frac{15}{34} \text{ A} \cdot \sin(500 \text{ s}^{-1} \cdot t) + \frac{9}{34} \text{ A} \cdot \cos(500 \text{ s}^{-1} \cdot t) =$$
$$= 0{,}5145 \text{ A} \cdot \sin(500 \text{ s}^{-1} \cdot t + 0{,}5404)$$

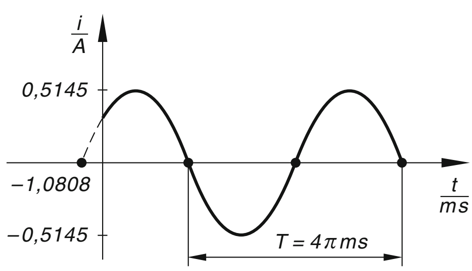


Bild A-41

Abschnitt 5

1) Durch Einsetzen in die Dgl zeigt man zunächst, dass y_1, y_2 und y_3 partikuläre *Lösungen* sind. Sie bilden eine *Fundamentalbasis* der Dgl, da ihre Wronski-Determinante *nicht* verschwindet: $W(y_1; y_2; y_3) = -6 \cdot e^{-2x} \neq 0$

2) a) $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = -3; \quad y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{-3x}$

b) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm j; \quad y = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x$

c) $\lambda_{1/2} = -1; \quad \lambda_3 = 6; \quad x = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-t} + C_3 \cdot e^{6t}$

d) $\lambda_{1/2/3} = -a; \quad y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot e^{-ax}$

e) $\lambda_1 = 2; \quad \lambda_{2/3} = 1 \pm 3j; \quad u = C_1 \cdot e^{2x} + e^{x}[C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x)]$

f) $\lambda_{1/2} = 2; \quad \lambda_3 = 3; \quad y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{3x}$

3) Man zeigt zunächst durch Einsetzen in die Dgl, dass y_1, y_2 und y_3 partikuläre *Lösungen* sind. Sie sind *linear unabhängig*, da ihre Wronski-Determinante von null *verschieden* ist:

$W(y_1; y_2; y_3) = -54 \cdot e^{3x} \neq 0$

Allgemeine Lösung: $y = C_1 \cdot e^{-x} + e^{2x}[C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x)]$

4) a) $\lambda_{1/2} = \pm 1; \quad \lambda_{3/4} = \pm j; \quad x = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \sin t + C_4 \cdot \cos t$

b) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_{3/4} = 1 \pm j;$

$y = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} + e^{x}(C_3 \cdot \sin x + C_4 \cdot \cos x)$

c) $\lambda_{1/2/3} = 1; \quad \lambda_4 = -5; \quad y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot e^{x} + C_4 \cdot e^{-5x}$

d) $\lambda_{1/2} = 2j; \quad \lambda_{3/4} = -2j; \quad v = (C_1 + C_2 t) \cdot \sin(2t) + (C_3 + C_4 t) \cdot \cos(2t)$

5) a) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = j; \quad \lambda_{4/5} = -j;$

$x = C_1 + (C_2 + C_3 t) \cdot \sin t + (C_4 + C_5 t) \cdot \cos t$

b) $\lambda_{1/2/3} = 0; \quad \lambda_{4/5} = -1; \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x) \cdot e^{-x}$

c) $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 10\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda - 25 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2 = 0$

Diese Zerlegung der charakteristischen Gleichung 5. Grades in Faktoren erhält man wie folgt: $\lambda = 1$ ist eine Lösung dieser Gleichung; den zugehörigen Linearfaktor $\lambda - 1$ abspalten (Horner-Schema oder Polynomdivision)

$\Rightarrow \quad \lambda^4 + 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 20\lambda + 25 = 0$

Komplexe Lösungen treten stets *paarweise* auf: $\lambda = -1 \pm 2j$ (konjugiert komplexe Lösungen). Die zugehörigen Linearfaktoren zu einem *quadratischen* Term zusammenfassen:

$$[\lambda - (-1 + 2j)][\lambda - (-1 - 2j)] = \underbrace{[(\lambda + 1) - 2j][(\lambda + 1) + 2j]}_{\text{3. Binom}} = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

Durch *Polynomdivision* erhält man schließlich:

$(\lambda^4 + 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 20\lambda + 25) : (\lambda^2 + 2\lambda + 5) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$

Lösungen: $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_{2/3} = -1 + 2j; \quad \lambda_{4/5} = -1 - 2j$

$y = C_1 \cdot e^{x} + e^{-x}[(C_2 + C_3 x) \cdot \sin(2x) + (C_4 + C_5 x) \cdot \cos(2x)]$

d) $\lambda_{1/2} = 1; \quad \lambda_3 = -2; \quad \lambda_{4/5} = \pm 5j$

$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{x} + C_3 \cdot e^{-2x} + C_4 \cdot \sin(5x) + C_5 \cdot \cos(5x)$

6) a) $\lambda_1 = -1; \quad \lambda_{2/3} = 2; \quad y = C_1 \cdot e^{-x} + (C_2 + C_3 x) \cdot e^{2x}$

$y' = -C_1 \cdot e^{-x} + (2C_3 x + 2C_2 + C_3) \cdot e^{2x}$

$y'' = C_1 \cdot e^{-x} + 4(C_3 x + C_2 + C_3) \cdot e^{2x}$

Spezielle Lösung: $y = \frac{1}{9} \cdot e^{-x} + \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x\right) \cdot e^{2x}$

b) $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = 2; \quad x = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot e^{2t}$

$\dot{x} = C_1 \cdot e^t - C_2 \cdot e^{-t} + 2C_3 \cdot e^{2t}; \quad \ddot{x} = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} + 4C_3 \cdot e^{2t}$

Spezielle Lösung: $x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t$

c) $\lambda_{1/2} = \pm j; \quad \lambda_{3/4} = \pm 3j; \quad x = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t + C_3 \cdot \sin(3t) + C_4 \cdot \cos(3t)$

$\dot{x} = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t + 3[C_3 \cdot \cos(3t) - C_4 \cdot \sin(3t)]$

$\ddot{x} = -C_1 \cdot \sin t - C_2 \cdot \cos t - 9[C_3 \cdot \sin(3t) + C_4 \cdot \cos(3t)]$

$\dddot{x} = -C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t - 27[C_3 \cdot \cos(3t) - C_4 \cdot \sin(3t)]$

Spezielle Lösung: $x = -9 \cdot \cos t + \cos(3t)$

d) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm j; \quad \lambda_{4/5} = \pm 2j$

$y = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x)$

$y' = C_2 \cdot \cos x - C_3 \cdot \sin x + 2[C_4 \cdot \cos(2x) - C_5 \cdot \sin(2x)]$

$y'' = -C_2 \cdot \sin x - C_3 \cdot \cos x - 4[C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x)]$

$y''' = -C_2 \cdot \cos x + C_3 \cdot \sin x - 8[C_4 \cdot \cos(2x) - C_5 \cdot \sin(2x)]$

$y^{(4)} = C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x + 16[C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x)]$

Spezielle Lösung: $y = 3 - 4 \cdot \cos x + \cos(2x)$

7) Es ist $a_2 = a_1 = a_0 = 1$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_{2/3} = \pm j$.

a) $a_0 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = ax + b$

b) $a_0 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

c) $c = 2$; 2 ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow \quad y_p = A \cdot e^{2x}$

d) $c = -1$; -1 ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow$
$y_p = Ax \cdot e^{-x}$

e) $\beta = 2$; $j\beta = 2j$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow$
$y_p = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$

f) $\beta = 1$; $j\beta = j$ ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow$
$y_p = x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x)$

g) $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$

$g_1(x) = 2 \cdot e^{-x}$ mit $c = -1$; -1 ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow \quad y_{p_1} = Ax \cdot e^{-x}$

$g_2(x) = \sin(5x)$ mit $\beta = 5$; $j\beta = 5j$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow \quad y_{p_2} = B \cdot \sin(5x) + C \cdot \cos(5x)$

$g_3(x) = 2 \cdot \cos x$ mit $\beta = 1$; $j\beta = j$ ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow \quad y_{p_3} = x(D \cdot \sin x + E \cdot \cos x)$

Gesamtansatz: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$

$y_p = Ax \cdot e^{-x} + B \cdot \sin(5x) + C \cdot \cos(5x) + x(D \cdot \sin x + E \cdot \cos x)$

8) a) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = -1; \quad y_0 = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cdot \mathrm{e}^{-x};$

Störglied: $g(x) = 10 \cdot \cos x$ ($\beta = 1$; $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow \quad y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x;$

$\underbrace{-2B}_{10} \cdot \cos x - \underbrace{2A}_{0} \cdot \sin x = 10 \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad A = 0; \quad B = -5; \quad y_p = -5 \cdot \cos x$

$y = y_0 + y_p = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cdot \mathrm{e}^{-x} - 5 \cdot \cos x$

b) $\lambda_{1/2/3} = -1; \quad y_0 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x};$ *Störglied:* $g(x) = x + 6 \cdot \mathrm{e}^{-x}$ ($a_0 = 1 \neq 0$; $c = -1$; -1 ist eine *dreifache* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow \quad y_p = ax + b + Ax^3 \cdot \mathrm{e}^{-x};$

$\underbrace{a}_{1}x + \underbrace{(3a + b)}_{0} + \underbrace{6A}_{6} \cdot \mathrm{e}^{-x} = x + 6 \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad a = 1; \quad b = -3; \quad A = 1;$

$y_p = x - 3 + x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$y = y_0 + y_p = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x} + x - 3 + x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

c) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm \mathrm{j}; \quad x_0 = C_1 + C_2 \cdot \sin t + C_3 \cdot \cos t$

Störglied: $g(t) = 9t^2$ $(a_0 = 0) \quad \Rightarrow \quad x_p = t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + ct;$

$\underbrace{3a}_{9}t^2 + \underbrace{2b}_{0}t + \underbrace{(6a + c)}_{0} = 9t^2 \quad \Rightarrow \quad a = 3; \quad b = 0; \quad c = -18; \quad x_p = 3t^3 - 18t$

$x = x_0 + x_p = C_1 + C_2 \cdot \sin t + C_3 \cdot \cos t + 3t^3 - 18t$

d) $\lambda_{1/2} = 1; \quad \lambda_3 = -1; \quad y_0 = (C_1 + C_2 x) \cdot \mathrm{e}^{x} + C_3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

Störglied: $g(x) = 16x \cdot \mathrm{e}^{-x} = g_1(x) \cdot g_2(x)$ mit $g_1(x) = 16x$ (lineare Funktion) und $g_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (mit $c = -1$; -1 ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow$ *Produktansatz:* $y_p = (ax + b) \cdot Ax \cdot \mathrm{e}^{-x} = (\alpha x^2 + \beta x) \cdot \mathrm{e}^{-x};$

$\underbrace{8\alpha}_{16}x + \underbrace{(-8\alpha + 4\beta)}_{0} = 16x \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2; \quad \beta = 4; \quad x_p = (2x^2 + 4x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$y = y_0 + y_p = (C_1 + C_2 x) \cdot \mathrm{e}^{x} + (2x^2 + 4x + C_3) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

9) a) $\lambda_{1/2} = \mathrm{j}; \quad \lambda_{3/4} = -\mathrm{j}; \quad y_0 = (C_1 + C_2 x) \cdot \sin x + (C_3 + C_4 x) \cdot \cos x$

Störglied: $g(x) = 8 \cdot \sin x + x^2 + 4$ ($a_0 = 1 \neq 0$; $\beta = 1$; $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}$ ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow$

$y_p = x^2(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) + ax^2 + bx + c;$

$\underbrace{-8A}_{8} \cdot \sin x - \underbrace{8B}_{0} \cdot \cos x + \underbrace{a}_{1}x^2 + \underbrace{b}_{0}x + \underbrace{(4a + c)}_{4} = 8 \cdot \sin x + x^2 + 4 \quad \Rightarrow$

$A = -1; \quad B = 0; \quad a = 1; \quad b = c = 0; \quad y_p = -x^2 \cdot \sin x + x^2$

$y = y_0 + y_p = (C_1 + C_2 x - x^2) \cdot \sin x + (C_3 + C_4 x) \cdot \cos x + x^2$

b) $\lambda_{1/2} = 0; \quad \lambda_{3/4/5} = -1; \quad y_0 = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

Störglied: $g(x) = 2(\sin x + \cos x) + 2$ ($a_0 = a_1 = 0$; $\beta = 1$; $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow \quad y_p = ax^2 + A \cdot \sin x + B \cdot \cos x;$

$\underbrace{(2A + 2B)}_{2} \cdot \sin x + \underbrace{(-2A + 2B)}_{2} \cdot \cos x + \underbrace{2a}_{2} = 2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + 2 \quad \Rightarrow$

$A = 0; \quad B = 1; \quad a = 1; \quad y_p = x^2 + \cos x$

$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x} + x^2 + \cos x$

10) a) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm 1; \quad$ *Störglied:* $g(x) = 10x \quad (a_0 = 0) \quad \Rightarrow \quad y_p = ax^2 + bx;$

$$\underbrace{-2a}_{10}x - \underbrace{b}_{0} = 10x \quad \Rightarrow \quad a = -5; \quad b = 0; \quad y_p = -5x^2$$

b) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = -2 \pm 3\mathrm{j}; \quad$ *Störglied:* $g(x) = \mathrm{e}^x + 10 \quad (c = 1;\ 1$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung; $a_0 = 0) \quad \Rightarrow \quad y_p = A \cdot \mathrm{e}^x + ax;$

$$\underbrace{18A}_{1} \cdot \mathrm{e}^x + \underbrace{13a}_{10} = \mathrm{e}^x + 10 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{18}; \quad B = \frac{10}{13}; \quad y_p = \frac{1}{18} \cdot \mathrm{e}^x + \frac{10}{13}x$$

c) $\lambda_{1/2} = 1; \quad \lambda_3 = -2; \quad$ *Störglied:* $g(x) = 2 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x \quad (\beta = 1;\ \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\quad \Rightarrow \quad y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x;$

$$\underbrace{(-4A + 2B)}_{2} \cdot \cos x + \underbrace{(2A + 4B)}_{-3} \cdot \sin x = 2 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x \quad \Rightarrow$$

$A = -0{,}7; \quad B = -0{,}4; \quad y_p = -0{,}7 \cdot \sin x - 0{,}4 \cdot \cos x$

d) $\lambda_{1/2} = \mathrm{j}; \quad \lambda_{3/4} = -\mathrm{j}; \quad$ *Störglied:* $g(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-t} = g_1(t) \cdot g_2(t)$ mit $g_1(t) = t$ (lineare Funktion; $a_0 = 1 \neq 0$) und $g_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ (mit $c = -1$; -1 ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow$

Produktansatz: $x_p = (at + b) \cdot A \cdot \mathrm{e}^{-t} = (\alpha t + \beta) \cdot \mathrm{e}^{-t};$

$$\underbrace{4\alpha}_{1} t + \underbrace{(-8\alpha + 4\beta)}_{0} = t \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4}; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad x_p = \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-t}$$

e) $\lambda_{1/2} = \pm 1; \quad \lambda_3 = 2; \quad \lambda_{4/5} = \pm 2\mathrm{j}; \quad$ *Störglied:* $g(x) = -104 \cdot \mathrm{e}^{3x} + (24 \cdot \sin x - 12 \cdot \cos x) + 8x^2$ (mit $c = 3$, $\beta = 1$ und $a_0 = 8 \neq 0$; weder 3 noch $\beta\mathrm{j} = \mathrm{j}$ sind Lösungen der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow$

$y_p = A \cdot \mathrm{e}^{3x} + B \cdot \sin x + C \cdot \cos x + ax^2 + bx + c;$

$$\underbrace{104A}_{-104} \cdot \mathrm{e}^{3x} + \underbrace{(12B + 6C)}_{24} \cdot \sin x + \underbrace{(-6B + 12C)}_{-12} \cdot \cos x + \underbrace{8a}_{8}x^2 + \underbrace{(-8a + 8b)}_{0}x + \underbrace{(-12a - 4b + 8c)}_{0} =$$

$$= -104 \cdot \mathrm{e}^{3x} + 24 \cdot \sin x - 12 \cdot \cos x + 8x^2 \quad \Rightarrow$$

$A = -1; \quad B = 2; \quad C = 0; \quad a = b = 1; \quad c = 2;$

$y_p = -\mathrm{e}^{3x} + 2 \cdot \sin x + x^2 + x + 2$

11) a) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm 3\mathrm{j}; \quad y_0 = C_1 + C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x)$

Störglied: $g(x) = 18x \quad (a_0 = 0) \quad \Rightarrow \quad y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx;$

$$\underbrace{18a}_{18}x + \underbrace{9b}_{0} = 18x \quad \Rightarrow \quad a = 1; \quad b = 0; \quad y_p = x^2$$

$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x) + x^2 + 2$

$y' = 3[C_2 \cdot \cos(3x) - C_3 \cdot \sin(3x)] + 2x$

$y'' = -9[C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x)] + 2$

Spezielle Lösung: $y = 2 \cdot \cos(3x) + x^2 + 2$

b) $\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -5; \quad y_0 = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + C_3 \cdot \mathrm{e}^{-5x}$

Störglied: $g(x) = 34 \cdot \sin x + 12 \cdot \cos x \quad (\beta = 1;\ \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\quad \Rightarrow \quad y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x;$

$$\underbrace{(2A - 16B)}_{34} \cdot \sin x + \underbrace{(16A + 2B)}_{12} \cdot \cos x = 34 \cdot \sin x + 12 \cdot \cos x \quad \Rightarrow$$

$A = 1; \quad B = -2; \quad y_p = \sin x - 2 \cdot \cos x$

$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot e^{-5x} + \sin x - 2 \cdot \cos x$

$y' = -C_1 \cdot e^{-x} - 2C_2 \cdot e^{-2x} - 5C_3 \cdot e^{-5x} + \cos x + 2 \cdot \sin x$

$y'' = C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{-2x} + 25C_3 \cdot e^{-5x} - \sin x + 2 \cdot \cos x$

Spezielle Lösung: $y = 2 \cdot e^{-x} + e^{-2x} + \sin x - 2 \cdot \cos x$

c) $\lambda_{1/2} = \pm 1; \quad \lambda_{3/4} = \pm j; \quad x_0 = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \sin t + C_4 \cdot \cos t$

Störglied: $g(t) = 45 \cdot e^{2t}$ ($c = 2$; 2 ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow$

$x_p = A \cdot e^{2t}; \quad 15A = 45 \quad \Rightarrow \quad A = 3; \quad x_p = 3 \cdot e^{2t}$

$x = x_0 + x_p = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \sin t + C_4 \cdot \cos t + 3 \cdot e^{2t}$

$\dot{x} = C_1 \cdot e^{t} - C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \cos t - C_4 \cdot \sin t + 6 \cdot e^{2t}$

$\ddot{x} = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-t} - C_3 \cdot \sin t - C_4 \cdot \cos t + 12 \cdot e^{2t}$

$\dddot{x} = C_1 \cdot e^{t} - C_2 \cdot e^{-t} - C_3 \cdot \cos t + C_4 \cdot \sin t + 24 \cdot e^{2t}$

Spezielle Lösung: $x = 3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot \sin t + 3 \cdot e^{2t}$

d) $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm 1; \quad \lambda_{4/5} = \pm j;$

$v_0 = C_1 + C_2 \cdot e^{t} + C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot \sin t + C_5 \cdot \cos t$

Störglied: $g(t) = 2t + 2 \quad (a_0 = 0) \quad \Rightarrow \quad v_p = t(at + b) = at^2 + bt$

$\underbrace{-2at}_{2} \underbrace{- b}_{2} = 2t + 2 \quad \Rightarrow \quad a = -1; \quad b = -2; \quad v_p = -t^2 - 2t$

$v = v_0 + v_p = C_1 + C_2 \cdot e^{t} + C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot \sin t + C_5 \cdot \cos t - t^2 - 2t$

$\dot{v} = C_2 \cdot e^{t} - C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot \cos t - C_5 \cdot \sin t - 2t - 2$

$\ddot{v} = C_2 \cdot e^{t} + C_3 \cdot e^{-t} - C_4 \cdot \sin t - C_5 \cdot \cos t - 2$

$\dddot{v} = C_2 \cdot e^{t} - C_3 \cdot e^{-t} - C_4 \cdot \cos t + C_5 \cdot \sin t$

$v^{(4)} = C_2 \cdot e^{t} + C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot \sin t + C_5 \cdot \cos t$

Spezielle Lösung: $v = 5 - 4 \cdot \cos t - t^2 - 2t$

12) $\lambda_{1/2} = 0; \quad \lambda_{3/4} = \pm j\alpha; \quad y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \sin(\alpha x) + C_4 \cdot \cos(\alpha x)$

Ansatz: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x) \quad$ (da $\beta \neq \alpha$)

$$\beta^2 \underbrace{(\beta^2 - \alpha^2) A}_{K_0} \cdot \sin(\beta x) + \beta^2 \underbrace{(\beta^2 - \alpha^2) B}_{0} \cdot \cos(\beta x) = K_0 \cdot \sin(\beta x) + 0 \cdot \cos(\beta x) \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{K_0}{\beta^2 (\beta^2 - \alpha^2)}; \quad B = 0; \quad y_p = \frac{K_0}{\beta^2 (\beta^2 - \alpha^2)} \cdot \sin(\beta x)$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \sin(\alpha x) + C_4 \cdot \cos(\alpha x) + \frac{K_0}{\beta^2 (\beta^2 - \alpha^2)} \cdot \sin(\beta x)$$

Aus den Randbedingungen folgt (mit $\beta l = \pi$ und $\sin(\beta l) = \sin \pi = 0$):

$$\left.\begin{array}{lll} y(0) = 0 & \Rightarrow & \text{(I)} \quad C_1 + C_4 = 0 \\ y''(0) = 0 & \Rightarrow & \text{(II)} \quad C_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} y(l) = 0 & \Rightarrow & \text{(III)} \quad C_2 l + C_3 \cdot \sin(\alpha l) = 0 \\ y''(l) = 0 & \Rightarrow & \text{(IV)} \quad C_3 \cdot \underbrace{\sin(\alpha l)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_3 = 0$$

Spezielle Lösung: $y = \dfrac{K_0}{\beta^2 (\beta^2 - \alpha^2)} \cdot \sin(\beta x) = \dfrac{Q_0 l^4}{\pi^2 (\pi^2 EI - F l^2)} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$

Abschnitt 6

1) *Exakte* Lösung (durch Aufsuchen einer partikulären Lösung): $y_{\text{exakt}} = 2 \cdot e^{(1-x)} + x - 1$

$y' + y = x$

$y_0 = C \cdot e^{-x}; \quad y_p = ax + b$

$\underbrace{a}_{1} x + \underbrace{(a + b)}_{0} = x \quad \Rightarrow$

$a = 1; \quad b = -1; \quad y_p = x - 1$

$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-x} + x - 1$

$y(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2 \cdot e^1 \quad \Rightarrow$

$y = 2 \cdot e^{(1-x)} + x - 1$

x	y (Euler)	y (Runge-Kutta)	y_{exakt}
1,0	2	2	2
1,1	1,9	1,909 675	1,909 675
1,2	1,82	1,837 462	1,837 462
1,3	1,758	1,781 637	1,781 636
1,4	1,7122	1,740 641	1,740 640

2)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1	1,127 259	1,320 830	1,608 237	2,042 283	2,738 426

3) *Erstrechnung* (*Feinrechnung*) für $h = 0{,}05$:

x	y (Euler)	y (Runge-Kutta)
1	1	1
1,05	1,070 711	1,071 773
1,10	1,143 524	1,145 655
1,15	1,218 416	1,221 621
1,20	1,295 364	1,299 648

Die *Erstrechnung* liefert also folgende Ergebnisse:

Nach *Euler*: $y(1{,}2) = 1{,}295\,364$

Nach *Runge-Kutta*: $y(1{,}2) = 1{,}299\,648$

Zweitrechnung (*Grobrechnung*) für $h = 0{,}1$:

Nach *Euler*: $y(1{,}2) = 1{,}291\,135$

Nach *Runge-Kutta*: $y(1{,}2) = 1{,}299\,648$

Fehlerabschätzung:

Nach *Euler*: $\Delta y_k \approx 1{,}295\,364 - 1{,}291\,135 = 0{,}004\,229 \approx 0{,}004$

Nach *Runge-Kutta*: $\Delta y_k \approx \dfrac{1}{15}(1{,}299\,648 - 1{,}299\,648) = 0$

4) $y'' + y' - 2y = 0; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -2; \quad y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 1; \quad y'(0) = C_1 - 2C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2/3; \quad C_2 = 1/3$

Exakte Lösung: $y_{\text{exakt}} = \dfrac{2}{3} \cdot e^x + \dfrac{1}{3} \cdot e^{-2x}; \quad y'_{\text{exakt}} = \dfrac{2}{3}(e^x - e^{-2x})$

Näherungsrechnung nach *Runge-Kutta*:

x	y (Runge-Kutta)	y_{exakt}	y' (Runge-Kutta)	y'_{exakt}
0	1	1	0	0
0,1	1,009 692	1,009 690	0,190 958	0,190 960
0,2	1,037 710	1,037 708	0,367 386	0,367 388
0,3	1,082 845	1,082 843	0,534 028	0,534 031

5) a) *Exakte* Lösung (siehe Übungsaufgabe 4a) aus Abschnitt 4):

$$x = e^{-2t} \cdot \cos(5t); \quad v = \dot{x} = -e^{-2t}[5 \cdot \sin(5t) + 2 \cdot \cos(5t)]$$

$$x(0{,}1) = 0{,}718\,504 \approx 0{,}7185; \quad v(0{,}1) = \dot{x}(0{,}1) = -3{,}399\,610 \approx -3{,}3996$$

b) *Näherungslösung* nach *Runge-Kutta*:

$$x(0{,}1) = 0{,}718\,521 \approx 0{,}7185; \quad v(0{,}1) = \dot{x}(0{,}1) = -3{,}399\,706 \approx -3{,}3997$$

6) $\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = 1$

Näherungslösung nach *Runge-Kutta*:

$\varphi(0{,}1) = 0{,}099\,875 \approx 0{,}0999; \quad \dot{\varphi}(0{,}1) = 0{,}995\,837 \approx 0{,}9958$

Für *kleine* Winkel erhalten wir näherungsweise die *lineare* Differentialgleichung $\ddot{\varphi} + \varphi = 0$. Sie besitzt die *allgemeine* Lösung $\varphi = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t$ und für die *Anfangswerte* $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ die *spezielle* Lösung $\varphi = \sin t$. Somit ist:

$\varphi(0{,}1) = \sin 0{,}1 = 0{,}099\,833 \approx 0{,}0998; \quad \dot{\varphi}(0{,}1) = \cos 0{,}1 = 0{,}995\,004 \approx 0{,}9950$

Abschnitt 7

1) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -1 \pm \mathrm{j}$

$$y_1 = e^{-x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$$

$$y_2 = -y_1 - \frac{1}{2}y_1' = \frac{1}{2} \cdot e^{-x}[(-C_1 + C_2) \cdot \sin x - (C_1 + C_2) \cdot \cos x]$$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 1$

$$x_1 = (C_1 + C_2 t) \cdot e^t; \quad x_2 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 - x_1) = \frac{1}{2}C_2 \cdot e^t$$

c) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -16 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 4\mathrm{j}$

$$y_1 = C_1 \cdot \sin(4x) + C_2 \cdot \cos(4x); \quad y_2 = y_1' = 4[C_1 \cdot \cos(4x) - C_2 \cdot \sin(4x)]$$

d) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -15 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 1 \pm 3\mathrm{j}$

$$y_1 = e^x[C_1 \cdot \sin(3x) + C_2 \cdot \cos(3x)]$$

$$y_2 = \frac{1}{15}(7y_1 - y_1') = \frac{1}{5} \cdot e^x[(2C_1 + C_2) \cdot \sin(3x) - (C_1 - 2C_2) \cdot \cos(3x)]$$

e) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{j}$

$$x_1 = C_1 \cdot \sin(\sqrt{3}\,t) + C_2 \cdot \cos(\sqrt{3}\,t); \quad x_2 = \frac{1}{2}(-3x_1 - \dot{x}_1) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(-\sqrt{3}\,C_1 + C_2) \cdot \sin(\sqrt{3}\,t) - (C_1 + \sqrt{3}\,C_2) \cdot \cos(\sqrt{3}\,t)\right]$$

f) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 4$

$y_1 = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{4x}; \quad y_2 = \frac{1}{3}(6y_1 - y_1') = C_1 \cdot e^{3x} + \frac{2}{3} C_2 \cdot e^{4x}$

2) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 6$

$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{6x}; \quad y_2 = \frac{1}{4}(4y_1 - y_1') = -\frac{1}{4}(2C_1 + 2C_2 + C_2 x) \cdot e^{6x}$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 4$

$x_1 = C_1 + C_2 \cdot e^{4t}; \quad x_2 = 2x_1 - \dot{x}_1 = 2C_1 - 2C_2 \cdot e^{4t}$

c) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -2 \pm \mathrm{j}$

$y_1 = e^{-2x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$

$y_2 = -y_1 - y_1' = e^{-2x}[(C_1 + C_2) \cdot \sin x - (C_1 - C_2) \cdot \cos x]$

3) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = -1$

$x = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t}; \quad y = \frac{1}{4}(3x - \dot{x}) = \frac{1}{4} C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t}$

b) $a = -\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = -1; \quad b = \det \mathbf{A} = -2;$ *Störglieder:* $g_1(t) = g_2(t) = 0;$

$\tilde{g}(t) = \dot{g}_1(t) - \det \mathbf{B} = 0 - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = -1$

$x = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t}; \quad y = \frac{1}{4}(3x - \dot{x}) = \frac{1}{4} C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t}$

4) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 2\mathrm{j}$

$y_{1(0)} = C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x)$

$y_{2(0)} = \frac{1}{2} y'_{1(0)} = C_1 \cdot \cos(2x) - C_2 \cdot \sin(2x)$

Ansatz: $y_{1(p)} = ax + b; \quad y_{2(p)} = Ax + B$ (in beide Dgln einsetzen)

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{(2A+8)}_{0}\,x + \underbrace{2B}_{a} = a \\ \underbrace{-2a}_{0}\,x \underbrace{- 2b}_{A} = A \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = 0; \quad b = 2; \quad A = -4; \quad B = 0 \\ \text{Somit: } y_{1(p)} = 2; \quad y_{2(p)} = -4x \end{array}$$

Allgemeine Lösung:

$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x) + 2$

$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(p)} = C_1 \cdot \cos(2x) - C_2 \cdot \sin(2x) - 4x$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 1$

$y_{1(0)} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^x; \quad y_{2(0)} = y_{1(0)} + y'_{1(0)} = (2C_1 + C_2 + 2C_2 x) \cdot e^x$

Ansatz: $y_{1(p)} = A \cdot e^{2x}; \quad y_{2(p)} = B \cdot e^{2x}$ (in beiden Dgln einsetzen)

$\left.\begin{array}{l} 3A - B = 4 \\ 4A = B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -4; \quad B = -16 \\ \text{Somit: } y_{1(p)} = -4 \cdot e^{2x}; \quad y_{2(p)} = -16 \cdot e^{2x} \end{array}$

Allgemeine Lösung:

$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = (C_1 \quad + C_2 x) \cdot e^x - 4 \cdot e^{2x}$

$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(p)} = (2C_1 + C_2 + 2C_2 x) \cdot e^x - 16 \cdot e^{2x}$

5) a) $a = -\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = -2; \quad b = \det\mathbf{A} = 2;$ *Störglieder:* $g_1(x) = e^x; \quad g_2(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\tilde{g}(x) = g'_1(x) - \det\mathbf{B} = e^x - \begin{vmatrix} e^x & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot e^x$

$y''_1 - 2y'_1 + 2y_1 = -3 \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 1 \pm j$

$y_{1(0)} = e^x(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x);$ *Ansatz:* $y_{1(p)} = A \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y_{1(p)} = -3 \cdot e^x$

Allgemeine Lösung:

$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = e^x(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x - 3)$

$y_2 = \frac{1}{2}(-2y_1 - y'_1 + e^x) = -\frac{1}{2} \cdot e^x[(3C_1 - C_2) \cdot \sin x + (C_1 + 3C_2) \cdot \cos x - 10]$

b) $a = -\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = 2; \quad b = \det\mathbf{A} = 1;$ *Störglieder:* $g_1(x) = 3x; \quad g_2(x) = 2x \quad \Rightarrow$

$\tilde{g}(x) = g'_1(x) - \det\mathbf{B} = 3 - \begin{vmatrix} 3x & -2 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = 3 - 7x$

$y''_1 + 2y'_1 + y_1 = 3 - 7x \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -1$

$y_{1(0)} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-x};$ *Ansatz:* $y_{1(p)} = ax + b$

$\underbrace{(2a + b)}_{3} + \underbrace{a}_{-7} x = 3 - 7x \quad \Rightarrow \quad a = -7; \quad b = 17; \quad y_{1(p)} = -7x + 17$

Allgemeine Lösung:

$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-x} - 7x + 17$

$y_2 = \frac{1}{2}(-3y_1 - y'_1 + 3x) = -(C_1 + 0{,}5\,C_2 + C_2 x) \cdot e^{-x} + 12x - 22$

c) $a = -\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = -6; \quad b = \det\mathbf{A} = 8;$ *Störglieder:* $g_1(t) = 8 \cdot e^{3t}; \quad g_2(t) = 8 \quad \Rightarrow$

$\tilde{g}(t) = \dot{g}_1(t) - \det\mathbf{B} = 24 \cdot e^{3t} - \begin{vmatrix} 8 \cdot e^{3t} & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -8$

$\ddot{x}_1 - 6\dot{x}_1 + 8x_1 = -8 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 4$

$x_{1(0)} = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{4t}$; *Ansatz:* $x_{1(p)} = \text{const.} = B$;

$8B = -8 \quad \Rightarrow \quad B = -1; \quad x_p = -1$

Allgemeine Lösung:

$$x_1 = x_{1(0)} + x_{1(p)} = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{4t} - 1$$

$$x_2 = 3x_1 - \dot{x}_1 + 8 \cdot e^{3t} = C_1 \cdot e^{2t} - C_2 \cdot e^{4t} + 8 \cdot e^{3t} - 3$$

6) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 2$

$y_{1(0)} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x}; \quad y_{2(0)} = \frac{1}{3}(y_{1(0)} + y'_{1(0)}) = C_1 \cdot e^{2x} - \frac{1}{3} C_2 \cdot e^{-2x}$

Ansatz: $y_{1(p)} = Ax + B$; $y_{2(p)} = Cx + D$ (in beide Dgln einsetzen)

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{(-A + 3C + 1)}_{0} x + \underbrace{(-B + 3D)}_{A} = A \\ \underbrace{(A + C)}_{0} x + \underbrace{(B + D)}_{C} = C \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1/4; \quad B = -1/4; \\ C = -1/4; \quad D = 0 \\ \text{Somit: } y_{1(p)} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}; \\ \qquad\quad\;\; y_{2(p)} = -\frac{1}{4}x \end{array}\right.$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(p)} = C_1 \cdot e^{2x} - \frac{1}{3} C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}x$$

b) $a = -\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = 0$; $b = \det \mathbf{A} = -4$; *Störglieder:* $g_1(x) = x$; $g_2(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\tilde{g}(x) = g'_1(x) - \det \mathbf{B} = 1 - \begin{vmatrix} x & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$

$y''_1 - 4y_1 = 1 - x \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 2$

$y_{1(0)} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x}$; *Ansatz:* $y_{1(p)} = Ax + B$;

$\underbrace{-4B}_{1} \underbrace{- 4A}_{-1} x = 1 - x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad y_{1(p)} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{1}{3}(y_1 + y'_1 - x) = C_1 \cdot e^{2x} - \frac{1}{3} C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}x$$

7) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -1 \pm \mathrm{j}$

$$y_1 = e^{-x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$$

$$y_2 = \frac{1}{5}(3y_1 + y'_1) = \frac{1}{5} \cdot e^{-x}[(2C_1 - C_2) \cdot \sin x + (C_1 + 2C_2) \cdot \cos x]$$

Spezielle Lösung: $y_1 = e^{-x}(\sin x + 2 \cdot \cos x)$; $y_2 = e^{-x} \cdot \cos x$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 3$

$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}; \quad y_2 = \frac{1}{4}(y'_1 - y_1) = \frac{1}{2}(-C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x})$

Spezielle Lösung: $y_1 = -2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{3x}$; $y_2 = e^{-x} + e^{3x}$

c) Einsetzungsverfahren: $a = -\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = -1$; $b = \det \mathbf{A} = -2$

Störglieder: $g_1(t) = t$; $g_2(t) = 3 \cdot e^t \quad \Rightarrow$

$\tilde{g}(t) = \dot{g}_1(t) - \det \mathbf{B} = 1 - \begin{vmatrix} t & 2 \\ 3 \cdot e^t & 3 \end{vmatrix} = 1 - 3t + 6 \cdot e^t$

$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 - 2x_1 = 1 - 3t + 6 \cdot e^t \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 2$

$x_{1(0)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{2t}$; *Ansatz:* $x_{1(p)} = At + B + C \cdot e^t$

$$\underbrace{(-A - 2B)}_{1} \underbrace{- 2At}_{-3} \underbrace{- 2C}_{6} \cdot e^t = 1 - 3t + 6 \cdot e^t \quad \Rightarrow$$

$A = 3/2; \quad B = 5/4; \quad C = -3; \quad x_{1(p)} = \frac{3}{2}t - \frac{5}{4} - 3 \cdot e^t$

Allgemeine Lösung:

$x_1 = x_{1(0)} + x_{1(p)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{2t} - 3 \cdot e^t + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$

$x_2 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 + 2x_1 - t) = \frac{1}{2}(C_1 \cdot e^{-t} + 4C_2 \cdot e^{2t} - 9 \cdot e^t + 2t - 1)$

Spezielle Lösung: $x_1 = \frac{5}{3} \cdot e^{-t} - \frac{5}{12} \cdot e^{2t} - 3 \cdot e^t + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$

$x_2 = \frac{5}{6} \cdot e^{-t} - \frac{5}{6} \cdot e^{2t} - \frac{9}{2} \cdot e^t + t - \frac{1}{2}$

d) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -1 \pm j$

Allgemeine Lösung:

$y_1 = e^{-x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$

$y_2 = -3y_1 - y'_1 = -e^{-x}[(2C_1 - C_2) \cdot \sin x + (C_1 + 2C_2) \cdot \cos x]$

Spezielle Lösung: $y_1 = e^{-x} \cdot \sin x$; $y_2 = -e^{-x} \cdot (2 \cdot \sin x + \cos x)$

e) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 6 \pm 2j$

Allgemeine Lösung:

$y_1 = e^{6x}[C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x)]$

$y_2 = 7y_1 - y'_1 = e^{6x}[(C_1 + 2C_2) \cdot \sin(2x) - (2C_1 - C_2) \cdot \cos(2x)]$

Spezielle Lösung: $y_1 = e^{6x}[\sin(2x) + 2 \cdot \cos(2x)]$; $y_2 = 5 \cdot e^{6x} \cdot \sin(2x)$

8) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 3$

$x_{1(0)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t}; \quad x_{2(0)} = \frac{1}{4}(\dot{x}_{1(0)} - x_{1(0)}) = -\frac{1}{2}(C_1 \cdot e^{-t} - C_2 \cdot e^{3t})$

Ansatz: $x_{1(p)} = B \cdot e^t; \quad x_{2(p)} = C \cdot e^t$ (in beide Dgln einsetzen)

$$\left.\begin{array}{l} 4C - 1 = 0 \\ B + 2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} B = -2; \quad C = 1/4 \\ x_{1(p)} = -2 \cdot e^t; \quad x_{2(p)} = \frac{1}{4} \cdot e^t \end{array}\right.$$

Allgemeine Lösung: $x_1 = x_{1(0)} + x_{1(p)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t} - 2 \cdot e^t$

$$x_2 = x_{2(0)} + x_{2(p)} = -\frac{1}{2}(C_1 \cdot e^{-t} - C_2 \cdot e^{3t}) + \frac{1}{4} \cdot e^t$$

Spezielle Lösung: $x_1 = e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3t} - 2 \cdot e^t$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{4} \cdot e^{3t} + \frac{1}{4} \cdot e^t$$

b) $a = -\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = -2; \quad b = \det \mathbf{A} = -3$

Störglieder: $g_1(t) = -e^t; \quad g_2(t) = 2 \cdot e^t \quad \Rightarrow$

$$\tilde{g}(t) = \dot{g}_1(t) - \det \mathbf{B} = -e^t - \begin{vmatrix} -e^t & 4 \\ 2 \cdot e^t & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot e^t$$

$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - 3x_1 = 8 \cdot e^t \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 3$

$x_{1(0)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t}$

Ansatz: $x_{1(p)} = C \cdot e^t; \quad -4C = 8 \quad \Rightarrow \quad C = -2; \quad x_{1(p)} = -2 \cdot e^t$

Allgemeine Lösung:

$x_1 = x_{1(0)} + x_{1(p)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t} - 2 \cdot e^t$

$x_2 = \frac{1}{4}(\dot{x}_1 - x_1 + e^t) = \frac{1}{4}(-2C_1 \cdot e^{-t} + 2C_2 \cdot e^{3t} + e^t)$

Spezielle Lösung: siehe a)

9) $\left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = \dot{y} \\ \ddot{y} = -\dot{x} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u \end{array}\right\}$ oder $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm j$

Allgemeine Lösung: $u = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t; \quad v = \dot{u} = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t$

Rücksubstitution:

$$x = \int \dot{x}\, dt = \int u\, dt = \int (C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t)\, dt = -C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t + K_1$$

$$y = \int \dot{y}\, dt = \int v\, dt = \int (C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t)\, dt = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t + K_2$$

Spezielle Lösung:

Aus den Anfangswerten erhält man
$C_1 = K_1 = 1$ und $C_2 = K_2 = 0$.
Somit: $x = -\cos t + 1; \quad y = \sin t$
$\cos t = 1 - x; \quad \sin t = y$
Aus $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt weiter:
$(x - 1)^2 + y^2 = 1$

(Kreis um den Mittelpunkt $M = (1; 0)$ mit dem Radius $r = 1$; Bild A-42).

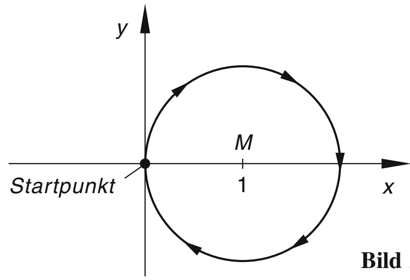


Bild A-42

V Fourier-Transformationen

Hinweise

1) Die Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte).
2) Die Fourier-Transformationen wurden den *Tabellen* in Kap. V, Abschnitt 5.2 entnommen (Angabe der Tabelle, der laufenden Nummer der Transformation und der Parameterwerte).
3) Häufig verwendete Formeln:

$e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2 \cdot \cos\varphi; \quad e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j \cdot \sin\varphi$

Abschnitt 1

1) a) $f(t) = e^{-2|t|} = \left\{ \begin{matrix} e^{2t} & & t \le 0 \\ & \text{für} & \\ e^{-2t} & & t \ge 0 \end{matrix} \right\}$

$$F\{\omega\} = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(2+j\omega)t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{e^{(2-j\omega)t}}{2 - j\omega} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)} \right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2 - j\omega} + \frac{1}{2 + j\omega} = \frac{4}{4 + \omega^2}$$

(Integral: 312 mit $a = 2 - j\omega$ bzw. $a = -(2 + j\omega)$)

b) $$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} t^2 \cdot e^{-t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} t^2 \cdot e^{-(1+j\omega)t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{(1 + j\omega)^2 t^2 + 2(1 + j\omega)t + 2}{-(1 + j\omega)^3} \cdot e^{-(1+j\omega)t} \right]_{0}^{\infty} = \frac{2}{(1 + j\omega)^3}$$

(Integral: 314 mit $a = -(1 + j\omega)$)

c) $F(\omega) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-a t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t} \cdot \sin(\omega_0 t)\, dt =$

$$= \left[\frac{-(a+\mathrm{j}\omega)\cdot\sin(\omega_0 t) - \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t)}{(a+\mathrm{j}\omega)^2 + \omega_0^2} \cdot \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{\omega_0}{(a+\mathrm{j}\omega)^2 + \omega_0^2} \quad \text{(Integral: 322 mit } a \to -(a+\mathrm{j}\omega) \text{ und } b = \omega_0)$$

2) $F(\omega) = \int\limits_{-a}^{a} (a^2 - t^2)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt = a^2 \cdot \underbrace{\int\limits_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt}_{I_1} - \underbrace{\int\limits_{-a}^{a} t^2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt}_{I_2} = a^2 I_1 - I_2$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2:

$$I_1 = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{-\mathrm{j}\omega}\right]_{-a}^{a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}}{\mathrm{j}\omega} = \frac{2\cdot\sin(\omega a)}{\omega} \qquad \text{(Integral: 312 mit } a = -\mathrm{j}\omega)$$

$$I_2 = \left[\frac{(-\omega^2 t^2 + \mathrm{j}\,2\,\omega t + 2)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{(-\mathrm{j}\omega)^3}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{\omega^2 a^2 (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}) + \mathrm{j}\,2\,\omega a (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}) - 2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a})}{\mathrm{j}\omega^3} =$$

$$= \frac{2a^2\cdot\sin(\omega a)}{\omega} + \frac{4a\cdot\cos(\omega a)}{\omega^2} - \frac{4\cdot\sin(\omega a)}{\omega^3} \quad \text{(Integral: 314 mit } a = -\mathrm{j}\omega)$$

$$F(\omega) = a^2 I_1 - I_2 = \frac{2a^2\cdot\sin(\omega a)}{\omega} - \frac{2a^2\cdot\sin(\omega a)}{\omega} - \frac{4a\cdot\cos(\omega a)}{\omega^2} + \frac{4\cdot\sin(\omega a)}{\omega^3} =$$

$$= \frac{4[\sin(\omega a) - a\omega\cdot\cos(\omega a)]}{\omega^3}$$

3) a) $F(\omega) = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{-\mathrm{j}\omega}\right]_{t_0}^{t_0+T} = \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T} - 1)}{\omega}$

(Integral: 312 mit $a = -\mathrm{j}\omega$)

b) $F(\omega) = \int\limits_{-T}^{0} \left(1 + \frac{t}{T}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt + \int\limits_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt =$

$$= \int\limits_{-T}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt + \frac{1}{T}\cdot\int\limits_{-T}^{0} t\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt + \int\limits_{0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt - \frac{1}{T}\cdot\int\limits_{0}^{T} t\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{-\mathrm{j}\omega}\right]_{-T}^{T} + \left[\frac{(\mathrm{j}\omega t + 1)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{\omega^2 T}\right]_{-T}^{0} - \left[\frac{(\mathrm{j}\omega t + 1)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{\omega^2 T}\right]_{0}^{T} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} + \frac{1 - (-j\omega T + 1) \cdot e^{j\omega T} - (j\omega T + 1) \cdot e^{-j\omega T} + 1}{\omega^2 T} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin(\omega T)}{\omega} + \frac{2 + j\omega T\,(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})}{\omega^2 T} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin(\omega T)}{\omega} + \frac{2 - 2\omega T \cdot \sin(\omega T) - 2 \cdot \cos(\omega T)}{\omega^2 T} =$$

$$= \frac{2\,[1 - \cos(\omega T)]}{\omega^2 T} \quad \text{(Intgegrale: 312 und 313, jeweils mit } a = -j\omega)$$

c) $$F(\omega) = \int_0^T 1 \cdot e^{-j\omega t}\,dt + \int_{2T}^{3T} (-1) \cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^T e^{-j\omega t}\,dt - \int_{2T}^{3T} e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_0^T - \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{2T}^{3T} = j\,\frac{e^{-j\omega T} + e^{-2j\omega T} - e^{-3j\omega T} - 1}{\omega}$$

(Integral: 312 mit $a = -j\omega$)

Abschnitt 2

1) a) $$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot \cos(\omega t)\,dt = \left[\frac{(-a \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)) \cdot e^{-at}}{a^2 + \omega^2}\right]_0^\infty = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

(Integral: 324 mit $a \rightarrow -a$ und $b = \omega$)

b) $$F_c(\omega) = \int_0^\infty t \cdot e^{-t/T} \cdot \cos(\omega t)\,dt =$$

$$= \left[\frac{t \cdot e^{-t/T}}{\frac{1}{T^2} + \omega^2}\left(-\frac{1}{T} \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-t/T}}{\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right)^2}\left(\left(\frac{1}{T^2} - \omega^2\right) \cdot \cos(\omega t) - \frac{2\omega}{T} \cdot \sin(\omega t)\right)\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{T^2(1 - \omega^2 T^2)}{(1 + \omega^2 T^2)^2} \quad \text{(Integral: 331 mit } a = -1/T \text{ und } b = \omega)$$

c) $$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin t \cdot \cos(\omega t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin(1 - \omega)\,t\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin(1 + \omega)\,t\,dt}_{I_2}\right] = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

Vorgenommene Umformung: $\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} [\sin (x_1 - x_2) + \sin (x_1 + x_2)]$

mit $x_1 = t$, $x_2 = \omega t$ und somit $x_1 \pm x_2 = (1 \pm \omega) t$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2:

$$I_{1/2} = \left[\frac{e^{-t} [-\sin (1 \mp \omega) t - (1 \mp \omega) \cdot \cos (1 \mp \omega) t]}{1 + (1 \mp \omega)^2} \right]_0^\infty = \frac{1 \mp \omega}{1 + (1 \mp \omega)^2}$$

(Integral: 322 mit $a = -1$ und $b = 1 - \omega$ bzw. $b = 1 + \omega$)

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \omega}{1 + (1 - \omega)^2} + \frac{1 + \omega}{1 + (1 + \omega)^2} \right]$$

2) Wegen der *Achsensymmetrie* (*gerade* Funktion) gilt: $F(\omega) = 2 \cdot F_c(\omega)$. Es genügt daher, die Fourier-*Kosinus*-Transformierte $F_c(\omega)$ zu bestimmen.

a) $f(t) = \frac{1}{T^2} (T - t)$; $0 \le t \le T$

$$F_c(\omega) = \int_0^T \frac{1}{T^2} (T - t) \cdot \cos (\omega t)\, dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos (\omega t)\, dt - \frac{1}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot \cos (\omega t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \left[\frac{\sin (\omega t)}{\omega} \right]_0^T - \frac{1}{T^2} \left[\frac{\cos (\omega t)}{\omega^2} + \frac{t \cdot \sin (\omega t)}{\omega} \right]_0^T = \frac{1 - \cos (\omega T)}{(\omega T)^2}$$

(Integrale: 228 und 232, jeweils mit $a = \omega$)

$$F(\omega) = 2 \cdot F_c(\omega) = \frac{2 [1 - \cos (\omega T)]}{(\omega T)^2}$$

b) $$f(t) = \left\{ \begin{matrix} t & & 0 \le t \le 1 \\ & \text{für} & \\ 2 - t & & 1 \le t \le 2 \end{matrix} \right\}$$

$$F_c(\omega) = \int_0^1 t \cdot \cos (\omega t)\, dt + \int_1^2 (2 - t) \cdot \cos (\omega t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 t \cdot \cos (\omega t)\, dt + 2 \cdot \int_1^2 \cos (\omega t)\, dt - \int_1^2 t \cdot \cos (\omega t)\, dt =$$

$$= \left[\frac{\cos (\omega t)}{\omega^2} + \frac{t \cdot \sin (\omega t)}{\omega} \right]_0^1 + \left[\frac{2 \cdot \sin (\omega t)}{\omega} - \frac{\cos (\omega t)}{\omega^2} - \frac{t \cdot \sin (\omega t)}{\omega} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot \cos \omega - \cos (2 \omega) - 1}{\omega^2} = \frac{2 [\cos \omega - \cos^2 \omega]}{\omega^2}$$

(Integrale: 228 und 232, jeweils mit $a = \omega$; $\cos (2 \omega) = 2 \cdot \cos^2 \omega - 1$)

$$F(\omega) = 2 \cdot F_c(\omega) = \frac{4 [\cos \omega - \cos^2 \omega]}{\omega^2}$$

3) $x(t)$ ist eine *ungerade* Funktion. Es genügt daher, die Fourier-*Sinus*-Transformierte $X_s(\omega)$ zu bestimmen.

$$X(\omega) = -2\mathrm{j} \cdot X_s(\omega) = -2\mathrm{j} \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(\omega t)\, dt =$$

$$= -\mathrm{j} \cdot \Bigg[\underbrace{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} \cdot \cos(\omega - \omega_0)\, t\, dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} \cdot \cos(\omega + \omega_0)\, t\, dt}_{I_2} \Bigg] = -\mathrm{j}\,(I_1 - I_2)$$

Vorgenommene Umformung: $\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)\right]$

mit $x_1 = \omega t$, $x_2 = \omega_0 t$ und somit $x_1 \pm x_2 = (\omega \pm \omega_0)\, t$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2:

$$I_{1/2} = \left[\frac{\mathrm{e}^{-at}\left[-a \cdot \cos(\omega \mp \omega_0)\, t + (\omega \mp \omega_0) \cdot \sin(\omega \mp \omega_0)\, t\right]}{a^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \right]_0^\infty = \frac{a}{a^2 + (\omega \mp \omega_0)^2}$$

(Integral: 324 mit $a \to -a$ und $b = \omega - \omega_0$ bzw. $b = \omega + \omega_0$)

$$X(\omega) = -\mathrm{j}\,(I_1 - I_2) = -\mathrm{j}\left(\frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right) =$$

$$= -\mathrm{j}\, a \left(\frac{1}{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\,\omega_0\,\omega} - \frac{1}{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\,\omega_0\,\omega} \right) =$$

$$= -\mathrm{j}\, a \cdot \frac{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\,\omega_0\,\omega - (a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\,\omega_0\,\omega}{\underbrace{\left[(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\,\omega_0\,\omega\right]\left[(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\,\omega_0\,\omega\right]}_{\text{3. Binom}}} =$$

$$= -\mathrm{j} \cdot \frac{4\,a\,\omega_0\,\omega}{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2)^2 - 4\,\omega_0^2\,\omega^2}$$

$$A(\omega) = |X(\omega)| = \frac{4\,a\,\omega_0\,|\omega|}{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2)^2 - 4\,\omega_0^2\,\omega^2}$$

4) a) $$F_s(\omega) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/T} \cdot \sin(\omega t)\, dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t/T}\left(-\frac{1}{T} \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t) \right)}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{T^2\,\omega}{1 + (\omega T)^2}$$ (Integral: 322 mit $a = -1/T$ und $b = \omega$)

b) $$F_s(\omega) = \int_0^\infty t \cdot \mathrm{e}^{-at} \cdot \sin(\omega t)\, dt = \left[\frac{t \cdot \mathrm{e}^{-at}\left[-a \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)\right]}{a^2 + \omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{e}^{-at}\left[(a^2 - \omega^2) \cdot \sin(\omega t) + 2\,a\,\omega \cdot \cos(\omega t)\right]}{(a^2 + \omega^2)^2} \right]_0^\infty = \frac{2\,a\,\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$$

(Integral: 330 mit $a \to -a$ und $b = \omega$)

c) $F_s(\omega) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \cos t \cdot \sin(\omega t)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos t\, dt =$

$$= \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin(\omega - 1)\, t\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin(\omega + 1)\, t\, dt}_{I_2}\Bigg] = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

Vorgenommene Umformung: $\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2}[\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)]$

mit $x_1 = \omega t,\ x_2 = t$ und somit $x_1 \pm x_2 = (\omega \pm 1)\, t$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2:

$$I_{1/2} = \left[\frac{e^{-t}[-\sin(\omega \mp 1)\, t - (\omega \mp 1) \cdot \cos(\omega \mp 1)\, t]}{1 + (\omega \mp 1)^2}\right]_0^\infty = \frac{\omega \mp 1}{1 + (\omega \mp 1)^2}$$

(Integral: 322 mit $a = -1$ und $b = \omega - 1$ bzw. $b = \omega + 1$)

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega - 1}{1 + (\omega - 1)^2} + \frac{\omega + 1}{1 + (\omega + 1)^2}\right]$$

5) $F_c(\omega) = \int_0^T 1 \cdot \cos(\omega t)\, dt = \int_0^T \cos(\omega t)\, dt = \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = \frac{\sin(\omega T)}{\omega}$

$$F_s(\omega) = \int_0^T 1 \cdot \sin(\omega t)\, dt = \int_0^T \sin(\omega t)\, dt = \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega}$$

(Integrale: 228 und 204, jeweils mit $a = \omega$)

6) Wegen der *Punktsymmetrie* (*ungerade* Funktion) gilt: $F(\omega) = -2\mathrm{j} \cdot F_s(\omega)$. Es genügt daher, die Fourier-*Sinus*-Transformierte zu bestimmen.

a) $F_s(\omega) = \int_0^T 1 \cdot \sin(\omega t)\, dt = \int_0^T \sin(\omega t)\, dt = \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega}$

(Integral: 204 mit $a = \omega$)

$$F(\omega) = -2\mathrm{j} \cdot F_s(\omega) = \mathrm{j}\,\frac{2[\cos(\omega T) - 1]}{\omega}$$

b) $F_s(\omega) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot \sin(\omega t)\, dt = \left[\frac{e^{-at}[-a \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)]}{a^2 + \omega^2}\right]_0^\infty = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$

(Integral: 322 mit $a \to -a$ und $b = \omega$)

$$F(\omega) = -2\mathrm{j} \cdot F_s(\omega) = -\mathrm{j}\,\frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Abschnitt 3

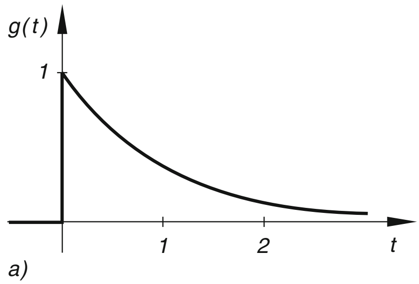
1) $f(t) = \sigma(t + T) + \sigma(t - T) - 1$

2) Verlauf der „ausgeblendeten“ Exponentialfunktion: siehe Bild A-43 (a) bis c))

a) $g(t) = e^{-t} \cdot \sigma(t)$

b) $g(t) = e^{-t}\,[\sigma(t - 1) - \sigma(t - 2)]$

c) $g(t) = e^{-t} \cdot \sigma(t + 1)$



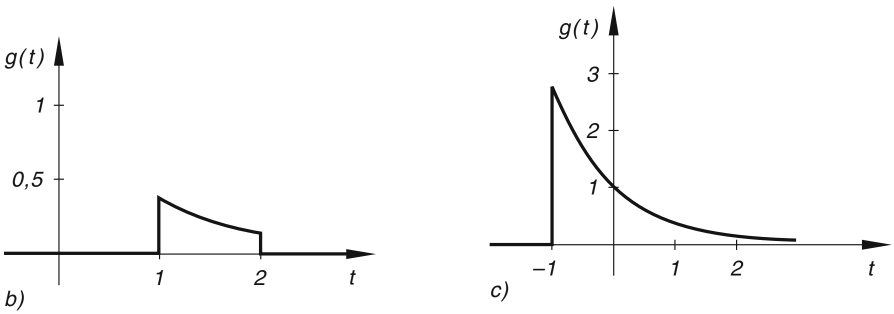


Bild A-43

3) $g(t) = f(t - 2) \cdot \sigma(t) = e^{-0{,}2|t-2|} \cdot \sigma(t)$

Verlauf der Kurven: siehe Bild A-44 (a) und b))

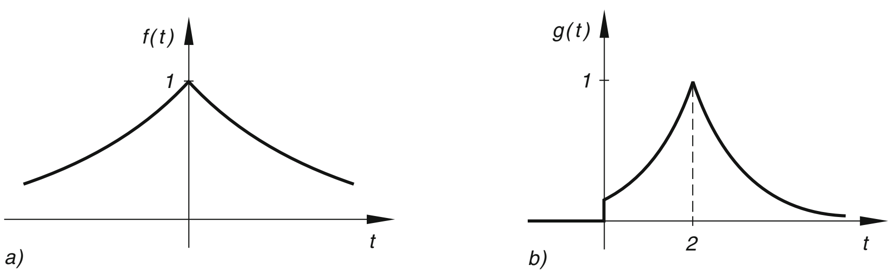


Bild A-44

4) a) $T = -\pi/2$ liegt *im* Integrationsbereich. Daher:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t + \pi/2) \cdot \sin(2t)\, dt = \sin(2T) = \sin(-\pi) = 0$$

b) $T = 3$ liegt *im* Integrationsintervall: $\int_{0}^{10} \delta(t - 3) \cdot \mathrm{e}^{-2t}\, dt = \mathrm{e}^{-2T} = \mathrm{e}^{-6}$

c) $T = 10$ liegt *außerhalb* des Integrationsintervalls: $\int_{-\infty}^{0} \delta(t - 10) \cdot \dfrac{\cos t}{1 + t^2}\, dt = 0$

d) $T = \mathrm{e} < 3$ liegt *im* Integrationsintervall: $\int_{0}^{3} \delta(t - \mathrm{e}) \cdot \ln t\, dt = \ln T = \ln \mathrm{e} = 1$

e) T liegt *stets* im Integrationsbereich $(-\infty < T < \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) \cdot [\sigma(t + \pi) - \sigma(t - \pi)] \cdot \cos t\, dt =$$

$$= [\sigma(T + \pi) - \sigma(T - \pi)] \cdot \cos T = \left\{ \begin{array}{lcr} 1 \cdot \cos T = \cos T & & -\pi \le T \le \pi \\ & \text{für} & \\ 0 \cdot \cos T = 0 & & \text{alle übrigen } T \end{array} \right\}$$

5) Der Parameterwert $T = 5$ muss im Intervall $0 \le 5 \le a$ liegen $\Rightarrow \quad a \ge 5$

Integralwert für $a \ge 5$: $\cos(T - 2) = \cos(5 - 2) = \cos 3$

6) a) Sprung der Höhe 2 bei $t = 0$: $\dfrac{Df(t)}{Dt} = -2 \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t) + 2 \cdot \delta(t)$

b) Sprung der Höhe $\cos(2\pi - 1) = 0{,}5403$ bei $t = \pi$:

$$\frac{Df(t)}{Dt} = -2 \cdot \sin(2t - 1) \cdot \sigma(t - \pi) + 0{,}5403 \cdot \delta(t - \pi)$$

c) Sprung der Höhe $f(-5) = 26$ an der Stelle $t = -5$:

$$\frac{Df(t)}{Dt} = 2t \cdot \sigma(t + 5) + 26 \cdot \delta(t + 5)$$

7) Sprünge der Höhe 1 bei $t = \mp a$:

$$\frac{Df(t)}{Dt} = 0 + 1 \cdot \delta(t + a) + 1 \cdot \delta(t - a) = \delta(t + a) + \delta(t - a)$$

Fourier-Transformierte der Ableitung: $F(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a} = 2 \cdot \cos(\omega a)$

8) $F(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 3} + 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega 5} = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\omega}$

9) $F(\omega) = 2[\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi)] + \mathrm{j}[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi)] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega +$$

$$+ \frac{\mathrm{j}}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \underbrace{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi t})}_{2 \cdot \cos(\pi t)} + \frac{\mathrm{j}}{2\pi} \underbrace{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})}_{2\mathrm{j} \cdot \sin t} = \frac{2}{\pi} \cdot \cos(\pi t) - \frac{1}{\pi} \cdot \sin t$$

Die Teilintegrale sind alle vom gleichen Typ und lassen sich nach der *Ausblendvorschrift*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - T) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{j}Tt} \quad (\text{mit } -\infty < T < \infty)$$

auswerten (der Parameter T liegt dabei stets im Integrationsbereich und besitzt der Reihe nach die speziellen Werte $\pi, -\pi, 1$ und -1).

Abschnitt 4

1) a) $F(\omega) = 3 \cdot \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-2t} \cdot \sigma(t)\} - 5 \cdot \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-8t} \cdot \sigma(t)\} = \dfrac{3}{2 + \mathrm{j}\omega} - \dfrac{5}{8 + \mathrm{j}\omega}$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 2$ bzw. $a = 8$)

b) $F(\omega) = a \cdot \mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{2^2 + t^2}\right\} + b \cdot \mathcal{F}\{t \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot \sigma(t)\} = \dfrac{a\pi}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2|\omega|} + \dfrac{b}{(2 + \mathrm{j}\omega)^2}$

(Tab. 1: Nr. 6 und Nr. 10, jeweils mit $a = 2$)

c) $F(\omega) = A \cdot \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-at} \cdot \sin t \cdot \sigma(t)\} - 2A \cdot \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-at} \cdot \cos t \cdot \sigma(t)\} =$

$$= A \cdot \frac{1}{(a + \mathrm{j}\omega)^2 + 1} - 2A \cdot \frac{a + \mathrm{j}\omega}{(a + \mathrm{j}\omega)^2 + 1} = \frac{A(1 - 2a - \mathrm{j}2\omega)}{(a + \mathrm{j}\omega)^2 + 1}$$

(Tab. 1: Nr. 13 und Nr. 14, jeweils mit $a = a$ und $b = 1$)

2) a) $\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-a|t|}\} = \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-|at|}\} = \dfrac{1}{a} \cdot F(\omega/a) = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{2}{1 + (\omega/a)^2} = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

b) $\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-at^2}\} = \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-(\sqrt{a}\,t)^2}\} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot F(\omega/\sqrt{a}) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{e}^{-(\omega/\sqrt{a})^2/4} =$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \mathrm{e}^{-\omega^2/4a}$$

c) $\mathcal{F}\{t \cdot \mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t)\} = \mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{a} \cdot (at) \cdot \mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t)\right\} = \dfrac{1}{a} \cdot \mathcal{F}\{(at) \cdot \mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t)\} =$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot F(\omega/a) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{(1 + \mathrm{j}\omega/a)^2} = \frac{1}{(a + \mathrm{j}\omega)^2}$$

3) Verschobene Funktion: $g(t) = f(t-3)$. Die Bildfunktion multipliziert sich mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}$:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t-3)\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega} \cdot F(\omega)$$

a) $G(\omega) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}}{2+\mathrm{j}\omega}$ b) $G(\omega) = \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{e}^{-(\omega^2/4+\mathrm{j}3\omega)}$ c) $G(\omega) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}}{(1+\mathrm{j}\omega)^2+1}$

4) a) Verschiebung um a nach *rechts*: $g(t) = f(t-a) = \sigma(t) - \sigma(t-2a)$

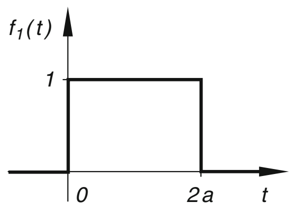
$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a} \cdot F(\omega) = \frac{2 \cdot \sin(\omega a) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}}{\omega}$$

b) Verschiebung um $T/2$ nach *rechts*:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2} \cdot F(\omega) = \frac{2[1-\cos(\omega T)] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}}{(\omega T)^2}$$

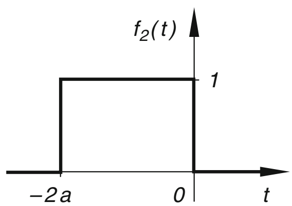
5) $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\omega - \omega_0) = \dfrac{2 \cdot \sin[(\omega-\omega_0)a]}{\omega - \omega_0}$

6) Wir verschieben den Impuls $f(t)$ um die Strecke a nach rechts bzw. links und erhalten die Impulse $f_1(t)$ und $f_2(t)$ mit den folgenden Bildfunktionen (siehe Bild A-45 bzw. A-46):



$$F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a} \cdot F(\omega) = \\ = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a} \cdot \frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega}$$

Bild A-45 Rechteckiger Impuls $f_1(t)$



$$F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} \cdot F(\omega) = \\ = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a} \cdot \frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega}$$

Bild A-46 Rechteckiger Impuls $f_2(t)$

Der vorgegebene rechteckige Impuls $g(t)$ nach Bild V-55 ist die *Differenz* der Impulse $f_1(t)$ und $f_2(t)$, wenn man $a = T$ setzt. Somit gilt:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} - \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T} \cdot F(\omega) - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} \cdot F(\omega) = -\underbrace{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})}_{2\mathrm{j} \cdot \sin(\omega T)} \cdot F(\omega) = -\mathrm{j}\,\frac{4 \cdot \sin^2(\omega T)}{\omega}$$

7) $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})$

$$g(t) = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2\mathrm{j}} \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}) \cdot \sigma(t) =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sigma(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sigma(t)] = \frac{1}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot f(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot f(t)]$$

mit $f(t) = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sigma(t)$ und $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sigma(t)\} = \frac{1}{\delta + \mathrm{j}\omega}$.

Somit lässt sich $g(t)$ als Überlagerung zweier Funktionen darstellen, die aus $f(t)$ durch *Dämpfung* mit $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ bzw. $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$ hervorgehen. Der *Dämpfungssatz* liefert dann:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{2\mathrm{j}}[\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot f(t)\} - \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot f(t)\}] =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{\delta + \mathrm{j}(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{\delta + \mathrm{j}(\omega + \omega_0)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{(\delta + \mathrm{j}\omega) - \mathrm{j}\omega_0} - \frac{1}{(\delta + \mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}} \cdot \frac{(\delta + \mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\omega_0 - (\delta + \mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\omega_0}{\underbrace{[(\delta + \mathrm{j}\omega) - \mathrm{j}\omega_0][(\delta + \mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\omega_0]}_{\text{3. Binom}}} = \frac{\omega_0}{(\delta + \mathrm{j}\omega)^2 + \omega_0^2}$$

8) $g'(t) = \mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t) - a\,\underbrace{t \cdot \mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t)}_{g(t)} = \mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t) - a \cdot g(t)$

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t)\} - a \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\omega) - a \cdot G(\omega)$$

Ableitungssatz für Originalfunktionen: $\mathcal{F}\{g'(t)\} = \mathrm{j}\omega \cdot G(\omega)$. Somit gilt:

$$\mathrm{j}\omega \cdot G(\omega) = F(\omega) - a \cdot G(\omega) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = \frac{F(\omega)}{a + \mathrm{j}\omega} = \frac{1}{(a + \mathrm{j}\omega)^2}$$

9) Gliedweise Transformation unter Verwendung des *Ableitungssatzes für Originalfunktionen* liefert mit den Bezeichnungen $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ und $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$:

$$\mathcal{F}\{\ddot{x}\} + 2\delta \cdot \mathcal{F}\{\dot{x}\} + \omega_0^2 \cdot \mathcal{F}\{x\} = \mathcal{F}\{g(t)\} \quad \Rightarrow$$

$$(\mathrm{j}\omega)^2 \cdot X(\omega) + 2\delta \cdot \mathrm{j}\omega \cdot X(\omega) + \omega_0^2 \cdot X(\omega) = G(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\,2\delta\omega) \cdot X(\omega) = G(\omega)$$

10) $f'(t) = \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) = \omega_0 \cdot g(t)$

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \omega_0 \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} = \omega_0 \cdot G(\omega)$$

Ableitungssatz für Originalfunktionen: $\mathcal{F}\{f'(t)\} = \mathrm{j}\omega \cdot F(\omega)$. Somit gilt:

$$\omega_0 \cdot G(\omega) = \mathrm{j}\omega \cdot F(\omega) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = \mathrm{j}\,\frac{\omega \cdot F(\omega)}{\omega_0} = \mathrm{j}\,\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

11) $F'(\omega) = -\mathrm{j} \cdot \mathcal{F}\{\underbrace{t \cdot f(t)}_{g(t)}\} = -\mathrm{j} \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathrm{j} \cdot F'(\omega)$

a) $\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t \cdot \mathrm{e}^{-5t} \cdot \sigma(t)\} = \mathrm{j} \cdot F'(\omega) = \mathrm{j} \cdot \dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{1}{5 + \mathrm{j}\omega}\right) = \dfrac{1}{(5 + \mathrm{j}\omega)^2}$

b) $\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t \cdot \mathrm{e}^{-a|t|}\} = \mathrm{j} \cdot F'(\omega) = \mathrm{j} \cdot \dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}\right) = -\mathrm{j}\,\dfrac{4a\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$

c) $\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t \cdot \mathrm{e}^{-t^2}\} = \mathrm{j} \cdot F'(\omega) = \mathrm{j} \cdot \dfrac{d}{d\omega}(\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{e}^{-\omega^2/4}) =$

$= -\mathrm{j} \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \omega \cdot \mathrm{e}^{-\omega^2/4}$

12) $$\int_{-\infty}^{t} g(u)\,du = \int_{-\infty}^{t} u \cdot \mathrm{e}^{-au} \cdot \sigma(u)\,du = \int_{0}^{t} \underset{\substack{\uparrow\\ \alpha}}{\tau} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \beta'}}{\mathrm{e}^{-au}}\,du = \Big[\alpha\beta\Big]_0^t - \int_0^t \alpha'\beta\,du =$$

$$= \left[-\frac{1}{a}\,u \cdot \mathrm{e}^{-au}\right]_0^t + \frac{1}{a} \cdot \int_0^t \mathrm{e}^{-au}\,du = -\frac{1}{a}\,(t \cdot \mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t)) + \frac{1}{a} \cdot \int_0^t \mathrm{e}^{-au}\,du$$

(nach partieller Integration mit $\alpha = u,\ \beta' = \mathrm{e}^{-au}$ und somit $\alpha' = 1,\ \beta = -\dfrac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{-au}$)

Gliedweise Fouriertransformation in Verbindung mit dem *Integrationssatz* führt dann zu:

$$\underbrace{\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} g(u)\,du\right\}}_{\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \cdot G(\omega)} = -\frac{1}{a} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{t \cdot \mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t)\}}_{G(\omega)} + \frac{1}{a} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\left\{\int_0^t \mathrm{e}^{-au}\,du\right\}}_{\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \cdot F(\omega)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \cdot G(\omega) + \frac{1}{a} \cdot G(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}a\omega} \cdot F(\omega) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = \frac{1}{a + \mathrm{j}\omega} \cdot F(\omega) = \frac{1}{(a + \mathrm{j}\omega)^2}$$

13) $$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos u \cdot \sigma(u) \cdot \sin(t - u) \cdot \sigma(t - u)\,du = \int_0^t \cos u \cdot \sin(t - u)\,du =$$

$$= \int_0^t \cos u\,(\sin t \cdot \cos u - \cos t \cdot \sin u)\,du =$$

$$= \sin t \cdot \int_0^t \cos^2 u\,du - \cos t \cdot \int_0^t \sin u \cdot \cos u\,du =$$

$$= \sin t\left[\frac{u}{2} + \frac{\sin u \cdot \cos u}{2}\right]_0^t - \cos t\left[\frac{\sin^2 u}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}\,t \cdot \sin t$$

Hinweis: $\sigma(u) = 1$ für $u \ge 0$ (sonst $= 0$) und $\sigma(t - u) = 1$ für $u \le t$ (sonst $= 0$). Somit gilt: $\sigma(u) \cdot \sigma(t - u) = 1$ im Intervall $0 \le u \le t$ (sonst $= 0$). Ferner: $\sin(t - u)$ nach dem Additionstheorem für den Sinus entwickeln. Integrale: 229 und 254, jeweils mit $a = 1$.

14) $$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(u+T) - \sigma(u-T)] \cdot \frac{1}{1+(t-u)^2}\, du = \int_{-T}^{T} \frac{1}{1+(t-u)^2}\, du$$

Hinweis: $\sigma(u+T) - \sigma(u-T) = 1$ für $-T \le u \le T$ (sonst $= 0$)

Integralsubstitution: $z = t - u$, $dz = -du$; untere Grenze: $u = -T \quad \Rightarrow \quad z = t + T$; obere Grenze: $u = T \quad \Rightarrow \quad z = t - T$

$$f * g = -\int_{t+T}^{t-T} \frac{1}{1+z^2}\, dz = -\Big[\arctan z\Big]_{t+T}^{t-T} = \arctan(t+T) - \arctan(t-T)$$

15) a) $$F(\omega) = \underbrace{\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}\right)}_{F_1(\omega)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3+\mathrm{j}\omega}\right)}_{F_2(\omega)} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$f_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}\right\} = \mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t)$$

$$f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+\mathrm{j}\omega}\right\} = \mathrm{e}^{-3t} \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 1$ bzw. $a = 3$)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u} \cdot \sigma(u) \cdot \mathrm{e}^{-3(t-u)} \cdot \sigma(t-u)\, du =$$

$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-u} \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \mathrm{e}^{3u}\, du = \mathrm{e}^{-3t} \cdot \int_0^t \mathrm{e}^{2u}\, du = \mathrm{e}^{-3t}\left[\frac{\mathrm{e}^{2u}}{2}\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}\right) \cdot \sigma(t)$$

Hinweis: $\sigma(u) \cdot \sigma(t-u) = 1$ im Intervall $0 \le u \le t$ (sonst $= 0$); siehe hierzu auch Aufgabe 13.

b) $$F(\omega) = \underbrace{\left(\frac{1}{(1+\mathrm{j}\omega)^2}\right)}_{F_1(\omega)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}\right)}_{F_2(\omega)} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$f_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+\mathrm{j}\omega)^2}\right\} = t \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t)$$

$$f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}\right\} = \mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 10 und Nr. 9, jeweils mit $a = 1$)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \mathrm{e}^{-u} \cdot \sigma(u) \cdot \mathrm{e}^{-(t-u)} \cdot \sigma(t-u)\, du =$$

$$= \int_0^t u \cdot \mathrm{e}^{-t}\, du = \mathrm{e}^{-t} \cdot \int_0^t u\, du = \mathrm{e}^{-t}\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \sigma(t)$$

(bezüglich des Integrationsintervalls $0 \le u \le t$: siehe Hinweis zu a)).

16) $F(t) = \dfrac{\pi}{a} \cdot \mathrm{e}^{-a|t|} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi \cdot f(-\omega) = \dfrac{2\pi}{a^2+\omega^2} \quad \Rightarrow$

$g(t) = \mathrm{e}^{-a|t|} = \dfrac{a}{\pi} \cdot F(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \dfrac{a}{\pi} \cdot \dfrac{2\pi}{a^2+\omega^2} = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

17) $F(t) = 2\pi \cdot \delta(t-a) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi \cdot f(-\omega) = 2\pi \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}a\omega} \quad \Rightarrow$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}a\omega} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \delta(t-a)$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \delta(t+a)$ (a durch $-a$ ersetzt)

$\cos(a\omega) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}a\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}a\omega}) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \dfrac{1}{2}[\delta(t+a) + \delta(t-a)]$

Abschnitt 5

1) a) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{10}{25+\omega^2}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2 \cdot 5}{5^2+\omega^2}\right\} = \mathrm{e}^{-5|t|}$ (Tab. 1: Nr. 8 mit $a = 5$)

b) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{5}{(2+\mathrm{j}\omega)^2}\right\} = 5 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(2+\mathrm{j}\omega)^2}\right\} = 5t \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot \sigma(t)$

(Tab. 1: Nr. 10 mit $a = 2$)

c) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(1+\mathrm{j}\omega)^2+4}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(1+\mathrm{j}\omega)^2+2^2}\right\} = \mathrm{e}^{-t} \cdot \sin(2t) \cdot \sigma(t)$

(Tab. 1: Nr. 13 mit $a = 1$ und $b = 2$)

d) $\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega+3)\} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{2\pi \cdot \delta(\omega+3)\} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3t}$

(Tab. 1: Nr. 18 mit $a = 3$)

e) $\mathcal{F}^{-1}\{\cos(5\omega)\} = \dfrac{1}{2} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{2 \cdot \cos(5\omega)\} = \dfrac{1}{2}[\delta(t+5) + \delta(t-5)]$

(Tab. 1: Nr. 22 mit $a = 5$)

f) $\mathcal{F}_s^{-1}\{\mathrm{e}^{-2\omega}\} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{\pi}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2\omega}\right\} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{t}{4+t^2}$

(Tab. 2: Nr. 4 mit $a = 2$)

g) $\mathcal{F}_c^{-1}\left\{\dfrac{1}{9+\omega^2}\right\} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{3}{3^2+\omega^2}\right\} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{-3t}$

(Tab. 3: Nr. 4 mit $a = 3$)

h) $\mathcal{F}_c^{-1}\left\{\dfrac{\sin(5\omega)}{\omega}\right\} = \sigma(t) - \sigma(t-5)$ (Tab. 3: Nr. 1 mit $a = 5$)

2) a) $F(\omega) = 2 \cdot \dfrac{1}{5 + \mathrm{j}\omega} - 3 \cdot \dfrac{1}{2 + \mathrm{j}\omega} \quad \Rightarrow \quad f(t) = (2 \cdot \mathrm{e}^{-5t} - 3 \cdot \mathrm{e}^{-2t}) \cdot \sigma(t)$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 5$ bzw. $a = 2$)

b) $F(\omega) = 2 \cdot \dfrac{1}{(1 + \mathrm{j}\omega)^2} + 10 \cdot \dfrac{1}{2 + \mathrm{j}\omega} \quad \Rightarrow \quad f(t) = (2t \cdot \mathrm{e}^{-t} + 10 \cdot \mathrm{e}^{-2t}) \cdot \sigma(t)$

(Tab. 1: Nr. 10 mit $a = 1$ und Nr. 9 mit $a = 2$)

c) $f(t) = 2 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{3 + \mathrm{j}\omega}\right\} - \dfrac{5\pi}{2} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2 \cdot 1}{1^2 + \omega^2}\right\} = 2 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \sigma(t) - \dfrac{5\pi}{2} \cdot \mathrm{e}^{-|t|}$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 3$ und Nr. 8 mit $a = 1$)

d) $f(t) = 6 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(2 + \mathrm{j}\omega)^2}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{\pi}{5} \cdot \mathrm{e}^{-5|\omega|}\right\} + 2 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{2 \cdot 2}{2^2 + \omega^2}\right\} =$

$= 6t \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot \sigma(t) - \dfrac{1}{25 + t^2} + 2 \cdot \mathrm{e}^{-2|t|}$

(Tab. 1: Nr. 10 mit $a = 2$, Nr. 6 mit $a = 5$ und Nr. 8 mit $a = 2$)

Abschnitt 6

1) Trigonometrische Umrechnung nach der Formel $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}\,[1 - \cos(2x)]$ mit $x = \omega_0 t$:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{\sin^2(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F}\{1 - \cos(2\omega_0 t)\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F}\{1\} - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F}\{\cos(2\omega_0 t)\} = \pi \cdot \delta(\omega) - \frac{\pi}{2}\,[\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0)]$$

(Tab. 1: Nr. 19 und Nr. 20 mit $a = 2\omega_0$)

Das Frequenzspektrum enthält genau drei Spektrallinien bei $\omega_1 = 0$ und $\omega_{2/3} = \pm 2\omega_0$.

2) a) $F(\omega) = \mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{1 + t^2}\right\} = \pi \cdot \mathrm{e}^{-|\omega|}$ (Tab. 1: Nr. 6 mit $a = 1$)

$A(\omega) = |F(\omega)| = \pi \cdot \mathrm{e}^{-|\omega|}; \quad \varphi(\omega) = 0 \quad$ (wegen $F(\omega) > 0$)

b) $F(\omega) = \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-at} \cdot \sigma(t)\} = \dfrac{1}{a + \mathrm{j}\omega} = \dfrac{a - \mathrm{j}\omega}{\underbrace{(a + \mathrm{j}\omega)(a - \mathrm{j}\omega)}_{\text{3. Binom}}} = \dfrac{a}{a^2 + \omega^2} - \mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{a^2 + \omega^2}$

(Tab. 1: Nr. 9)

$A(\omega) = |F(\omega)| = \dfrac{1}{|a + \mathrm{j}\omega|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$

$\tan\varphi = \dfrac{\operatorname{Im}(F(\omega))}{\operatorname{Re}(F(\omega))} = \dfrac{-\omega}{a} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega) = \arctan(-\omega/a) = -\arctan(\omega/a)$

3) $\cos(\omega_0 t) = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})$

$g(t) = \mathrm{e}^{-\delta|t|} \cdot \cos(\omega_0 t) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\delta|t|}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}) =$

$= \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot \mathrm{e}^{-\delta|t|} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot \mathrm{e}^{-\delta|t|}) = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot f(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot f(t))$

Dabei gilt: $f(t) = \mathrm{e}^{-\delta|t|}$ und $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \dfrac{2\delta}{\delta^2 + \omega^2}$

$g(t)$ ist somit als *Überlagerung* zweier Funktionen darstellbar, die jeweils aus $f(t)$ durch *Dämpfung* mit $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ bzw. $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$ hervorgehen. Der *Dämpfungssatz* liefert dann:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot f(t)\} + \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \cdot f(t)\}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2\delta}{\delta^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{2\delta}{\delta^2 + (\omega + \omega_0)^2}\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{1}{(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\omega_0\omega} + \frac{1}{(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega}\right) =$$

$$= \delta \cdot \frac{(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega + (\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\omega_0\omega}{\underbrace{[(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\omega_0\omega][(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega]}_{\text{3. Binom}}} =$$

$$= \frac{2\delta(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2)}{(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2)^2 - 4\omega_0^2\omega^2}$$

Amplitudenspektrum: $A(\omega) = |G(\omega)| = G(\omega)$

4) a) $G(\omega)$ wird zunächst in Partialbrüche zerlegt:

$$G(\omega) = \frac{A}{2 + \mathrm{j}\omega} + \frac{B}{5 + \mathrm{j}\omega} = \frac{(5 + \mathrm{j}\omega)A + (2 + \mathrm{j}\omega)B}{(2 + \mathrm{j}\omega)(5 + \mathrm{j}\omega)} = \frac{3 + \mathrm{j}0}{(2 + \mathrm{j}\omega)(5 + \mathrm{j}\omega)} \quad \Rightarrow$$

$$(5 + \mathrm{j}\omega)A + (2 + \mathrm{j}\omega)B = (5A + 2B) + \mathrm{j}\omega(A + B) = 3 + \mathrm{j}0$$

Koeffizientenvergleich: $5A + 2B = 3$ und $A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1;\ B = -1$

$$G(\omega) = \frac{3}{(2 + \mathrm{j}\omega)(5 + \mathrm{j}\omega)} = \frac{1}{2 + \mathrm{j}\omega} - \frac{1}{5 + \mathrm{j}\omega}$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2 + \mathrm{j}\omega} - \frac{1}{5 + \mathrm{j}\omega}\right\} = (\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-5t}) \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 2$ bzw. $a = 5$)

$$A(\omega) = |G(\omega)| = \frac{3}{|(2 + \mathrm{j}\omega)(5 + \mathrm{j}\omega)|} = \frac{3}{\sqrt{(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)}}$$

b) $G(\omega)$ wird zunächst wie folgt umgeformt:

$$G(\omega) = K\frac{\mathrm{j}\omega T}{1 + \mathrm{j}\omega T} = K\frac{(1 + \mathrm{j}\omega T) - 1}{1 + \mathrm{j}\omega T} = K\left(\frac{1 + \mathrm{j}\omega T}{1 + \mathrm{j}\omega T} - \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega T}\right) =$$

$$= K\left(1 - \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega T}\right) = K\left(1 - \frac{1}{T\left(\dfrac{1}{T} + \mathrm{j}\omega\right)}\right)$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = K \cdot \mathcal{F}^{-1}\{1\} - \frac{K}{T} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{T} + \mathrm{j}\,\omega}\right\} =$$

$$= K \cdot \delta(t) - \frac{K}{T} \cdot \mathrm{e}^{-t/T} \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 15 und Nr. 9 mit $a = 1/T$)

$$A(\omega) = |G(\omega)| = \frac{K\,|\omega|\,T}{|1 + \mathrm{j}\,\omega\,T|} = \frac{K\,|\omega|\,T}{\sqrt{1 + (\omega\,T)^2}}$$

5) $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \dfrac{K}{T} \cdot \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-t/T} \cdot \sigma(t)\} = \dfrac{K}{T} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{T} + \mathrm{j}\,\omega} = \dfrac{K}{1 + \mathrm{j}\,\omega\,T}$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 1/T$)

$$A(\omega) = |G(\omega)| = \frac{K}{|1 + \mathrm{j}\,\omega\,T|} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\,T)^2}}$$

$G(\omega)$ in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$G(\omega) = \frac{K}{1 + \mathrm{j}\,\omega\,T} = \underbrace{\frac{K(1 - \mathrm{j}\,\omega\,T)}{(1 + \mathrm{j}\,\omega\,T)(1 - \mathrm{j}\,\omega\,T)}}_{\text{3. Binom}} = \frac{K}{1 + (\omega\,T)^2} - \mathrm{j}\,\frac{K\,\omega\,T}{1 + (\omega\,T)^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))} = \frac{-K\,\omega\,T}{K} = -\omega\,T \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega) = \arctan(-\omega\,T) = -\arctan(\omega\,T)$$

VI Laplace-Transformationen

Hinweise

1) Die Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte).
2) Die Laplace-Transformationen wurden der *Tabelle* in Kap. VI, Abschnitt 4.2 entnommen (Angabe der laufenden Nummer der Transformation und der Parameterwerte).

Abschnitt 1

1) a) $$\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} = \int_0^\infty \cos(\omega t) \cdot e^{-st}\, dt = \left[\frac{-s \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)}{s^2 + \omega^2} \cdot e^{-st}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{(Integral: 324 mit } a = -s \text{ und } b = \omega)$$

b) $$\mathscr{L}\{2t \cdot e^{-4t}\} = \int_0^\infty 2t \cdot e^{-4t} \cdot e^{-st}\, dt = 2 \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-(s+4)t}\, dt =$$

$$= 2\left[\frac{-(s+4)t - 1}{(s+4)^2} \cdot e^{-(s+4)t}\right]_0^\infty = \frac{2}{(s+4)^2}$$

(Integral: 313 mit $a = -(s+4)$)

c) $$\mathscr{L}\{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t)\} = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t) \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \sin(\omega t) \cdot e^{-(s+\delta)t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{-(s+\delta) \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)}{(s+\delta)^2 + \omega^2} \cdot e^{-(s+\delta)t}\right]_0^\infty = \frac{\omega}{(s+\delta)^2 + \omega^2}$$

(Integral: 322 mit $a = -(s+\delta)$ und $b = \omega$)

d) $$\mathscr{L}\{\sinh(at)\} = \int_0^\infty \sinh(at) \cdot e^{-st}\, dt = \left[\frac{-s \cdot \sinh(at) - a \cdot \cosh(at)}{s^2 - a^2} \cdot e^{-st}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{a}{s^2 - a^2} \qquad \text{(Integral: 327 mit } a = -s \text{ und } b = a)$$

e) $$\mathscr{L}\{t^3\} = \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-st}\, dt = \left[-\frac{t^3 \cdot e^{-st}}{s} - \frac{3(s^2t^2 + 2st + 2) \cdot e^{-st}}{s^4}\right]_0^\infty = \frac{6}{s^4}$$

(Integrale: 315 mit $n = 3$ und $a = -s$ und 314 mit $a = -s$)

f) $\mathscr{L}\{\sin^2 t\} = \int\limits_0^{\infty} \sin^2 t \cdot \mathrm{e}^{-st}\, dt =$

$$= \left[\frac{\sin t\,(-s \cdot \sin t - 2 \cdot \cos t) \cdot \mathrm{e}^{-st}}{s^2 + 4} - \frac{2 \cdot \mathrm{e}^{-st}}{s\,(s^2 + 4)}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{s\,(s^2 + 4)}$$

(Integrale: 323 mit $n = 2,\ a = -s,\ b = 1$ und 312 mit $a = -s$)

2) $\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathscr{L}\left\{\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s - \mathrm{j}\omega} + \dfrac{1}{s + \mathrm{j}\omega}\right] = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$

3) a) $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^{a} A \cdot \mathrm{e}^{-st}\, dt + \int\limits_a^{2a} (-A) \cdot \mathrm{e}^{-st}\, dt = A\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_0^{a} - A\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_a^{2a} =$

$$= \frac{A}{s}\,\underbrace{(\mathrm{e}^{-2as} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-as} + 1)}_{\text{2. Binom}} = \frac{A\,(1 - \mathrm{e}^{-as})^2}{s} \quad \text{(Integral: 312 mit } a = -s)$$

Umformung: $\mathrm{e}^{-2as} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-as} + 1 = 1 - 2 \cdot \mathrm{e}^{-as} + (\mathrm{e}^{-as})^2 = (1 - \mathrm{e}^{-as})^2$

b) $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^{a} A \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{a}\,t\right) \cdot \mathrm{e}^{-st}\, dt =$

$$= \frac{A\,a}{a^2 s^2 + \pi^2}\left[\left(-as \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}\,t\right) - \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}\,t\right)\right) \cdot \mathrm{e}^{-st}\right]_0^{a} = \frac{\pi\,a A\,(1 + \mathrm{e}^{-as})}{a^2 s^2 + \pi^2}$$

(Integral: 322 mit $a = -s$ und $b = \pi/a$)

c) $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^{a} 0 \cdot \mathrm{e}^{-st}\, dt + \int\limits_a^{2a} A \cdot \mathrm{e}^{-st}\, dt + \int\limits_{2a}^{3a} 2A \cdot \mathrm{e}^{-st}\, dt + \ldots =$

$$= \frac{A}{s}\,(\mathrm{e}^{-as} + \mathrm{e}^{-2as} + \mathrm{e}^{-3as} + \ldots) = \frac{A}{s} \cdot \mathrm{e}^{-as}\,\underbrace{(1 + \mathrm{e}^{-as} + \mathrm{e}^{-2as} + \ldots)}_{\text{geometrische Reihe } (q = \mathrm{e}^{-as})} =$$

$$= \frac{A}{s} \cdot \mathrm{e}^{-as}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-as}}\right) = \frac{A}{s\,(\mathrm{e}^{as} - 1)}$$

Abschnitt 2

1) a) $\mathscr{L}\{4t^3 - t^2 + 2t\} = 4 \cdot \mathscr{L}\{t^3\} - \mathscr{L}\{t^2\} + 2 \cdot \mathscr{L}\{t\} = \dfrac{24}{s^4} - \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{2}{s^2}$

(Nr. 16 mit $n = 4$, Nr. 10 und Nr. 4)

b) $\mathscr{L}\{C\,(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})\} = C\,[\mathscr{L}\{1\} - \mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-\lambda t}\}] = C\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s + \lambda}\right)$

(Nr. 2 und Nr. 3 mit $a = -\lambda$)

c) $\mathscr{L}\{A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) + C \cdot e^{\lambda t}\} =$

$$= A \cdot \mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} + B \cdot \mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} + C \cdot \mathscr{L}\{e^{\lambda t}\} =$$

$$= \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{Bs}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{s - \lambda} = \frac{Bs + A\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{s - \lambda}$$

(Nr. 18 und Nr. 19, jeweils mit $a = \omega$ und Nr. 3 mit $a = \lambda$)

2) a) $\mathscr{L}\{(3t)^5\} = \frac{1}{3} \cdot F(s/3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{120}{(s/3)^6} = \frac{29\,160}{s^6}$

b) $\mathscr{L}\{\cos(4t)\} = \frac{1}{4} \cdot F(s/4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(s/4)}{(s/4)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 16}$

c) $\mathscr{L}\{e^{\lambda t}\} = \frac{1}{\lambda} \cdot F(s/\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{(s/\lambda) - 1} = \frac{1}{s - \lambda}$

d) $\mathscr{L}\{\cos^2(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} \cdot F(s/\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{(s/\omega)^2 + 2}{(s/\omega)\,[(s/\omega)^2 + 4]} = \frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$

3) a) $\mathscr{L}\left\{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma(t)\right\} = e^{\frac{\pi}{2}s}\left(F(s) - \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cdot e^{-st}\,dt\right) =$

$$= e^{\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{1}{s^2 + 1} + \left[\frac{(s \cdot \sin t + \cos t) \cdot e^{-st}}{s^2 + 1}\right]_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1 - s \cdot e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1}\right) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

(Integral: 322 mit $a = -s$ und $b = 1$)

b) $\mathscr{L}\{(t - 4)^2 \cdot \sigma(t - 4)\} = e^{-4s} \cdot F(s) = e^{-4s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{2 \cdot e^{-4s}}{s^3}$

c) $\mathscr{L}\{e^{t-b} \cdot \sigma(t - b)\} = e^{-bs} \cdot F(s) = e^{-bs} \cdot \frac{1}{s - 1} = \frac{e^{-bs}}{s - 1}$

d) $\mathscr{L}\{\cos^2(t - 3) \cdot \sigma(t - 3)\} = e^{-3s} \cdot F(s) = e^{-3s} \cdot \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)} = \frac{(s^2 + 2) \cdot e^{-3s}}{s(s^2 + 4)}$

e) $\mathscr{L}\{\delta(t - T) \cdot \sigma(t - T)\} = e^{-Ts} \cdot F(s) = e^{-Ts} \cdot 1 = e^{-sT}$

4) 2. Verschiebungssatz (Verschiebung um φ nach links):

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\{\sin(t + \varphi) \cdot \sigma(t)\} = e^{\varphi s}\left(\mathscr{L}\{\sin t\} - \int\limits_0^{\varphi} \sin t \cdot e^{-st}\,dt\right) =$$

$$= e^{\varphi s}\left(\frac{1}{s^2 + 1} + \left[\frac{(s \cdot \sin t + \cos t) \cdot e^{-st}}{s^2 + 1}\right]_0^{\varphi}\right) =$$

$$= e^{\varphi s}\left(\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{(s \cdot \sin\varphi + \cos\varphi) \cdot e^{-\varphi s} - 1}{s^2 + 1}\right) = \frac{s \cdot \sin\varphi + \cos\varphi}{s^2 + 1} = F_1(s)$$

(Integral: 322 mit $a = -s$ und $b = 1$)

Jetzt wird die Funktion $g(t) = \sin(t + \varphi) \cdot \sigma(t)$ der *Ähnlichkeitstransformation* $t \rightarrow \omega t$ unterworfen. Dann gilt nach dem *Ähnlichkeitssatz*:

$$\mathscr{L}\{g(\omega t)\} = \mathscr{L}\{\sin(\omega t + \varphi) \cdot \sigma(t)\} = \frac{1}{\omega} \cdot F_1(s/\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{(s/\omega) \cdot \sin\varphi + \cos\varphi}{(s/\omega)^2 + 1} =$$

$$= \frac{s \cdot \sin\varphi + \omega \cdot \cos\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

5) a) $\mathscr{L}\{e^{3t} \cdot \cos(2t)\} = F(s - 3) = \dfrac{s - 3}{(s - 3)^2 + 4}$

b) $\mathscr{L}\{A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t)\} = A \cdot F(s + \delta) = \dfrac{A\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$

c) $f(t) = 2^{3t} = e^{\ln(2^{3t})} = e^{3t \cdot \ln 2} = e^{(3 \cdot \ln 2)t} \cdot 1$

$\mathscr{L}\{2^{3t}\} = \mathscr{L}\{e^{(3 \cdot \ln 2)t} \cdot 1\} = F(s - 3 \cdot \ln 2) = \dfrac{1}{s - 3 \cdot \ln 2}$

6) a) $f'(t) = a \cdot \cosh(at)$; $f(0) = \sinh 0 = 0$

$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \mathscr{L}\{a \cdot \cosh(at)\} = s \cdot \mathscr{L}\{\sinh(at)\} - 0 = s \cdot \dfrac{a}{s^2 - a^2} = \dfrac{as}{s^2 - a^2}$

(Nr. 24); *Neues Funktionenpaar:* $\mathscr{L}\{\cosh(at)\} = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$

b) $f'(t) = 3t^2$; $f(0) = 0$; $\mathscr{L}\{f'(t)\} = \mathscr{L}\{3t^2\} = s \cdot \mathscr{L}\{t^3\} - 0 = s \cdot \dfrac{6}{s^4} = \dfrac{6}{s^3}$

(Nr. 16 mit $a = 4$); *Neues Funktionenpaar:* $\mathscr{L}\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3}$

c) $f'(t) = a \cdot \cos(at + b)$; $f(0) = \sin b$

$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \mathscr{L}\{a \cdot \cos(at + b)\} = s \cdot \mathscr{L}\{\sin(at + b)\} - \sin b =$

$= s \cdot \dfrac{(\sin b) \cdot s + a \cdot \cos b}{s^2 + a^2} - \sin b = \dfrac{(a \cdot \cos b) \cdot s - a^2 \cdot \sin b}{s^2 + a^2}$ (Nr. 20)

Neues Funktionenpaar: $\mathscr{L}\{\cos(at + b)\} = \dfrac{(\cos b) \cdot s - a \cdot \sin b}{s^2 + a^2}$

7) $f(0) = \sin 0 = 0$; $f'(t) = \omega \cdot \cos(\omega t)$; $f'(0) = \omega \cdot \cos 0 = \omega$

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{L}\{f''\} = \mathscr{L}\{-\omega^2 \cdot f\} = -\omega^2 \cdot \mathscr{L}\{f\} = -\omega^2 \cdot \mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = -\omega^2 \cdot F(s) \\ \mathscr{L}\{f''\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 0 - \omega = s^2 \cdot F(s) - \omega \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$-\omega^2 \cdot F(s) = s^2 \cdot F(s) - \omega$ oder $F(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

8) $\mathscr{L}\{t \cdot \sin(\omega t)\} = -F'(s) = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ (Kettenregel)

$\mathscr{L}\{t^2 \cdot \sin(\omega t)\} = F''(s) = \dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}\right) = \dfrac{6\omega s^2 - 2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^3}$ (Quotientenregel)

9) a) $\mathscr{L}\left\{\underbrace{\int\limits_0^t \cos u \, du}_{\sin t}\right\} = \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\mathscr{L}\{\cos t\}}_{\text{Nr. 19, } a\,=\,1} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$

b) $\mathscr{L}\left\{\underbrace{\int\limits_0^t u^2 \, du}_{\frac{1}{3} t^3}\right\} = \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\mathscr{L}\{t^2\}}_{\text{Nr. 10}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^4} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$

10) $\mathscr{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot \sin(\omega t)\right\} = \int\limits_s^\infty F(u) \, du = \int\limits_s^\infty \frac{\omega}{u^2 + \omega^2} \, du = \omega \left[\frac{1}{\omega} \cdot \arctan\left(\frac{u}{\omega}\right)\right]_s^\infty =$

$= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{s}\right)$ (Integral: 29 mit $a = \omega$)

11) a) $t * \mathrm{e}^{-t} = \int\limits_0^t u \cdot \mathrm{e}^{-(t-u)} \, du = \mathrm{e}^{-t} \cdot \int\limits_0^t u \cdot \mathrm{e}^u \, du = \mathrm{e}^{-t} \left[(u - 1) \cdot \mathrm{e}^u\right]_0^t =$

$= \mathrm{e}^{-t} \left[(t - 1) \cdot \mathrm{e}^t + 1\right] = t - 1 + \mathrm{e}^{-t}$ (Integral: 313 mit $a = 1$)

b) $\mathrm{e}^t * \cos t = \cos t * \mathrm{e}^t = \int\limits_0^t \cos u \cdot \mathrm{e}^{(t-u)} \, du = \mathrm{e}^t \cdot \int\limits_0^t \cos u \cdot \mathrm{e}^{-u} \, du =$

$= \mathrm{e}^t \left[\frac{1}{2}(-\cos u + \sin u) \cdot \mathrm{e}^{-u}\right]_0^t = \mathrm{e}^t \left[\frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \cdot \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\right] =$

$= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + \mathrm{e}^t)$ (Integral: 324 mit $a = -1$ und $b = 1$)

12) $F(s)$ wird in ein *Produkt* zerlegt, die Originalfunktionen der Faktoren der Transformationstabelle aus Kap. VI, Abschnitt 4.2 entnommen. (Nr. 3 mit $a = 2$ bzw. $a = -4$)

a) $F(s) = \left(\frac{1}{s - 2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s + 4}\right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$

$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 2}\right\} = \mathrm{e}^{2t}; \quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 4}\right\} = \mathrm{e}^{-4t}$

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f_1 * f_2 = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{2u} \cdot \mathrm{e}^{-4(t-u)} \, du = \mathrm{e}^{-4t} \cdot \int\limits_0^t \mathrm{e}^{6u} \, du =$

$= \mathrm{e}^{-4t} \left[\frac{\mathrm{e}^{6u}}{6}\right]_0^t = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-4t})$ (Integral: Nr. 312 mit $a = 6$)

b) $F(s) = \left(\dfrac{2}{s^2+1}\right) \cdot \left(\dfrac{s}{s^2+1}\right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$

$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+1}\right\} = 2 \cdot \sin t\,;\quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$

(Nr. 18 und Nr. 19, jeweils mit $a = 1$)

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f_1 * f_2 = \int_0^t 2 \cdot \sin u \cdot \cos(t-u)\,du$$

Den Faktor $\cos(t-u)$ entwickeln wir nach dem *Additionstheorem* der Kosinusfunktion:

$$f(t) = 2 \cdot \int_0^t \sin u\,(\cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot \sin u)\,du = 2 \cdot \cos t \cdot \int_0^t \sin u \cdot \cos u\,du +$$

$$+ 2 \cdot \sin t \cdot \int_0^t \sin^2 u\,du = 2 \cdot \cos t\left[\frac{1}{2} \cdot \sin^2 u\right]_0^t + 2 \cdot \sin t\left[\frac{u - \sin u \cdot \cos u}{2}\right]_0^t =$$

$$= \cos t \cdot \sin^2 t + \sin t\,(t - \sin t \cdot \cos t) = t \cdot \sin t$$

(Integrale: 254 und 205, jeweils mit $a = 1$)

c) $F(s) = \left(\dfrac{1}{s^2+9}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{s}\right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$

$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+9}\right\} = \dfrac{1}{3} \cdot \sin(3t)\,;\quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$

(Nr. 18 mit $a = 3$ und Nr. 2)

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f_1 * f_2 = \int_0^t \frac{1}{3} \cdot \sin(3u) \cdot 1\,du = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3} \cdot \cos(3u)\right]_0^t =$$

$= \dfrac{1}{9}\,[1 - \cos(3t)]$ (Integral: 204 mit $a = 3$)

13) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+a^2)^2} = \left(\dfrac{1}{s^2+a^2}\right) \cdot \left(\dfrac{s}{s^2+a^2}\right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$

$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} = \dfrac{\sin(at)}{a}\,;\quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at)$

(Nr. 18 und Nr. 19)

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f_1 * f_2 = \int_0^t \frac{\sin(au)}{a} \cdot \cos[a(t-u)]\,du$$

Umformung des Faktors $\cos[a(t-u)] = \cos(at - au)$ (Additionstheorem des Kosinus):

$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_1 \cdot \sin x_2$ mit $x_1 = at$ und $x_2 = au$

$$f(t) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^t \sin(au)\,[\cos(at) \cdot \cos(au) + \sin(at) \cdot \sin(au)]\,du =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\cos at \cdot \int_0^t \sin(au) \cdot \cos(au)\,du + \sin(at) \cdot \int_0^t \sin^2(au)\,du\right] =$$

$$= \frac{\cos(at)}{a}\left[\frac{\sin^2(au)}{2a}\right]_0^t + \frac{\sin(at)}{a}\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(au) \cdot \cos(au)}{2a}\right]_0^t =$$

$$= \frac{\cos(at) \cdot \sin^2(at)}{2a^2} + \frac{t \cdot \sin(at)}{2a} - \frac{\sin^2(at) \cdot \cos(at)}{2a^2} = \frac{t \cdot \sin(at)}{2a}$$

(Integrale: 254 und 205)

14) a) $f(0) = \lim\limits_{s \to \infty} s\left(\frac{3s}{s^2+8} + \frac{1}{s^2}\right) = \lim\limits_{s \to \infty}\left(\frac{3s^2}{s^2+8} + \frac{1}{s}\right) = \lim\limits_{s \to \infty}\left(\frac{3}{1+8/s^2} + \frac{1}{s}\right) = 3$

b) $f(0) = \lim\limits_{s \to \infty} s\left(\frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{s+4}\right) = \lim\limits_{s \to \infty}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s+4}\right) =$

$$= \lim_{s \to \infty}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{1+4/s}\right) = 1$$

15) a) $f(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} s\left(\frac{1}{s(s+4)}\right) = \lim\limits_{s \to 0}\left(\frac{1}{s+4}\right) = \frac{1}{4}$

b) $f(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} s\left(\frac{e^s - s - 1}{s^2}\right) = \lim\limits_{s \to 0}\left(\frac{e^s - s - 1}{s}\right) \to \frac{0}{0}$ (unbestimmter Ausdruck)

Nach der *Grenzwertregel von Bernoulli-de L'Hospital* folgt weiter:

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{(e^s - s - 1)'}{(s)'} = \lim_{s \to 0}\left(\frac{e^s - 1}{1}\right) = \lim_{s \to 0}(e^s - 1) = 1 - 1 = 0$$

Abschnitt 3

1) a) $F(s) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}} \cdot \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) \cdot e^{-st}\,dt =$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}\left[\frac{\sin(\omega t)\,[-s \cdot \sin(\omega t) - 2\omega \cdot \cos(\omega t)] \cdot e^{-st}}{s^2 + 4\omega^2} - \frac{2\omega^2 \cdot e^{-st}}{s(s^2+4\omega^2)}\right]_0^{\pi/\omega} =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}\left(-\frac{2\omega^2 \cdot e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{s(s^2+4\omega^2)} + \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}\right) = \frac{2\omega^2\,(1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s})}{s(s^2+4\omega^2)\,(1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s})} =$$

$$= \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$$

(Integrale: 323 mit $n = 2$, $a = -s$, $b = \omega$ und 312 mit $a = -s$)

b) $$F(s) = \frac{A}{1 - e^{-2as}} \cdot \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} t\right) \cdot e^{-st}\, dt =$$

$$= \frac{Aa}{1 - e^{-2as}} \left[\frac{\left[-as \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} t\right) - \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} t\right)\right] \cdot e^{-st}}{a^2 s^2 + \pi^2} \right]_0^a =$$

$$= \frac{Aa}{\underbrace{(1 - e^{-2as})}_{\text{3. Binom}}} \cdot \frac{\pi \cdot e^{-as} + \pi}{a^2 s^2 + \pi^2} = \frac{Aa\pi\,(1 + e^{-as})}{(a^2 s^2 + \pi^2)\,(1 + e^{-as})\,(1 - e^{-as})} =$$

$$= \frac{\pi a A}{(a^2 s^2 + \pi^2)\,(1 - e^{-as})} \qquad \text{(Integral: 322 mit } a = -s \text{ und } b = \pi/a)$$

Vorgenommene Umformung (3. Binom): $1 - e^{-2as} = (1 + e^{-as})\,(1 - e^{-as})$

2) $$F(s) = \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \cdot \int_0^a (a - t) \cdot e^{-st}\, dt = \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \left[a \cdot \int_0^a e^{-st}\, dt - \int_0^a t \cdot e^{-st}\, dt \right] =$$

$$= \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \left(a \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^a + \left[\frac{(st + 1) \cdot e^{-st}}{s^2}\right]_0^a \right) =$$

$$= \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \left(\frac{a(1 - e^{-as})}{s} + \frac{(as + 1) \cdot e^{-as} - 1}{s^2} \right) =$$

$$= \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \cdot \frac{as - as \cdot e^{-as} + as \cdot e^{-as} + e^{-as} - 1}{s^2} =$$

$$= \frac{A\,(e^{-as} + as - 1)}{as^2\,(1 - e^{-as})} \qquad \text{(Integrale: 312 und 313, jeweils mit } a = -s)$$

Abschnitt 4

1) a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 8}\right\} = e^{8t}$ (Nr. 3 mit $a = 8$)

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{6}$ (Nr. 16 mit $n = 4$)

c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 25}\right\} = 3 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 5^2}\right\} = \frac{3}{5} \cdot \sin(5t)$ (Nr. 18 mit $a = 5$)

d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2 + 36}\right\} = 4 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 6^2}\right\} = 4 \cdot \cos(6t)$ (Nr. 19 mit $a = 6$)

e) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s - 4}{(s - 4)^2 + 4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s - 4}{(s - 4)^2 + 2^2}\right\} = e^{4t} \cdot \cos(2t)$

(Nr. 23 mit $a = 2$ und $b = 4$)

f) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 25} - \frac{3s}{s^2 - 1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 5^2}\right\} - 3 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 1^2}\right\} =$

$= \frac{1}{5} \cdot \sin(5t) - 3 \cdot \cosh t$ (Nr. 18 mit $a = 5$ und Nr. 25 mit $a = 1$)

2) a) Nennernullstellen: $s^2 + s - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 1; \quad s_2 = -2$

Ansatz: $\dfrac{5s + 1}{(s-1)(s+2)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s+2} = \dfrac{A(s+2) + B(s-1)}{(s-1)(s+2)} \quad \Rightarrow$

$A(s+2) + B(s-1) = 5s + 1$

Einsetzen der Werte $s = 1$ bzw. $s = -2$ liefert $A = 2$ und $B = 3$.

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s+1}{s^2 + s - 2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s-1} + \dfrac{3}{s+2}\right\} = 2 \cdot e^{t} + 3 \cdot e^{-2t}$

(Nr. 3 mit $a = 1$ bzw. $a = -2$)

b) $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{s^2 + 2s - 3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{s+3}\right\} =$

$= \dfrac{3}{4} \cdot e^{t} + \dfrac{1}{4} \cdot e^{-3t}$ (Nr. 3 mit $a = 1$ bzw. $a = -3$)

c) Nennernullstellen: $s^3 - s^2 - 8s + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1/2} = 2; \quad s_3 = -3$

Ansatz: $\dfrac{-2s^2 + 18s - 3}{(s-2)^2(s+3)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{(s-2)^2} + \dfrac{C}{s+3} =$

$$= \frac{A(s-2)(s+3) + B(s+3) + C(s-2)^2}{(s-2)^2(s+3)} \quad \Rightarrow$$

$A(s-2)(s+3) + B(s+3) + C(s-2)^2 = -2s^2 + 18s - 3$

Einsetzen der Werte $2, -3$ bzw. 0 für die Variable s liefert $A = 1$, $B = 5$, $C = -3$.

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{-2s^2 + 18s - 3}{s^3 - s^2 - 8s + 12}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{5}{(s-2)^2} - \dfrac{3}{s+3}\right\} =$

$= e^{2t} + 5t \cdot e^{2t} - 3 \cdot e^{-3t}$ (Nr. 3 und Nr. 6 mit $a = 2$, Nr. 3 mit $a = -3$)

3) a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s} - \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{4}{s-1}\right\} = 2 - 3t + 4 \cdot e^{t}$ (Nr. 2, Nr. 4 und Nr. 3 mit $a = 1$)

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-5)^3} + \dfrac{2s}{s^2 + 5^2} + \dfrac{5}{(s-3)^2 + 1^2}\right\} =$

$$= \frac{1}{2}t^2 \cdot e^{5t} + 2 \cdot \cos(5t) + 5 \cdot e^{3t} \cdot \sin t$$

(Nr. 17 mit $n = 3$ und $a = 5$, Nr. 19 mit $a = 5$ und Nr. 22 mit $a = 1$ und $b = 3$)

Abschnitt 5

1) a) $3[s \cdot Y(s) - 0] + 2 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$ (Nr. 4) $\quad \Rightarrow \quad Y(s) = \dfrac{1}{s^2(3s+2)}$

b) $[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 1 - 0] + 2[s \cdot Y(s) - 1] + Y(s) = \mathscr{L}\{\cos(2t)\} = \dfrac{s}{s^2 + 4}$

(Nr. 19 mit $a = 2$) $\quad \Rightarrow \quad Y(s) = \dfrac{s^3 + 2s^2 + 5s + 8}{(s+1)^2(s^2+4)}$

2) a) $[s \cdot Y(s) - 1] - Y(s) = \mathscr{L}\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1}$ (Nr. 3 mit $a = 1$) $\Rightarrow$

$$Y(s) = \frac{s}{(s-1)^2}; \quad y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\} = (1+t) \cdot e^t$$

(Nr. 8 mit $a = 1$)

b) $[s \cdot Y(s) - 5] + 3 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{-\cos t\} = -\dfrac{s}{s^2+1}$ (Nr. 19 mit $a = 1$) $\Rightarrow$

$$Y(s) = \left(-\frac{s}{s^2+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{s+3}\right) + \frac{5}{s+3} = F_1(s) \cdot F_2(s) + \frac{5}{s+3}$$

$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} + 5 \cdot e^{-3t}$ (Nr. 3 mit $a = -3$)

$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$ wird mit Hilfe des *Faltungssatzes* berechnet:

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{s}{s^2+1}\right\} = -\cos t; \quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

(Nr. 19 mit $a = 1$ und Nr. 3 mit $a = -3$)

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t (-\cos u) \cdot e^{-3(t-u)}\, du =$$

$$= -e^{-3t} \cdot \int_0^t \cos u \cdot e^{3u}\, du = -e^{-3t}\left[\frac{e^{3u}}{10}(3 \cdot \cos u + \sin u)\right]_0^t =$$

$$= -0{,}3 \cdot \cos t - 0{,}1 \cdot \sin t + 0{,}3 \cdot e^{-3t} \quad \text{(Integral: 324 mit } a = 3 \text{ und } b = 1)$$

Lösung: $y(t) = f_1(t) * f_2(t) + 5 \cdot e^{-3t} = -0{,}3 \cdot \cos t - 0{,}1 \cdot \sin t + 5{,}3 \cdot e^{-3t}$

c) $[s \cdot Y(s) - 0] - 5 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{2 \cdot \cos t - \sin(3t)\} = \dfrac{2s}{s^2+1} - \dfrac{3}{s^2+9}$

(Nr. 19 mit $a = 1$ und Nr. 18 mit $a = 3$)

$$Y(s) = \left(\frac{s}{s^2+1}\right)\left(\frac{2}{s-5}\right) - \left(\frac{3}{s^2+9}\right)\left(\frac{1}{s-5}\right) = F_1(s) \cdot F_2(s) - F_3(s) \cdot F_4(s)$$

Bestimmung der Lösung $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$ mit Hilfe des *Faltungssatzes*:

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t; \quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\} = 2 \cdot e^{5t};$$

$$f_3(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = \sin(3t); \quad f_4(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = e^{5t}$$

(Nr. 19 mit $a = 1$, Nr. 18 mit $a = 3$ und Nr. 3 mit $a = 5$)

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \cos u \cdot 2 \cdot e^{5(t-u)}\, du =$$

$$= 2 \cdot e^{5t} \cdot \int_0^t \cos u \cdot e^{-5u}\, du = 2 \cdot e^{5t} \left[\frac{e^{-5u}}{26} (-5 \cdot \cos u + \sin u) \right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{13} (\sin t - 5 \cdot \cos t + 5 \cdot e^{5t}) \quad \text{(Integral: 324 mit } a = -5 \text{ und } b = 1)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_3(s) \cdot F_4(s)\} = f_3(t) * f_4(t) = \int_0^t \sin(3u) \cdot e^{5(t-u)}\, du =$$

$$= e^{5t} \cdot \int_0^t \sin(3u) \cdot e^{-5u}\, du = e^{5t} \left[\frac{e^{-5u}}{34} (-5 \cdot \sin(3t) - 3 \cdot \cos(3t)) \right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{34} (-5 \cdot \sin(3t) - 3 \cdot \cos(3t) + 3 \cdot e^{5t}) \quad \text{(Integral: 322 mit } a = -5 \text{ und } b = 3)$$

Lösung: $y(t) = f_1(t) * f_2(t) - f_3(t) * f_4(t) =$

$$= \frac{1}{13} (\sin t - 5 \cdot \cos t) + \frac{1}{34} (5 \cdot \sin(3t) + 3 \cdot \cos(3t)) + \frac{131}{442} \cdot e^{5t}$$

3) a) $[s \cdot Y(s) - \alpha] - 3 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{4t \cdot e^t\} = \dfrac{4}{(s-1)^2}$ (Nr. 6 mit $a = 1$) $\Rightarrow$

$$Y(s) = \frac{4}{(s-1)^2 (s-3)} + \frac{\alpha}{s-3} = -\frac{1}{s-1} - \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1+\alpha}{s-3}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = -(1 + 2t) \cdot e^t + (1 + \alpha) \cdot e^{3t}$

(Nr. 3 mit $a = 1$, Nr. 6 mit $a = 1$ und Nr. 3 mit $a = 3$)

b) $[s \cdot Y(s) - \alpha] - 4 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{5 \cdot \sin t\} = \dfrac{5}{s^2 + 1}$ (Nr. 18 mit $a = 1$) $\Rightarrow$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s^2+1} \right) \cdot \left(\frac{5}{s-4} \right) + \frac{\alpha}{s-4} = F_1(s) \cdot F_2(s) + \frac{\alpha}{s-4}$$

$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} + \alpha \cdot e^{4t}$ (Nr. 3 mit $a = 4$)

$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$ wird mit Hilfe des *Faltungssatzes* berechnet:

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} = \sin t; \quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{5}{s-4} \right\} = 5 \cdot e^{4t}$$

(Nr. 18 mit $a = 1$ und Nr. 3 mit $a = 4$)

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\cdot F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \sin u \cdot 5 \cdot e^{4(t-u)}\, du =$$

$$= 5\cdot e^{4t}\cdot \int_0^t \sin u \cdot e^{-4u}\, du = 5\cdot e^{4t}\left[\frac{e^{-4u}}{17}(-4\cdot \sin u - \cos u)\right]_0^t =$$

$$= \frac{5}{17}(-4\cdot \sin t - \cos t + e^{4t}) \quad \text{(Integral: 322 mit } a = -4 \text{ und } b = 1)$$

Lösung: $y(t) = -\frac{5}{17}(4\cdot \sin t + \cos t) + \left(\frac{5}{17} + \alpha\right)\cdot e^{4t}$

4) $[s\cdot Y(s) - y(0)] + 4\cdot Y(s) = \mathscr{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$ (Nr. 16 mit $n = 4$) $\Rightarrow$

$$Y(s) = \left(\frac{6}{s^4}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right) + \frac{y(0)}{s+4} = F_1(s)\cdot F_2(s) + \frac{y(0)}{s+4}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\cdot F_2(s)\} + y(0)\cdot e^{-4t} \quad \text{(Nr. 3 mit } a = -4)$$

$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\cdot F_2(s)\}$ wird mit Hilfe des *Faltungssatzes* berechnet:

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} = t^3; \quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = e^{-4t}$$

(Nr. 16 mit $n = 4$ und Nr. 3 mit $a = -4$)

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\cdot F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t u^3\cdot e^{-4(t-u)}\, du = e^{-4t}\cdot \int_0^t u^3\cdot e^{4u}\, du =$$

$$= e^{-4t}\left[\frac{u^3\cdot e^{4u}}{4} - \frac{3}{4}\cdot \frac{16u^2 - 8u + 2}{64}\cdot e^{4u}\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{128}(32t^3 - 24t^2 + 12t - 3 + 3\cdot e^{-4t})$$

(Integrale: 315 mit $n = 3$, $a = 4$ und 314 mit $a = 4$)

Somit: $y(t) = \frac{1}{128}(32t^3 - 24t^2 + 12t - 3 + 3\cdot e^{-4t}) + y(0)\cdot e^{-4t}$

Berechnung des *Anfangswertes* $y(0)$: $y(1) = 2 \Rightarrow y(0) = 101{,}9215$

Lösung: $y(t) = \frac{1}{128}(32t^3 - 24t^2 + 12t - 3) + 101{,}9450\cdot e^{-4t}$

5) a) $y' - 3y = 0 \Rightarrow y_0 = K\cdot e^{3t} \Rightarrow$ *Ansatz:* $y = K(t)\cdot e^{3t} \Rightarrow$

$$K'(t) = t\cdot e^{-2t} \Rightarrow K(t) = -\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\cdot e^{-2t} + C$$

(Integral: 313 mit $a = -2$)

$$y = -\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\cdot e^{t} + C\cdot e^{3t} \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

Spezielle Lösung: $y = -\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\cdot e^{t} + \frac{5}{4}\cdot e^{3t}$

b) $y = y_0 + y_p = C \cdot e^{3t} + y_p$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

Ansatz für y_p: $y_p = (At + B) \cdot e^t$ (*Begründung:* Das Störglied ist ein Produkt aus einer linearen Funktion und der e-Funktion)

Einsetzen in die inhomogene Dgl liefert: $-2At + (A - 2B) = t + 0$

Koeffizientenvergleich: $-2A = 1$ und $A - 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -1/2;\ B = -1/4$

Allgemeine Lösung: $y = y_0 + y_p = C \cdot e^{3t} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^t$

c) $[s \cdot Y(s) - 1] - 3 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{t \cdot e^t\} = \frac{1}{(s-1)^2}$ (Nr. 6 mit $a = 1$)

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s-1)^2} + \frac{1}{s-3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s-3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{5}{4} \cdot e^{3t} - \frac{1}{4} \cdot e^t - \frac{1}{2}t \cdot e^t = \frac{5}{4} \cdot e^{3t} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^t$$

(Nr. 3 mit $a = 3$ bzw. $a = 1$ und Nr. 6 mit $a = 1$)

6) a) $L[s \cdot I(s) - 0] + R \cdot I(s) = \mathscr{L}\{u_0\} = \frac{u_0}{s}$ (Nr. 2) $\Rightarrow \quad I(s) = \frac{u_0}{L} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)}$

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{u_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \text{(Nr. 5 mit } a = -R/L)$$

b) $L[s \cdot I(s) - 0] + R \cdot I(s) = \mathscr{L}\{at\} = \frac{a}{s^2}$ (Nr. 4) $\Rightarrow \quad I(s) = \frac{a}{L} \cdot \frac{1}{s^2\left(s + \frac{R}{L}\right)}$

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{aL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}t - 1\right) \quad \text{(Nr. 11 mit } a = -R/L)$$

7) $m[s \cdot V(s) - v_0] + k \cdot V(s) = \mathscr{L}\{F\} = \frac{F}{s}$ (Nr. 2) $\Rightarrow$

$$V(s) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{k}{m}\right)} + \frac{v_0}{s + \frac{k}{m}}$$

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}\{V(s)\} = \left(v_0 - \frac{F}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}$$

(Nr. 5 und Nr. 3, jeweils mit $a = -k/m$)

8) $[s \cdot I(s) - 0] + 20 \cdot I(s) = \mathscr{L}\{10 \cdot \sin(2t)\} = \frac{20}{s^2 + 4}$ (Nr. 18 mit $a = 2$) $\Rightarrow$

$$I(s) = \left(\frac{2}{s^2 + 4}\right) \cdot \left(\frac{10}{s + 20}\right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$$

$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$ wird mit Hilfe des *Faltungssatzes* berechnet:

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} = \sin(2t); \quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s + 20}\right\} = 10 \cdot e^{-20t}$$

(Nr. 18 mit $a = 2$ und Nr. 3 mit $a = -20$)

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \sin(2u) \cdot 10 \cdot e^{-20(t-u)}\, du =$$

$$= 10 \cdot e^{-20t} \cdot \int_0^t \sin(2u) \cdot e^{20u}\, du = 10 \cdot e^{-20t} \left[\frac{e^{20u}}{404} (20 \cdot \sin(2u) - 2 \cdot \cos(2u)) \right]_0^t =$$

$$= \frac{5}{101} (10 \cdot \sin(2t) - \cos(2t) + e^{-20t}) \quad \text{(Integral: 322 mit } a = 20 \text{ und } b = 2)$$

Lösung: $i(t) = f_1(t) * f_2(t) = \dfrac{5}{101} (10 \cdot \sin(2t) - \cos(2t) + e^{-20t})$

9) a) $[s^2 \cdot Y(s) - 2 \cdot s - 1] + 4 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0 \quad \Rightarrow$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+4} = \frac{2s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}$$

Rücktransformation (Nr. 19 und Nr. 18 mit $a = 2$):

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2t)$$

b) $[s^2 \cdot Y(s) - 0 \cdot s - 4] + 6[s \cdot Y(s) - 0] + 10 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0 \quad \Rightarrow$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + 6s + 10} = \frac{4}{(s-\alpha)(s-\beta)} \qquad (\alpha = -3 + j; \quad \beta = -3 - j)$$

Rücktransformation (Nr. 7 mit $a = \alpha$ und $b = \beta$):

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = 4 \cdot \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = 4 \cdot e^{-3t} \cdot \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = 4 \cdot e^{-3t} \cdot \sin t$$

c) $[s^2 \cdot Y(s) - 0 \cdot s - 1] + [s \cdot Y(s) - 0] = \mathscr{L}\{e^{-2t}\} = \dfrac{1}{s+2} \quad$ (Nr. 3, $a = -2$)

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{s(s+1)}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

Rücktransformation (Nr. 2, Nr. 3 mit $a = -1$ bzw. $a = -2$ und Nr. 5 mit $a = -1$):

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} - 2 \cdot e^{-t} + \frac{3}{2}$$

d) $[s^2 \cdot Y(s) - 1 \cdot s - 0] + 2[s \cdot Y(s) - 1] - 3 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{2t\} = \dfrac{2}{s^2} \quad$ (Nr. 4)

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 2}{s^2(s-1)(s+3)} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{7}{36} \cdot \frac{1}{s+3}$$

(nach Partialbruchzerlegung)

Rücktransformation (Nr. 2, Nr. 4 und Nr. 3 mit $a = 1$ bzw. $a = -3$):

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{4}{9} - \frac{2}{3} \cdot t + \frac{5}{4} \cdot e^{t} + \frac{7}{36} \cdot e^{-3t}$$

10) a) $[s^2 \cdot Y(s) - \alpha \cdot s - \beta] + 2[s \cdot Y(s) - \alpha] + Y(s) = \mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ (Nr. 4)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{\alpha \cdot s}{(s+1)^2} + \frac{2\alpha + \beta}{(s+1)^2} =$$

$$= -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{2\alpha + \beta + 1}{(s+1)^2} + \frac{\alpha \cdot s}{(s+1)^2}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

Rücktransformation (Nr. 2, Nr. 4 sowie Nr. 3, Nr. 6 und Nr. 8, jeweils mit $a = -1$):

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$= -2 + t + 2 \cdot e^{-t} + (2\alpha + \beta + 1) \cdot t \cdot e^{-t} + \alpha(1 - t) \cdot e^{-t} =$$

$$= -2 + t + [(\alpha + \beta + 1)t + 2 + \alpha] \cdot e^{-t}$$

b) $[s^2 \cdot Y(s) - \alpha \cdot s - \beta] - 2[s \cdot Y(s) - \alpha] - 8 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$

(Nr. 3 mit $a = 2$)

$$Y(s) = \frac{1}{(s-4)(s+2)(s-2)} + \frac{\alpha \cdot s}{(s-4)(s+2)} + \frac{\beta - 2\alpha}{(s-4)(s+2)} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{\alpha \cdot s}{(s-4)(s+2)} + \frac{\beta - 2\alpha}{(s-4)(s+2)}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

Rücktransformation (Nr. 3 mit $a = 4$ bzw. $a = -2$ bzw. $a = 2$, Nr. 9 und Nr. 7 jeweils mit $a = 4$ und $b = -2$):

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{12} \cdot e^{4t} + \frac{1}{24} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{8} \cdot e^{2t} +$$

$$+ \alpha \cdot \frac{4 \cdot e^{4t} + 2 \cdot e^{-2t}}{6} + (\beta - 2\alpha) \cdot \frac{e^{4t} - e^{-2t}}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 2\alpha + \beta\right) \cdot e^{4t} - \frac{1}{8} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} + 4\alpha - \beta\right) \cdot e^{-2t}$$

11) a) $y'' + 2y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -1 \quad \Rightarrow$

$y_0 = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-t}$; *Ansatz* für y_p: $y_p = At + B + C \cdot \sin t + D \cdot \cos t$

Einsetzen in die inhomogene Dgl, dann Koeffizientenvergleich:

$$At + (2A + B) - 2D \cdot \sin t + 2C \cdot \cos t = t + \sin t \quad \Rightarrow$$

$$A = 1, \quad 2A + B = 0, \quad -2D = 1, \quad 2C = 0 \quad \Rightarrow$$

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}; \quad y_p = t - 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos t$$

Allgemeine Lösung: $y = y_0 + y_p = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-t} + t - 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos t$

Spezielle Lösung: $y = \frac{1}{2}(5t + 7) \cdot e^{-t} + t - 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos t$

b) $[s^2 \cdot Y(s) - 1 \cdot s - 0] + 2[s \cdot Y(s) - 1] + Y(s) = \mathscr{L}\{t + \sin t\} = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^2 + 1}$

(Nr. 4 und Nr. 18 mit $a = 1$)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 (s+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} =$$

$$= -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

(nach Partialbruchzerlegung der ersten beiden Summanden, jeweils grau unterlegt)

Rücktransformation (Nr. 2 sowie Nr. 4 sowie Nr. 3, Nr. 6 und Nr. 8, jeweils mit $a = -1$ und Nr. 19 mit $a = 1$):

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = -2 + t + \frac{5}{2} \cdot e^{-t} + \frac{7}{2}\, t \cdot e^{-t} + (1 - t) \cdot e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot \cos t =$$

$$= \frac{1}{2}(5t + 7) \cdot e^{-t} + t - 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos t$$

12) a) $[s^2 \cdot X(s) - 0 \cdot s - v_0] + a^2 \cdot X(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(s) = \dfrac{v_0}{s^2 + a^2}$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{v_0}{a} \cdot \sin(at) \quad \text{(Nr. 18)}$$

b) $[s^2 \cdot X(s) - 1 \cdot s + 2] + 4[s \cdot X(s) - 1] + 29 \cdot X(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0$

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2 + 4s + 29} = \frac{s}{(s-\alpha)(s-\beta)} + \frac{2}{(s-\alpha)(s-\beta)}$$

(mit $\alpha = -2 + 5\,\mathrm{j}$ und $\beta = -2 - 5\,\mathrm{j}$)

Rücktransformation (Nr. 7 und Nr. 9, jeweils mit $a = \alpha$ und $b = \beta$):

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{\alpha \cdot e^{\alpha t} - \beta \cdot e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + \frac{2(e^{\alpha t} - e^{\beta t})}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(2+\alpha) \cdot e^{\alpha t} - (2+\beta) \cdot e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = e^{-2t}\left(\frac{e^{5\mathrm{j}t} + e^{-5\mathrm{j}t}}{2}\right) = e^{-2t} \cdot \cos(5t)$$

c) $[s^2 \cdot X(s) - 1 \cdot s + 1] + [s \cdot X(s) - 1] + 0{,}25 \cdot X(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0 \quad \Rightarrow$

$$X(s) = \frac{s}{(s + 0{,}5)^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = (1 - 0{,}5\,t) \cdot e^{-0{,}5\,t}$$

(Nr. 8 mit $a = -0{,}5$)

d) $[s^2 \cdot X(s) - 5s - 0] + 7[s \cdot X(s) - 5] + 12 \cdot X(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0 \quad \Rightarrow$

$$X(s) = \frac{5s}{(s+3)(s+4)} + \frac{35}{(s+3)(s+4)} \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = 20 \cdot e^{-3t} - 15 \cdot e^{-4t}$$

(Nr. 9 und Nr. 7, jeweils mit $a = -3$ und $b = -4$)

13) $\ddot{x} - 6{,}54\,x = 0$; *Anfangswerte:* $x(0) = 0{,}75$; $\dot{x}(0) = 0$

$$[s^2 \cdot X(s) - 0{,}75\,s - 0] - 6{,}54 \cdot X(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{0{,}75\,s}{s^2 - 6{,}54} = \frac{0{,}75\,s}{s^2 - 2{,}557^2}$$

$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = 0{,}75 \cdot \cosh(2{,}557\,t)$ (Nr. 25 mit $a = 2{,}557$)

Lösung: $x(t) = 0{,}75\,\text{m} \cdot \cosh(2{,}557\,\text{s}^{-1} \cdot t)$

14) $\ddot{x} + 83{,}33\,x = 0$; *Anfangswerte:* $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0{,}5$

$$[s^2 \cdot X(s) - 0 \cdot s - 0{,}5] + 83{,}33 \cdot X(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{0{,}5}{s^2 + 83{,}33} = \frac{0{,}5}{s^2 + 9{,}13^2}$$

$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = 0{,}055 \cdot \sin(9{,}13\,t)$ (Nr. 18 mit $a = 9{,}13$)

Lösung: $x(t) = 0{,}055\,\text{m} \cdot \sin(9{,}13\,s^{-1} \cdot t)$

15) a) $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$ (mit $\omega_0^2 = g/l$); Anfangswerte: $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$

$$[s^2 \cdot \phi(s) - \varphi(0) \cdot s - \varphi'(0)] + \omega_0^2 \cdot \phi(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0$$

$$\phi(s) = \varphi(0) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \dot{\varphi}(0) \cdot \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$$

Rücktransformation (Nr. 19 und Nr. 18, jeweils mit $a = \omega_0$):

$$\varphi(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\phi(s)\} = \varphi(0) \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

b) $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$

16) $\ddot{x} + 16\,\dot{x} + 256\,x = 0$; *Anfangswerte:* $x(0) = 0{,}2$; $\dot{x}(0) = 0$

$$[s^2 \cdot X(s) - 0{,}2\,s - 0] + 16\,[s \cdot X(s) - 0{,}2] + 256 \cdot X(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{0{,}2\,s + 3{,}2}{s^2 + 16\,s + 256} = \frac{0{,}2\,s}{(s - \alpha)(s - \beta)} + \frac{3{,}2}{(s - \alpha)(s - \beta)}$$

(mit $\alpha = -8 + 8\sqrt{3}\,\text{j}$ und $\beta = -8 - 8\sqrt{3}\,\text{j}$)

Rücktransformation (Nr. 9 und Nr. 7, jeweils mit $a = \alpha$ und $b = \beta$):

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = 0{,}2 \cdot \frac{\alpha \cdot e^{\alpha t} - \beta \cdot e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + 3{,}2 \cdot \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(0{,}2\,\alpha + 3{,}2) \cdot e^{\alpha t} - (0{,}2\,\beta + 3{,}2) \cdot e^{\beta t}}{\alpha - \beta} =$$

$$= e^{-8t}\,(0{,}1155 \cdot \sin(8\sqrt{3}\,t) + 0{,}2 \cdot \cos(8\sqrt{3}\,t))$$

Lösung: $x(t) = e^{-8\,\text{s}^{-1} \cdot t}\,[0{,}1155\,\text{m} \cdot \sin(8\sqrt{3}\,\text{s}^{-1} \cdot t) + 0{,}2\,\text{m} \cdot \cos(8\sqrt{3}\,\text{s}^{-1} \cdot t)]$

17) *Energielos* bedeutet: $i(0) = 0$ und $q(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} i(\tau)\, d\tau = 0$ (stromlos und keine Ladungen zu Beginn). Somit gilt für $t \geq 0$:

$$R\,i + \frac{1}{C} \cdot \int\limits_{0}^{t} i(\tau)\, d\tau = u_0 \quad \Rightarrow \quad R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = \mathscr{L}\{u_0\} = \frac{u_0}{s} \quad \text{(Nr. 2)} \quad \Rightarrow$$

$$I(s) = \frac{u_0}{R} \cdot \frac{1}{s + \dfrac{1}{RC}} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{u_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{(Nr. 3 mit } a = -1/RC\text{)}$$

18) $0{,}1 \cdot \dfrac{di}{dt} + 10\,i = 100$; *Anfangswert:* $i(0) = 0$

$$0{,}1\,[s \cdot I(s) - 0] + 10 \cdot I(s) = \mathscr{L}\{100\} = \frac{100}{s} \quad \text{(Nr. 2)} \quad \Rightarrow \quad I(s) = \frac{1000}{s\,(s + 100)}$$

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = 10\,(1 - e^{-100\,t}) \quad \text{(Nr. 5 mit } a = -100\text{)}$$

Lösung: $i(t) = 10\,\text{A}\,(1 - e^{-100\,\text{s}^{-1} \cdot t})$

19) *Energielos* bedeutet: $i(0) = 0$ und $q(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} i(\tau)\, d\tau = 0$ (stromlos und keine Ladungen zu Beginn). Die *Schwingungsgleichung* lautet somit für $t \geq 0$:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int\limits_{0}^{t} i(\tau)\, d\tau = u_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$L\,[s \cdot I(s) - 0] + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = \mathscr{L}\{u_0 \cdot \sin(\omega_0 t)\} = \frac{u_0\,\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{(Nr. 18 mit } a = \omega_0\text{)}$$

$$I(s) = \frac{u_0\,\omega_0}{L} \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \quad \left(\text{mit } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\right)$$

Rücktransformation (Nr. 30 mit $a = \omega_0$):

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{u_0\,\omega_0}{L} \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}\right\} = \frac{u_0\,\omega_0}{L} \cdot \frac{t \cdot \sin(\omega_0 t)}{2\,\omega_0} =$$

$$= \frac{u_0}{2L} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Literaturhinweise

Formelsammlungen

1. *Bronstein / Semendjajew:* Taschenbuch der Mathematik. Deutsch, Thun—Frankfurt/M..
2. *Papula:* Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Aufgabensammlungen

1. *Minorski:* Aufgabensammlung der Höheren Mathematik. Vieweg, Braunschweig.
2. *Papula:* Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klausur- und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
3. *Papula:* Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Anwendungsbeispiele. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Weiterführende und ergänzende Literatur

1. *Ameling:* Laplace-Transformation. Vieweg, Braunschweig.
2. *Ayres:* Differentialgleichungen. Mc Graw-Hill, New York.
3. *Blatter:* Analysis (Bd. II und III). HTB. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
4. *Braun:* Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
5. *Burg / Haf / Wille:* Höhere Mathematik für Ingenieure I, II, III. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
6. *Collatz:* Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart.
7. *Courant:* Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung (Bd. II). Springer, Berlin—Heidelberg— New York.
8. *Dietrich / Stahl:* Matrizen und Determinanten. Deutsch, Thun—Frankfurt/M..
9. *Dirschmid:* Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
10. *Endl / Luh:* Analysis (Bd. I—III). Aula-Verlag, Wiesbaden.
11. *Fetzer / Fränkel:* Mathematik (Bd. II). VDI, Düsseldorf.
12. *Fischer / Lieb:* Funktionentheorie. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
13. *Föllinger:* Laplace-, Fourier- und z-Transformation. Hüthig, Heidelberg.
14. *Heuser:* Lehrbuch der Analysis, Teil 1 und 2. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
15. *Heuser:* Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg, Wiesbaden.
16. *Holbrook:* Laplace-Transformation. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
17. *Jänich:* Frunktionentheorie. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
18. *Jeffrey:* Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure (Bd. II). Verlag Chemie, Weinheim.
19. *Kamke:* Differentialgleichungen (Bd. I und II). Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden.
20. *Kamke:* Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen (Bd. I und II). Teubner, Stuttgart.
21. *Lipschutz:* Lineare Algebra. Mc Graw-Hill, New York.
22. *Madelung:* Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
23. *Margenau/Murphy:* Die Mathematik für Physik und Chemie (Bd. I und II). Deutsch. Thun—Frankfurt/M..
24. *Meyberg, Vachenauer:* Höhere Mathematik 1 + 2. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
25. *Smirnov:* Lehrgang der Höheren Mathematik (5 Bd.). Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
26. *Weber / Ulrich:* Laplace-Transformation. Teubner, Wiesbaden.
27. *Zurmühl / Falk:* Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
28. *Zurmühl:* Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.

Sachwortverzeichnis

E

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V