

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben

I Lineare Algebra

Abschnitt 1

$$1) \quad a) \quad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} -26 \\ -17 \\ 19 \\ -21 \end{pmatrix} \quad b) \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 23 \\ 10 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} \quad c) \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 43 \\ 9 \end{pmatrix} \quad d) \quad \mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} -68 \\ 16 \\ 56 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad a) \quad 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 66 \quad b) \quad (3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + 2\mathbf{d}) = 161$$

$$c) \quad (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (2\mathbf{c} + 3\mathbf{d}) = 461$$

$$3) \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{15}; \quad |\mathbf{b}| = 5\sqrt{2}; \quad |\mathbf{c}| = \sqrt{55}; \quad |\mathbf{d}| = \sqrt{78}; \quad |\mathbf{e}| = \sqrt{56}$$

Abschnitt 2

$$1) \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

2) Symmetrisch: **B, C, E**. Schiefsymmetrisch: **A, D**.

3) Wir zerlegen die quadratische Matrix **A** wie folgt:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}) + \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{O}} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{B}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{C}} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

B ist *symmetrisch*, **C** dagegen *schiefsymmetrisch*:

$$\mathbf{B}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \mathbf{B} \quad \Rightarrow$$

B ist wegen $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ symmetrisch.

$$\mathbf{C}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T - \mathbf{A}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = -\mathbf{C} \quad \Rightarrow$$

C ist wegen $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^T$ schiefsymmetrisch.

$$4) \quad a) \quad \begin{pmatrix} 3+1+5 & 2+8+0 & 5-2+10 \\ -1+3+0 & 2+0-2 & 3+1+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} -43 & -10 & -81 \\ -9 & 26 & -73 \end{pmatrix} \quad c) \quad \begin{pmatrix} -35 & -15 \\ -26 & 22 \\ -57 & -59 \end{pmatrix} \quad d) \quad \begin{pmatrix} -3 & 18 & -15 \\ 26 & -32 & 12 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad a) \quad \begin{pmatrix} 10 & 11 & 0 \\ -3 & 12 & 7 \end{pmatrix} \quad b) \quad \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -9 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \quad c) \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Der Ausdruck $\mathbf{A} - 2\mathbf{C} + \mathbf{B}$ ist *nicht definiert*: \mathbf{A} und \mathbf{C} sind (2,3)-Matrizen, \mathbf{B} dagegen eine (3,2)-Matrix (die Addition ist nur für Matrizen vom gleichen Typ definiert).

6) a)

\mathbf{A}	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px; text-align: center;">\mathbf{A}</td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> </table>						\mathbf{A}							Analog:
	\mathbf{A}													
	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> </table>													$\mathbf{B}^2 =$
	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> </table>													$\begin{pmatrix} -21 & 10 & 12 \\ -4 & -9 & -6 \\ -16 & -20 & -3 \end{pmatrix}$
	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$													

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -13 & 19 & 15 \\ -21 & 10 & 12 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 32 & 17 \\ -5 & -3 & -1 \\ -12 & -13 & -8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

b) Die Matrizenprodukte („Potenzen“) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^2$ existieren *nicht*, da \mathbf{A} und \mathbf{B} *nichtquadratische* Matrizen sind.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

7) a) Erst $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, dann $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ bilden (doppeltes Falk-Schema).

\mathbf{B}	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> </table>													\mathbf{C}
	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> </table>													
	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr> </table>													
	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$												

$$\text{b) } \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 11 \\ 3 & 11 & 3 \\ 11 & 26 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 13 & 82 & 37 \\ 59 & 169 & 35 \end{pmatrix}$$

c) $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ bilden, dann transponieren und schließlich $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})^T$ bilden.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & -2 \\ & 1 & 7 & 6 \\ & 4 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 10 & 34 & 22 \\ 1 & 3 & 5 & 24 & 33 & 26 \end{array}$$

$$\text{d) } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 32 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \text{ ist nicht definiert (Zeilenzahl von } \mathbf{A} < \text{Spaltenzahl von } \mathbf{B}). \text{ Daher existiert auch } (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T \text{ nicht.}$$

Abschnitt 3

1) $\det \mathbf{A} = -10 - 12 = -22$; $\det \mathbf{B} = ab - ab = 0$; $\det \mathbf{C} = 6x - 11x = -5x$

$$2) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}}_{D_1} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \quad D_1 = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$$

$$D_2 = 0 + 224 + 6 - 0 + 42 - 8 = 264$$

$$D_3 = 96 + 0 + 140 - 0 - 6 + 224 = 454$$

3) a) $(1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,562$; $\lambda_2 = -2,562$

b) $(1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$ (Diagonalmatrix)

4) a) $\det \mathbf{A}$ enthält zwei *proportionale* Spalten (die 2. Spalte ist das -2 -fache der 1. Spalte).

b) $\det \mathbf{B}$ enthält einen *Nullvektor* (2. Spalte).

c) $\det \mathbf{C}$ enthält zwei *gleiche* Zeilen (1. und 3. Zeile).

d) $\det \mathbf{D}$ enthält zwei *proportionale* Zeilen (die 1. Zeile ist das -3 -fache der 3. Zeile).

$$5) \text{ a) } \det \mathbf{A} = -5(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{128} + 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_8 = 5 \cdot 128 + 3 \cdot 8 = 664$$

$$\text{b) } \det \mathbf{A} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \\ 9 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{-316} + 4(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}}_{-245} = -316 - 4 \cdot (-245) = 664$$

- 6) a) Entwicklung nach der 4. Zeile (diese enthält 2 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}_{28} + 2(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}}_{-43} = 2 \cdot 28 - 2 \cdot (-43) = 142$$

- b) Entwicklung nach der 2. Spalte (diese enthält 2 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}_{-27} + 1(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}_9 = 2 \cdot (-27) - 9 = -63$$

- 7) a) \mathbf{A} ist eine (untere) *Dreiecksmatrix*: $\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-2) \cdot 5 = -10$

- b) \mathbf{B} ist eine *Diagonalmatrix*: $\det \mathbf{B} = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$

- 8) a) Zur 1. Zeile wird das -2 -fache der 2. Zeile addiert. Die neue Determinante enthält dann zwei *gleiche* Zeilen (1. und 3. Zeile, jeweils grau unterlegt) und verschwindet daher:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- b) Zur 4. Spalte addieren wir das 2-fache der 1. Spalte und erhalten eine Determinante mit zwei *proportionalen* Spalten (3. und 4. Spalte, jeweils grau unterlegt; die 4. Spalte ist das 3-fache der 3. Spalte), die daher verschwindet:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

- 9) a) $\det \mathbf{C} = \det (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) = (-20) \cdot (-5) = 100$

- b) $\det \mathbf{C} = \det (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) = 68 \cdot 83 = 5644$

- 10) Durch Entwicklung nach der 1. Zeile erhält man:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -2 & 5 \\ 10 & 20 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 20 & 50 \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 50 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} \vec{e}_z =$$

$$= -200 \vec{e}_x - 0 \vec{e}_y + 40 \vec{e}_z = -200 \vec{e}_x + 40 \vec{e}_z$$

(alle Komponenten in der Einheit Nm)

11) Es ist: $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 15 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind komplanar.}$

- 12) a) Wir addieren der Reihe nach zur 2., 3. und 4. Spalte das -3 -fache, 1 -fache bzw. 6 -fache der 1. Spalte und entwickeln anschließend nach der 1. Zeile (diese enthält 3 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 7 & 23 \\ -2 & 4 & 1 & -9 \\ -2 & 3 & -1 & -8 \end{vmatrix} = -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -8 & 7 & 23 \\ 4 & 1 & -9 \\ 3 & -1 & -8 \end{vmatrix}}_{10} = -10$$

- b) Wir addieren zunächst zur 2. Spalte das -4 -fache und zur 5. Spalte das -1 -fache der 1. Spalte und entwickeln dann nach der 1. Zeile (diese enthält 4 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 & -3 & -5 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 & -5 \\ -8 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Jetzt addieren wir in der verbliebenen 4-reihigen Determinante zur 1. Spalte das -4 -fache der 4. Spalte und entwickeln dann nach der 3. Zeile (diese enthält 3 Nullen):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 \\ 17 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -19 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2(-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 17 & -2 & -3 \\ -19 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{-48} = -96$$

Abschnitt 4

1) $\det \mathbf{A} = 4 + 0 + 0 + 2 - 15 + 0 = -9 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ ist regulär.

$\det \mathbf{B} = 36 - 8 + 0 - 24 - 4 - 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{B}$ ist singular.

$\det \mathbf{C}$ nach der 2. Spalte entwickeln (diese enthält 3 Nullen), die verbliebene 3-reihige Determinante dann nach Sarrus berechnen:

$$\det \mathbf{C} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 6 - 4 - 4 - 9 = 0 \Rightarrow \mathbf{C} \text{ ist singular.}$$

$$2) \quad a) \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \neq 0$$

\mathbf{A} ist also *regulär*. Algebraische Komplemente A_{ik} berechnen und daraus die *inverse* Matrix \mathbf{A}^{-1} bestimmen:

$$A_{11} = \sin \varphi; \quad A_{12} = \cos \varphi; \quad A_{21} = -\cos \varphi; \quad A_{22} = \sin \varphi$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \det \mathbf{A} = 2 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}. \text{ Inverse Matrix: } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & -1 \\ -0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(1)(-1) = 1 \neq 0 \quad (\text{Dreiecksmatrix})$$

Somit ist \mathbf{A} *regulär*. Berechnung der algebraischen Komplemente (Adjunkten) A_{ik} und der *inversen* Matrix \mathbf{A}^{-1} :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad \det \mathbf{A} = 6 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}. \text{ Inverse Matrix: } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & 6 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Somit: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}$ ist *orthogonal*; $\det \mathbf{A} = 1$; $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Somit: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{B}$ ist *orthogonal*; $\det \mathbf{B} = -1$; $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T = \mathbf{B}$

4) Die Matrix \mathbf{A} kann *nicht* orthogonal sein, da ihre Zeilen- und Spaltenvektoren *nicht* normiert sind (Vektorlängen $\neq 1$). \mathbf{B} und \mathbf{C} sind dagegen *orthogonale* Matrizen:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

- 5) $\det \mathbf{A} = 1$; Algebraische Komplemente: $A_{11} = A_{12} = -A_{21} = A_{22} = 1/\sqrt{2}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T$$

- 6) Für beide Matrizen gilt: Die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren sind jeweils *orthonormiert*, die Matrizen daher *orthogonal*: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{E}$.

- 7) Die Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

sind *normiert* und *orthogonal*:

$$|\mathbf{a}_1| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = 1; \quad |\mathbf{a}_2| = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 5^2} = 1;$$

$$|\mathbf{a}_3| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{150}} (-2 + 2 + 0) = 0$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} (-2 + 2 + 0) = 0$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{180}} (1 + 4 - 5) = 0$$

Ebenso zeigt man, dass die *Zeilenvektoren* ein orthonormiertes System bilden.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \quad \det \mathbf{A} = -1$$

- 8) $\text{Rg}(\mathbf{A}) = 2$. *Begründung*: Wegen $\det \mathbf{A} = 0$ ist \mathbf{A} *singulär* und somit $\text{Rg}(\mathbf{A}) < 3$. Es gibt aber eine von null verschiedene *2-reihige* Unterdeterminante, z. B. (gestrichen: 1. Zeile und 1. Spalte)

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{A}) = 2$$

$\text{Rg}(\mathbf{B}) = 3$. *Begründung*: \mathbf{B} ist vom Typ (3,4), daher kann $\text{Rg}(\mathbf{A})$ *höchstens gleich 3* sein. Streicht man in \mathbf{B} die 4. Spalte, so erhält man eine von null verschiedene *3-reihige* Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 14 + 2 - 7 - 8 + 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{B}) = 3$$

$\text{Rg}(\mathbf{C}) = 2$. *Begründung:* \mathbf{C} ist vom Typ (4,3). Daher gilt $\text{Rg}(\mathbf{C}) \leq 3$. Es verschwinden *alle* 3-reihigen Unterdeterminanten, eine von null verschiedene 2-reihige Unterdeterminante ist jedoch vorhanden (wir streichen die 3. und 4. Zeile und die 3. Spalte):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{C}) = 2$$

$\text{Rg}(\mathbf{D}) = 2$. *Begründung:* \mathbf{D} ist vom Typ (2,3), daher gilt $\text{Rg}(\mathbf{D}) \leq 2$. Es gibt aber eine von null verschiedene 2-reihige Unterdeterminante (wir streichen die 3. Spalte):

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{D}) = 2$$

9) Die Matrix wird mit Hilfe der angegebenen Umformungen auf *Trapezform* gebracht.

- a) ① Zeile 1 mit Zeile 3 vertauschen.
 ② Zur 2. Zeile das -3 -fache und zur 3. Zeile das -2 -fache der 1. Zeile addieren.
 ③ Zur 3. Zeile das $-2,5$ -fache der 2. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{A}) = 3 \quad (\text{keine Nullzeile})$$

- b) ① Zur 2. Zeile das -2 -fache und zur 3. Zeile das -3 -fache der 1. Zeile addieren.
 ② Zeile 2 durch 3 und Zeile 4 durch 5 dividieren.
 ③ Zur 3. Zeile das -2 -fache und zur 4. Zeile das -1 -fache der 2. Zeile addieren.
 ④ Spalte 3 mit Spalte 4 vertauschen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{B}) = 3 \quad (1 \text{ Nullzeile})$$

- c) ① Zur 3. Zeile das 2-fache der 1. Zeile addieren.
 ② Zur 3. Zeile das -3 -fache der 2. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{C}) = 3 \quad (\text{keine Nullzeile})$$

- d) ① Der Reihe nach zur 2., 3. und 4. Zeile das 2-fache, 5-fache bzw. 1-fache der 1. Zeile addieren.
 ② Von der 3. Zeile das 3-fache und von der 4. Zeile das 1-fache der 2. Zeile subtrahieren.
 ③ Zeile 3 durch -3 dividieren und dann zur 4. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{D}) = 3 \quad (1 \text{ Nullzeile})$$

- 10) ① 1. und 4. Zeile miteinander vertauschen.
 ② Der Reihe nach zur 2., 3., 4. und 5. Zeile das 5-fache, 3-fache, 2-fache bzw. 3-fache der 1. Zeile addieren.
 ③ Von der 5. Zeile zunächst die 3. Zeile und anschließend von der 3. Zeile die 2. Zeile subtrahieren.
 ④ Die 5. Zeile durch 3 dividieren und anschließend mit der 2. Zeile vertauschen.
 ⑤ Zur 4. Zeile das 7-fache und zur 5. Zeile das 16-fache der 2. Zeile addieren.
 ⑥ Zur 4. Zeile das 1-fache und zur 5. Zeile das 3-fache der 3. Zeile addieren.
 ⑦ Von der 5. Zeile die 4. Zeile subtrahieren.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(\mathbf{A}) = 5 \quad (\text{keine Nullzeile})$$

\mathbf{A} ist somit eine *reguläre* Matrix.

Abschnitt 5

- 1) Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} | \mathbf{c})$ wird mit Hilfe der angegebenen Zeilenumformungen in die *Trapezform* gebracht. Das lineare Gleichungssystem liegt dann in der *gestaffelten* Form vor und wird schrittweise von unten nach oben gelöst (Nullzeilen grau unterlegt).
- a) ① Reihenfolge der Zeilen wie folgt vertauschen: $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
 ② Zur 2. Zeile das -2 -fache und zur 3. Zeile das 5 -fache der 1. Zeile addieren.
 ③ Die 2. Zeile durch 7 und die 3. Zeile durch 24 dividieren.
 ④ Zur 3. Zeile die 2. Zeile addieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 16 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 - 5x_2 = 16 \\ x_2 = -3 \end{array} \right\} \text{Lösung: } \begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = -3 \end{array}$$

- b) ① Zur 2. Zeile das 3 -fache und zur 3. Zeile das -8 -fache der 1. Zeile addieren.
 ② Zur 3. Zeile das 2 -fache der 2. Zeile addieren.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 8 \\ -6x_3 + 4x_4 = 8 \end{array}$$

Unendlich viele Lösungen ($x_4 = \lambda$ wurde als Parameter gewählt):

$$x_1 = \frac{7}{15} - \frac{1}{3}\lambda; \quad x_2 = \frac{16}{5} - \lambda; \quad x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda; \quad x_4 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

- c) ① Die mit -1 multiplizierte 2. Zeile mit der 1. Zeile vertauschen.
 ② Zur 3. Zeile das 2 -fache und zur 4. Zeile das 3 -fache der 1. Zeile addieren.
 ③ Von der 3. Zeile das 2 -fache und von der 4. Zeile das 4 -fache der 2. Zeile subtrahieren.

- ④ Von der 2. Zeile das 3-fache und von der 4. Zeile das 1-fache der 3. Zeile subtrahieren.
 ⑤ Zeile 2 mit Zeile 3 vertauschen.
 ⑥ Zur 3. Zeile das 4-fache der 4. Zeile addieren.
 ⑦ Zur 4. Zeile das 10-fache der 3. Zeile addieren, dann die 4. Zeile durch -91 dividieren.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 12 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & + & x_4 = 5 \\ & x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 12 \\ & -x_3 - 9x_4 = 8 \\ & & x_4 = -1 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

- 2) Durch die folgenden *Zeilenumformungen* lässt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} | \mathbf{c})$ in die *Trapezform* bringen:

- ① Der Reihe nach zur 2., 3. und 4. Zeile das 2-fache, -5 -fache bzw. -2 -fache der 1. Zeile addieren.
 ② Zur 3. Zeile das 3-fache und zur 4. Zeile das -2 -fache der 2. Zeile addieren.
 ③ Von der 4. Zeile die durch 4 dividierte 3. Zeile subtrahieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 3 \quad (1 \text{ Nullzeile}) \\ \text{Rg}(\mathbf{A} | \mathbf{c}) = 4 \quad (\text{keine Nullzeile}) \\ \text{Somit } \text{Rg}(\mathbf{A} | \mathbf{c}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A}). \text{ Das System ist } \textit{nicht} \text{ lösbar.} \end{array} \right.$$

- 3) Die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} bringen wir durch folgende *Zeilenumformungen* in die *Trapezform*:

- ① Der Reihe nach zur 2., 3. und 4. Zeile das 2-fache, -1 -fache bzw. -3 -fache der 1. Zeile addieren.
 ② Zur 2. und 4. Zeile jeweils das 3-fache der 3. Zeile addieren.
 ③ Zur 4. Zeile das 8-fache der 2. Zeile addieren, dann die Zeilen 2 und 3 miteinander vertauschen.

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 3 \quad (1 \text{ Nullzeile}) \\ r = n = 3; \quad \text{Das homogene System ist } \textit{nur trivial} \text{ lösbar.} \end{array} \right.$$

- 4) Das homogene Gleichungssystem ist *nichttrivial* lösbar, wenn $r < n = 3$ ist. Die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} bringen wir mit Hilfe der folgenden *Zeilenumformungen* in die *Trapezform*:

- ① Von der 3. und 4. Zeile jeweils das 3-fache der 1. Zeile subtrahieren.
 ② Von der 3. Zeile das 1-fache und von der 4. Zeile das 2-fache der 2. Zeile subtrahieren.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 2 \quad (2 \text{ Nullzeilen}) \\ r = 2; \quad n = 3 \quad \text{d. h. } r < n \\ \text{Das homogene System ist somit } \textit{nichttrivial} \text{ lösbar.} \end{array} \right.$$

Das *gestaffelte* Gleichungssystem lautet (mit den vom Parameter λ abhängigen Lösungen):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = -3\lambda; \quad x_2 = \lambda; \quad x_3 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

- 5) Die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} wird durch die folgenden Zeilenumformungen in die *Trapezform* gebracht:

- ① Zeile 1 mit Zeile 2 vertauschen.
- ② Zur 2. Zeile das 2-fache und zur 3. Zeile das -1 -fache der 1. Zeile addieren.
- ③ Zur 3. Zeile die 2. Zeile addieren, dann die 2. Zeile durch -3 dividieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 2 \quad (1 \text{ Nullzeile}) \\ r = 2, \quad n = 3 \quad \text{d. h.} \quad r < n \\ \text{Das homogene System ist daher } \textit{nichttrivial} \text{ lösbar.} \end{cases}$$

Das *gestaffelte* System lautet (mit den vom Parameter λ abhängigen Lösungen):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \lambda; \quad x_2 = \lambda; \quad x_3 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

- 6) Die Koeffizientendeterminante $\det \mathbf{A}$ muss jeweils *verschwinden*:

a) $\det \mathbf{A} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1$

- b) Die Koeffizientendeterminante wird zweimal nacheinander nach der jeweils *1. Zeile* entwickelt:

$$\det \mathbf{A} = (2 + \lambda)(2 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 + \lambda)(2 - \lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 2$$

- 7) Wir bringen zunächst die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} durch die angeführten *Umformungen* in die *Trapezform*.

- a) ① Von der 2. Zeile die 1. Zeile subtrahieren.
- ② Zur 3. Zeile das 2-fache der 2. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 3 \\ r = n = 3 \\ \text{Das homogene System ist nur } \textit{trivial} \text{ lösbar.} \end{cases}$$

- b) ① Zeile 1 mit Zeile 2 vertauschen.
- ② Zur 2. Zeile das 2-fache und zur 4. Zeile das -4 -fache der 1. Zeile addieren.
- ③ Zur 2. Zeile die 4. Zeile addieren, dann durch -2 dividieren.
- ④ Zur 3. Zeile das -2 -fache und zur 4. Zeile das 7 -fache der 2. Zeile addieren.
- ⑤ Zur 4. Zeile das 2-fache der 3. Zeile addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rg}(\mathbf{A}) = 4 \\ r = n = 4 \\ \text{Das homogene System ist nur } \textit{trivial} \text{ lösbar.} \end{cases}$$

Lösung: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (triviale Lösung)

- 8) Wir führen in der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ die folgenden Umformungen durch:

- ① Zur 2. Zeile das 2-fache und zur 3. Zeile das 1-fache der 1. Zeile addieren.
- ② Von der 3. Zeile die 2. Zeile subtrahieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right) \Rightarrow \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2 \quad (1 \text{ Nullzeile}); \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3$$

Das Gleichungssystem ist wegen $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) \neq \operatorname{Rg}(\mathbf{A})$ unlösbar.

9) Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird jeweils auf *Trapezform* gebracht.

- a) ① Von der 3. Zeile das 2-fache der 1. Zeile subtrahieren.
 ② Von der 3. Zeile zunächst das 5-fache der 2. Zeile subtrahieren, dann die 3. Zeile durch 22 dividieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 8 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3 \Rightarrow$ Das System besitzt *genau eine* Lösung: $x_1 = -11$; $x_2 = 8$; $x_3 = 0$.

- b) ① Zeile 1 mit Zeile 2 vertauschen.
 ② Zur 2. Zeile das 2-fache und zur 3. Zeile das 4-fache der 1. Zeile addieren.
 ③ Reihenfolge der Zeilen wie folgt vertauschen: $4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ (Zeile 1 bleibt)
 ④ Von der 3. Zeile das 21-fache und von der 4. Zeile das 34-fache der 2. Zeile subtrahieren.
 ⑤ Von der 4. Zeile das 3-fache der 3. Zeile subtrahieren, dann die 3. Zeile durch -2 und die 4. Zeile durch -98 dividieren.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -38 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} -x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -13 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_3 - 38x_4 = 3 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 4 \Rightarrow$ Das System besitzt *genau eine* Lösung: $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$

- c) ① Von der 2. und 3. Zeile jeweils die 1. Zeile subtrahieren und von der 4. Zeile das 4-fache der 1. Zeile subtrahieren.
 ② Die 2. Zeile zunächst durch 2 dividieren, dann diese Zeile von der 3. und 4. Zeile subtrahieren.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 5 \end{array}$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 2$ (je 2 Nullzeilen) \Rightarrow Das System ist *lösbar*, die Lösungsmenge enthält $n - r = 4 - 2 = 2$ Parameter (wir wählen x_3 und x_4 als Parameter und setzen $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$):

$$x_1 = -2\lambda + 5\mu; \quad x_2 = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{2}\mu; \quad x_3 = \lambda; \quad x_4 = \mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

- d) ① Der Reihe nach zur 3., 4. und 5. Zeile das 4-fache, -2 -fache bzw. -5 -fache der 1. Zeile addieren.
 ② Der Reihe nach zur 3., 4. und 5. Zeile das -4 -fache, 1-fache bzw. 2-fache der 2. Zeile addieren.
 ③ Zur 3. Zeile das 2-fache der 4. Zeile addieren, dann die 4. Zeile mit 12 und die 5. Zeile mit 7 multiplizieren.
 ④ Von der 5. Zeile die 4. Zeile subtrahieren.
 ⑤ Die 4. Zeile durch 12 dividieren, zur 5. Zeile das 13-fache der 3. Zeile addieren, dann die 5. Zeile durch -32 dividieren.
 ⑥ Zeile 3 mit Zeile 4 vertauschen.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 6 & 42 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 4 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & -121 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 43 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & - & x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 & = & 42 \\ 7x_3 + 4x_4 + 4x_5 & = & 32 \\ x_4 - 23x_5 & = & -121 \\ 8x_5 & = & 43 \end{array}$$

$\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A} | \mathbf{c}) = 5 \Rightarrow$ Das System besitzt *genau eine* Lösung: $x_1 = -0,875$;
 $x_2 = 4,5$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2,625$; $x_5 = 5,375$

- 10) Das quadratische System ist genau dann *eindeutig* lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante einen *von null verschiedenen* Wert hat. Dies ist jeweils der Fall.

$$\text{a) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 18 & 7 & 4 \\ 30 & 13 & 4 \end{vmatrix} = 24;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 18 & 4 \\ 3 & 30 & 4 \end{vmatrix} = -24; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 18 \\ 3 & 13 & 30 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Lösung: } x_1 = \frac{D_1}{D} = -3; \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 3; \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 0$$

$$\text{b) } D = 98; \quad D_1 = -36; \quad D_2 = 10; \quad D_3 = -4$$

$$\text{Lösung: } x_1 = -18/49; \quad x_2 = 5/49; \quad x_3 = -2/49$$

$$\text{c) } D = 62; \quad D_1 = 29; \quad D_2 = 14; \quad \text{Lösung: } x_1 = 29/62; \quad x_2 = 7/31$$

$$\text{d) } D = 628; \quad D_1 = 0; \quad D_2 = 4396; \quad D_3 = 1884$$

$$\text{Lösung: } x_1 = 0; \quad x_2 = 7; \quad x_3 = 3$$

$$11) \quad I_1 + \quad I_2 + \quad I_3 - \quad I = 0 \quad (\text{Knotenpunktregel})$$

$$\left. \begin{array}{r} 100I_1 \qquad \qquad \qquad + 60I = 10 \\ \qquad 200I_2 \qquad \qquad \qquad + 60I = 10 \\ \qquad \qquad 100I_3 + 60I = 10 \end{array} \right\} (\text{Maschenregel})$$

Das lineare Gleichungssystem reduziert sich unter Berücksichtigung der Symmetrie ($R_1 = R_3$ und damit $I_1 = I_3$) auf 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$\begin{array}{rcl} 2I_1 + I_2 - I & = & 0 \\ 10I_1 + 6I & = & 1 \\ 20I_2 + 6I & = & 1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 6 \\ 0 & 20 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel:

$$D = -500; \quad D_1 = -20; \quad D_2 = -10; \quad D_3 = -50$$

Lösung: $I_1 = D_1/D = 0,04 \text{ A}; \quad I_2 = D_2/D = 0,02 \text{ A}; \quad I_3 = I_1 = 0,04 \text{ A};$

$$I = D_3/D = 0,1 \text{ A}$$

- 12) Die Matrix $(\mathbf{A} | \mathbf{E})$ wird durch die folgenden Zeilenumformungen auf die gewünschte Form $(\mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1})$ gebracht:

- ① Von der 1. Zeile das 3-fache der 2. Zeile subtrahieren, dann beide Zeilen miteinander vertauschen.
- ② Zur 1. Zeile das -2 -fache und zur 2. Zeile das 6 -fache der 3. Zeile addieren.
- ③ Von der 3. Zeile die 2. Zeile subtrahieren, dann durch 6 dividieren.
- ④ Zur 1. Zeile das -4 -fache und zur 2. Zeile das 8 -fache der 3. Zeile addieren.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4/6 & -6/6 & 8/6 \\ -2/6 & 6/6 & -4/6 \\ -1/6 & 3/6 & -5/6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}}$$

Zeilenumformungen in der Matrix $(\mathbf{B} | \mathbf{E})$:

- ① Zur 1. Zeile zunächst die 2. Zeile und dann das -5 -fache der 3. Zeile addieren.
- ② Zeile 1 durch -9 dividieren, Zeile 2 mit Zeile 3 vertauschen.
- ③ Von der 2. Zeile das 3 -fache und von der 3. Zeile das 2 -fache der 1. Zeile subtrahieren.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1/9 & -1/9 & 5/9 \\ 3/9 & 3/9 & -6/9 \\ 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}}$$

Zeilenumformungen in der Matrix $(\mathbf{C} | \mathbf{E})$:

- ① Reihenfolge der Zeilen wie folgt vertauschen: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- ② Von der 3. Zeile das 3 -fache der 1. Zeile subtrahieren.
- ③ Zur 1. Zeile das -5 -fache und zur 3. Zeile das 11 -fache der 2. Zeile addieren.
- ④ Die 3. Zeile durch -7 dividieren, dann das 3 -fache dieser Zeile von der 1. Zeile subtrahieren.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 7/7 \\ -1/7 & 3/7 & -11/7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}^{-1}}$$

- 13) a) Das Vektorsystem enthält den *Nullvektor* ($\mathbf{c} = \mathbf{0}$).
 b) \mathbf{a} und \mathbf{c} sind *kollinear* (*antiparallel*): $\mathbf{c} = -3\mathbf{a}$.
 c) \mathbf{a}_3 ist als *Linearkombination* von \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 darstellbar: $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$
 d) Die Anzahl der Vektoren ($n = 4$) ist *größer* als die Dimension des Raumes ($m = 2$), aus dem sie stammen (im \mathbb{R}^2 gibt es *maximal zwei* linear unabhängige Vektoren).

$$14) \quad a) \quad \det \mathbf{A} = \det (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 3$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = n = 3 \Rightarrow$ Vektoren sind *linear unabhängig*

$$b) \quad \det \mathbf{A} = \det (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 3$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = n = 3 \Rightarrow$ Vektoren sind *linear unabhängig*

$$c) \quad \text{Die Matrix } \mathbf{A} = (\mathbf{a} \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ besitzt eine von null verschiedene } 2\text{-reihige Unter-} \\ \text{determinante, z. B.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad (3. \text{ Zeile in } \mathbf{A} \text{ gestrichen)}$$

Somit ist $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2$ und wegen $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = n = 2$ sind die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} *linear unabhängig*.

- 15) Die Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$ wird mit Hilfe der folgenden elementaren Zeilenumformungen auf *Trapezform* gebracht:
 ① Von der 2. Zeile das 2-fache und von der 4. Zeile das 1-fache der 1. Zeile subtrahieren.
 ② Von der 3. Zeile die 2. Zeile subtrahieren.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2 \quad (2 \text{ Nullzeilen}) \\ \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < n = 3 \\ \text{Die Vektoren sind } \textit{linear abhängig}. \end{array} \right\}$$

Vektor \mathbf{c} als *Linearkombination* von \mathbf{a} und \mathbf{b} : $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} + \mathbf{b}$

$$16) \quad \det \mathbf{A} = \det (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0 \quad (2 \text{ gleiche Zeilen}) \Rightarrow \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < 3$$

Somit: $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < n = 3 \Rightarrow$ Die Vektoren sind *linear abhängig* und damit *komplanar*.

$$17) \det \mathbf{A} = \det (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda + 8$$

$$\text{Bedingung: } r < n = 3 \Rightarrow \det \mathbf{A} = -\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2; \lambda_2 = 4$$

$$18) \text{ a) } \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Die Vektoren sind linear unabhängig.}$$

$$\text{b) } \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Die Vektoren sind linear abhängig.}$$

Abschnitt 6

$$1) \text{ a) } \begin{pmatrix} 5 & 6 + j & 6 - j \\ 3 + j & 10 - 2j & 3 + j \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 13 - 5j & 14 - 11j & 26 - 8j \\ 14 + 8j & 27 + 15j & 7 + 8j \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & 2 \begin{pmatrix} 3 + j & 2 \\ 2 - j & 1 + j \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 + 2j & 4 - 3j \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 - j & 1 + j \\ 2 & 5 \\ 3 - j & 1 + j \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 6 + 2j - 3 + 3 - 3j & 4 - 0 + 3 + 3j \\ 4 - 2j - 6 - 6j + 6 & 2 + 2j - 12 + 9j + 15 \\ 4 - 3 + 9 - 3j & 2 - 3 + 3 + 3j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - j & 7 + 3j \\ 4 - 8j & 5 + 11j \\ 10 - 3j & 2 + 3j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$2) \text{ a) } \begin{array}{cc} & \mathbf{A} \\ & \begin{array}{cc} 2 + j & 1 + j \\ 2 & 1 - j \end{array} \\ \mathbf{A} \cdot & \begin{array}{cc} 2 + j & 1 + j \\ 2 & 1 - j \end{array} \\ & \begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{array} \end{array} \quad \begin{aligned} c_{11} &= (2 + j)^2 + (1 + j)2 = 5 + 6j \\ c_{12} &= (2 + j)(1 + j) + (1 + j)(1 - j) = \\ &= 3 + 3j \\ c_{21} &= 2(2 + j) + (1 - j)2 = 6 \\ c_{22} &= 2(1 + j) + (1 - j)^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 + 6j & 3 + 3j \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 + 9j & 8 \\ 5 + 9j & 9 - 5j \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 - 2j & -2 - 4j \\ -3 + 14j & -2 + 6j \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 11 + 15j & 15 + 9j \\ -20 + 5j & 12 + 19j \end{pmatrix}$$

b) Die Matrizenprodukte („Potenzen“) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^2$ existieren *nicht*.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 + 3j \\ 6 - 3j & 3 + 8j \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 + 2j & 6 + 11j & -1 + j \\ 2 - j & 2 + 5j & -j \\ 5 - 2j & 7 - 8j & 4 + j \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \det \mathbf{A} = 6 - (1 + j)(1 - j) = 4; \quad \det \mathbf{B} = -6 - (1 - j)(-1 - j) = -4;$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} j & -1 & -j \\ 1 & 2j & 3 \\ j & -3 & 3j \end{pmatrix}}_{\det \mathbf{C}} \begin{pmatrix} j & -1 \\ 1 & 2j \\ j & -3 \end{pmatrix} \quad \det \mathbf{C} = -6j - 3j + 3j - 2j + 9j + 3j = 4j$$

$$4) \quad a) \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2 - j & 1 - 2j & -j \\ 0 & 2 + 2j & 1 \\ 1 + j & 5 - 3j & -j \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} 2 - j & 0 & 1 + j \\ 1 - 2j & 2 + 2j & 5 - 3j \\ -j & 1 & -j \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 10 - 5j & 1 + 2j \\ 3 + 2j & 4 - 2j \\ 5 - 5j & 1 + 2j \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} 10 - 5j & 3 + 2j & 5 - 5j \\ 1 + 2j & 4 - 2j & 1 + 2j \end{pmatrix}$$

$$5) \quad \bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ -j & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}: \textit{hermitesch}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 - j & 1 - 2j \\ 2 + j & 1 & 5 - 4j \\ 1 + 2j & 5 + 4j & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}: \textit{hermitesch}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = (\mathbf{C}^*)^T = \begin{pmatrix} 2j & 1 + j \\ -1 + j & 3j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2j & -1 - j \\ 1 - j & -3j \end{pmatrix} = -\mathbf{C}$$

$$\text{Somit: } \mathbf{C} = -\bar{\mathbf{C}} \Rightarrow \mathbf{C}: \textit{schiefhermitesch}$$

$$\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}^*)^T = \begin{pmatrix} -2j & 2 & 5 - 5j \\ -2 & -j & 8 - j \\ -5 - 5j & -8 - j & -2j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2j & -2 & -5 + 5j \\ 2 & j & -8 + j \\ 5 + 5j & 8 + j & 2j \end{pmatrix} = -\mathbf{D}$$

$$\text{Somit: } \mathbf{D} = -\bar{\mathbf{D}} \Rightarrow \mathbf{D}: \textit{schiefhermitesch}$$

$$6) \quad \mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}}_{\textit{schief-symmetrisch}} + j \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}}_{\textit{symmetrisch}} \Rightarrow \mathbf{A}: \textit{schiefhermitesch}; \quad \det \mathbf{A} = 25$$

$$\mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\textit{symmetrisch}} + j \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\textit{schief-symmetrisch}} \Rightarrow \mathbf{B}: \textit{hermitesch}; \quad \det \mathbf{B} = -18$$

$$\mathbf{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{schief-symmetrisch}} + j \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}} \Rightarrow \mathbf{C}: \text{schiefhermitesch}; \det \mathbf{C} = -33j$$

$$\mathbf{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}} + j \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{schief-symmetrisch}} \Rightarrow \mathbf{D}: \text{hermitesch}; \det \mathbf{D} = -7$$

$$7) \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} j & j \\ j & -j \end{vmatrix} = -j^2 - j^2 = 2$$

Wäre \mathbf{A} *unitär*, so müsste $\det \mathbf{A} = +1$ oder -1 sein. \mathbf{A} ist also *nicht* unitär.

$$8) \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 - \sqrt{3}j & -1 - \sqrt{3}j \\ -2j & \sqrt{3} - j & \sqrt{3} + j \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2j & -2 \\ 1 + \sqrt{3}j & \sqrt{3} + j & 2 \\ -1 + \sqrt{3}j & \sqrt{3} - j & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \Rightarrow$$

Somit: \mathbf{A} ist *unitär*.

$$c_{11} = 4 + (1 - \sqrt{3}j)(1 + \sqrt{3}j) + (-1 - \sqrt{3}j)(-1 + \sqrt{3}j) =$$

$$= 4 + 1 + 3 + 1 + 3 = 12$$

$$c_{12} = 4j + (1 - \sqrt{3}j)(\sqrt{3} + j) + (-1 - \sqrt{3}j)(\sqrt{3} - j) =$$

$$= 4j + \sqrt{3} + j - 3j + \sqrt{3} - \sqrt{3} + j - 3j - \sqrt{3} = 0$$

$$c_{13} = -4 + 2(1 - \sqrt{3}j) - 2(-1 - \sqrt{3}j) = -4 + 2 - 2\sqrt{3}j + 2 + 2\sqrt{3}j = 0$$

$$c_{21} = 0; \quad c_{22} = 12; \quad c_{23} = 0; \quad c_{31} = 0; \quad c_{32} = 0; \quad c_{33} = 12$$

$$\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+j & 1 \\ j & -1-j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-j & -j \\ 1 & -1+j \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Somit: \mathbf{B} ist *unitär*.

$$\mathbf{C} = j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = j\mathbf{E}; \quad \mathbf{C}^* = -j\mathbf{E}; \quad \bar{\mathbf{C}} = (\mathbf{C}^*)^T = -j\mathbf{E}^* = -j\mathbf{E}$$

$$\mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{C}} = j\mathbf{E} \cdot (-j\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \Rightarrow \text{Somit: } \mathbf{C} \text{ ist } \textit{unitär}.$$

Abschnitt 7

Hinweis: α , β und γ sind reelle Parameter.

$$1) \quad a) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \quad (\mathbf{A} - 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = 0; x_1 = \alpha \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 2} \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 = -\beta \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierte Eigenvektoren: } \bar{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$$

$$\text{Normierte Eigenvektoren: } \bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 6$$

$$\text{Normierte Eigenvektoren: } \bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 3$$

$$\text{Normierte Eigenvektoren: } \bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -j \\ j & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$$

$$\text{Normierte (komplexe) Eigenvektoren: } \bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm j$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + j} \quad (\mathbf{C} - (1 + j)\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -jx_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - jx_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = -jx_1 = -ja \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ -ja \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1 - j} \quad (\mathbf{C} - (1 - j)\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} j & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} jx_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + jx_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = jx_1 = j\beta \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ j\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

Normierte (komplexe) Eigenvektoren: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$; $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$

3) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2; \lambda_2 = 3$

$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$; $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 = -6$

b) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 2$

$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$; $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 = -2$

c) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$

$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$; $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 = -1$

4) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 3$

$$\boxed{\lambda_1 = -1} \quad (\mathbf{A} + 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = -\alpha \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1} \quad (\mathbf{A} - 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \beta \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 3} \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2\gamma \\ x_2 = -3\gamma \text{ oder } x_3 = \gamma \\ x_3 = \gamma \end{array} \quad \text{oder } \mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -3; \quad \lambda_3 = 5$$

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -3} \quad (\mathbf{B} + 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 proportionale Zeilen (Gleichungen), somit 2 unabhängige Parameter (wir setzen $x_2 = \alpha$ und $x_3 = \beta$):

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 + 3x_3 = -2\alpha + 3\beta; \quad x_2 = \alpha; \quad x_3 = \beta$$

$$\text{Eigenvektoren } (\beta = 0 \text{ bzw. } \alpha = 0 \text{ setzen}): \quad \mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 5} \quad (\mathbf{B} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\gamma \\ x_2 = -2\gamma \text{ oder } x_3 = \gamma \\ x_3 = \gamma \end{array} \quad \text{oder } \mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 0 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = 1$$

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -4 & -2 \\ 1 & 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 2; \lambda_3 = 4$$

$$\text{Eigenvektoren: } \bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$5) \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b & a \\ b & a - \lambda & a \\ a & a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - (2a + b)\lambda^2 - (a - b)^2\lambda + 2a^3 - 3a^2b + b^3 = 0$$

Mit Hilfe des *Horner-Schemas* zeigt man, dass $\lambda_1 = 2a + b$ eine Lösung dieser charakteristischen Gleichung ist. Aus dem 1. reduzierten Polynom erhält man dann die restlichen Eigenwerte $\lambda_2 = a - b$ und $\lambda_3 = -a + b$.

	1	$-(2a + b)$	$-(a - b)^2$	$(2a^3 - 3a^2b + b^3)$
$\lambda_1 = 2a + b$		$+(2a + b)$	0	$-(a - b)^2(2a + b)$
	1	0	$-(a - b)^2$	0

$$\text{NR.: } -(a - b)^2(2a + b) = -(a^2 - 2ab + b^2)(2a + b) = \\ = -(2a^3 + a^2b - 4a^2b - 2ab^2 + 2ab^2 + b^3) = -(2a^3 - 3a^2b + b^3)$$

$$\text{1. reduziertes Polynom: } \lambda^2 - (a - b)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{2/3} = \pm(a - b)$$

$$6) a) \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_{2/3} = \pm j$$

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1; \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

$$b) \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 - \lambda & 1 \\ -10 & 1 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 - \lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1; \lambda_3 = 10$$

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 10; \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -10$$

$$c) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1; \lambda_3 = 7$$

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 7$$

$$7) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 6 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = 9$$

$$\boxed{\lambda_1 = 3} \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2\alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 6} \quad (\mathbf{A} - 6\mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2\beta \\ x_2 = \beta \\ x_3 = 2\beta \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 9} \quad (\mathbf{A} - 9\mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2\gamma \\ x_2 = 2\gamma \\ x_3 = \gamma \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{A} ist symmetrisch, die Eigenwerte paarweise verschieden. Daher sind die Eigenvektoren *orthogonal* und die aus ihnen gebildete 3-reihige Matrix $\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{x}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2 \tilde{\mathbf{x}}_3)$ eine *orthogonale* Matrix.

$$8) \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & -4 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2 - \lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 (\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1/2} = 2; \quad \lambda_{3/4} = \pm j$$

Die Determinanten wurden nacheinander nach der jeweils 1. Spalte entwickelt (diese enthält 3 bzw. 2 Nullen).

$$9) \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -1 \\ 7 & 3 - \lambda & -1 \\ -4 & -4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 30\lambda - 72 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4; \quad \lambda_2 = -3; \quad \lambda_3 = 6$$

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die aus den Eigenvektoren gebildete Determinante ist von null verschieden (die Normierungskonstanten dürfen weggelassen werden):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_3 \text{ sind linear unabhängig}$$

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 72$$

10) In allen 3 Fällen gilt: *Eigenwerte = Hauptdiagonalelemente.*

$$\mathbf{A}: \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 5; \quad \lambda_3 = 8 \quad (\text{untere Dreiecksmatrix})$$

$$\mathbf{B}: \lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = 5; \quad \lambda_3 = 0; \quad \lambda_4 = 1 \quad (\text{Diagonalmatrix})$$

$$\mathbf{C}: \lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = 5 \quad (\text{obere Dreiecksmatrix})$$

11) Die Systemmatrix ist eine (untere) *Dreiecksmatrix*. Die Eigenwerte lauten daher (sie sind identisch mit den Hauptdiagonalelementen): $\lambda_1 = -k_1; \lambda_2 = -k_2; \lambda_3 = 0$.

$$12) \text{ a) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$$

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -4 \\ -4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -4; \quad \lambda_2 = 6$$

$$\boxed{\lambda_1 = -4} \quad (\mathbf{A} + 4\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 6} \quad (\mathbf{A} - 6\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -8x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \beta \\ x_2 = -2\beta \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$13) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm 3j$$

$$14) \quad \text{a) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1/2} = -1; \quad \lambda_3 = 2$$

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_{2/3} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2} \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \quad (\mathbf{A} - (2 + \sqrt{2})\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -\sqrt{2}x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \beta \\ x_2 = \sqrt{2}\beta \\ x_3 = \beta \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 - \sqrt{2} \quad (\mathbf{A} - (2 - \sqrt{2})\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2}x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \gamma \\ x_2 = -\sqrt{2}\gamma \\ x_3 = \gamma \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrix \mathbf{A} ist symmetrisch und hat paarweise verschiedene Eigenwerte; die Eigenvektoren sind *orthogonal*.

$$\text{Eigenvektoren: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$15) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1; \quad \lambda_3 = 4$$

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 3; \quad \lambda_3 = 6$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & b - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(a - \lambda)[\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - 2] = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = a; \quad \lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \left(a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 8} \right)$$

$$\begin{aligned}
16) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 4 - \lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 & 4 - \lambda \\ 0 & 4 - \lambda & 4 - \lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\
&= -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 - \lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 & 4 - \lambda \\ 4 - \lambda & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\
&= -(4 - \lambda)^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 - \lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 & 4 - \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(4 - \lambda)} = \\
&= -\lambda(4 - \lambda)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3/4} = 4
\end{aligned}$$

Der Reihe nach durchgeführte Zeilenumformungen in der Determinante:

- ① Zur 1. Zeile das $(3 - \lambda)$ -fache der 3. Zeile und zur 2. und 4. Zeile jeweils die 3. Zeile addieren.
- ② Die neue 4-reihige Determinante nach der 1. Spalte entwickeln (diese enthält 3 Nullen).
- ③ Aus der 2. und 3. Zeile der jetzt 3-reihigen Determinante den jeweils gemeinsamen Faktor $4 - \lambda$ vor die Determinante ziehen und die verbliebene 3-reihige Determinante nach Sarrus berechnen.

$$17) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2j \\ -2j & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 5$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0} \quad (\mathbf{A} - 0\mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2j \\ -2j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 2jx_2 = 0 \\ -2jx_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2j\alpha \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2j \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 5} \quad (\mathbf{A} - 5\mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2j \\ -2j & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 + 2jx_2 = 0 \\ -2jx_1 - 4x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2j\beta \\ x_2 = \beta \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 2j \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren: } \bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2j \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2j \\ 1 \end{pmatrix}$$

II Fourier-Reihen

Hinweis: Die Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte).

Abschnitt 1

$$1) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2) dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2) \cdot \cos(nx) dx = 2 \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx) dx - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos(nx) dx = \\ &= 2 \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x \cdot \cos(nx)}{n^2} + \frac{(n^2 x^2 - 2) \cdot \sin(nx)}{n^3} \right]_0^{2\pi} = \\ &= 2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi}{n^2} \right) = -\frac{4}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

(Integrale: 232 und 233, jeweils mit $a = n$)

$b_n = 0$ ($f(x)$ ist eine *gerade* Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$f(x) = \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos x + \frac{1}{2^2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3x) + \dots \right)$$

$$2) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 0$$

(Integral: 232 mit $a = n$ und $n \in \mathbb{N}^*$)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cdot \cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\pi}{n} \right) = -\frac{2}{n}$$

(Integral: 208 mit $a = n$ und $n \in \mathbb{N}^*$)

$$f(x) = \pi - 2 \left(\frac{1}{1} \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \dots \right)$$

3) $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$; *gerade* Funktion (Integration von 0 bis π , daher Faktor 2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

(Integral: 232 mit $a = n$; $\cos(n\pi) = (-1)^n$)

$b_n = 0$ ($f(x)$ ist eine gerade Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos x + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos(5x) + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad c_n &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{-jn x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jn)x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-jn)x}}{1-jn} \right]_{-\pi}^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(1-jn)\pi} - e^{-(1-jn)\pi}}{1-jn} = \frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{\frac{1+jn}{(1-jn)(1+jn)}}_{\text{3. Binom}} [e^{\pi} \cdot e^{-jn\pi} - e^{-\pi} \cdot e^{jn\pi}] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1+jn}{1+n^2} [e^{\pi} \cdot (-1)^n - e^{-\pi} \cdot (-1)^n] = (-1)^n \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1+jn}{1+n^2}
 \end{aligned}$$

(Integral: 312 mit $a = 1 - jn$; der Bruch wurde mit $1 + jn$ erweitert)

$$\text{Hinweis: } e^{\pm jn\pi} = \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \pm j \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_0 = (-1)^n \quad (\text{Eulersche Formel})$$

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+jn}{1+n^2} \cdot e^{jn x} \quad (\text{komplexe Darstellung})$$

Fourier-Reihe in reeller Darstellung:

$$a_0 = 2c_0 = 2 \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= c_n + c_n^* = (-1)^n \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(1+jn) + (1-jn)}{1+n^2} = \\
 &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{1+n^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= j(c_n - c_n^*) = j(-1)^n \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(1+jn) - (1-jn)}{1+n^2} = \\
 &= -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \frac{n}{1+n^2}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\cos(nx)}{1+n^2} - \frac{n \cdot \sin(nx)}{1+n^2} \right]$$

Abschnitt 2

1) $u(t)$: gerade Funktion (Integration von 0 bis $\pi/2$, daher Faktor 2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{u} \cdot \cos t \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \left[\sin t \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot 1 = \frac{2\hat{u}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{u} \cdot \cos t \cdot \cos(nt) \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos(nt) \, dt$$

Fallunterscheidung: $n = 1$ (Integral: 229 mit $a = 1$) bzw. $n > 1$ (Integral: 252 mit $a = 1$ und $b = n$)

$$a_1 = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\hat{u}}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos(nt) \, dt = \frac{2\hat{u}}{\pi} \left[\frac{\sin(1-n)x}{2(1-n)} + \frac{\sin(1+n)x}{2(1+n)} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(1+n) \cdot \sin(1-n)\pi/2 + (1-n) \cdot \sin(1+n)\pi/2}{(1-n)(1+n)} = \\ &= \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(1+n) \cdot \cos(n\pi/2) + (1-n) \cdot \cos(n\pi/2)}{(1-n)(1+n)} = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\cos(n\pi/2)}{(n-1)(n+1)} \end{aligned}$$

Hinweis: $\sin(1-n)\pi/2 = \sin(1+n)\pi/2 = \cos(n\pi/2)$

Fallunterscheidung: $n = \text{gerade} = 2k$ bzw. $n = \text{ungerade} = 2k + 1$ mit $k \in \mathbf{N}^*$

$$\boxed{n = 2k:} \quad \cos(n\pi/2) = \cos(k\pi) = (-1)^k = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$\boxed{n = 2k + 1:} \quad \cos(n\pi/2) = \cos(k\pi + \pi/2) = -\sin(k\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n=2k+1} = 0$$

$$a_{n=2k} = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)(n+1)} = \frac{2\hat{u}}{\pi} (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot \frac{1}{(n-1)(n+1)} \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

$b_n = 0$ (gerade Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{\pi} + \frac{\hat{u}}{2} \cdot \cos t + \frac{2\hat{u}}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2t) - \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6t) - + \dots \right)$$

$$2) \quad y(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (2\hat{y}/\pi) t & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ (2\hat{y}/\pi) (\pi - t) & \text{für } \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2 \\ (2\hat{y}/\pi) (t - 2\pi) & 3\pi/2 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right\} \quad (\text{Periode: } 2\pi)$$

$a_n = 0$ (ungerade Funktion, daher kein konstantes Glied und keine Kosinusglieder; $n \in \mathbb{N}$)

$$b_n = \frac{2\hat{y}}{\pi^2} \left[\int_0^{\pi/2} t \cdot \sin(nt) dt + \pi \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin(nt) dt - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} t \cdot \sin(nt) dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} t \cdot \sin(nt) dt - 2\pi \cdot \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin(nt) dt \right] = \frac{2\hat{y}}{\pi^2} (I_1 + \pi \cdot I_2 - I_3 + I_4 - 2\pi \cdot I_5)$$

Auswertung der Integrale ($I_1, I_3, I_4 \rightarrow$ Integral 208 mit $a = n$; $I_2, I_5 \rightarrow$ Integral 204 mit $a = n$):

$$I_1 = \left[\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cdot \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} - \frac{\pi \cdot \cos(n\pi/2)}{2n}$$

$$I_3 = \left[\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cdot \cos(nt)}{n} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\sin(3n\pi/2)}{n^2} - \frac{3\pi \cdot \cos(3n\pi/2)}{2n} - \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} + \frac{\pi \cdot \cos(n\pi/2)}{2n}$$

$$I_4 = \left[\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cdot \cos(nt)}{n} \right]_{3\pi/2}^{2\pi} = -\frac{2\pi}{n} - \frac{\sin(3n\pi/2)}{n^2} + \frac{3\pi \cdot \cos(3n\pi/2)}{2n}$$

$$I_2 = \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\cos(n\pi/2)}{n} - \frac{\cos(3n\pi/2)}{n}$$

$$I_5 = \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{3\pi/2}^{2\pi} = -\frac{1}{n} + \frac{\cos(3n\pi/2)}{n}$$

$$b_n = \frac{2\hat{y}}{\pi^2} (I_1 + \pi \cdot I_2 - I_3 + I_4 - 2\pi \cdot I_5) = \frac{4\hat{y}}{\pi^2 n^2} [\sin(n\pi/2) - \underbrace{\sin(3n\pi/2)}_{(-1)^n \cdot \sin(n\pi/2)}] = \frac{4\hat{y}}{\pi^2 n^2} \cdot \sin(n\pi/2) \cdot [1 - (-1)^n]$$

Hinweis: $\sin(3n\pi/2) = \sin(n\pi/2 + n\pi) = (-1)^n \cdot \sin(n\pi/2)$

Fallunterscheidung: $n = \text{gerade} = 2k$ bzw. $n = \text{ungerade} = 2k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{n = 2k:} \quad \sin(n\pi/2) = \sin(k\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{n=2k} = 0$$

$$\boxed{n = 2k - 1:} \quad \sin(n\pi/2) = \sin(k\pi - \pi/2) = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}$$

$$b_{n=2k-1} = \frac{4\hat{y}}{\pi^2 n^2} (-1)^{k+1} \cdot 2 = \frac{8\hat{y}}{\pi^2} (-1)^{\frac{n+3}{2}} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$y(t) = \frac{8\hat{y}}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{1^2} \cdot \sin t - \frac{1}{3^2} \cdot \sin(3t) + \frac{1}{5^2} \cdot \sin(5t) - + \dots \right)$$

$$3) \quad \omega_0 = 2\pi/T; \quad \omega_0 T = 2\pi; \quad \omega_0 T/2 = \pi$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} \frac{2\hat{u}}{T} t \, dt + \int_{T/2}^T \hat{u} \, dt \right] = \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{T/2} + \frac{2\hat{u}}{T} [t]_{T/2}^T = \frac{3}{2} \hat{u}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} \frac{2\hat{u}}{T} t \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt + \int_{T/2}^T \hat{u} \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt \right] = \\ &= \frac{4\hat{u}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^{T/2} t \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt}_{\text{Integral 232 mit } a = n\omega_0} + \frac{2\hat{u}}{T} \cdot \underbrace{\int_{T/2}^T \cos(n\omega_0 t) \, dt}_{\text{Integral 228 mit } a = n\omega_0} = \\ &= \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2 \omega_0^2} + \frac{t \cdot \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{T/2} + \frac{2\hat{u}}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{T/2}^T = \\ &= \frac{4\hat{u}}{(\omega_0 T)^2 n^2} \left[\cos(n\omega_0 T/2) + \frac{n\omega_0 T}{2} \cdot \sin(n\omega_0 T/2) - 1 \right] + \\ &\quad + \frac{2\hat{u}}{(\omega_0 T) n} [\sin(n\omega_0 T) - \sin(n\omega_0 T/2)] = \\ &= \frac{\hat{u}}{\pi^2 n^2} \left[\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} + n\pi \cdot \underbrace{\frac{\sin(n\pi)}{0}}_0 - 1 \right] + \frac{\hat{u}}{\pi n} \left[\underbrace{\sin(2n\pi)}_0 - \underbrace{\sin(n\pi)}_0 \right] = \\ &= \frac{\hat{u}}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{2\hat{u}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \text{ für} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} \frac{2\hat{u}}{T} t \cdot \sin(n\omega_0 t) \, dt + \int_{T/2}^T \hat{u} \cdot \sin(n\omega_0 t) \, dt \right] = \\ &= \frac{4\hat{u}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^{T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t) \, dt}_{\text{Integral 208 mit } a = n\omega_0} + \frac{2\hat{u}}{T} \cdot \underbrace{\int_{T/2}^T \sin(n\omega_0 t) \, dt}_{\text{Integral 204 mit } a = n\omega_0} = \\ &= \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2 \omega_0^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{T/2} + \frac{2\hat{u}}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{T/2}^T = \\ &= \frac{4\hat{u}}{(\omega_0 T)^2 n^2} \left[\sin(n\omega_0 T/2) - \frac{n\omega_0 T}{2} \cdot \cos(n\omega_0 T/2) \right] + \\ &\quad + \frac{2\hat{u}}{\omega_0 T n} [-\cos(n\omega_0 T) + \cos(n\omega_0 T/2)] = \\ &= \frac{\hat{u}}{\pi^2 n^2} \left[\underbrace{\sin(n\pi)}_0 - n\pi \cdot \underbrace{\frac{\cos(n\pi)}{(-1)^n}}_{(-1)^n} \right] + \frac{\hat{u}}{\pi n} \left[\underbrace{-\cos(2n\pi)}_1 + \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \right] = -\frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$u(t) = \frac{3}{4} \hat{u} - \frac{2\hat{u}}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos(5\omega_0 t) + \dots \right) -$$

$$- \frac{\hat{u}}{\pi} \left(\frac{1}{1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots \right)$$

$$4) \quad y(t) = -\frac{\hat{y}}{T} t + \hat{y}, \quad 0 \leq t < T; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega_0 T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left(-\frac{\hat{y}}{T} t + \hat{y} \right) dt = \frac{2}{T} \left[-\frac{\hat{y}}{2T} t^2 + \hat{y} t \right]_0^T = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \hat{y} T = \hat{y}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left(-\frac{\hat{y}}{T} t + \hat{y} \right) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt =$$

$$= -\frac{2\hat{y}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^T t \cdot \cos(n\omega_0 t) dt}_{\text{Integral 232 mit } a = n\omega_0} + \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \underbrace{\int_0^T \cos(n\omega_0 t) dt}_{\text{Integral 228 mit } a = n\omega_0} =$$

$$= -\frac{2\hat{y}}{T^2} \left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2 \omega_0^2} + \frac{t \cdot \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^T + \frac{2\hat{y}}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^T =$$

$$= -\frac{2\hat{y}}{(\omega_0 T)^2 n^2} [\cos(n\omega_0 T) + n\omega_0 T \cdot \sin(n\omega_0 T) - 1] + \frac{2\hat{y}}{(\omega_0 T) n} \cdot \sin(n\omega_0 T) =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{2\pi^2 n^2} \left[\underbrace{\cos(2n\pi)}_1 + 2\pi n \cdot \underbrace{\sin(2n\pi)}_0 - 1 \right] + \frac{\hat{y}}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(2n\pi)}_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left(-\frac{\hat{y}}{T} t + \hat{y} \right) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt =$$

$$= -\frac{2\hat{y}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^T t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt}_{\text{Integral 208 mit } a = n\omega_0} + \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \underbrace{\int_0^T \sin(n\omega_0 t) dt}_{\text{Integral 204 mit } a = n\omega_0} =$$

$$= -\frac{2\hat{y}}{T^2} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2 \omega_0^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^T + \frac{2\hat{y}}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^T =$$

$$= -\frac{2\hat{y}}{(\omega_0 T)^2 n^2} [\sin(n\omega_0 T) - n\omega_0 T \cdot \cos(n\omega_0 T)] + \frac{2\hat{y}}{(\omega_0 T) n} [-\cos(n\omega_0 T) + 1] =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{2\pi^2 n^2} \underbrace{[\sin(2n\pi)]}_0 - 2\pi n \cdot \underbrace{[\cos(2n\pi)]}_1 + \frac{\hat{y}}{\pi n} [-\underbrace{\cos(2n\pi)}_1 + 1] = \frac{\hat{y}}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{\hat{y}}{\pi} \left[\frac{1}{1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots \right]$$

5) $y = \hat{y} \cdot |\sin(\omega_0 t)| = \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad \text{Periode: } T = \pi/\omega_0; \quad \omega_0 T = \pi$

$$a_0 = \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \int_0^T \sin(\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{y}}{\omega_0 T} [-\cos(\omega_0 t)]_0^T = \frac{2\hat{y}}{\pi} [-\cos \pi + 1] = \frac{4\hat{y}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \int_0^T \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Fallunterscheidung: $n = 1$ (Integral 254 mit $a = \omega_0$) bzw. $n > 1$ (Integral 285 mit $a = \omega_0$ und $b = n\omega_0$)

$$a_1 = \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \int_0^T \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{y}}{T} \left[\frac{\sin^2(\omega_0 t)}{2\omega_0} \right]_0^T = \frac{\hat{y}}{\omega_0 T} \cdot \sin^2(\omega_0 T) = \frac{\hat{y}}{\pi} \cdot \sin^2 \pi = 0$$

$$a_n = \frac{2\hat{y}}{T} \cdot \int_0^T \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{y}}{T} \left[-\frac{\cos(\omega_0 + n\omega_0)t}{2(\omega_0 + n\omega_0)} - \frac{\cos(\omega_0 - n\omega_0)t}{2(\omega_0 - n\omega_0)} \right]_0^T =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{\omega_0 T} \left[\frac{\cos(n+1)\omega_0 t}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\omega_0 t}{n-1} \right]_0^T =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{\omega_0 T} \left[\frac{\cos(n+1)\omega_0 T - 1}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\omega_0 T - 1}{n-1} \right] =$$

$$= -\frac{\hat{y}}{\pi} \left[\frac{\cos(n+1)\pi - 1}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] = \frac{2\hat{y}[(-1)^{n+1} - 1]}{\pi(n-1)(n+1)} =$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 3, 5, 7, \dots \\ -\frac{4\hat{y}}{\pi} \cdot \frac{1}{(n-1)(n+1)} & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Hinweis: $\cos(1-n)\omega_0 t = \cos(n-1)\omega_0 t; \quad \cos(n+1)\pi = \cos(n-1)\pi = (-1)^{n+1}$

$b_n = 0$ ($y(t)$ ist eine gerade Funktion, daher keine Sinusglieder)

$$y(t) = \frac{2\hat{y}}{\pi} - \frac{4\hat{y}}{\pi} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \dots \right]$$

III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

Abschnitt 1

- 1) a) $y - 2x \geq 0 \Rightarrow y \geq 2x, x \in \mathbb{R}$ (*grau unterlegter Bereich in Bild A-1*)
- b) $(x^2 - 1)(9 - y^2) \geq 0$ (beide Faktoren müssen somit *gleiches* Vorzeichen haben)
- $x^2 - 1 \geq 0, 9 - y^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1, |y| \leq 3$ (*hellgrauer Bereich, Bild A-2*)
- $x^2 - 1 \leq 0, 9 - y^2 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 1, |y| \geq 3$ (*dunkelgrauer Bereich, Bild A-2*)

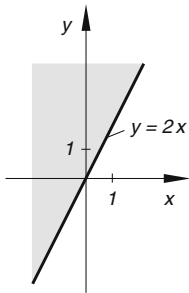


Bild A-1

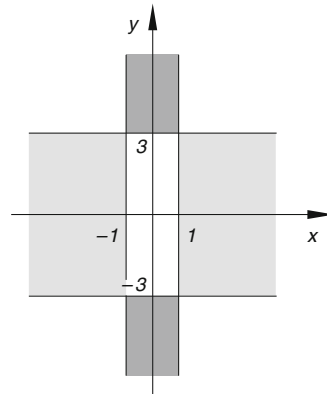


Bild A-2

- c) $x + y \geq 0, x - y \neq 0 \Rightarrow y \geq -x, y \neq x, x \in \mathbb{R}$ (*grau unterlegter Bereich in Bild A-3, die Punkte auf der Halbgeraden $y = x$ mit $x \geq 0$ gehören nicht dazu!*)
- d) $x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 1$ (*grau unterlegter Bereich in Bild A-4*)

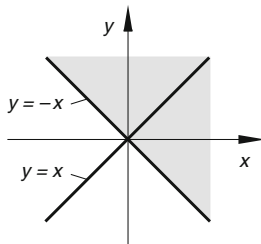


Bild A-3

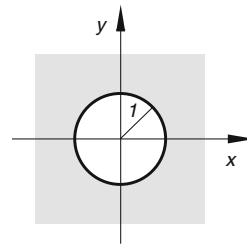


Bild A-4

- 2) $S_x = \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right); S_y = \left(0; -\frac{1}{5}; 0\right); S_z = \left(0; 0; \frac{1}{3}\right)$

Gleichung der Ebene nach z auflösen, dann die Koordinaten x und y des gegebenen Punktes einsetzen und die berechnete Höhenkoordinate z_{Ebene} mit der Höhenkoordinate des Punktes vergleichen.

Ergebnis: A liegt in der Ebene, B oberhalb der Ebene, C und D unterhalb der Ebene.

3) a) $x^2 + y^2 - 2y = \text{const.} = C \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = C + 1$ (mit $C \geq -1$)

Konzentrische Kreise um den Mittelpunkt $M = (0; 1)$ (siehe Bild A-5)

b) $3x + 6y = \text{const.} = C \Rightarrow y = -0,5x + C/6$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

Parallele Geradenschar (Steigung: $m = -0,5$; siehe Bild A-6)

c) $\sqrt{y - x^2} = \text{const.} = C \Rightarrow y = x^2 + C^2$ (mit $C \geq 0$)

Parabelschar (nach oben geöffnete Normalparabeln oberhalb der x -Achse, siehe Bild A-7)

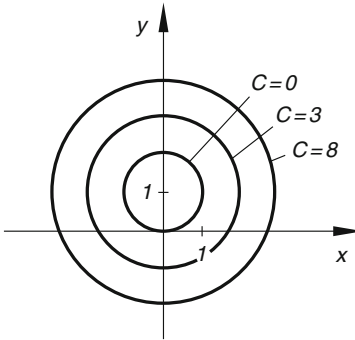


Bild A-5

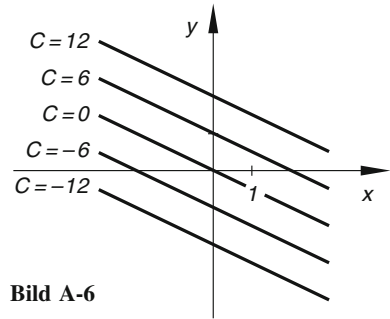


Bild A-6

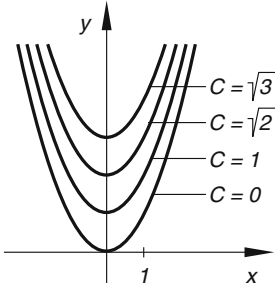


Bild A-7

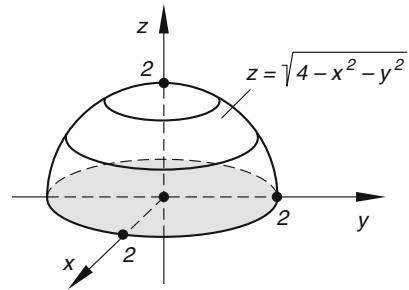


Bild A-8

- 4) Die Substitution $x \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$ liefert die Rotationsfläche mit der Gleichung $z = \sqrt{4 - r^2} = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 4$ (Halbkugel mit dem Radius $R = 2$, siehe Bild A-8)

Schnitt mit der x, y -Ebene: Kreis mit dem Radius $R = 2$

Schnitt mit der x, z - bzw. y, z -Ebene: Halbkreis mit dem Radius $R = 2$

Abschnitt 2

1) a) $z_x = 12(3x - 5y)^3$; $z_y = -20(3x - 5y)^3$; $z_{xx} = 108(3x - 5y)^2$;
 $z_{yy} = 300(3x - 5y)^2$; $z_{xy} = z_{yx} = -180(3x - 5y)^2$

$$\text{b) } w_u = -6v \cdot \sin(3uv); \quad w_v = -6u \cdot \sin(3uv); \quad w_{uu} = -18v^2 \cdot \cos(3uv); \\ w_{vv} = -18u^2 \cdot \cos(3uv); \quad w_{uv} = w_{vu} = -6 \cdot \sin(3uv) - 18uv \cdot \cos(3uv)$$

$$\text{c) } z = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = x - y \quad (\text{mit } y \neq -x)$$

$$z_x = 1; \quad z_y = -1; \quad z_{xx} = 0; \quad z_{yy} = 0; \quad z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$\text{d) } z_r = 3(1 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi}; \quad z_\varphi = 3r^2 \cdot e^{r\varphi}; \quad z_{rr} = 3\varphi(2 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi};$$

$$z_{\varphi\varphi} = 3r^3 \cdot e^{r\varphi}; \quad z_{r\varphi} = z_{\varphi r} = 3r(2 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi}$$

$$\text{e) } z_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 - 2xy}}; \quad z_y = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2xy}};$$

$$z_{xx} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 2xy} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y)(x - y)}{x^2 - 2xy} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2xy) - (x - y)^2}{(x^2 - 2xy)\sqrt{x^2 - 2xy}} = -\frac{y^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}};$$

$$z_{yy} = -\frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}; \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}$$

$$\text{f) } z = e^{-x+y} + \ln x - \ln y; \quad z_x = -e^{-x+y} + \frac{1}{x}; \quad z_y = e^{-x+y} - \frac{1}{y};$$

$$z_{xx} = e^{-x+y} - \frac{1}{x^2}; \quad z_{yy} = e^{-x+y} + \frac{1}{y^2}; \quad z_{xy} = z_{yx} = -e^{-x+y}$$

$$\text{g) } z_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{(y^2 + x^2)y} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad z_y = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$z_{xx} = \frac{0(x^2 + y^2) - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad z_{yy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$z_{xy} = z_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{h) } z = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2); \quad z_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad z_y = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$z_{xx} = \frac{1(x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad z_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$z_{xy} = z_{yx} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

- i)
$$u_x = \frac{1(2x+t) - 2(x-2t)}{(2x+t)^2} = \frac{5t}{(2x+t)^2}; \quad u_t = -\frac{5x}{(2x+t)^2};$$

$$u_{xx} = \frac{0(2x+t)^2 - 2(2x+t)2 \cdot 5t}{(2x+t)^4} = -\frac{20t}{(2x+t)^3}; \quad u_{tt} = \frac{10x}{(2x+t)^3};$$

$$u_{xt} = u_{tx} = \frac{10x-5t}{(2x+t)^3}$$
- j)
$$z_t = a \cdot \cos(at + \varphi); \quad z_\varphi = \cos(at + \varphi); \quad z_{tt} = -a^2 \cdot \sin(at + \varphi);$$

$$z_{\varphi\varphi} = -\sin(at + \varphi); \quad z_{t\varphi} = z_{\varphi t} = -a \cdot \sin(at + \varphi)$$
- 2)
$$z_x = 5(1-x)y \cdot e^{-xy} + \frac{x}{x^2+y^2} - \pi \cdot \sin(\pi x + y) \Rightarrow z_x(1;0) = 6$$

$$z_y = -5x^2 \cdot e^{-xy} + \frac{y}{x^2+y^2} - \sin(\pi x + y) \Rightarrow z_y(0;1) = 0,159$$

$$z_{xy} = 5(-2x+x^2y) \cdot e^{-xy} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \pi \cdot \cos(\pi x + y) \Rightarrow z_{xy}(-1;0) = 13,142$$

$$z_{yy} = 5x^3 \cdot e^{-xy} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \cos(\pi x + y) \Rightarrow z_{yy}(5;0) = 626,04$$

$$z_{xyx} = 5(4xy - x^2y^2 - 2) \cdot e^{-xy} + \frac{6x^2y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3} + \pi^2 \cdot \sin(\pi x + y) \Rightarrow$$

$$z_{xyx}(-1;0) = -10$$
- 3) a)
$$z_{xy} = z_{yx} = 3 - \cos(x-y) + 15x^2y^4$$
b)
$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx} = \sin(x-y) + 30xy^4$$
- 4)
$$u = a(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + b \quad (\text{symmetrisch in } x, y, z)$$

$$u_x = a \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -ax(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$u_{xx} = -a \left[1 \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}_{r^2} - 3x^2 \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}}_{r^2} \right] = -a(r^{-3} - 3x^2r^{-5})$$
Analog:
$$u_{yy} = -a(r^{-3} - 3y^2r^{-5}); \quad u_{zz} = -a(r^{-3} - 3z^2r^{-5})$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -a(3r^{-3} - 3 \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} r^{-5}) = -a(3r^{-3} - 3r^{-3}) = 0$$
- 5)
$$z_x = \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) + \frac{3x^2}{x^2 + y^2} + (y^2 - \pi) \cdot \sin(xy^2 - \pi x) \Rightarrow z_x(1;0) = 3$$

$$z_y = \frac{3xy}{x^2 + y^2} + 2xy \cdot \sin(xy^2 - \pi x) \Rightarrow z_y(1;0) = 0$$
- 6)
$$xz_x + yz_y = x \frac{a}{y} \cdot e^{x/y} + y \left(-\frac{ax}{y^2} \cdot e^{x/y} \right) = \left(\frac{ax}{y} - \frac{ax}{y} \right) \cdot e^{x/y} = 0$$

$$7) \quad a) \quad \dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = y \cdot e^{xy} \cdot 2t + x \cdot e^{xy} \cdot 1 = t \cdot e^{t^3} \cdot 2t + t^2 \cdot e^{t^3} = 3t^2 \cdot e^{t^3}$$

$$b) \quad \dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = (\ln y) \cdot \cos t + \frac{x}{y} (-\sin t) = \cos t \cdot \ln(\cos t) - \frac{\sin^2 t}{\cos t}$$

$$c) \quad \dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = 2x \cdot \sin(2y) \cdot 2t + 2x^2 \cdot \cos(2y) \cdot 3t^2 = \\ = 2t^2 \cdot \sin(2t^3) \cdot 2t + 2t^4 \cdot \cos(2t^3) \cdot 3t^2 = 4t^3 \cdot \sin(2t^3) + 6t^6 \cdot \cos(2t^3)$$

$$8) \quad \text{Parameter: } x; \text{ Parametergleichungen: } x = x, \quad y = x^3$$

$$\dot{z}(x) = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \frac{y}{\cos^2(xy)} \cdot 1 + \frac{x}{\cos^2(xy)} \cdot 3x^2 = \frac{x^3 + 3x^3}{\cos^2(x^4)} = \frac{4x^3}{\cos^2(x^4)}$$

$$9) \quad \text{Parameter: } x; \text{ Parametergleichungen: } x = x, \quad y = x^2$$

$$\dot{z}(x) = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \frac{4x^3}{x^4 + y} \cdot 1 + \frac{1}{x^4 + y} \cdot 2x = \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2} = \frac{4x^2 + 2}{x^3 + x} \Rightarrow$$

$$\dot{z}(x=1) = 3$$

$$10) \quad a) \quad \dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \left(2xy^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot 2t + 2x^2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \\ = \left(2t^3 + \frac{1}{2t} \right) 2t + 2t^4 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 4t^4 + 1 + t^4 = 5t^4 + 1$$

$$b) \quad z = t^4 \cdot t + t = t^5 + t; \quad \dot{z} = 5t^4 + 1$$

$$11) \quad a) \quad z_x = (2x - x^2 - y^2) \cdot e^{-x}; \quad z_y = 2y \cdot e^{-x}; \quad z_x(0; 1) = -1; \quad z_y(0; 1) = 2$$

$$z - 1 = -1(x - 0) + 2(y - 1) \Rightarrow z = -x + 2y - 1$$

$$b) \quad z_x = 3y^{-1/2} - 2\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y); \quad z_y = -\frac{3}{2}xy^{-3/2} - 4\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y);$$

$$z_x(2; 1) = 3; \quad z_y(2; 1) = -3; \quad P = (2; 1; 8); \quad z = 3x - 3y + 5$$

$$12) \quad a) \quad dz = z_x dx + z_y dy = (12x^2y - 3 \cdot e^y) dx + (4x^3 - 3x \cdot e^y) dy$$

$$b) \quad dz = z_x dx + z_t dt = \frac{4t^2 + 2t}{(2t - 4x)^2} dx + \frac{2t^2 - 8tx - 2x}{(2t - 4x)^2} dt$$

$$c) \quad dz = z_x dx + z_y dy = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x - y)^2} dx + \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x - y)^2} dy$$

$$d) \quad u = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad \text{symmetrisch in } x, y, z; \quad u_x = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{Analog: } u_y, u_z \Rightarrow du = u_x dx + u_y dy + u_z dz = \frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$13) \quad O(r; h) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h); \quad dr = \Delta r = 0,5 \text{ cm}; \quad dh = \Delta h = -0,5 \text{ cm}$$

$$\Delta O \approx dO = \frac{\partial O}{\partial r} dr + \frac{\partial O}{\partial h} dh = (2\pi h + 4\pi r) dr + 2\pi r dh = 109,96 \text{ cm}^2$$

$$\Delta O_{\text{exakt}} = O(r + \Delta r; h + \Delta h) - O(r; h) =$$

$$= 2\pi(r + \Delta r)(r + \Delta r + h + \Delta h) - 2\pi r(r + h) = 109,96 \text{ cm}^2$$

$$14) \quad dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dx = \Delta x = -0,1; \quad dy = \Delta y = 0,2; \quad dz = \Delta z = -0,1; \quad \Delta r \approx dr = 0,134$$

$$\Delta r_{\text{exakt}} = r(B) - r(A) = 0,143$$

$$15) \quad V(r_a; r_i; h) = \pi(r_a^2 - r_i^2) h$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r_a} dr_a + \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i + \frac{\partial V}{\partial h} dh = 2\pi r_a h dr_a - 2\pi r_i h dr_i + \pi(r_a^2 - r_i^2) dh$$

$$\Delta V \approx dV = -512,71 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V_{\text{exakt}} = V(r_a + \Delta r_a; r_i + \Delta r_i; h + \Delta h) - V(r_a; r_i; h) = -527,78 \text{ cm}^3$$

$$16) \quad dT = \frac{\partial T}{\partial L} dL + \frac{\partial T}{\partial C} dC = \frac{\pi}{\sqrt{LC}} (C dL + L dC)$$

Mit $L = L_0$, $C = C_0$ und $T_0 = 2\pi \sqrt{L_0 C_0}$ und den absoluten Änderungen $dL = \Delta L$, $dC = \Delta C$ gilt dann näherungsweise:

$$\text{Absolute Änderung: } \Delta T \approx dT = \frac{\pi}{\sqrt{L_0 C_0}} (C_0 \Delta L + L_0 \Delta C)$$

$$\text{Prozentuale Änderung: } \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\Delta C}{C_0} \right) = \frac{1}{2} (-5\% + 3\%) = -1\%$$

Die Schwingungsdauer verringert sich also näherungsweise um 1%.

$$17) \quad z_x = -\frac{5y^2}{x^2}; \quad z_y = \frac{10y}{x}; \quad z_x(1; 2) = -20; \quad z_y(1; 2) = 20$$

Linearisierte Funktion in der Umgebung des Arbeitspunktes $P = (1; 2; 20)$:
 $z = -20x + 20y$

Näherungswert: $z = 14$; Exakter Funktionswert: $z = 14,73$

$$18) \quad \frac{\partial I}{\partial R_1} = U \cdot \frac{1(R_1 R_2) - R_2(R_1 + R_2)}{R_1^2 R_2^2} = -\frac{U}{R_1^2}; \quad \frac{\partial I}{\partial R_2} = -\frac{U}{R_2^2}; \quad \frac{\partial I}{\partial U} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$\begin{aligned} \Delta I \approx dI &= \left(\frac{\partial I}{\partial R_1} \right)_0 \Delta R_1 + \left(\frac{\partial I}{\partial R_2} \right)_0 \Delta R_2 + \left(\frac{\partial I}{\partial U} \right)_0 \Delta U = \\ &= \left(-\frac{U}{R_1^2} \right) \Delta R_1 + \left(-\frac{U}{R_2^2} \right) \Delta R_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) \Delta U = \\ &= -\left(0,025 \frac{\text{A}}{\Omega} \right) \Delta R_1 - \left(0,4 \frac{\text{A}}{\Omega} \right) \Delta R_2 + \left(0,25 \frac{\text{A}}{\text{V}} \right) \Delta U \end{aligned}$$

$$19) \quad \text{Absolute Änderung: } \Delta W \approx dW = \frac{\partial W}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial W}{\partial h} \Delta h = \frac{1}{6} h^2 \Delta b + \frac{1}{3} b h \Delta h$$

$$\text{Prozentuale Änderung: } \frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta b}{b} + 2 \cdot \frac{\Delta h}{h} = 5\% - 20\% = -15\%$$

$$20) \quad a) \quad y'(P) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{y(x^2 + y^2 + 1)} \quad b) \quad y'(P_1) = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot (0)}{\frac{1}{2} \cdot (2)} = 0$$

$$21) \quad P_0 = (2; -2); \quad F(x; y) = x^2 + xy + y^2 - 4 = 0; \quad y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + y}{x + 2y};$$

$$m = y'(P_0) = 1; \quad \text{Tangente: } \frac{y + 2}{x - 2} = 1 \Rightarrow y = x - 4$$

$$22) \quad \text{Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: } S_1 = (0; 0); \quad S_{2/3} = (0; \pm 2)$$

$$y'(P) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x^2 + 1}{3y^2 - 4}; \quad y'(S_1) = \tan \alpha_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_1 = \arctan \frac{1}{4} = 14,0^\circ$$

$$y'(S_{2/3}) = \tan \alpha_{2/3} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \alpha_{2/3} = \arctan\left(-\frac{1}{8}\right) + 180^\circ = 172,9^\circ$$

$$23) \quad F(x; y) = x^3 - 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0; \quad y'(P) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6x}{8y}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1; \quad x_2 = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2}$$

Waagerechte Tangenten in den Punkten $P_{1/2} = (0; \pm 1)$ und $P_{3/4} = (2; \pm \sqrt{2})$.

$$24) \quad a) \quad z_x = 3(y^2 + 4x^2 - 8x); \quad z_y = 6(x - 1)y; \quad z_{xx} = 24(x - 1);$$

$$z_{yy} = 6(x - 1); \quad z_{xy} = 6y$$

$$\left. \begin{array}{l} z_x = 3(y^2 + 4x^2 - 8x) = 0 \\ z_y = 6(x - 1)y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1; \quad y = \pm 2 \\ y = 0; \quad x = 0 \quad \text{bzw.} \quad x = 2 \end{array}$$

$$(1; \pm 2): \quad \Delta = -144 < 0 \Rightarrow \text{Kein Extremwert}$$

$$(0; 0): \quad \Delta = 144 > 0 \quad \text{und} \quad z_{xx}(0; 0) = -24 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$(2; 0): \quad \Delta = 144 > 0 \quad \text{und} \quad z_{xx}(2; 0) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Extremwerte: Maximum $P_1 = (0; 0; 1)$; Minimum $P_2 = (2; 0; -15)$

$$b) \quad z_x = (2x - x^2 - y^2) \cdot e^{-x}; \quad z_y = 2y \cdot e^{-x}; \quad z_{xx} = (2 - 4x + x^2 + y^2) \cdot e^{-x};$$

$$z_{yy} = 2 \cdot e^{-x}; \quad z_{xy} = -2y \cdot e^{-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_x = (2x - x^2 - y^2) \cdot e^{-x} = 0 \\ z_y = 2y \cdot e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0; \quad y = 0 \\ x = 2; \quad y = 0 \end{array}$$

$$(0; 0): \quad \Delta = 4 > 0 \quad \text{und} \quad z_{xx}(0; 0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$(2; 0): \quad \Delta = -4 \cdot e^{-4} < 0 \Rightarrow \text{Kein Extremwert}$$

Extremwert: Minimum $P_1 = (0; 0; 0)$

$$\text{c) } z_x = y + \frac{27}{x^2}; \quad z_y = x - \frac{27}{y^2}; \quad z_{xx} = -\frac{54}{x^3}; \quad z_{yy} = \frac{54}{y^3}; \quad z_{xy} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} z_x = y + \frac{27}{x^2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{27}{x^2} \\ z_y = x - \frac{27}{y^2} = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{27}{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y \text{ eliminieren: } y^2 = \left(-\frac{27}{x^2}\right)^2 = \frac{27}{x} \Rightarrow \\ x^3 = 27 \Rightarrow x = 3; \quad y = -3 \end{array}$$

$$(3; -3): \Delta = 3 > 0 \text{ und } z_{xx}(3; -3) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$\text{Extremwert: Maximum } P_1 = (3; -3; -27)$$

$$\text{d) } z_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; \quad z_{xx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}};$$

$$z_{yy} = \frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}; \quad z_{xy} = \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$z_x = 0 \Rightarrow x = 0; \quad z_y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(0; 0): \Delta = 1 > 0 \text{ und } z_{xx}(0; 0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$\text{Extremwert: Minimum } P_1 = (0; 0; 1)$$

$$\text{e) } z_x = 6x^2 - 3y; \quad z_y = -3x + 9y^2; \quad z_{xx} = 12x; \quad z_{yy} = 18y; \quad z_{xy} = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} z_x = 6x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = 2x^2 \\ z_y = -3x + 9y^2 = 0 \Rightarrow 3y^2 = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} y \text{ eliminieren: } 3y^2 = 3(2x^2)^2 = x \\ 12x^4 = x \Rightarrow (12x^3 - 1)x = 0 \Rightarrow \end{array}$$

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad x_2 = \sqrt[3]{1/12} = 0,44; \quad y_2 = 0,38$$

$$(0; 0): \Delta = -9 < 0 \Rightarrow \text{Kein Extremwert}$$

$$(0,44; 0,38): \Delta = 27 > 0 \text{ und } z_{xx}(0,44; 0,38) = 5,24 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$\text{Extremwert: Minimum } P_1 = (0,44; 0,38; 0,83)$$

$$25) \text{ Flächenfunktion: } A = A(x; y) = 4xy$$

$$\text{Nebenbedingung: } \varphi(x; y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \text{ (Ellipsengleichung)}$$

$$\text{Hilfsfunktion: } F(x; y; \lambda) = A(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y) = 4xy + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = 4y + 2\lambda b^2x = 0 \\ F_y = 4x + 2\lambda a^2y = 0 \end{array} \right\} \lambda \text{ eliminieren: } \lambda = -\frac{2y}{b^2x} = -\frac{2x}{a^2y} \Rightarrow a^2y^2 = b^2x^2$$

$$F_\lambda = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \Rightarrow b^2x^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = a^2$$

$$\text{Maximum: } x = \frac{a}{2}\sqrt{2}; \quad y = \frac{b}{2}\sqrt{2}; \quad A_{\max} = 2ab$$

$$26) \text{ Mantelfläche: } M = \pi r s; \quad s = \frac{r}{\sin \beta}; \quad h = r \cdot \cot \beta \Rightarrow M = M(r; \beta) = \frac{\pi r^2}{\sin \beta}$$

$$\text{Nebenbedingung: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^3 \cdot \cot \beta = 10 \Rightarrow$$

$$\varphi(r; \beta) = \frac{1}{3} \pi r^3 \cdot \cot \beta - 10 = 0$$

$$\text{Hilfsfunktion: } F(r; \beta; \lambda) = M(r; \beta) + \lambda \cdot \varphi(r; \beta) = \frac{\pi r^2}{\sin \beta} + \lambda \left(\frac{1}{3} \pi r^3 \cdot \cot \beta - 10 \right)$$

$$F_r = \frac{2\pi r}{\sin \beta} + \lambda \pi r^2 \cdot \underbrace{\cot \beta}_{\cos \beta / \sin \beta} = \frac{\pi r}{\sin \beta} \underbrace{(2 + \lambda r \cdot \cos \beta)}_0 = 0$$

$$F_\beta = -\frac{\pi r^2 \cdot \cos \beta}{\sin^2 \beta} - \lambda \frac{\pi r^3}{3 \cdot \sin^2 \beta} = -\frac{\pi r^2}{3 \cdot \sin^2 \beta} \underbrace{(3 \cdot \cos \beta + \lambda r)}_0 = 0$$

$$F_\lambda = \frac{1}{3} \pi r^3 \cdot \cot \beta - 10 = 0$$

$$\lambda \text{ eliminieren: } \lambda = \frac{-2}{r \cdot \cos \beta} = \frac{-3 \cdot \cos \beta}{r} \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta = 35,264^\circ$$

$$\text{Minimum: } \beta = 35,264^\circ, \text{ d. h. } \alpha = 2\beta \approx 70,53^\circ; M_{\min} = 19,44 \text{ dm}^2$$

27) *Hilfsfunktion:* $F(x; y; \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 1 + 2\lambda y = 0 \end{array} \right\} \lambda \text{ eliminieren: } \lambda = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y} \Rightarrow x = y$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 - 1 = 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1/2$$

$$\text{Maximum: } x = y = \frac{1}{2} \sqrt{2}; z_{\max} = \sqrt{2}$$

$$\text{Minimum: } x = y = -\frac{1}{2} \sqrt{2}; z_{\min} = -\sqrt{2}$$

28) $y'_1 = a \cdot e^{ax}; y'_2 = -b \cdot e^{-bx};$ Im Schnittpunkt $S = (0; 1)$ gilt:

$$y'_1(0) \cdot y'_2(0) = -ab = -1 \quad (\text{Tangenten stehen senkrecht aufeinander})$$

$$\text{Nebenbedingung: } -ab = -1 \quad \text{oder} \quad \varphi(a; b) = ab - 1 = 0$$

$$\text{Fläche } A: A = A(a; b) = \int_{-\infty}^0 e^{ax} dx + \int_0^{\infty} e^{-bx} dx = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\text{Hilfsfunktion: } F(a; b; \lambda) = A(a; b) + \lambda \cdot \varphi(a; b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \lambda(ab - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_a = -\frac{1}{a^2} + \lambda b = 0 \\ F_b = -\frac{1}{b^2} + \lambda a = 0 \end{array} \right\} \lambda \text{ eliminieren: } \lambda = \frac{1}{a^2 b} = \frac{1}{ab^2} \Rightarrow a = b$$

$$F_\lambda = ab - 1 = 0 \Rightarrow a \cdot a - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Minimum: } a = b = 1; A_{\min} = 2$$

29) *Flächenfunktion:* $A = A(x; y) = xy$

$$\text{Nebenbedingung: } U = 2x + 2y = \text{const.} = c \Rightarrow \varphi(x; y) = 2x + 2y - c = 0$$

$$\text{Hilfsfunktion: } F(x; y; \lambda) = A(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y) = xy + \lambda(2x + 2y - c)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = y + 2\lambda = 0 \\ F_y = x + 2\lambda = 0 \end{array} \right\} \lambda \text{ eliminieren: } \lambda = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2x} \Rightarrow x = y$$

$$F_\lambda = 2x + 2y - c = 0 \Rightarrow 2x + 2x - c = 4x - c = 0 \Rightarrow x = c/4$$

$$\text{Maximum: } x = y = c/4; A_{\max} = c^2/16$$

30) Abstand des Punktes $P = (x; y; z)$: $d = d(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Nebenbedingung (Gleichung der Ebene): $\varphi(x; y; z) = 2x + 3y + z - 14 = 0$

Hilfsfunktion: $F(x; y; z; \lambda) = d(x; y; z) + \lambda \cdot \varphi(x; y; z) =$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda(2x + 3y + z - 14)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2\lambda = \frac{x}{d} + 2\lambda = 0 \\ F_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 3\lambda = \frac{y}{d} + 3\lambda = 0 \\ F_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda = \frac{z}{d} + \lambda = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda \text{ eliminieren:} \\ \lambda = -\frac{x}{2d} = -\frac{y}{3d} = -\frac{z}{d} \Rightarrow \\ x : y : z = 2 : 3 : 1 \Rightarrow \\ x = 2z; \quad y = 3z \end{array}$$

$$F_\lambda = 2x + 3y + z - 14 = 0 \Rightarrow 4z + 9z + z - 14 = 14z - 14 = 0 \Rightarrow z = 1$$

$$\text{Minimum: } x = 2; \quad y = 3; \quad z = 1; \quad d_{\min} = \sqrt{14}$$

Lösung: Von allen Punkten der Ebene hat der Punkt $P = (2; 3; 1)$ den *kleinsten* Abstand vom Koordinatenursprung.

31) $a = c \cdot \sin \alpha$; $\bar{a} = \bar{c} \cdot \sin \bar{\alpha} = 4,24 \text{ cm}$

$$\Delta a_{\max} = \left| \frac{\partial a}{\partial c} \Delta c \right| + \left| \frac{\partial a}{\partial \alpha} \Delta \alpha \right| = |\sin \bar{\alpha} \cdot \Delta c| + |\bar{c} \cdot \cos \bar{\alpha} \cdot \Delta \alpha| = 0,165 \text{ cm} \approx 0,17 \text{ cm}$$

↑ Bogenmaß!

$$\text{Messergebnis: } a = (4,24 \pm 0,17) \text{ cm}$$

32) $\bar{T} = 2\pi \sqrt{\bar{L}\bar{C}} = 6,28 \text{ ms}$

$$\Delta T_{\max} = \left| \frac{\partial T}{\partial C} \Delta C \right| + \left| \frac{\partial T}{\partial L} \Delta L \right| = \frac{\pi}{\sqrt{\bar{L}\bar{C}}} (\bar{L} \Delta C + \bar{C} \Delta L) = 0,28 \text{ ms}$$

$$\text{Messergebnis: } T = (6,28 \pm 0,28) \text{ ms}$$

33) a) $\bar{R}_1 = \frac{\sum_i R_{1i}}{6} = \frac{582 \Omega}{6} = 97 \Omega$; $\sum_i (R_{1i} - \bar{R}_1)^2 = 4,16 \Omega^2$;

$$\Delta R_1 = \sqrt{\frac{4,16}{5 \cdot 6}} \Omega = 0,37 \Omega$$

$$\text{Messergebnis: } R_1 = \bar{R}_1 \pm \Delta R_1 = (97,0 \pm 0,37) \Omega$$

$$\text{Analog: } \bar{R}_2 = 41,5 \Omega; \quad \Delta R_2 = 0,38 \Omega$$

$$\text{Messergebnis: } R_2 = \bar{R}_2 \pm \Delta R_2 = (41,5 \pm 0,38) \Omega$$

$$\text{b) } \bar{R} = \frac{\bar{R}_1 \bar{R}_2}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2} = 29,06 \Omega$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - 1 \cdot R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}; \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$\Delta R_{\max} = \left| \frac{\partial R}{\partial R_1} \Delta R_1 \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial R_2} \Delta R_2 \right| = \frac{\bar{R}_2^2 \Delta R_1 + \bar{R}_1^2 \Delta R_2}{(\bar{R}_1 + \bar{R}_2)^2} = 0,22 \Omega$$

$$\text{Messergebnis: } R = (29,06 \pm 0,22) \Omega$$

$$34) \quad \text{a) Lösungsweg wie in 33); } b = (18,0 \pm 0,10) \text{ cm; } h = (10,0 \pm 0,11) \text{ cm}$$

$$\text{b) } \bar{W} = \frac{1}{6} \bar{b} \bar{h}^2 = 300 \text{ cm}^3$$

$$\Delta W_{\max} = \left| \frac{\partial W}{\partial b} \Delta b \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial h} \Delta h \right| = \frac{1}{6} \bar{h}^2 \Delta b + \frac{1}{3} \bar{b} \bar{h} \Delta h = 8,27 \text{ cm}^3 \approx 8,3 \text{ cm}^3$$

$$\text{Messergebnis: } W = (300 \pm 8,3) \text{ cm}^3$$

$$35) \quad m = m(R; \varrho) = \varrho V = \frac{4}{3} \pi \varrho R^3; \quad \bar{m} = \frac{4}{3} \pi \bar{\varrho} \bar{R}^3 = 19015,5 \text{ g} \approx 19,016 \text{ kg}$$

$$\Delta m_{\max} = \left| \frac{\partial m}{\partial R} \Delta R \right| + \left| \frac{\partial m}{\partial \varrho} \Delta \varrho \right| = 4\pi \bar{\varrho} \bar{R}^2 \Delta R + \frac{4}{3} \pi \bar{R}^3 \Delta \varrho = 1538,1 \text{ g} \approx 1,538 \text{ kg}$$

$$\text{Messergebnis: } m = (19,016 \pm 1,538) \text{ kg}$$

Abschnitt 3

Hinweis: Die gewöhnlichen Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte). In vielen Fällen lassen sich die Mehrfachintegrale als *Produkte* gewöhnlicher Integrale darstellen.

$$1) \quad \text{a) } I = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_1^e \frac{1}{y} dy = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \cdot \left[\ln |y| \right]_1^e = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \int_{y=0}^{1-x} (2xy - x^2 - y^2) dy = \left[xy^2 - x^2y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{1-x} =$$

$$= x(1-x)^2 - x^2(1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^3 = \frac{1}{3}(7x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 (7x^3 - 12x^2 + 6x - 1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{7}{4}x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x \right]_0^3 = \frac{77}{4}$$

- 2) Kurvenschnittpunkte (Bild A-9): $\cos x = x^2 - 2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1,455$ (berechnet mit dem Startwert $x_0 = 1,5$)

$$A = 2 \cdot \int_{x=0}^{1,455} \int_{y=x^2-2}^{\cos x} 1 \, dy \, dx = 2 \cdot \int_0^{1,455} (\cos x - x^2 + 2) \, dx =$$

$$= 2 \left[\sin x - \frac{1}{3} x^3 + 2x \right]_0^{1,455} = 5,753$$

- 3) Kurvenschnittpunkte (Bild A-10): $x^2 = -x + 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = 2$

$$A = \int_{x=-3}^2 \int_{y=x^2}^{-x+6} 1 \, dy \, dx = \int_{-3}^2 (-x + 6 - x^2) \, dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 + 6x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^2 = \frac{125}{6}$$

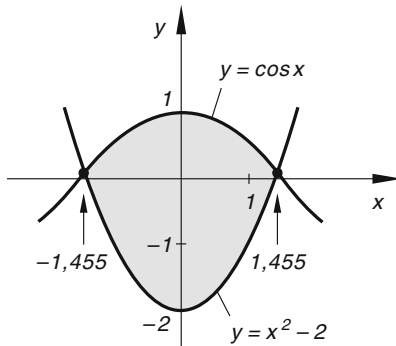


Bild A-9

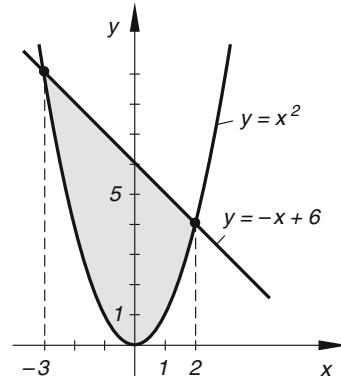


Bild A-10

4) $A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a\varphi} r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \varphi^2 \, d\varphi = \frac{1}{6} a^2 [\varphi^3]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3$ (Bild A-11)

5) $A = \int_{\varphi=\pi/3}^{3\pi/2} \int_{r=0}^{e^{0,1\varphi}} r \, dr \, d\varphi = \int_{\pi/3}^{3\pi/2} \frac{1}{2} \cdot e^{0,2\varphi} \, d\varphi = \frac{5}{2} [e^{0,2\varphi}]_{\pi/3}^{3\pi/2} = 3,333$ (Bild A-12)

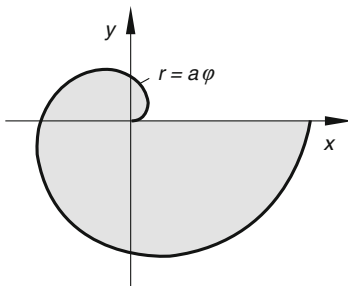


Bild A-11

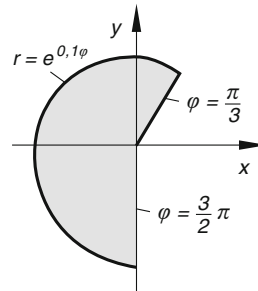


Bild A-12

6) Quadrant	I	II	III	IV
$\sin(2\varphi)$	+	-	+	-

Die Kurve verläuft wegen $\sin(2\varphi) \geq 0$ nur im 1. und 3. Quadrant (identische Teilflächen; Bild A-13 zeigt den Kurvenverlauf im 1. Quadrant).

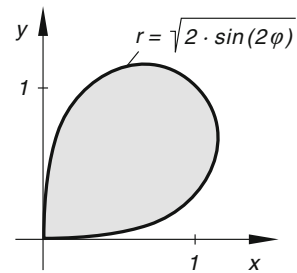


Bild A-13

$$A = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\sqrt{2 \cdot \sin(2\varphi)}} r \, dr \, d\varphi = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi) \, d\varphi = \left[-\cos(2\varphi) \right]_0^{\pi/2} = 2$$

- 7) Kurvenschnittpunkte (Bild A-14): $-x(x-3) = -2x \Rightarrow x^2 - 5x = x(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$

$$\text{a) } A = \int_{x=0}^5 \int_{y=-2x}^{-x^2+3x} 1 \, dy \, dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x_S &= \frac{6}{125} \cdot \int_{x=0}^5 \int_{y=-2x}^{-x^2+3x} x \, dy \, dx = \frac{6}{125} \cdot \int_0^5 x(-x^2 + 3x + 2x) \, dx = \\ &= \frac{6}{125} \cdot \int_0^5 x(-x^2 + 5x) \, dx = \frac{6}{125} \cdot \int_0^5 (-x^3 + 5x^2) \, dx = \\ &= \frac{6}{125} \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 \right]_0^5 = 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{6}{125} \cdot \int_{x=0}^5 \int_{y=-2x}^{-x^2+3x} y \, dy \, dx = \\ &= \frac{3}{125} \cdot \int_0^5 [(-x^2 + 3x)^2 - (-2x)^2] \, dx = \\ &= \frac{3}{125} \cdot \int_0^5 (x^4 - 6x^3 + 5x^2) \, dx = \\ &= \frac{3}{125} \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 \right]_0^5 = -2,5 \end{aligned}$$

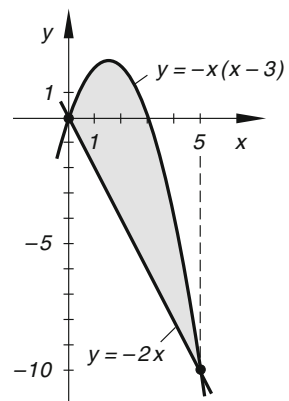


Bild A-14

- 8) Die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur x -Achse (siehe Bild III-61 in Kap. III, Abschnitt 3.1.3), der Schwerpunkt S liegt daher auf der x -Achse: $y_S = 0$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cdot \cos\varphi + \cos^2\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2} \left[\varphi + 2 \cdot \sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} (2\pi + \pi) = \frac{3}{2} \pi \quad (\text{Integral: 229 mit } a = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{2}{3\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r^2 \cdot \cos\varphi \, dr \, d\varphi = \frac{2}{9\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^3 \cdot \cos\varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{2}{9\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + 3 \cdot \cos^2\varphi + 3 \cdot \cos^3\varphi + \cos^4\varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{2}{9\pi} \left[\sin\varphi + 3 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) + 3 \left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \right) + \frac{\cos^3\varphi \cdot \sin\varphi}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{9\pi} \left(3\pi + \frac{3}{4} \pi \right) = \frac{2}{9\pi} \cdot \frac{15}{4} \pi = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

(Integrale: 229, 230 mit $a = 1$ und 231 mit $n = 4$ und $a = 1$)

- 9) Kurvenschnittpunkte (Bild A-15): $2 - 3x^2 = -x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$
Die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y -Achse, der Schwerpunkt S liegt daher auf der y -Achse: $x_S = 0$.

$$A = 2 \cdot \int_{x=0}^1 \int_{y=-x^2}^{2-3x^2} 1 \, dy \, dx = 2 \cdot \int_0^1 (2 - 2x^2) \, dx = 2 \left[2x - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{3}{8} \cdot 2 \cdot \int_{x=0}^1 \int_{y=-x^2}^{2-3x^2} y \, dy \, dx = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \int_0^1 [(2 - 3x^2)^2 - (-x^2)^2] \, dx = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \int_0^1 (4 - 12x^2 + 8x^4) \, dx = \\ &= \frac{3}{8} \left[4x - 4x^3 + \frac{8}{5} x^5 \right]_0^1 = 0,6 \end{aligned}$$

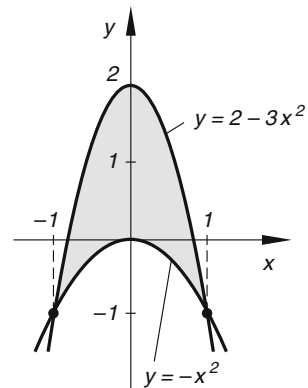


Bild A-15

- 10) Die Integrale jeweils in *zwei* Teilintegrale aufspalten, da die Gerade $y = x$ im Intervall $-1 \leq x \leq 0$ *untere* Berandung, im Intervall $0 \leq x \leq 3$ dagegen *obere* Berandung ist. Flächeninhalt (elementar berechnet): $A = 5$

$$x_S = \frac{1}{5} \left[\int_{x=-1}^0 \int_{y=x}^0 x \, dy \, dx + \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^x x \, dy \, dx \right] = \frac{1}{5} \left[\int_{-1}^0 (-x^2) \, dx + \int_0^3 x^2 \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{5} \left[\left[-\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 \right] = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3} + 9 \right) = \frac{26}{15}$$

$$y_S = \frac{1}{5} \left[\int_{x=-1}^0 \int_{y=x}^0 y \, dy \, dx + \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^x y \, dy \, dx \right] = \frac{13}{15}$$

- 11) Nach Bild A-16:

$$A = \int_{x=1}^5 \int_{y=0,1x-0,1}^{\ln x} 1 \, dy \, dx = \int_1^5 (\ln x - 0,1x + 0,1) \, dx =$$

$$= \left[x \cdot \ln x - x - 0,05x^2 + 0,1x \right]_1^5 = 3,247 \quad (\text{Integral: 332})$$

$$x_S = \frac{1}{3,247} \cdot \int_{x=1}^5 \int_{y=0,1x-0,1}^{\ln x} x \, dy \, dx = \frac{1}{3,247} \cdot \int_1^5 (x \cdot \ln x - 0,1x^2 + 0,1x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{3,247} \left[\frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{30} x^3 + \frac{1}{20} x^2 \right]_1^5 = 3,445 \quad (\text{Integral: 337})$$

$$y_S = \frac{1}{3,247} \cdot \int_{x=1}^5 \int_{y=0,1x-0,1}^{\ln x} y \, dy \, dx = \frac{1}{6,494} \cdot \int_1^5 \left((\ln x)^2 - \frac{1}{100} x^2 + \frac{2}{100} x - \frac{1}{100} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6,494} \left[x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x - \frac{1}{300} x^3 + \frac{1}{100} x^2 - \frac{1}{100} x \right]_1^5 = 0,715$$

(Integral: 333)

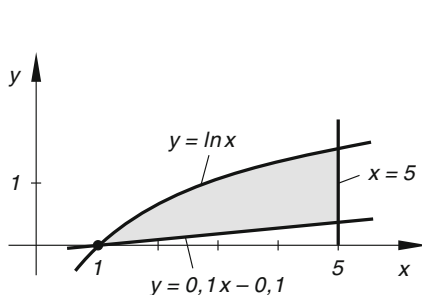


Bild A-16

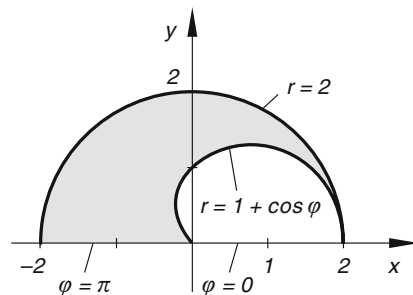


Bild A-17

12) Nach Bild A-17:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=1+\cos\varphi}^2 r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} [4 - (1 + \cos\varphi)^2] \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} (3 - 2 \cdot \cos\varphi - \cos^2\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2} \left[3\varphi - 2 \cdot \sin\varphi - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{5}{4} \pi \quad (\text{Integral: 229 mit } a = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{4}{5\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=1+\cos\varphi}^2 r^2 \cdot \cos\varphi \, dr \, d\varphi = \frac{4}{15\pi} \cdot \int_0^{\pi} [8 - (1 + \cos\varphi)^3] \cdot \cos\varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{4}{15\pi} \cdot \int_0^{\pi} (7 \cdot \cos\varphi - 3 \cdot \cos^2\varphi - 3 \cdot \cos^3\varphi - \cos^4\varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{4}{15\pi} \left[7 \cdot \sin\varphi - 3 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) - 3 \left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \right) - \frac{\cos^3\varphi \cdot \sin\varphi}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \right]_0^{\pi} = \frac{4}{15\pi} \left(-\frac{3}{2} \pi - \frac{3}{8} \pi \right) = \frac{4}{15\pi} \left(-\frac{15}{8} \pi \right) = -0,5 \end{aligned}$$

(Integrale: 229, 230 mit $a = 1$; 231 mit $n = 4$ und $a = 1$)

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{4}{5\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=1+\cos\varphi}^2 r^2 \cdot \sin\varphi \, dr \, d\varphi = \frac{4}{15\pi} \cdot \int_0^{\pi} [8 - (1 + \cos\varphi)^3] \cdot \sin\varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{4}{15\pi} \cdot \int_0^{\pi} (7 \cdot \sin\varphi - 3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - 3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi - \sin\varphi \cdot \cos^3\varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{4}{15\pi} \left[-7 \cdot \cos\varphi - \frac{3}{2} \cdot \sin^2\varphi + \cos^3\varphi + \frac{1}{4} \cdot \cos^4\varphi \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{4}{15\pi} \left(7 - 1 + \frac{1}{4} + 7 - 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{15\pi} \cdot 12 = \frac{16}{5\pi} = 1,019 \end{aligned}$$

(Integrale: 254 mit $a = 1$; 256 mit $a = 1$ und $n = 2$ bzw. $n = 3$)

$$\begin{aligned} 13) \quad I_x &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^R r^3 \cdot \sin^2\varphi \, dr \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^R r^3 \, dr = \\ &= \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{\pi}{16} R^4 \end{aligned}$$

$$I_y = I_x = \frac{\pi}{16} R^4 \quad (\text{aus Symmetriegründen}); \quad I_p = I_x + I_y = \frac{\pi}{8} R^4$$

(Integral: 205 mit $a = 1$)

14) Kurvenschnittpunkte: $\cos x = 0,5 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \pi/3 \Rightarrow a = -\pi/3; b = \pi/3$

$$\text{a) } A = 2 \cdot \int_{x=0}^{\pi/3} \int_{y=0,5}^{\cos x} 1 \, dy \, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/3} (\cos x - 0,5) \, dx = 2 \left[\sin x - 0,5x \right]_0^{\pi/3} = 0,685$$

b) $x_S = 0$ (aus Symmetriegründen, die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse)

$$y_S = \frac{1}{0,685} \cdot 2 \cdot \int_{x=0}^{\pi/3} \int_{y=0,5}^{\cos x} y \, dy \, dx = \frac{1}{0,685} \cdot \int_0^{\pi/3} (\cos^2 x - 0,25) \, dx =$$

$$= \frac{1}{0,685} \cdot \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} - 0,25x \right]_0^{\pi/3} = 0,698 \quad (\text{Integral: 229 mit } a = 1)$$

$$\text{c) } I_x = 2 \cdot \int_{x=0}^{\pi/3} \int_{y=0,5}^{\cos x} y^2 \, dy \, dx = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\pi/3} (\cos^3 x - 0,125) \, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - 0,125x \right]_0^{\pi/3} = 0,346 \quad (\text{Integral: 230 mit } a = 1)$$

$$I_y = 2 \cdot \int_{x=0}^{\pi/3} \int_{y=0,5}^{\cos x} x^2 \, dy \, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/3} (x^2 \cdot \cos x - 0,5x^2) \, dx =$$

$$= 2 \left[2x \cdot \cos x + (x^2 - 2) \cdot \sin x - \frac{1}{6} x^3 \right]_0^{\pi/3} = 0,147 \quad (\text{Integral: 233 mit } a = 1)$$

$$I_p = I_x + I_y = 0,493$$

15) Profil spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

$$I_x = 2 \left[\int_{x=0}^a \int_{y=0}^{2a} y^2 \, dy \, dx + \int_{x=a}^b \int_{y=0}^a y^2 \, dy \, dx \right] = 2 \left[\int_0^a \frac{8}{3} a^3 \, dx + \int_a^b \frac{1}{3} a^3 \, dx \right] =$$

$$= 2 \left[\frac{8}{3} a^3 [x]_0^a + \frac{1}{3} a^3 [x]_a^b \right] = 2 \left(\frac{7}{3} a^4 + \frac{1}{3} a^3 b \right) = \frac{2}{3} a^3 (7a + b)$$

$$I_y = 2 \left[\int_{x=0}^a \int_{y=0}^{2a} x^2 \, dy \, dx + \int_{x=a}^b \int_{y=0}^a x^2 \, dy \, dx \right] = 2 \left(\frac{1}{3} a^4 + \frac{1}{3} a b^3 \right) = \frac{2}{3} a (a^3 + b^3)$$

$$I_p = I_x + I_y = \frac{2}{3} a (8a^3 + a^2 b + b^3)$$

$$\text{16) } I_p = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\sqrt[4]{\cos(\varphi/4)}} r^3 \, dr \, d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \cdot \cos(\varphi/4) \, d\varphi = \left[\sin(\varphi/4) \right]_0^{\pi} = 0,707$$

- 17) a) *Kreisgleichung* in Polarkoordinaten: $r = 2R \cdot \cos \varphi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$

Herleitung: $x = r \cdot \cos \varphi$ und $y = r \cdot \sin \varphi$ in die vorgegebene Kreisgleichung einsetzen. Die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur x -Achse (Faktor 2 bei den nachfolgenden Integralen).

$$I_x = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2R \cdot \cos \varphi} r^3 \cdot \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi = 8R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cdot \cos^4 \varphi \, d\varphi =$$

$$= 8R^4 \left[\frac{\sin^3 \varphi \cdot \cos^3 \varphi}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin(4\varphi)}{32} \right) \right]_0^{\pi/2} = 8R^4 \cdot \frac{1}{32} \pi = \frac{\pi}{4} R^4$$

(Integrale: 258 mit $a = 1$, $m = 2$ und $n = 4$; 257 mit $a = 1$)

$$I_y = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2R \cdot \cos \varphi} r^3 \cdot \cos^2 \varphi \, dr \, d\varphi = 8R^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^6 \varphi \, d\varphi =$$

$$= 8R^4 \left[\frac{\cos^5 \varphi \cdot \sin \varphi}{6} + \frac{5 \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi}{24} + \frac{5}{8} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{5}{4} \pi R^4$$

(Integrale: 231 mit $a = 1$ und $n = 6$ bzw. $n = 4$; 229 mit $a = 1$)

$$I_p = I_x + I_y = \frac{3}{2} \pi R^4$$

- b) x -Achse ist Schwerpunktachse: $I_x = I_{x_0} = \frac{\pi}{4} R^4$

y -Achse verläuft im Abstand $d = R$ parallel zur Schwerpunktachse S_y :

$$I_y = I_S + A d^2 = I_{y_0} + A d^2 = \frac{\pi}{4} R^4 + \pi R^4 = \frac{5}{4} \pi R^4$$

z -Achse verläuft im Abstand $d = R$ parallel zur Schwerpunktachse S_z :

$$I_p = I_S + A d^2 = I_{p_0} + A d^2 = \frac{\pi}{2} R^4 + \pi R^4 = \frac{3}{2} \pi R^4$$

- 18) Nach Aufgabe 13) ist $I_x = I_y = \frac{\pi}{8} R^4$ und $I_p = \frac{\pi}{4} R^4$. Aus Bild A-18 folgt dann für die durch den Schwerpunkt $S = \left(0; \frac{4}{3\pi} R\right)$ gehenden Achsen nach dem *Steinerschen Satz*:

$$\text{Schwerpunktachse } S_x: I_x = I_{S_x} + A y_S^2 \Rightarrow I_{S_x} = I_x - A y_S^2 = 0,110 R^4$$

Schwerpunktachse S_y (= y -Achse):

$$I_y = I_{S_y} \Rightarrow I_{S_y} = \frac{\pi}{8} R^4$$

Schwerpunktachse S_p (parallel zur z -Achse):

$$I_p = I_{S_p} + A y_S^2 \Rightarrow$$

$$I_{S_p} = I_p - A y_S^2 = 0,502 R^4$$

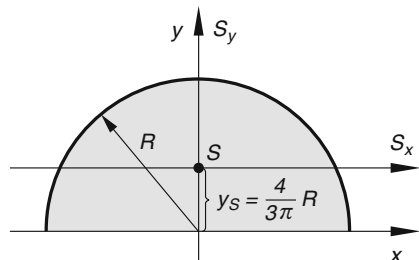


Bild A-18

$$19) \quad a) \quad \int_{z=0}^{\pi} x^2 y \cdot \cos(yz) dz = x^2 y \cdot \int_{z=0}^{\pi} \cos(yz) dz = x^2 y \left[\frac{\sin(yz)}{y} \right]_{z=0}^{\pi} = x^2 \cdot \sin(\pi y)$$

$$I = \int_{x=0}^1 \int_{y=1}^4 x^2 \cdot \sin(\pi y) dy dx = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_1^4 \sin(\pi y) dy = \\ = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \cdot \left[-\frac{\cos(\pi y)}{\pi} \right]_1^4 = \left(\frac{1}{3} \right) \cdot \left(-\frac{2}{\pi} \right) = -\frac{2}{3\pi}$$

$$b) \quad \int_{z=y}^{y^2} y \cdot \sin x \cdot z dz = y \cdot \sin x \cdot \int_{z=y}^{y^2} z dz = y \cdot \sin x \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=y}^{y^2} = \frac{1}{2} (y^5 - y^3) \cdot \sin x$$

$$I = \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^1 \frac{1}{2} (y^5 - y^3) \cdot \sin x dy dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin x dx \cdot \int_0^1 (y^5 - y^3) dy = \\ = \frac{1}{2} \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{6} y^6 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot \left(-\frac{1}{12} \right) = -\frac{1}{24}$$

- 20) Gleichung der Ellipse im x, z -Koordinatensystem: $b^2 x^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2$. Mit der Substitution $x \rightarrow r$ erhält man hieraus die Funktionsgleichung der Oberfläche des *Rotationsellipsoids* (in Zylinderkoordinaten):

$$b^2 r^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}$$

(obere und untere Begrenzungsfläche, sie liefern die Grenzen der z -Integration). Projektionsbereich in der x, y -Ebene ist der *Kreis* mit dem Radius a : $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Aus *Symmetriegründen* ist dann (die x, y -Ebene halbiert den Körper, Faktor 2 im Integral):

$$V = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \int_{z=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2}} r dz dr d\varphi = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \frac{b}{a} r \sqrt{a^2 - r^2} dr d\varphi = \\ = \frac{2b}{a} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr}_{\text{Integral 142}} = \frac{2b}{a} \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - r^2)^3} \right]_0^a = \\ = \frac{4\pi b}{a} \cdot \frac{1}{3} a^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 b \quad (\text{Integral: 142})$$

- 21) Gleichung des Kreises: $x^2 + z^2 = R^2$. Die Substitution $x \rightarrow r$ liefert hieraus die Gleichung der Kugeloberfläche (in Zylinderkoordinaten): $r^2 + z^2 = R^2$. *Obere* Begrenzungsfläche ist $z = \sqrt{R^2 - r^2}$, *untere* Begrenzungsfläche die zur x, y -Ebene parallele *Ebene* $z = R - h$. Die Projektion der Kugelhaube in die x, y -Ebene ergibt einen *Kreis* vom Radius R_0 , für den nach Bild III-101 (Seite 341) gilt: $R_0^2 + (R - h)^2 = R^2$, d. h. $R_0 = \sqrt{2Rh - h^2}$. Daher gilt für die Projektionsfläche (Kreisfläche): $0 \leq r \leq R_0$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0} \int_{z=R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0} r [\sqrt{R^2-r^2} - (R-h)] \, dr \, d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} \underbrace{1 \, d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{R_0} [r\sqrt{R^2-r^2} - (R-h)r] \, dr}_{\text{Integral 142 mit } a=R} = \\
 &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(R^2-r^2)^3} - \frac{1}{2} (R-h)r^2 \right]_0^{R_0} = \\
 &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} \sqrt{\underbrace{(R^2-R_0^2)^3}_{(R-h)^2}} - \frac{1}{2} (R-h) \underbrace{R_0^2}_{2Rh-h^2} + \frac{1}{3} R^3 \right] = \\
 &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} (R-h)^3 - \frac{1}{2} (R-h)(2Rh-h^2) + \frac{1}{3} R^3 \right] = \frac{\pi}{3} h^2 (3R-h)
 \end{aligned}$$

Berechnung des *Schwerpunktes* $S = (0; 0; z_S)$ auf der z -Achse:

$$\begin{aligned}
 z_S &= \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0} \int_{z=R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} z r \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_0} \frac{1}{2} r \underbrace{[R^2-r^2 - (R-h)^2]}_{-r^2+2Rh-h^2 = -r^2+R_0^2} \, dr \, d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2V} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{1 \, d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^{R_0} (-r^3 + R_0^2 r) \, dr = \frac{\pi}{V} \left[-\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} R_0^2 r^2 \right]_0^{R_0} = \frac{\pi}{V} \cdot \frac{1}{4} R_0^4 = \\
 &= \frac{\pi R_0^4}{4V} = \frac{3\pi(2Rh-h^2)^2}{4\pi h^2(3R-h)} = \frac{3h^2(2R-h)^2}{4h^2(3R-h)} = \frac{3(2R-h)^2}{4(3R-h)}
 \end{aligned}$$

- 22) Gleichung des (rotierenden) *Kreises*: $(x-R)^2 + z^2 = r_0^2$. Mit der Substitution $x \rightarrow r$ erhält man hieraus die Gleichung des *Torus* (in Zylinderkoordinaten): $(r-R)^2 + z^2 = r_0^2$. Damit ist $z = \sqrt{r_0^2 - (r-R)^2}$ mit $R-r_0 \leq r \leq R+r_0$ die Gleichung der *oberen* Randfläche und $z = 0$ die *untere* Randfläche (die x, y -Ebene *halbiert* den Torus, daher Faktor 2 bei der Integration). Die Projektion des Torus in die x, y -Ebene ergibt den in Bild A-19 skizzierten *Kreisring* mit dem Innenradius $r_i = R-r_0$ und dem Außenradius $r_a = R+r_0$.

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R-r_0}^{R+r_0} \int_{z=0}^{\sqrt{r_0^2-(r-R)^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi = \\
 &= 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R-r_0}^{R+r_0} r \sqrt{r_0^2 - (r-R)^2} \, dr \, d\varphi = \\
 &= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{1 \, d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_{R-r_0}^{R+r_0} r \sqrt{r_0^2 - \underbrace{(r-R)^2}_u} \, dr
 \end{aligned}$$

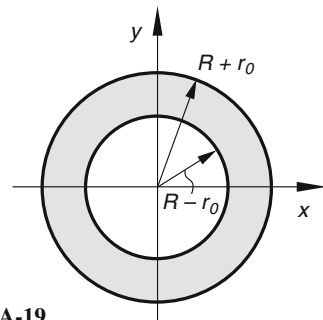


Bild A-19

Substitution: $u = r - R$, $r = u + R$, $dr = du$; untere bzw. obere Grenze: $-r_0$ bzw. r_0

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \cdot \int_{-r_0}^{r_0} (u + R) \sqrt{r_0^2 - u^2} du = 4\pi \cdot \int_{-r_0}^{r_0} \left(u \sqrt{r_0^2 - u^2} + R \sqrt{r_0^2 - u^2} \right) du = \\ &= 4\pi \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(r_0^2 - u^2)^3} + \frac{R}{2} \left(u \sqrt{r_0^2 - u^2} + r_0^2 \cdot \arcsin \left(\frac{u}{r_0} \right) \right) \right]_{-r_0}^{r_0} = \\ &= 4\pi \left[\frac{R}{2} \left(r_0^2 \cdot \underbrace{\arcsin 1}_{\pi/2} - r_0^2 \cdot \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\pi/2} \right) \right] = 4\pi \cdot \frac{R}{2} r_0^2 \cdot \pi = 2\pi^2 R r_0^2 \end{aligned}$$

(Integrale: 142 und 141, jeweils mit $a = r_0$)

- 23) Wir denken uns die Wassermenge m im Schwerpunkt $S = (0; 0; z_S)$ der mit Wasser gefüllten Halbkugel vereinigt. Für die *Mindestarbeit* (Hubarbeit) gilt dann:

$$W_{\min} = m g z_S \quad (\text{Erdbeschleunigung: } g = 9,81 \text{ m/s}^2)$$

Schwerpunktberechnung (auf zwei verschiedene Arten)

- a) Wir beziehen uns auf Aufgabe 21) (Kugelhaube). Für $h = R$ geht die Kugelhaube in eine *Halbkugel* über, deren Schwerpunkt vom Mittelpunkt der Kugel die Entfernung $\frac{3}{8} R$ besitzt. Der Schwerpunkt der gefüllten Halbkugel liegt somit auf der z -Achse im Abstand von $\frac{5}{8} R = \frac{15}{8} \text{ m}$ über dem *tiefsten* Punkt. Somit gilt für die Höhenkoordinate des Schwerpunktes:

$$z_S = 10 \text{ m} + \frac{15}{8} \text{ m} = \frac{95}{8} \text{ m} = 11,875 \text{ m}$$

- b) Berechnung der Schwerpunktskoordinate über ein *Dreifachintegral*: Der kugelförmige Behälter entsteht durch Drehung des Kreises $x^2 + (z - 13)^2 = 9$ um die z -Achse. Die Kugeloberfläche lautet damit in Zylinderkoordinaten (Substitution $x \rightarrow r$): $r^2 + (z - 13)^2 = 9$

$$\text{Untere Randfläche: } z = 13 - \sqrt{9 - r^2}$$

$$\text{Obere Randfläche: } z = 13 \text{ (Ebene parallel zur } x, y\text{-Ebene)}$$

Projektion in die x, y -Ebene ergibt den *Integrationsbereich* (Kreisfläche) $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Volumen der Halbkugel: $V = 18\pi$ (in m^3).

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{18\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 \int_{z=13-\sqrt{9-r^2}}^{13} r z dz dr d\varphi = \\ &= \frac{1}{18\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 \frac{1}{2} r \left[\underbrace{169 - (13 - \sqrt{9 - r^2})^2}_{26\sqrt{9 - r^2} - 9 + r^2} \right] dr d\varphi = \\ &= \frac{1}{36\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^3 (26r\sqrt{9 - r^2} - 9r + r^3) dr}_{\text{Integral 142 mit } a=3} = \\ &= \frac{1}{36\pi} \cdot 2\pi \left[-\frac{26}{3} \sqrt{(9 - r^2)^3} - \frac{9}{2} r^2 + \frac{1}{4} r^4 \right]_0^3 = 11,875 \quad (\text{in m}) \end{aligned}$$

Berechnung der Mindestarbeit

Mit der Wassermenge $m = \rho V = \rho \left(\frac{2}{3} \pi R^3 \right) = 56\,548,7 \text{ kg}$ folgt dann:

$$W_{\min} = m g z_S = 6\,587\,566 \text{ Nm}$$

- 24) Gleichung des Kegelmantels in Zylinderkoordinaten (siehe hierzu Bild III-75 in Kap. III):

$$z = -\frac{H}{R}(r - R) \quad \text{mit} \quad 0 \leq r \leq R \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\text{Kegelvolumen: } V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{3}{\pi R^2 H} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} z r dz dr d\varphi = \frac{3H}{2\pi R^4} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r(r-R)^2 dr d\varphi = \\ &= \frac{3H}{2\pi R^4} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^R (r^3 - 2Rr^2 + R^2 r) dr = \\ &= \frac{3H}{2\pi R^4} \cdot 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{2}{3} Rr^3 + \frac{1}{2} R^2 r^2 \right]_0^R = \frac{3H}{R^4} \cdot \frac{1}{12} R^4 = \frac{H}{4} \end{aligned}$$

- 25) Randflächen (siehe Bild A-20): $z = 3$ (oben) und $z = \sqrt{r}$ (unten):

$$\begin{aligned} V &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^9 \int_{z=\sqrt{r}}^3 r dz dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^9 r(3 - \sqrt{r}) dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \cdot \int_0^9 (3r - r^{3/2}) dr = 2\pi \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{2}{5} r^{5/2} \right]_0^9 = 48,6\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{48,6\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^9 \int_{z=\sqrt{r}}^3 z r dz dr d\varphi = \frac{1}{48,6\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^9 \frac{1}{2} r(9 - r) dr d\varphi = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 48,6\pi} \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \cdot \int_0^9 (9r - r^2) dr = \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 48,6} \cdot 2\pi \left[\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^9 = \\ &= \frac{1}{48,6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot 729 = 2,5 \end{aligned}$$

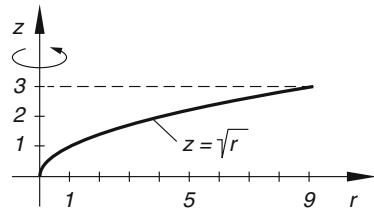


Bild A-20

Schwerpunkt: $S = (0; 0; 2,5)$

- 26) a) Obere Halbkugel (siehe Bild III-76 in Kap. III) in Zylinderkoordinaten: $r^2 + z^2 = R^2$ (mit $z \geq 0$). Somit: $z = \sqrt{R^2 - r^2}$ mit $0 \leq r \leq R$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} J &= \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} r^3 dz dr d\varphi = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr d\varphi = \\ &= \varrho \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr}_{\text{Integral 144 mit } a=R} = 2\pi\varrho \left[\frac{1}{5} \sqrt{(R^2 - r^2)^5} - \frac{R^2}{3} \sqrt{(R^2 - r^2)^3} \right]_0^R = \\ &= 2\pi\varrho \left(-\frac{1}{5} R^5 + \frac{1}{3} R^5 \right) = 2\pi\varrho \cdot \frac{2}{15} R^5 = \frac{4}{15} \pi\varrho R^5 \end{aligned}$$

- b) Nach a) folgt für das Massenträgheitsmoment einer *Vollkugel*, bezogen auf einen *Durchmesser* (Symmetrieachse = Schwerpunktachse):

$$J_S = 2J = \frac{8}{15} \pi\varrho R^5 = \frac{2}{5} mR^2 \quad \left(\text{Masse } m = \varrho V = \varrho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

Der Abstand zwischen der Symmetrieachse und der Tangente beträgt $d = R$. Der *Satz von Steiner* liefert dann für das auf eine *Tangente* bezogene Massenträgheitsmoment J_T :

$$J_T = J_S + mR^2 = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2$$

$$\begin{aligned} 27) \quad J_S &= \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{z=0}^H r^3 dz dr d\varphi = \varrho \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot \underbrace{\int_0^H 1 dz}_H = \\ &= \varrho \cdot 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{R_1}^{R_2} \cdot H = \frac{1}{2} \pi\varrho H (R_2^4 - R_1^4) \end{aligned}$$

$$28) \quad \text{a) } R_1 = 0, \quad R_2 = R \quad \Rightarrow \quad J_S = \frac{1}{2} \pi\varrho HR^4 = \frac{1}{2} mR^2 \quad (\text{Masse: } m = \varrho V = \varrho\pi R^2 H)$$

- b) Nach *Steiner* (Abstand Mantellinie – Symmetrieachse: $d = R$):

$$J_M = J_S + md^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

- 29) Nach Bild III-75 in Kap. III (siehe auch Lösung zur Aufgabe 24):

$$\begin{aligned} J &= \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{-\frac{H}{R}(r-R)} r^3 dz dr d\varphi = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{H}{R} (Rr^3 - r^4) dr d\varphi = \\ &= \frac{\varrho H}{R} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^R (Rr^3 - r^4) dr = \frac{\varrho H}{R} \cdot 2\pi \left[\frac{1}{4} Rr^4 - \frac{1}{5} r^5 \right]_0^R = \\ &= \frac{2\pi\varrho H}{R} \cdot \frac{1}{20} R^5 = \frac{1}{10} \pi\varrho HR^4 = \frac{3}{10} mR^2 \quad \left(\text{Masse: } m = \varrho V = \frac{1}{3} \pi\varrho R^2 H \right) \end{aligned}$$

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

Hinweise

- 1) Abkürzung: Dgl = Differentialgleichung
- 2) $C, C_1, C_2, C_3 \dots$ bzw. K : reelle Integrationskonstanten
- 3) Die anfallenden Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte).
- 4) Vorgehensweise bei der Bestimmung der Parameter im Lösungsansatz für eine *partikuläre* Lösung y_p : Den Ansatz y_p aus der entsprechenden *Tabelle* entnehmen und in die Dgl einsetzen. Die erhaltene *Bestimmungsgleichung* mit den noch unbekanntenen Parametern und der unabhängigen Variablen (in der Regel x bzw. t) haben wir grau unterlegt. Der *Koeffizientenvergleich* (fehlende Glieder mit dem Faktor 0 ergänzen) führt dann zu einem eindeutig lösbaeren *linearen Gleichungssystem*.

Abschnitt 1

- 1) y und y' in die Dgl einsetzen (Ergebnis: $0 = 0$). y enthält genau *einen* Parameter C und ist somit die *allgemeine* Lösung der Dgl. Lösungskurve durch P : $y = \frac{16x}{1+x}$.
- 2) y, y' und y'' in die Dgl einsetzen (Ergebnis: $0 = 0$). y ist die *allgemeine* Lösung der Dgl, da diese Funktion *zwei* unabhängige Parameter (C_1 und C_2) enthält.
- 3) Man differenziert $u_C(t)$ und setzt anschließend Funktion und Ableitung in die Dgl ein und erhält die *Identität* $u_0 = u_0$.
- 4) $s(t) = 5 \cdot \cos t, \quad v(t) = -5 \cdot \sin t$

Abschnitt 2

- 1) a) *Isoklinen*: $y = 2ax, x > 0$
($a \in \mathbb{R}$; Halbgeraden)

Richtungsfeld: Bild A-21
(Feld spiegelsymmetrisch zur x -Achse; gezeichnet: 1. Quadrant)

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned} \ln |y| &= \ln \sqrt{x} + \ln |C| = \\ &= \ln |C \sqrt{x}| \end{aligned}$$

Lösung: $y = C \sqrt{x}, x > 0$

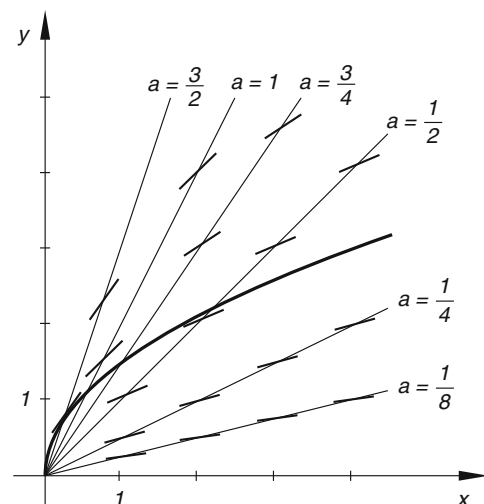


Bild A-21

- b) *Isoklinen:* $y = \text{const.} = a$
 ($a \in \mathbb{R}$; Parallelen zur x -Achse)

Richtungsfeld: Bild A-22 (Feld
 spiegelsymmetrisch zur x -Achse;
 gezeichnet: 1. und 2. Quadrant)

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{y} = dx; \quad \ln|y| = x + \ln|K|$$

$$\text{Lösung: } y = \pm K \cdot e^x = C \cdot e^x$$

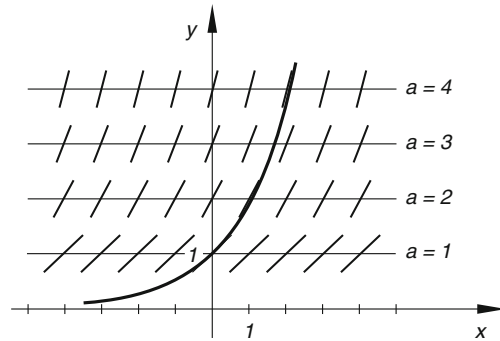


Bild A-22

- 2) a) $u = \frac{y}{x}$; $y = xu$; $y' = u + xu'$ $\Rightarrow u' = \frac{4}{x} \Rightarrow u = 4 \cdot \ln|Cx|$;
Lösung: $y = xu = 4x \cdot \ln|Cx|$
- b) $u = x + y + 1$; $y = u - x - 1$; $y' = u' - 1 \Rightarrow u' = 1 + u^2 \Rightarrow$
 $u = \tan(x + C)$ (*Trennung der Variablen*); *Lösung:* $y = \tan(x + C) - x - 1$
- c) $u = \frac{y}{x}$ (siehe a)) $\Rightarrow xu' = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln|Cx|}$
 (*Trennung der Variablen*; *Integral:* 1 mit $a = 1$, $b = -1/2$ und $n = -2$)
Lösung: $y = \frac{1}{2}x - \frac{x}{\ln|Cx|}$ ($C \neq 0$)
- d) $u = \frac{y}{x}$ (siehe a)) $\Rightarrow xu' = \sin u \Rightarrow \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| = \ln|Cx| \Rightarrow$
 $\tan\left(\frac{u}{2}\right) = Cx \Rightarrow u = 2 \cdot \arctan(Cx)$
 (*Trennung der Variablen*; *Integral:* 214 mit $a = 1$); *Lösung:* $y = 2x \cdot \arctan(Cx)$
- 3) $u = \frac{y}{x}$; $y = xu$; $y' = u + xu'$ $\Rightarrow uu' = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \pm \sqrt{2 \cdot \ln|Cx|}$
 (*Trennung der Variablen*) $\Rightarrow y = xu = \pm x \sqrt{2 \cdot \ln|Cx|}$ ($C \neq 0$)
Lösung: $y_p = x \sqrt{2 \cdot \ln|ex|}$
- 4) a) $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow y = \frac{x}{1 - Cx}$
- b) $\frac{dy}{y} = \frac{x}{1 + x^2} dx \Rightarrow y = C \sqrt{1 + x^2}$ (*Integral:* 32 mit $a = 1$)
- c) $\frac{dy}{(1 - y)^2} = dx \Rightarrow -\frac{du}{u^2} = dx \Rightarrow u = \frac{1}{x + C} \Rightarrow y = \frac{x + C - 1}{x + C}$
 (*Integral:* 1 mit $a = -1$, $b = 1$ und $n = -2$ oder *Integralsubstitution* $u = 1 - y$,
 $du = -dy$)
- d) $\sin y dy = -x dx \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow y = \arccos\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$

5) a) $\frac{dy}{y} = -\cos x \, dx \Rightarrow y = C \cdot e^{-\sin x}$; Lösung: $y_p = 2\pi \cdot e^{1-\sin x}$

b) $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x(x+1)} \Rightarrow y = \frac{Cx}{x+1}$ (Integral: 12 mit $a = b = 1$)

Lösung: $y_p = \frac{x}{x+1}$

c) $y^2 dy = (1-x^2) dx \Rightarrow y = \sqrt[3]{3x-x^3+3C}$

Lösung: $y_p = \sqrt[3]{3x-x^3+3}$

6) a) Substitution: $u = \frac{y}{x}$; $y = xu$; $y' = u + xu' \Rightarrow xu' = u^2 \Rightarrow$

$u = -\frac{1}{\ln|Cx|}$ (Trennung der Variablen) $\Rightarrow y = xu = -\frac{x}{\ln|Cx|}$

Lösung: $y_p = -\frac{x}{\ln|ex|}$

b) Trennung der Variablen: $y dy = 2 \cdot e^{2x} dx \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 \cdot e^{2x} + 2C}$

Lösung: $y_p = \sqrt{2 \cdot e^{2x} + 2}$

7) a) $\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) dx = k dt \Rightarrow$

$\ln|x-a| - \ln|x-b| = \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| = (a-b)(kt + C) \Rightarrow$

$\frac{x-a}{x-b} = K \cdot e^{(a-b)kt}$ mit $K = e^{(a-b)C}$; $x(0) = 0 \Rightarrow K = \frac{a}{b}$

Lösung: $x(t) = ab \frac{e^{(a-b)kt} - 1}{a \cdot e^{(a-b)kt} - b}$, $t \geq 0$

b) Für $a > b$ und $t \rightarrow \infty$ folgt (Regel von L'Hospital): $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = b$

Die Reaktion kommt daher zum Stillstand, wenn alle Atome vom Typ B „verbraucht“ sind.

8) a) $\frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$

b) $v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$, $t \geq 0$ (Bild A-23)

c) $v_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{mg}{k}$

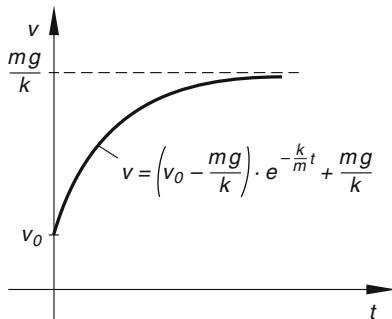


Bild A-23

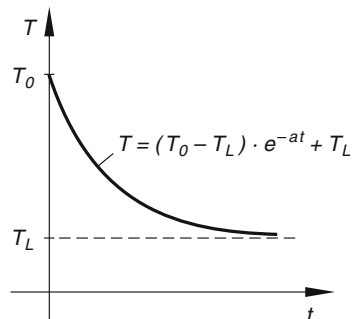


Bild A-24

$$9) \quad \frac{du_C}{u_C} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow u_C = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}; \text{ Lösung: } u_C(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

$$10) \quad \frac{dT}{T - T_L} = -a dt \Rightarrow \ln(T - T_L) = -at + \ln K \Rightarrow T = K \cdot e^{-at} + T_L$$

$$\text{Lösung: } T(t) = (T_0 - T_L) \cdot e^{-at} + T_L, \quad t \geq 0 \quad (\text{Bild A-24})$$

$$\text{Endtemperatur: } T_E = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_L$$

Der Körper nimmt schließlich die Temperatur T_L der vorbeiströmenden Luft an.

$$11) \quad a) \quad (y - 1) dx + (x + 1) dy = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} (y - 1) = \frac{\partial}{\partial x} (x + 1) = 1 \Rightarrow \text{exakte Dgl}$$

$$u_x = y - 1; \quad u_y = x + 1 \Rightarrow u = \int u_x dx = \int (y - 1) dx = (y - 1)x + K(y);$$

$$u_y = x + K'(y) = x + 1 \Rightarrow K'(y) = 1 \Rightarrow K(y) = y + C_1 \Rightarrow$$

$$u = x(y - 1) + y + C_1; \text{ Lösung: } u = \text{const.} \Rightarrow y = \frac{x + C}{x + 1}$$

$$b) \quad \frac{\partial}{\partial y} (2xy - x) = \frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x \Rightarrow \text{exakte Dgl}; \quad u_x = 2xy - x; \quad u_y = x^2$$

$$u = \int u_y dy = \int x^2 dy = x^2 y + K(x); \quad u_x = 2xy + K'(x) = 2xy - x \Rightarrow$$

$$K'(x) = -x \Rightarrow K(x) = -\frac{1}{2} x^2 + C_1 \Rightarrow u = x^2 y - \frac{1}{2} x^2 + C_1$$

$$\text{Lösung: } u = \text{const.} \Rightarrow y = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$c) \quad (e^x \cdot y + \sin x) dx + (e^x + y) dy = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cdot y + \sin x) = \frac{\partial}{\partial x} (e^x + y) = e^x$$

$$u_x = e^x \cdot y + \sin x; \quad u_y = e^x + y \Rightarrow u = \int u_x dx = \int (e^x \cdot y + \sin x) dx =$$

$$= e^x \cdot y - \cos x + K(y); \quad u_y = e^x + K'(y) = e^x + y \Rightarrow K'(y) = y \Rightarrow$$

$$K(y) = \frac{1}{2} y^2 + C_1 \Rightarrow u = e^x \cdot y + \frac{1}{2} y^2 - \cos x + C_1$$

$$\text{Lösung (in impliziter Form): } u = \text{const.} \Rightarrow e^x \cdot y + \frac{1}{2} y^2 - \cos x = C$$

$$12) \quad a) \quad [(1 + x^2)^2 - 2xy] dx + (1 + x^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [(1 + x^2)^2 - 2xy] = -2x \neq \frac{\partial}{\partial x} (1 + x^2) = 2x \Rightarrow \text{nichtexakte Dgl}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x) [(1 + x^2)^2 - 2xy] = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x) \cdot (1 + x^2) \Rightarrow$$

$$\lambda'(x) = \frac{-4x}{1 + x^2} \cdot \lambda(x) \Rightarrow \lambda(x) = \frac{C_1}{(1 + x^2)^2} \quad (\text{Integral: 32 mit } a = 1)$$

$$\text{Integrierender Faktor (wir setzen } C_1 = 1): \lambda(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

$$u_x = 1 - \frac{2xy}{(1+x^2)^2}; \quad u_y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow u = \int u_y dy = \int \frac{1}{1+x^2} dy =$$

$$= \frac{y}{1+x^2} + K(x); \quad u_x = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2} + K'(x) = 1 - \frac{2xy}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$K'(x) = 1 \Rightarrow K(x) = x + C_2 \Rightarrow u = \frac{y}{1+x^2} + x + C_2$$

$$\text{Lösung: } u = \text{const.} \Rightarrow y = -x^3 + Cx^2 - x + C$$

b) $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x} 1 = 0 \Rightarrow$ nichtexakte Dgl

$$\text{Ansatz: } \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x) \cdot (x^2 + y) = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x) \Rightarrow \lambda(x) = \lambda'(x) \Rightarrow \lambda(x) = C_1 \cdot e^x$$

$$\text{Integrierender Faktor (wir setzen } C_1 = 1): \lambda(x) = e^x$$

$$u_x = (x^2 + y) \cdot e^x; \quad u_y = e^x \Rightarrow u = \int u_y dy = \int e^x dy = e^x \cdot y + K(x);$$

$$u_x = e^x \cdot y + K'(x) = (x^2 + y) \cdot e^x \Rightarrow K'(x) = x^2 \cdot e^x \Rightarrow$$

$$K(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + C_2 \quad (\text{Integrale: 313 und 314, jeweils mit } a = 1) \Rightarrow$$

$$u = e^x \cdot y + (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + C_2$$

$$\text{Lösung: } u = \text{const.} \Rightarrow y = C \cdot e^{-x} - x^2 + 2x - 2$$

- 13) a) Linear, homogen b) Nichtlinear (y^2 -Term) c) Linear, inhomogen
 d) Linear, inhomogen e) Nichtlinear ($y' y^2$ -Term) f) Nichtlinear (\sqrt{y} -Term)
 g) Linear, inhomogen h) Nichtlinear (y^2 -Term) i) Linear, inhomogen
 j) Linear, inhomogen k) Nichtlinear ($y' \sqrt{y}$ -Term) l) Linear, inhomogen

14) a) $y = K(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad K'(x) = 4x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow K(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + C$

$$\left(\text{Substitution: } u = \frac{1}{2}x^2 \right); \quad \text{Lösung: } y = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + 4$$

b) $y = \frac{K(x)}{x+1}; \quad K'(x) = e^{2x} + x \cdot e^{2x} \Rightarrow K(x) = \frac{1}{4} (2x+1) \cdot e^{2x} + C$

$$(\text{Integrale: 312, 313 mit } a = 2); \quad \text{Lösung: } y = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x+1) \cdot e^{2x} + C_1}{x+1}$$

c) $y = \frac{K(x)}{x}; \quad K'(x) = x \cdot \sin x \Rightarrow K(x) = \sin x - x \cdot \cos x + C$

$$(\text{Integral: 208 mit } a = 1); \quad \text{Lösung: } y = \frac{\sin x - x \cdot \cos x + C}{x}$$

d) $y = \frac{K(x)}{\cos x}; \quad K'(x) = 1 \Rightarrow K(x) = x + C; \quad \text{Lösung: } y = \frac{x+C}{\cos x}$

e) $y = K(x) \cdot e^{2 \cdot \sin x}; \quad K'(x) = \cos x \cdot e^{-2 \cdot \sin x} \Rightarrow K(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot \sin x} + C$

$$(\text{Substitution: } u = -2 \cdot \sin x); \quad \text{Lösung: } y = C \cdot e^{2 \cdot \sin x} - \frac{1}{2}$$

f) $y = K(x) \cdot x; \quad K'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} \Rightarrow K(x) = x - \frac{4}{x} + C;$

$$\text{Lösung: } y = x^2 + Cx - 4$$

15) $i(t) = K(t) \cdot e^{-2 \cdot \cos t}$; $K'(t) = \sin(2t) \cdot e^{-2 \cdot \cos t} = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t \cdot e^{-2 \cdot \cos t} \Rightarrow$
 $K(t) = \frac{1}{2} (2 \cdot \cos t + 1) \cdot e^{-2 \cdot \cos t} + C$ (Substitution: $u = -2 \cdot \cos t$; Integral: 313
mit $a = 1$); $i(t) = C \cdot e^{2 \cdot \cos t} + \cos t + \frac{1}{2}$

Lösung: $i_p(t) = -\frac{3}{2} \cdot e^{-2+2 \cdot \cos t} + \cos t + \frac{1}{2}$

16) y : Allgemeine Lösung; y_p : Partikuläre Lösung

a) $y = K(x) \cdot x$; $K'(x) = \cos x \Rightarrow K(x) = \sin x + C$;
 $y = Cx + x \cdot \sin x$; $y_p = 2x + x \cdot \sin x$

b) $y = K(x) \cdot \cos x$; $K'(x) = 10 \cdot \sin x \Rightarrow K(x) = -10 \cdot \cos x + C$;
 $y = C \cdot \cos x - 10 \cdot \cos^2 x$; $y_p = -12 \cdot \cos x - 10 \cdot \cos^2 x$

c) $y = \frac{K(x)}{x}$; $K'(x) = \ln x \Rightarrow K(x) = x(\ln x - 1) + C$ (Integral: 332);
 $y = \frac{C}{x} + \ln x - 1$; $y_p = \frac{2}{x} + \ln x - 1$

17) a) $y_0 = C \cdot e^{-4x}$ b) $y_0 = C \cdot e^{-2x}$ c) $y_0 = C \cdot e^{-\frac{8}{3}x}$

d) $y_0 = C \cdot e^{\frac{b}{a}x}$ e) $n_0 = C \cdot e^{-\lambda t}$ f) $y_0 = C \cdot e^{6x}$

g) $i_0 = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ h) $y_0 = C \cdot e^{-9x}$ i) $y_0 = C \cdot e^{\frac{5}{3}ax}$

18) a) $y_0 = K \cdot e^{3x}$; $y = K(x) \cdot e^{3x}$; $K'(x) = x \cdot e^{-2x} \Rightarrow$

$K(x) = -\frac{1}{4} (2x + 1) \cdot e^{-2x} + C$ (Integral: 313 mit $a = -2$)

$y = C \cdot e^{3x} - \frac{1}{4} (2x + 1) \cdot e^x$

b) $y_p = (ax + b) \cdot e^x$; $\underbrace{-2ax + (a - 2b)}_1 = x \Rightarrow a = -1/2$; $b = -1/4$;

$y_p = -\frac{1}{4} (2x + 1) \cdot e^x$; $y = y_0 + y_p = C \cdot e^{3x} - \frac{1}{4} (2x + 1) \cdot e^x$

19) a) $y_0 = C \cdot e^{-x}$; $y_p = ax + b$; $\underbrace{ax + (a + b)}_2 = 2x \Rightarrow a = 2$; $b = -2$;

$y_p = 2x - 2$; $y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-x} + 2x - 2$

b) $y_0 = C \cdot e^{-2x}$; $y_p = A \cdot e^{5x}$; $\underbrace{7A \cdot e^{-2x}}_4 = 4 \cdot e^{-2x} \Rightarrow A = \frac{4}{7}$;

$y_p = \frac{4}{7} \cdot e^{5x}$; $y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-2x} + \frac{4}{7} \cdot e^{5x}$

c) $y_0 = C \cdot e^{-x}$; $y_p = Ax \cdot e^{-x}$ (Störglied und y_0 sind vom gleichen Typ);

$\underbrace{A \cdot e^{-x}}_1 = e^{-x} \Rightarrow A = 1$; $y_p = x \cdot e^{-x}$; $y = y_0 + y_p = (x + C) \cdot e^{-x}$

d) $y_0 = C \cdot e^{4x}$; $y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;

$$\underbrace{(-4A - B)}_5 \cdot \sin x + \underbrace{(A - 4B)}_0 \cdot \cos x = 5 \cdot \sin x \Rightarrow A = -\frac{20}{17}; B = -\frac{5}{17};$$

$$y_p = -\frac{20}{17} \cdot \sin x - \frac{5}{17} \cdot \cos x; \quad y = y_0 + y_p = C \cdot e^{4x} - \frac{20}{17} \cdot \sin x - \frac{5}{17} \cdot \cos x$$

e) $y_0 = C \cdot e^{5x}$; $y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;

$$\underbrace{(-5A - B)}_4 \cdot \sin x + \underbrace{(A - 5B)}_1 \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x + \cos x \Rightarrow$$

$$A = -\frac{19}{26}; \quad B = -\frac{9}{26}; \quad y_p = -\frac{19}{26} \cdot \sin x - \frac{9}{26} \cdot \cos x;$$

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{5x} - \frac{19}{26} \cdot \sin x - \frac{9}{26} \cdot \cos x$$

f) $y_0 = C \cdot e^{6x}$; $y_p = Ax \cdot e^{6x}$ (Störglied und y_0 sind vom gleichen Typ);

$$\underbrace{A \cdot e^{6x}}_3 = 3 \cdot e^{6x} \Rightarrow A = 3; \quad y_p = 3x \cdot e^{6x}; \quad y = y_0 + y_p = (3x + C) \cdot e^{6x}$$

20) a) Trennung der Variablen: $\frac{dy}{y^2 + 1} = x dx \Rightarrow \arctan y = \frac{1}{2} x^2 + C \Rightarrow$

$$y = \tan\left(\frac{1}{2} x^2 + C\right)$$

b) Trennung der Variablen: $\frac{dy}{y} = \sin x dx \Rightarrow y = C \cdot e^{-\cos x}$

c) Trennung der Variablen: $\frac{dy}{y} = x dx \Rightarrow y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

d) Trennung der Variablen, Variation der Konstanten: $y = \frac{K(x)}{x}$; $K'(x) = 2 \cdot \ln x \Rightarrow$

$$K(x) = 2x(\ln x - 1) + C \quad (\text{Integral: 332}); \quad y = 2(\ln x - 1) + \frac{C}{x}$$

e) Trennung der Variablen: $\frac{dy}{y + 1} = 5x^4 dx \Rightarrow y = C \cdot e^{x^5} - 1$

f) Aufsuchen einer partikulären Lösung: $y_0 = K \cdot e^{5x}$;

Ansatz: $y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x + C \cdot \sin(3x) + D \cdot \cos(3x)$;

$$\underbrace{(A - 5B)}_2 \cdot \cos x + \underbrace{(-5A - B)}_0 \cdot \sin x + \underbrace{(3C - 5D)}_0 \cdot \cos(3x) +$$

$$+ \underbrace{(-5C - 3D)}_{-1} \cdot \sin(3x) = 2 \cdot \cos x - \sin(3x) \Rightarrow$$

$$A = 1/13; \quad B = -5/13; \quad C = 5/34; \quad D = 3/34;$$

$$y_p = \frac{1}{13} \cdot \sin x - \frac{5}{13} \cdot \cos x + \frac{5}{34} \cdot \sin(3x) + \frac{3}{34} \cdot \cos(3x);$$

$$y = y_0 + y_p = K \cdot e^{5x} + \frac{1}{13} \cdot \sin x - \frac{5}{13} \cdot \cos x + \frac{5}{34} \cdot \sin(3x) + \frac{3}{34} \cdot \cos(3x)$$

21) a) $y_0 = C \cdot e^{-4x}$; $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

$$\underbrace{4ax^3}_1 + \underbrace{(3a+4b)x^2}_0 + \underbrace{(2b+4c)x}_{-1} + \underbrace{(c+4d)}_0 = x^3 - x \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{4}; \quad b = -\frac{3}{16}; \quad c = -\frac{5}{32}; \quad d = \frac{5}{128}; \quad y_p = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x + \frac{5}{128};$$

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x + \frac{5}{128}$$

$$\text{Lösung: } y = 112,18 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x + \frac{5}{128}$$

b) $y_0 = C \cdot e^x$; $y_p = Ax \cdot e^x$ (Störglied und y_0 sind vom gleichen Typ);

$$A \cdot e^x = e^x \Rightarrow A = 1; \quad y_p = x \cdot e^x; \quad y = y_0 + y_p = (x + C) \cdot e^x;$$

$$\text{Lösung: } y = (x + 1) \cdot e^x$$

c) $y_0 = C \cdot e^{-3x}$; $y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;

$$\underbrace{(A+3B) \cdot \cos x}_{-1} + \underbrace{(3A-B) \cdot \sin x}_0 = -\cos x \Rightarrow A = -\frac{1}{10}; \quad B = -\frac{3}{10};$$

$$y_p = -\frac{1}{10} \cdot \sin x - \frac{3}{10} \cdot \cos x; \quad y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-3x} - \frac{1}{10} \cdot \sin x - \frac{3}{10} \cdot \cos x$$

$$\text{Lösung: } y = \frac{53}{10} \cdot e^{-3x} - \frac{1}{10} \cdot \sin x - \frac{3}{10} \cdot \cos x$$

22) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $i_0 = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

a) Ansatz: $i_p = \text{const.} \Rightarrow i_p = \frac{u_0}{R}; \quad i = i_0 + i_p = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{u_0}{R}$

$$\text{Lösung: } i = \frac{u_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad t \geq 0 \quad (\text{Bild A-25})$$

b) $i_p = At + B$; $\underbrace{(RA)t}_a + \underbrace{(LA+RB)}_0 = at \Rightarrow A = a/R; \quad B = -aL/R^2;$

$$i_p = \frac{a}{R}t - \frac{aL}{R^2}; \quad i = i_0 + i_p = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{a}{R}t - \frac{aL}{R^2}$$

$$\text{Lösung: } i = \frac{aL}{R^2} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1\right) + \frac{a}{R}t, \quad t \geq 0$$

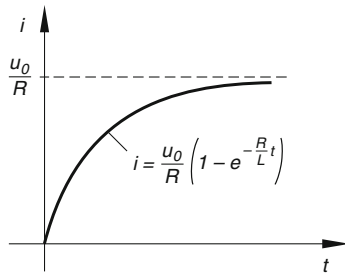


Bild A-25

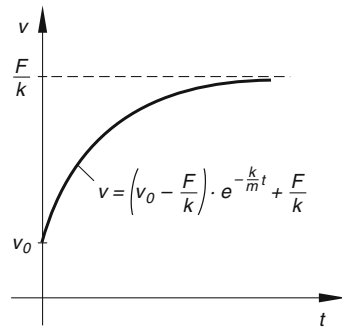


Bild A-26

- 23) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $v_{\text{homogen}} = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$; $v_p = \text{const.} \Rightarrow v_p = \frac{F}{k}$;

$$v(t) = v_{\text{homogen}} + v_p = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}$$

Lösung: $v(t) = \left(v_0 - \frac{F}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}, \quad t \geq 0$ (Bild A-26)

Endgeschwindigkeit: $v_E = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{F}{k}$

- 24) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $i_0 = C \cdot e^{-20t}$; $i_p = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t)$;

$$\underbrace{(20A - 2B)}_{10} \cdot \sin(2t) + \underbrace{(2A + 20B)}_0 \cdot \cos(2t) = 10 \cdot \sin(2t) \Rightarrow$$

$$A = \frac{50}{101}; \quad B = -\frac{5}{101}; \quad i_p = \frac{50}{101} \cdot \sin(2t) - \frac{5}{101} \cdot \cos(2t);$$

$$i = i_0 + i_p = C \cdot e^{-20t} + \frac{50}{101} \cdot \sin(2t) - \frac{5}{101} \cdot \cos(2t)$$

Lösung: $i = \frac{5}{101} [e^{-20t} + 10 \cdot \sin(2t) - \cos(2t)]$

i_0 : Exponentiell abklingender Gleichstrom; i_p : Wechselstrom mit der Periode $T = \pi$

- 25) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $v_0 = C \cdot e^{-\frac{t}{T}}$; $v_p = \text{const.} \Rightarrow v_p = K \hat{u}$;

$$v = v_0 + v_p = C \cdot e^{-\frac{t}{T}} + K \hat{u}; \quad \text{Lösung: } v = K \hat{u} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \quad t \geq 0 \quad (\text{Bild A-27})$$

- 26) a) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $u_{C_0} = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$; $u_{C_p} = \text{const.} \Rightarrow u_{C_p} = u_0$

$$u_C = u_{C_0} + u_{C_p} = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + u_0$$

- b) Lösung: $u_C = u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad t \geq 0$ (Bild A-28)

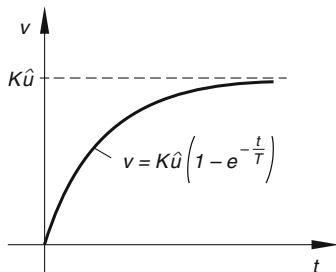


Bild A-27

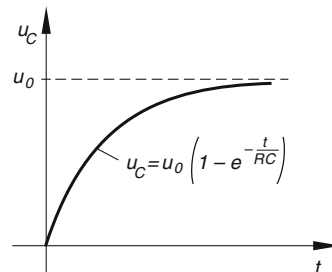


Bild A-28

- 27) Aufsuchen einer partikulären Lösung; $v_0 = C \cdot e^{-\frac{t}{T}}$; $v_p = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$;

$$A \omega T \cdot \cos(\omega t + \varphi) + A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = K_D E \omega \cdot \cos(\omega t)$$

Additionstheoreme für Kosinus und Sinus verwenden, dann ordnen nach Kosinus- bzw. Sinusgliedern, schließlich Koeffizientenvergleich durchführen:

$$\underbrace{A(\omega T \cdot \cos \varphi + \sin \varphi)}_{K_D E \omega} \cdot \cos(\omega t) + \underbrace{A(-\omega T \cdot \sin \varphi + \cos \varphi)}_0 \cdot \sin(\omega t) = K_D E \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad A(\omega T \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) = K_D E \omega \\ \text{(II)} \quad A(-\omega T \cdot \sin \varphi + \cos \varphi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(I)}^2 + \text{(II)}^2 \Rightarrow A = \frac{K_D E \omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi = \frac{1}{\omega T} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega T}\right)$$

$$v_p = \frac{K_D E \omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega T}\right)\right)$$

$$v = v_0 + v_p = C \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \frac{K_D E \omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega T}\right)\right)$$

Nach Ablauf einer gewissen „Einschwingphase“ erhält man ein *sinusförmiges* Ausgangssignal mit der Periode $T = 2\pi/\omega$ des Eingangssignals. Amplitude A und Phase φ sind dabei noch *frequenzabhängige* Größen (sog. *Frequenzgang*).

- 28) Durch die Substitution $u = y^2$, $u' = 2yy'$ (Kettenregel!) geht die Dgl in die lineare Dgl $u' - 0,5u = -0,5(1 + x^2)$ über, die durch Aufsuchen einer partikulären Lösung gelöst wird; $u_0 = C \cdot e^{0,5x}$;

$$u_p = ax^2 + bx + c; \quad \underbrace{-0,5ax^2}_{-0,5} + \underbrace{(2a - 0,5b)x}_0 + \underbrace{(b - 0,5c)}_{-0,5} = -0,5x^2 - 0,5 \Rightarrow$$

$$a = 1; \quad b = 4; \quad c = 9; \quad u_p = x^2 + 4x + 9;$$

$$u = u_0 + u_p = C \cdot e^{0,5x} + x^2 + 4x + 9$$

$$\text{Lösung: } y = \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{C \cdot e^{0,5x} + x^2 + 4x + 9}$$

Abschnitt 3

- 1) a) Konstante Koeffizienten, inhomogen b) Variable Koeffizienten, homogen
 c) Konstante Koeffizienten, homogen d) Konstante Koeffizienten, inhomogen
 e) Variable Koeffizienten, inhomogen f) Konstante Koeffizienten, homogen

- 2) Nach ein- bzw. zweimaliger Integration:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 = -(4,905 \text{ ms}^{-2})t^2 + (30 \text{ ms}^{-1})t + 10 \text{ m}$$

$$v(t) = -gt + v_0 = -(9,81 \text{ ms}^{-2})t + 30 \text{ ms}^{-1}$$

- 3) Durch Einsetzen in die Dgl zeigt man zunächst, dass $y_1(x)$ und $y_2(x)$ (partikuläre) Lösungen sind. Sie bilden eine *Fundamentalebasis* der Dgl, da ihre Wronski-Determinante *nicht verschwindet*: $W(y_1; y_2) = e^{4x} \neq 0$
- 4) $y(x) = e^{(1,5+2j)x} = e^{1,5x} [\cos(2x) + j \cdot \sin(2x)]$ ist eine komplexe Lösung der Dgl, wie man durch Einsetzen verifizieren kann ($j^2 = -1$ beachten). Daher sind auch *Realteil* $y_1(x) = e^{1,5x} \cdot \cos(2x)$ und *Imaginärteil* $y_2(x) = e^{1,5x} \cdot \sin(2x)$ (reelle) Lösungen der Dgl, die sogar wegen $W(y_1; y_2) = 2 \cdot e^{3x} \neq 0$ eine *reelle* Fundamentalebasis der Dgl bilden.

- 5) Man zeigt zunächst durch Einsetzen in die Dgl, dass x_1 und x_2 Lösungen sind. Sie sind *linear unabhängig*, da ihre Wronski-Determinante von null verschieden ist: $W(x_1; x_2) = -e^{-2t} \neq 0$. Die *allgemeine* Lösung der Dgl ist daher als Linearkombination der Lösungen x_1 und x_2 darstellbar: $x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 = e^{-t}(C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t)$
- 6) a) $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -3; y_0 = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-3x}$
 b) $\lambda_{1/2} = -5; x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-5t}$
 c) $\lambda_{1/2} = 1 \pm 3j; x = e^t (C_1 \cdot \sin(3t) + C_2 \cdot \cos(3t))$
 d) $\lambda_{1/2} = \pm 2j; \varphi = C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)$
 e) $\lambda_{1/2} = -2 \pm 3j; y = e^{-2x} (C_1 \cdot \sin(3x) + C_2 \cdot \cos(3x))$
 f) $\lambda_1 = -0,5; \lambda_2 = -3; q = C_1 \cdot e^{-0,5t} + C_2 \cdot e^{-3t}$
 g) $\lambda_{1/2} = 3; x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{3t}$
 h) $\lambda_{1/2} = a; y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{ax}$
- 7) a) $\lambda_{1/2} = -2 \pm j; y = e^{-2x} (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x);$
 $y' = -e^{-2x} [(2C_1 + C_2) \cdot \sin x + (2C_2 - C_1) \cdot \cos x]$
Lösung: $y = \pi \cdot e^{-2x} (2 \cdot \sin x + \cos x)$
- b) $\lambda_1 = -4; \lambda_2 = -16; y = C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^{-16x};$
 $y' = -4C_1 \cdot e^{-4x} - 16C_2 \cdot e^{-16x};$ *Lösung:* $y = \frac{1}{6} (e^{-4x} - e^{-16x})$
- c) $\lambda_{1/2} = 0,5; x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{0,5t}; \dot{x} = (C_1 + 0,5C_2 + 0,5C_1 t) \cdot e^{0,5t}$
Lösung: $x = (-3,5t + 5) \cdot e^{0,5t}$
- 8) a) Aperiodischer Grenzfall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + 2 = 0$ hat eine *doppelte* (reelle) Lösung.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{p^2}{4} - 2}_0} = -\frac{p}{2} \Rightarrow p^2 = 8 \Rightarrow p = 2\sqrt{2}$$

- b) *Allgemeine* Lösung ($\lambda_{1/2} = -\sqrt{2}$): $x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-\sqrt{2}t}$
 $\dot{x} = (C_1 - \sqrt{2}C_2 - \sqrt{2}C_1 t) \cdot e^{-\sqrt{2}t}$

Spezielle Lösung (Bild A-29):

$$x = [(10\sqrt{2} - 1)t + 10] \cdot e^{-\sqrt{2}t}$$

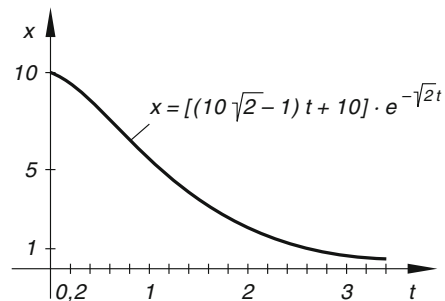


Bild A-29

- 9) $y(x) = \frac{F}{6EI} (3lx^2 - x^3)$ (nach 2-maliger Integration)
- 10) Es ist $a = 2$, $b = 1$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ besitzt die *doppelte* Lösung $\lambda_{1/2} = -1$.
- a) $b = 1 \neq 0 \Rightarrow y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
- b) $b = 1 \neq 0 \Rightarrow y_p = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
- c) $c = 1$, $\beta = 1$; Weder 1 noch $j\beta = j$ sind Lösungen der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow y_p = A \cdot e^x + B \cdot \sin x + C \cdot \cos x$
- d) $c = -1$; -1 ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow y_p = Ax^2 \cdot e^{-x}$
- e) $n = 1$, $\beta = 4$, $c = 3$; $c + \beta j = 3 + 4j$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow y_p = e^{3x} [(a_1 x + a_0) \cdot \sin(4x) + (b_1 x + b_0) \cdot \cos(4x)]$
- f) $n = 0$, $\beta = 1$, $c = -1$; $c + \beta j = -1 + j$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow y_p = e^{-x} [A \cdot \sin x + B \cdot \cos x]$
- 11) a) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -3$; $y_0 = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-3x}$; $y_p = ax^2 + bx + c$;
- $$\underbrace{-3ax^2}_3 + \underbrace{(4a - 3b)x}_{-4} + \underbrace{(2a + 2b - 3c)}_0 = 3x^2 - 4x \Rightarrow$$
- $$a = -1; b = 0; c = -2/3 \Rightarrow y_p = -x^2 - \frac{2}{3};$$
- $$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-3x} - x^2 - \frac{2}{3}$$
- b) $\lambda_{1/2} = \pm 1$; $y_0 = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$; $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
- $$\underbrace{-ax^3}_1 - \underbrace{bx^2}_{-2} + \underbrace{(6a - c)x}_0 + \underbrace{(2b - d)}_{-4} = x^3 - 2x^2 - 4 \Rightarrow$$
- $$a = -1; b = 2; c = -6; d = 8; y_p = -x^3 + 2x^2 - 6x + 8;$$
- $$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} - x^3 + 2x^2 - 6x + 8$$
- c) $\lambda_{1/2} = 1$; $x_0 = (C_1 t + C_2) \cdot e^t$; $x_p = A \cdot e^{2t}$; $A \cdot e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow A = 1$;
- $$x_p = e^{2t}; x = x_0 + x_p = (C_1 t + C_2) \cdot e^t + e^{2t}$$
- d) $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -1$; $y_0 = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-x}$; $y_p = Ax \cdot e^{3x}$
- ($c = 3$; 3 ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung);
- $$4A \cdot e^{3x} = -2 \cdot e^{3x} \Rightarrow 4A = -2 \Rightarrow A = -0,5; y_p = -0,5x \cdot e^{3x};$$
- $$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-x} - 0,5x \cdot e^{3x}$$
- e) $\lambda_{1/2} = -5$; $x_0 = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-5t}$; $x_p = A \cdot \sin(5t) + B \cdot \cos(5t)$;
- $$\underbrace{50A \cdot \cos(5t)}_3 - \underbrace{50B \cdot \sin(5t)}_0 = 3 \cdot \cos(5t) \Rightarrow A = \frac{3}{50}; B = 0;$$
- $$x_p = \frac{3}{50} \cdot \sin(5t); x = x_0 + x_p = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-5t} + \frac{3}{50} \cdot \sin(5t)$$

f) $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -12; y_0 = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-12x}; y_p = ax^2 + bx + c;$

$$\underbrace{-24ax^2}_2 + \underbrace{(20a - 24b)x}_{-6} + \underbrace{(2a + 10b - 24c)}_0 = 2x^2 - 6x \Rightarrow$$

$$a = -\frac{1}{12}; b = \frac{13}{72}; c = \frac{59}{864}; y_p = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{13}{72}x + \frac{59}{864};$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-12x} - \frac{1}{12}x^2 + \frac{13}{72}x + \frac{59}{864}$$

g) $\lambda_{1/2} = \pm 1; x_0 = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t}; x_p = (at + b) \cdot \sin t + (ct + d) \cdot \cos t;$

$$\underbrace{(2a - 2d) \cdot \cos t}_0 - \underbrace{2c \cdot t \cdot \cos t}_0 + \underbrace{(-2b - 2c) \cdot \sin t}_0 - \underbrace{2a \cdot t \cdot \sin t}_1 = t \cdot \sin t \Rightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2}; b = c = 0; d = -\frac{1}{2}; x_p = -\frac{1}{2}(t \cdot \sin t + \cos t);$$

$$x = x_0 + x_p = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} - \frac{1}{2}(t \cdot \sin t + \cos t)$$

h) $\lambda_{1/2} = -6; y_0 = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-6x}; y_p = Ax^2 \cdot e^{-6x}$ ($c = -6$; -6 ist eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung); $2A = 3 \Rightarrow A = 1,5$;

$$y_p = 1,5x^2 \cdot e^{-6x}; y = y_0 + y_p = (1,5x^2 + C_1 x + C_2) \cdot e^{-6x}$$

i) $\lambda_{1/2} = \pm 2j; y_0 = C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x);$

$$y_p = x[A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)] + ax^2 + bx + c + C \cdot e^{-x}$$

($\beta = 2$; $\beta j = 2j$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung);

$$\underbrace{4A \cdot \cos(2x)}_0 - \underbrace{4B \cdot \sin(2x)}_{10} + \underbrace{4ax^2}_2 + \underbrace{4bx}_{-1} + \underbrace{(2a + 4c)}_0 + \underbrace{5C \cdot e^{-x}}_1 =$$

$$= 10 \cdot \sin(2x) + 2x^2 - x + e^{-x} \Rightarrow$$

$$A = 0; B = -5/2; C = 1/5; a = 1/2; b = -1/4; c = -1/4;$$

$$y_p = -\frac{5}{2}x \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot e^{-x};$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot \sin(2x) + \left(C_2 - \frac{5}{2}x\right) \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot e^{-x}$$

j) $\lambda_{1/2} = -1; y_0 = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-x};$

$$y_p = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x + dx + e + A \cdot \sin x + B \cdot \cos x;$$

$$\underbrace{[4ax^2 + (8a + 4b)x + (2a + 4b + 4c)] \cdot e^x}_1 + \underbrace{2A \cdot \cos x}_{-1} - \underbrace{2B \cdot \sin x}_0 +$$

$$\underbrace{dx}_1 + \underbrace{(2d + e)}_0 = x^2 \cdot e^x - \cos x + x \Rightarrow$$

$$a = 1/4; b = -1/2; c = 3/8; d = 1; e = -2; A = -1/2; B = 0;$$

$$y_p = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) \cdot e^x + x - 2 - \frac{1}{2} \cdot \sin x;$$

$$y = y_0 + y_p = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) \cdot e^x + x - 2 - \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

$$12) \quad a) \quad \lambda_{1/2} = -3 \pm j; \quad x_0 = e^{-3t} (C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t);$$

$$x_p = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t; \quad \underbrace{(9A - 6B)}_0 \cdot \sin t + \underbrace{(6A + 9B)}_1 \cdot \cos t = \cos t \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{2}{39}; \quad B = \frac{1}{13}; \quad x_p = \frac{2}{39} \cdot \sin t + \frac{1}{13} \cdot \cos t;$$

$$x = x_0 + x_p = e^{-3t} (C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t) + \frac{2}{39} \cdot \sin t + \frac{1}{13} \cdot \cos t$$

$$\dot{x} = -e^{-3t} [(3C_1 + C_2) \cdot \sin t + (3C_2 - C_1) \cdot \cos t] + \frac{2}{39} \cdot \cos t - \frac{1}{13} \cdot \sin t$$

$$\text{Lösung: } x = e^{-3t} \left(\frac{145}{39} \cdot \sin t - \frac{1}{13} \cdot \cos t \right) + \frac{2}{39} \cdot \sin t + \frac{1}{13} \cdot \cos t$$

$$b) \quad \lambda_{1/2} = -1 \pm j\sqrt{2}; \quad y_0 = e^{-x} (C_1 \cdot \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cdot \cos(\sqrt{2}x));$$

$$y_p = A \cdot e^{-2x}; \quad 3A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1/3; \quad y_p = \frac{1}{3} \cdot e^{-2x};$$

$$y = y_0 + y_p = e^{-x} (C_1 \cdot \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cdot \cos(\sqrt{2}x)) + \frac{1}{3} \cdot e^{-2x}$$

$$y' = -e^{-x} [(C_1 + \sqrt{2}C_2) \cdot \sin(\sqrt{2}x) + (C_2 - \sqrt{2}C_1) \cdot \cos(\sqrt{2}x)] - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x}$$

$$\text{Lösung: } y = e^{-x} \left(\frac{2}{3} \sqrt{2} \cdot \sin(\sqrt{2}x) - \frac{1}{3} \cdot \cos(\sqrt{2}x) \right) + \frac{1}{3} \cdot e^{-2x}$$

$$c) \quad \lambda_{1/2} = -1 \pm 4j; \quad x_0 = e^{-t} [C_1 \cdot \sin(4t) + C_2 \cdot \cos(4t)];$$

$$x_p = A \cdot \sin(5t) + B \cdot \cos(5t);$$

$$\underbrace{(-8A - 10B)}_2 \cdot \sin(5t) + \underbrace{(10A - 8B)}_0 \cdot \cos(5t) = 2 \cdot \sin(5t) \quad \Rightarrow$$

$$A = -4/41; \quad B = -5/41; \quad x_p = -\frac{4}{41} \cdot \sin(5t) - \frac{5}{41} \cdot \cos(5t);$$

$$x = x_0 + x_p = e^{-t} [C_1 \cdot \sin(4t) + C_2 \cdot \cos(4t)] - \frac{4}{41} \cdot \sin(5t) - \frac{5}{41} \cdot \cos(5t)$$

$$\dot{x} = -e^{-t} [(C_1 + 4C_2) \cdot \sin(4t) + (C_2 - 4C_1) \cdot \cos(4t)] -$$

$$-\frac{20}{41} \cdot \cos(5t) + \frac{25}{41} \cdot \sin(5t)$$

Lösung:

$$x = e^{-t} [2,2576 \cdot \sin(4t) - 2,8220 \cdot \cos(4t)] - 0,0976 \cdot \sin(5t) - 0,1220 \cdot \cos(5t)$$

$$13) \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -10; \quad y_0 = C_1 + C_2 \cdot e^{-10x}; \quad y_p = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x;$$

$$\underbrace{11ax^2}_1 + \underbrace{(24a + 11b)x}_0 + \underbrace{(2a + 12b + 11c)}_0 = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{11}; \quad b = -\frac{24}{121}; \quad c = \frac{266}{1331}; \quad y_p = \frac{1}{1331} (121x^2 - 264x + 266) \cdot e^x;$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 \cdot e^{-10x} + \frac{1}{1331} (121x^2 - 264x + 266) \cdot e^x$$

$$y' = -10C_2 \cdot e^{-10x} + \frac{1}{1331} (121x^2 - 22x + 2) \cdot e^x$$

$$\text{Lösung: } y = (0,0909x^2 - 0,1983x + 0,1998) \cdot e^x - 0,0998 \cdot e^{-10x} + 1,9$$

- 14) a) $\ddot{x} - 6,54x = 0$; $\lambda_{1/2} = \pm 2,5573$; $x = C_1 \cdot e^{2,5573t} + C_2 \cdot e^{-2,5573t}$;
 $\dot{x} = 2,5573 (C_1 \cdot e^{2,5573t} - C_2 \cdot e^{-2,5573t})$
Lösung: $x = 0,375 (e^{2,5573t} + e^{-2,5573t}) = 0,75 \cdot \cosh(2,5573t)$ (t in s, x in m)
- b) $x(T) = 1,5 \Rightarrow T = \frac{\operatorname{arcosh} 2}{2,5573} = 0,515$ (in s)

Abschnitt 4

- 1) a) $\lambda_{1/2} = \pm 2j$; $x = C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)$;
 $\dot{x} = 2 [C_1 \cdot \cos(2t) - C_2 \cdot \sin(2t)]$; *Lösung:* $x(t) = 0,5 \cdot \sin(2t) + 2 \cdot \cos(2t)$
- b) $\lambda_{1/2} = \pm j$; $x = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t$; $\dot{x} = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t$
Lösung: $x(t) = -2 \cdot \sin t + \cos t$
- c) $\lambda_{1/2} = \pm aj$; $x = C_1 \cdot \sin(at) + C_2 \cdot \cos(at)$;
 $\dot{x} = a [C_1 \cdot \cos(at) - C_2 \cdot \sin(at)]$; *Lösung:* $x(t) = \frac{v_0}{a} \cdot \sin(at)$
- 2) a) *Schwingungsgleichung:* $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (mit $\omega_0^2 = c/m$)

$$\omega_0 = \sqrt{c/m} = 9,13 \text{ s}^{-1}; f_0 = 1,45 \text{ s}^{-1}; T_0 = 0,69 \text{ s}$$

- b) $\lambda_{1/2} = \pm j\omega_0$; $x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$ (mit $\omega_0 = 9,13 \text{ s}^{-1}$)

c) $\dot{x} = \omega_0 [C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - C_2 \cdot \sin(\omega_0 t)]$

$$x(0) = C_2 = 0; \dot{x}(0) = \omega_0 C_1 = 0,5 \Rightarrow C_1 = 0,055$$

Lösung: $x(t) = 0,055 \text{ m} \cdot \sin(9,13 \text{ s}^{-1} \cdot t)$ (Bild A-30)

d) $x(2,5 \text{ s}) = -0,041 \text{ m}$

$$v(2,5 \text{ s}) = \dot{x}(2,5 \text{ s}) = -0,337 \text{ m/s}$$

$$a(2,5 \text{ s}) = \ddot{x}(2,5 \text{ s}) = 3,395 \text{ m/s}^2$$

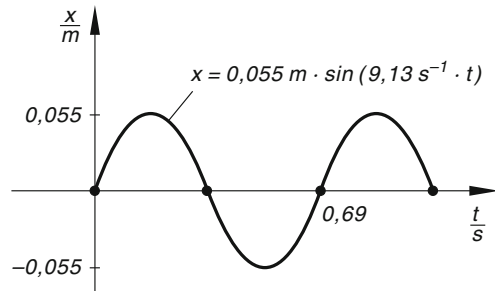


Bild A-30

- 3) a) $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ (mit $\omega_0^2 = g/l$); $\lambda_{1/2} = \pm j\omega_0$;
 $\varphi = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$; $\dot{\varphi} = \omega_0 [C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - C_2 \cdot \sin(\omega_0 t)]$
- b) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$; $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$; $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- c) $\varphi(0) = C_2 = \varphi_0$; $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$
Lösung: $\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$, $t \geq 0$

- 4) a) $\lambda_{1/2} = -2 \pm 5j$; $x = e^{-2t} [C_1 \cdot \sin(5t) + C_2 \cdot \cos(5t)]$;
 $\dot{x} = e^{-2t} [-(2C_1 + 5C_2) \cdot \sin(5t) + (5C_1 - 2C_2) \cdot \cos(5t)]$
Lösung: $x(t) = e^{-2t} \cdot \cos(5t)$
- b) $\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{7}j$; $x = e^{-\frac{1}{2}t} \left[C_1 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{7}t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7}t\right) \right]$;
 $\dot{x} = e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{1}{2} (C_1 + \sqrt{7} C_2) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{7}t\right) + \frac{1}{2} (\sqrt{7} C_1 - C_2) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{7}t\right) \right]$
Lösung: $x(t) = \frac{6}{7} \sqrt{7} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{7}t\right)$
- c) $\lambda_{1/2} = -1 \pm 2j$; $x = e^{-t} [C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)]$;
 $\dot{x} = e^{-t} [-(C_1 + 2C_2) \cdot \sin(2t) + (2C_1 - C_2) \cdot \cos(2t)]$
Lösung: $x(t) = e^{-t} [5 \cdot \sin(2t) + 10 \cdot \cos(2t)]$
- 5) a) *Schwingungsgleichung:* $\ddot{x} + 16 \dot{x} + 256x = 0$; $\lambda_{1/2} = -8 \pm 8\sqrt{3}j$
 $x = e^{-8t} [C_1 \cdot \sin(8\sqrt{3}t) + C_2 \cdot \cos(8\sqrt{3}t)]$;
 $\dot{x} = -8 \cdot e^{-8t} [(C_1 + \sqrt{3} C_2) \cdot \sin(8\sqrt{3}t) - (\sqrt{3} C_1 - C_2) \cdot \cos(8\sqrt{3}t)]$
- b) $\omega_d = 8\sqrt{3} \text{ s}^{-1} = 13,856 \text{ s}^{-1}$; $f_d = 2,205 \text{ s}^{-1}$; $T_d = 0,453 \text{ s}$
- c) *Lösung:* $x(t) = e^{-8t} [0,1155 \cdot \sin(8\sqrt{3}t) + 0,2 \cdot \cos(8\sqrt{3}t)]$ (Bild A-31)

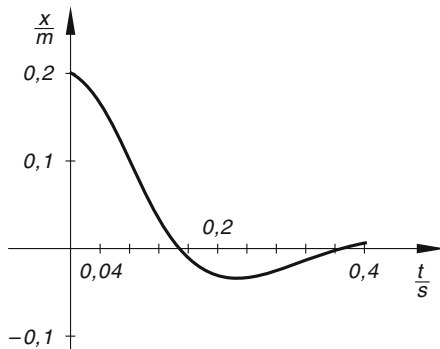


Bild A-31

- 6) a) $\lambda_{1/2} = -2,5$; $x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-2,5t}$; $\dot{x} = (C_1 - 2,5 C_2 - 2,5 C_1 t) \cdot e^{-2,5t}$
Lösung: $x(t) = (13,5t + 5) \cdot e^{-2,5t}$
- b) $\lambda_{1/2} = -0,5$; $x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-0,5t}$; $\dot{x} = (C_1 - 0,5 C_2 - 0,5 C_1 t) \cdot e^{-0,5t}$
Lösung: $x(t) = (-0,5t + 1) \cdot e^{-0,5t}$
- 7) a) Der *aperiodische Grenzfall* tritt ein für $\delta = \omega_0$:

$$\delta = \omega_0 \Rightarrow \frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{c}{m}} \Rightarrow b = 2\sqrt{cm} = 16 \text{ kg/s}$$

Für $\delta > \omega_0$, d. h. $b > 16 \text{ kg/s}$ verhält sich das System *aperiodisch*.

- b) Schwingungsgleichung (im Grenzfall): $0,5\ddot{x} + 16\dot{x} + 128x = 0$; $\lambda_{1/2} = -16$;

$$x = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-16t}; \quad \dot{x} = (C_1 - 16C_2 - 16C_1 t) \cdot e^{-16t}$$

Lösung (Bild A-32): $x(t) = (3,2t + 0,2) \cdot e^{-16t}$, $t \geq 0$ (t in s, x in m)

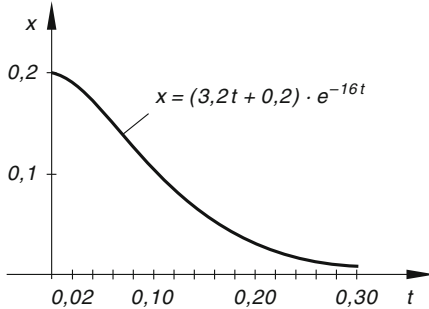


Bild A-32

- 8) a) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -5$; $x = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{-5t}$; $\dot{x} = -C_1 \cdot e^{-t} - 5C_2 \cdot e^{-5t}$
 Lösung: $x(t) = 13 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^{-5t}$
- b) $\lambda_1 = -0,2$; $\lambda_2 = -0,8$; $x = C_1 \cdot e^{-0,2t} + C_2 \cdot e^{-0,8t}$;
 $\dot{x} = -0,2C_1 \cdot e^{-0,2t} - 0,8C_2 \cdot e^{-0,8t}$
 Lösung: $x(t) = -4 \cdot e^{-0,2t} + 6 \cdot e^{-0,8t}$
- c) $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -4$; $x = C_1 \cdot e^{-3t} + C_2 \cdot e^{-4t}$; $\dot{x} = -3C_1 \cdot e^{-3t} - 4C_2 \cdot e^{-4t}$
 Lösung: $x(t) = 20 \cdot e^{-3t} - 15 \cdot e^{-4t}$
- 9) Schwingungsgleichung: $\ddot{x} + 40\dot{x} + 204 = 0$; $\lambda_1 = -6$; $\lambda_2 = -34$

$$x = C_1 \cdot e^{-6t} + C_2 \cdot e^{-34t}$$

$$\dot{x} = -6C_1 \cdot e^{-6t} - 34C_2 \cdot e^{-34t}$$

Lösung (Bild A-33):

$$x(t) = 0,1 \text{ m} \left(e^{-\frac{6}{s}t} - e^{-\frac{34}{s}t} \right)$$

(t in s)

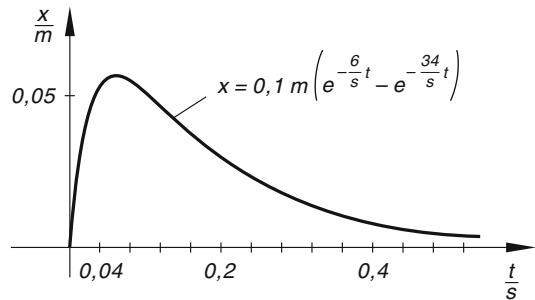


Bild A-33

- 10) $\lambda_{1/2} = \pm j\omega_0$; $x_0 = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$;

Aufsuchen einer partikulären Lösung:

$$x_p = \text{const.} \Rightarrow x_p = \frac{a}{\omega_0^2}; \quad x = x_0 + x_p = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{a}{\omega_0^2};$$

$$\dot{x} = \omega_0 [C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - C_2 \cdot \sin(\omega_0 t)]$$

Lösung (Bild A-34): $x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} [1 - \cos(\omega_0 t)] = \frac{ma}{c} [1 - \cos(\omega_0 t)]$, $t \geq 0$

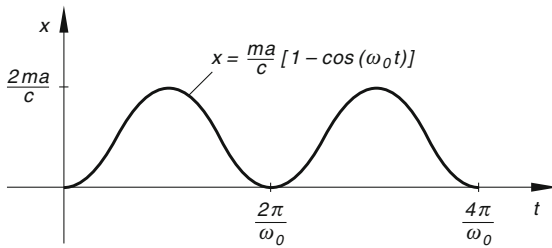


Bild A-34

11) a) $\lambda_{1/2} = -2 \pm 5j$; $x_0 = e^{-2t} [C_1 \cdot \sin(5t) + C_2 \cdot \cos(5t)]$;

Störglied: $g(t) = 2 \cdot \sin(2t)$ ($\beta = 2$; $\beta j = 2j$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow x_p = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t)$;

$$\underbrace{(25A - 8B)}_2 \cdot \sin(2t) + \underbrace{(8A + 25B)}_0 \cdot \cos(2t) = 2 \cdot \sin(2t) \Rightarrow$$

$A = 0,0726$; $B = -0,0232$; $x_p = 0,0726 \cdot \sin(2t) - 0,0232 \cdot \cos(2t)$

Allgemeine Lösung:

$x(t) = e^{-2t} [C_1 \cdot \sin(5t) + C_2 \cdot \cos(5t)] + 0,0726 \cdot \sin(2t) - 0,0232 \cdot \cos(2t)$

Stationäre Lösung (Bild A-35):

$x(t) = x_p = 0,0726 \cdot \sin(2t) - 0,0232 \cdot \cos(2t) = 0,0762 \cdot \sin(2t - 0,3093)$

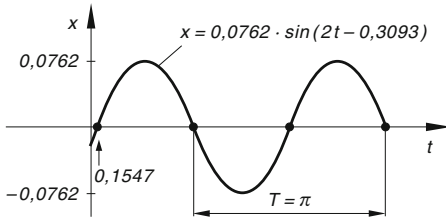


Bild A-35

b) $\lambda_{1/2} = -3$; $x_0 = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-3t}$; Störglied: $g(t) = \cos t - \sin t$ ($\beta = 1$; $\beta j = j$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow x_p = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t$;

$$\underbrace{(6A + 8B)}_1 \cdot \cos t + \underbrace{(8A - 6B)}_{-1} \cdot \sin t = \cos t - \sin t \Rightarrow$$

$A = -0,02$; $B = 0,14$; $x_p = -0,02 \cdot \sin t + 0,14 \cdot \cos t$

Allgemeine Lösung: $x(t) = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-3t} - 0,02 \cdot \sin t + 0,14 \cdot \cos t$

Stationäre Lösung (Bild A-36):

$x(t) = x_p = -0,02 \cdot \sin t + 0,14 \cdot \cos t = 0,1414 \cdot \sin(t + 1,7127)$

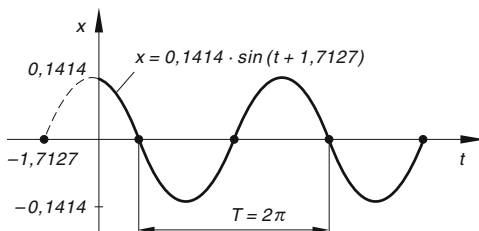


Bild A-36

- 12) a) Schwingungsgleichung (reelle Form): $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin(\omega t)$; $\lambda_{1/2} = -1 \pm 2j$;
 $x_0 = e^{-t} [C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)]$

Schwingungsgleichung in komplexer Form: $\ddot{\underline{x}} + 2\dot{\underline{x}} + 5\underline{x} = e^{j\omega t}$

Komplexer Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung:

$$\underline{x}_p = A \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = A \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

$$A \cdot e^{-j\varphi} (-\omega^2 + j2\omega + 5) = 1 \Rightarrow (5 - \omega^2) + j(2\omega) = \frac{1}{A} \cdot e^{j\varphi}$$

Aus Bild A-37 folgt:

$$\left(\frac{1}{A}\right)^2 = (5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

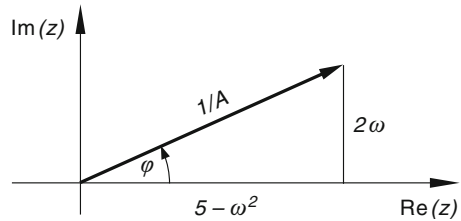


Bild A-37

$$\tan \varphi = \frac{2\omega}{5 - \omega^2} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\omega}{5 - \omega^2}\right) & \omega < \sqrt{5} \\ \pi/2 & \text{für } \omega = \sqrt{5} \\ \arctan\left(\frac{2\omega}{5 - \omega^2}\right) + \pi & \omega > \sqrt{5} \end{cases}$$

Partikuläre Lösung in reeller Form:

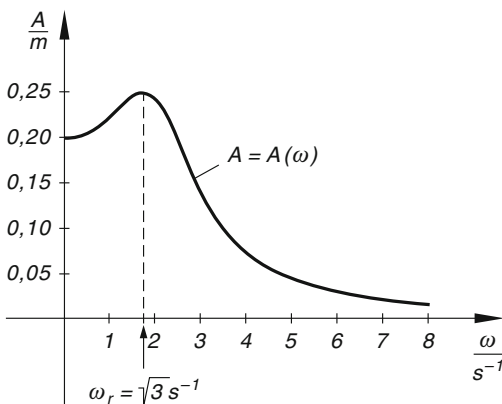
$$x_p = \operatorname{Re}(\underline{x}_p) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Allgemeine Lösung (in reeller Form):

$$x(t) = x_0 + x_p = e^{-t} [C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)] + A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

- b) Stationäre Lösung: $x(t) = x_p = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Resonanzkurve $A = A(\omega)$: Bild A-38; Frequenzgang $\varphi = \varphi(\omega)$: Bild A-39



Resonanzstelle
(Maximum der Kurve):

$$\omega = \omega_r = \sqrt{3} \text{ s}^{-1}$$

$$A_{\max} = 0,25 \text{ m}$$

Bild A-38

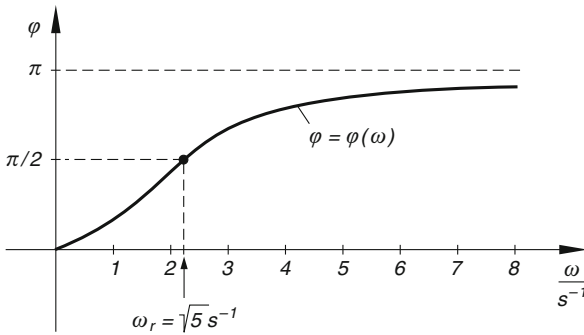


Bild A-39

- c) $A(\omega = 1) = 0,2236$; $\varphi(\omega = 1) = 0,4636$
 $x(t) = 0,2236 \text{ m} \cdot \sin(1 \text{ s}^{-1} \cdot t - 0,4636)$ (Bild A-40)

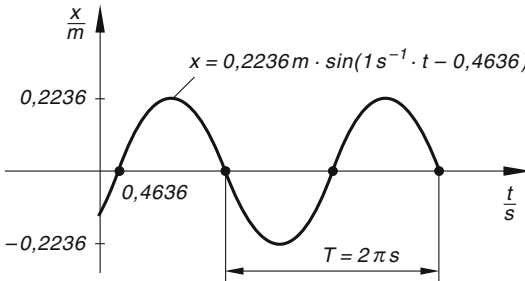


Bild A-40

- 13) Schwingungsgleichung: $\frac{d^2 i}{dt^2} + 2500 \frac{di}{dt} + 10^6 i = 7,5 \cdot 10^5 \cdot \cos(500t)$
 Ansatz für eine partikuläre Lösung: $i_p(t) = A \cdot \sin(500t) + B \cdot \cos(500t)$;
 $(\underbrace{5A + 3B}_3) \cdot \cos(500t) + (\underbrace{3A - 5B}_0) \cdot \sin(500t) = 3 \cdot \cos(500t) \Rightarrow$

$A = 15/34$; $B = 9/34$

Stationäre Lösung (Bild A-41):

$$i(t) \approx i_p(t) = \frac{15}{34} A \cdot \sin(500 \text{ s}^{-1} \cdot t) + \frac{9}{34} A \cdot \cos(500 \text{ s}^{-1} \cdot t) =$$

$$= 0,5145 A \cdot \sin(500 \text{ s}^{-1} \cdot t + 0,5404)$$

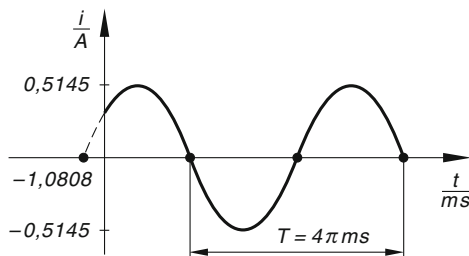


Bild A-41

Abschnitt 5

- 1) Durch Einsetzen in die Dgl zeigt man zunächst, dass y_1, y_2 und y_3 partikuläre *Lösungen* sind. Sie bilden eine *Fundamentbasis* der Dgl, da ihre Wronski-Determinante *nicht* verschwindet: $W(y_1; y_2; y_3) = -6 \cdot e^{-2x} \neq 0$

- 2) a) $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = -3; y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{-3x}$
 b) $\lambda_1 = 0; \lambda_{2/3} = \pm j; y = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x$
 c) $\lambda_{1/2} = -1; \lambda_3 = 6; x = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-t} + C_3 \cdot e^{6t}$
 d) $\lambda_{1/2/3} = -a; y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot e^{-ax}$
 e) $\lambda_1 = 2; \lambda_{2/3} = 1 \pm 3j; u = C_1 \cdot e^{2x} + e^x [C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x)]$
 f) $\lambda_{1/2} = 2; \lambda_3 = 3; y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{3x}$

- 3) Man zeigt zunächst durch Einsetzen in die Dgl, dass y_1, y_2 und y_3 partikuläre *Lösungen* sind. Sie sind *linear unabhängig*, da ihre Wronski-Determinante von null *verschieden* ist:

$$W(y_1; y_2; y_3) = -54 \cdot e^{3x} \neq 0$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } y = C_1 \cdot e^{-x} + e^{2x} [C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x)]$$

- 4) a) $\lambda_{1/2} = \pm 1; \lambda_{3/4} = \pm j; x = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \sin t + C_4 \cdot \cos t$
 b) $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1; \lambda_{3/4} = 1 \pm j;$
 $y = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} + e^x (C_3 \cdot \sin x + C_4 \cdot \cos x)$
 c) $\lambda_{1/2/3} = 1; \lambda_4 = -5; y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot e^x + C_4 \cdot e^{-5x}$
 d) $\lambda_{1/2} = 2j; \lambda_{3/4} = -2j; v = (C_1 + C_2 t) \cdot \sin(2t) + (C_3 + C_4 t) \cdot \cos(2t)$

- 5) a) $\lambda_1 = 0; \lambda_{2/3} = j; \lambda_{4/5} = -j;$

$$x = C_1 + (C_2 + C_3 t) \cdot \sin t + (C_4 + C_5 t) \cdot \cos t$$

- b) $\lambda_{1/2/3} = 0; \lambda_{4/5} = -1; y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x) \cdot e^{-x}$

- c) $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 10\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda - 25 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2 = 0$

Diese Zerlegung der charakteristischen Gleichung 5. Grades in Faktoren erhält man wie folgt: $\lambda = 1$ ist eine Lösung dieser Gleichung; den zugehörigen Linearfaktor $\lambda - 1$ abspalten (Horner-Schema oder Polynomdivision)

$$\Rightarrow \lambda^4 + 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 20\lambda + 25 = 0$$

Komplexe Lösungen treten stets *paarweise* auf: $\lambda = -1 \pm 2j$ (konjugiert komplexe Lösungen). Die zugehörigen Linearfaktoren zu einem *quadratischen* Term zusammenfassen:

$$[\lambda - (-1 + 2j)][\lambda - (-1 - 2j)] = \underbrace{[(\lambda + 1) - 2j][(\lambda + 1) + 2j]}_{\text{3. Binom}} = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

Durch *Polynomdivision* erhält man schließlich:

$$(\lambda^4 + 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 20\lambda + 25) : (\lambda^2 + 2\lambda + 5) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

Lösungen: $\lambda_1 = 1; \lambda_{2/3} = -1 + 2j; \lambda_{4/5} = -1 - 2j$

$$y = C_1 \cdot e^x + e^{-x} [(C_2 + C_3 x) \cdot \sin(2x) + (C_4 + C_5 x) \cdot \cos(2x)]$$

- d) $\lambda_{1/2} = 1; \lambda_3 = -2; \lambda_{4/5} = \pm 5j$

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^x + C_3 \cdot e^{-2x} + C_4 \cdot \sin(5x) + C_5 \cdot \cos(5x)$$

- 6) a) $\lambda_1 = -1; \lambda_{2/3} = 2; y = C_1 \cdot e^{-x} + (C_2 + C_3 x) \cdot e^{2x}$
 $y' = -C_1 \cdot e^{-x} + (2C_3 x + 2C_2 + C_3) \cdot e^{2x}$
 $y'' = C_1 \cdot e^{-x} + 4(C_3 x + C_2 + C_3) \cdot e^{2x}$
Spezielle Lösung: $y = \frac{1}{9} \cdot e^{-x} + \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x\right) \cdot e^{2x}$
- b) $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 2; x = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot e^{2t}$
 $\dot{x} = C_1 \cdot e^t - C_2 \cdot e^{-t} + 2C_3 \cdot e^{2t}; \ddot{x} = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} + 4C_3 \cdot e^{2t}$
Spezielle Lösung: $x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t$
- c) $\lambda_{1/2} = \pm j; \lambda_{3/4} = \pm 3j; x = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t + C_3 \cdot \sin(3t) + C_4 \cdot \cos(3t)$
 $\dot{x} = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t + 3[C_3 \cdot \cos(3t) - C_4 \cdot \sin(3t)]$
 $\ddot{x} = -C_1 \cdot \sin t - C_2 \cdot \cos t - 9[C_3 \cdot \sin(3t) + C_4 \cdot \cos(3t)]$
 $\dddot{x} = -C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t - 27[C_3 \cdot \cos(3t) - C_4 \cdot \sin(3t)]$
Spezielle Lösung: $x = -9 \cdot \cos t + \cos(3t)$
- d) $\lambda_1 = 0; \lambda_{2/3} = \pm j; \lambda_{4/5} = \pm 2j$
 $y = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x)$
 $y' = C_2 \cdot \cos x - C_3 \cdot \sin x + 2[C_4 \cdot \cos(2x) - C_5 \cdot \sin(2x)]$
 $y'' = -C_2 \cdot \sin x - C_3 \cdot \cos x - 4[C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x)]$
 $y''' = -C_2 \cdot \cos x + C_3 \cdot \sin x - 8[C_4 \cdot \cos(2x) - C_5 \cdot \sin(2x)]$
 $y^{(4)} = C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x + 16[C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x)]$
Spezielle Lösung: $y = 3 - 4 \cdot \cos x + \cos(2x)$
- 7) Es ist $a_2 = a_1 = a_0 = 1$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_{2/3} = \pm j$.
- a) $a_0 = 1 \neq 0 \Rightarrow y_p = ax + b$
- b) $a_0 = 1 \neq 0 \Rightarrow y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- c) $c = 2; 2$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow y_p = A \cdot e^{2x}$
- d) $c = -1; -1$ ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung \Rightarrow
 $y_p = Ax \cdot e^{-x}$
- e) $\beta = 2; j\beta = 2j$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung \Rightarrow
 $y_p = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$
- f) $\beta = 1; j\beta = j$ ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung \Rightarrow
 $y_p = x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x)$
- g) $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$
 $g_1(x) = 2 \cdot e^{-x}$ mit $c = -1; -1$ ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow y_{p_1} = Ax \cdot e^{-x}$
 $g_2(x) = \sin(5x)$ mit $\beta = 5; j\beta = 5j$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow y_{p_2} = B \cdot \sin(5x) + C \cdot \cos(5x)$
 $g_3(x) = 2 \cdot \cos x$ mit $\beta = 1; j\beta = j$ ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung $\Rightarrow y_{p_3} = x(D \cdot \sin x + E \cdot \cos x)$
Gesamtansatz: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$
 $y_p = Ax \cdot e^{-x} + B \cdot \sin(5x) + C \cdot \cos(5x) + x(D \cdot \sin x + E \cdot \cos x)$

- 8) a) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2/3} = -1$; $y_0 = C_1 + (C_2 + C_3x) \cdot e^{-x}$;
 Störglied: $g(x) = 10 \cdot \cos x$ ($\beta = 1$; $j\beta = j$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;
 $\underbrace{-2B \cdot \cos x}_{10} - \underbrace{2A \cdot \sin x}_0 = 10 \cdot \cos x \Rightarrow A = 0$; $B = -5$; $y_p = -5 \cdot \cos x$
 $y = y_0 + y_p = C_1 + (C_2 + C_3x) \cdot e^{-x} - 5 \cdot \cos x$
- b) $\lambda_{1/2/3} = -1$; $y_0 = (C_1 + C_2x + C_3x^2) \cdot e^{-x}$; Störglied: $g(x) = x + 6 \cdot e^{-x}$
 ($a_0 = 1 \neq 0$; $c = -1$; -1 ist eine dreifache Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow y_p = ax + b + Ax^3 \cdot e^{-x}$;
 $\underbrace{ax}_{1} + \underbrace{(3a + b)}_0 + \underbrace{6A \cdot e^{-x}}_6 = x + 6 \cdot e^{-x} \Rightarrow a = 1$; $b = -3$; $A = 1$;
 $y_p = x - 3 + x^3 \cdot e^{-x}$
 $y = y_0 + y_p = (C_1 + C_2x + C_3x^2) \cdot e^{-x} + x - 3 + x^3 \cdot e^{-x}$
- c) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2/3} = \pm j$; $x_0 = C_1 + C_2 \cdot \sin t + C_3 \cdot \cos t$
 Störglied: $g(t) = 9t^2$ ($a_0 = 0$) $\Rightarrow x_p = t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + ct$;
 $\underbrace{3at^2}_9 + \underbrace{2bt}_0 + \underbrace{(6a + c)}_0 = 9t^2 \Rightarrow a = 3$; $b = 0$; $c = -18$; $x_p = 3t^3 - 18t$
 $x = x_0 + x_p = C_1 + C_2 \cdot \sin t + C_3 \cdot \cos t + 3t^3 - 18t$
- d) $\lambda_{1/2} = 1$; $\lambda_3 = -1$; $y_0 = (C_1 + C_2x) \cdot e^x + C_3 \cdot e^{-x}$
 Störglied: $g(x) = 16x \cdot e^{-x} = g_1(x) \cdot g_2(x)$ mit $g_1(x) = 16x$ (lineare Funktion) und $g_2(x) = e^{-x}$ (mit $c = -1$; -1 ist eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung) \Rightarrow Produktansatz: $y_p = (ax + b) \cdot Ax \cdot e^{-x} = (ax^2 + \beta x) \cdot e^{-x}$;
 $\underbrace{8ax}_{16} + \underbrace{(-8a + 4\beta)}_0 = 16x \Rightarrow a = 2$; $\beta = 4$; $x_p = (2x^2 + 4x) \cdot e^{-x}$
 $y = y_0 + y_p = (C_1 + C_2x) \cdot e^x + (2x^2 + 4x + C_3) \cdot e^{-x}$
- 9) a) $\lambda_{1/2} = j$; $\lambda_{3/4} = -j$; $y_0 = (C_1 + C_2x) \cdot \sin x + (C_3 + C_4x) \cdot \cos x$
 Störglied: $g(x) = 8 \cdot \sin x + x^2 + 4$ ($a_0 = 1 \neq 0$; $\beta = 1$; $j\beta = j$ ist eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung) \Rightarrow
 $y_p = x^2(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) + ax^2 + bx + c$;
 $\underbrace{-8A \cdot \sin x}_8 - \underbrace{8B \cdot \cos x}_0 + \underbrace{ax^2}_1 + \underbrace{bx}_0 + \underbrace{(4a + c)}_4 = 8 \cdot \sin x + x^2 + 4 \Rightarrow$
 $A = -1$; $B = 0$; $a = 1$; $b = c = 0$; $y_p = -x^2 \cdot \sin x + x^2$
 $y = y_0 + y_p = (C_1 + C_2x - x^2) \cdot \sin x + (C_3 + C_4x) \cdot \cos x + x^2$
- b) $\lambda_{1/2} = 0$; $\lambda_{3/4/5} = -1$; $y_0 = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x + C_5x^2) \cdot e^{-x}$
 Störglied: $g(x) = 2(\sin x + \cos x) + 2$ ($a_0 = a_1 = 0$; $\beta = 1$; $j\beta = j$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow y_p = ax^2 + A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;
 $\underbrace{(2A + 2B) \cdot \sin x}_2 + \underbrace{(-2A + 2B) \cdot \cos x}_2 + \underbrace{2a}_2 = 2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + 2 \Rightarrow$
 $A = 0$; $B = 1$; $a = 1$; $y_p = x^2 + \cos x$
 $y = y_0 + y_p = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x + C_5x^2) \cdot e^{-x} + x^2 + \cos x$

- 10) a) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2/3} = \pm 1$; *Störglied*: $g(x) = 10x$ ($a_0 = 0$) $\Rightarrow y_p = ax^2 + bx$;
 $\underbrace{-2ax - b}_{10} = \underbrace{10x}_0 \Rightarrow a = -5; b = 0; y_p = -5x^2$
- b) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2/3} = -2 \pm 3j$; *Störglied*: $g(x) = e^x + 10$ ($c = 1$; 1 ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung; $a_0 = 0$) $\Rightarrow y_p = A \cdot e^x + ax$;
 $\underbrace{18A \cdot e^x}_1 + \underbrace{13a}_{10} = e^x + 10 \Rightarrow A = \frac{1}{18}; B = \frac{10}{13}; y_p = \frac{1}{18} \cdot e^x + \frac{10}{13}x$
- c) $\lambda_{1/2} = 1$; $\lambda_3 = -2$; *Störglied*: $g(x) = 2 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x$ ($\beta = 1$; $j\beta = j$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;
 $\underbrace{(-4A + 2B)}_2 \cdot \cos x + \underbrace{(2A + 4B)}_{-3} \cdot \sin x = 2 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x \Rightarrow$
 $A = -0,7; B = -0,4; y_p = -0,7 \cdot \sin x - 0,4 \cdot \cos x$
- d) $\lambda_{1/2} = j$; $\lambda_{3/4} = -j$; *Störglied*: $g(t) = t \cdot e^{-t} = g_1(t) \cdot g_2(t)$ mit $g_1(t) = t$ (lineare Funktion; $a_0 = 1 \neq 0$) und $g_2(t) = e^{-t}$ (mit $c = -1$; -1 ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) \Rightarrow
Produktansatz: $x_p = (at + b) \cdot A \cdot e^{-t} = (at + \beta) \cdot e^{-t}$;
 $\underbrace{4at}_1 + \underbrace{(-8a + 4\beta)}_0 = t \Rightarrow a = \frac{1}{4}; \beta = \frac{1}{2}; x_p = \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-t}$
- e) $\lambda_{1/2} = \pm 1$; $\lambda_3 = 2$; $\lambda_{4/5} = \pm 2j$; *Störglied*: $g(x) = -104 \cdot e^{3x} + (24 \cdot \sin x - 12 \cdot \cos x) + 8x^2$ (mit $c = 3$, $\beta = 1$ und $a_0 = 8 \neq 0$; weder 3 noch $\beta j = j$ sind Lösungen der charakteristischen Gleichung) \Rightarrow
 $y_p = A \cdot e^{3x} + B \cdot \sin x + C \cdot \cos x + ax^2 + bx + c$;
 $\underbrace{104A \cdot e^{3x}}_{-104} + \underbrace{(12B + 6C)}_{24} \cdot \sin x + \underbrace{(-6B + 12C)}_{-12} \cdot \cos x + \underbrace{8ax^2 + 8bx + 8c}_8 =$
 $\underbrace{(-8a + 8b)}_0 x + \underbrace{(-12a - 4b + 8c)}_0 =$
 $= -104 \cdot e^{3x} + 24 \cdot \sin x - 12 \cdot \cos x + 8x^2 \Rightarrow$
 $A = -1; B = 2; C = 0; a = b = 1; c = 2$;
 $y_p = -e^{3x} + 2 \cdot \sin x + x^2 + x + 2$
- 11) a) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2/3} = \pm 3j$; $y_0 = C_1 + C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x)$
Störglied: $g(x) = 18x$ ($a_0 = 0$) $\Rightarrow y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx$;
 $\underbrace{18ax}_18 + \underbrace{9b}_0 = 18x \Rightarrow a = 1; b = 0; y_p = x^2$
 $y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x) + x^2 + 2$
 $y' = 3[C_2 \cdot \cos(3x) - C_3 \cdot \sin(3x)] + 2x$
 $y'' = -9[C_2 \cdot \sin(3x) + C_3 \cdot \cos(3x)] + 2$
Spezielle Lösung: $y = 2 \cdot \cos(3x) + x^2 + 2$
- b) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = -5$; $y_0 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot e^{-5x}$
Störglied: $g(x) = 34 \cdot \sin x + 12 \cdot \cos x$ ($\beta = 1$; $j\beta = j$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) $\Rightarrow y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$;

$$\underbrace{(2A - 16B)}_{34} \cdot \sin x + \underbrace{(16A + 2B)}_{12} \cdot \cos x = 34 \cdot \sin x + 12 \cdot \cos x \quad \Rightarrow$$

$$A = 1; \quad B = -2; \quad y_p = \sin x - 2 \cdot \cos x$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot e^{-5x} + \sin x - 2 \cdot \cos x$$

$$y' = -C_1 \cdot e^{-x} - 2C_2 \cdot e^{-2x} - 5C_3 \cdot e^{-5x} + \cos x + 2 \cdot \sin x$$

$$y'' = C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{-2x} + 25C_3 \cdot e^{-5x} - \sin x + 2 \cdot \cos x$$

$$\text{Spezielle Lösung: } y = 2 \cdot e^{-x} + e^{-2x} + \sin x - 2 \cdot \cos x$$

$$c) \quad \lambda_{1/2} = \pm 1; \quad \lambda_{3/4} = \pm j; \quad x_0 = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \sin t + C_4 \cdot \cos t$$

$$\text{Störglied: } g(t) = 45 \cdot e^{2t} \quad (c = 2; 2 \text{ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung}) \quad \Rightarrow$$

$$x_p = A \cdot e^{2t}; \quad 15A = 45 \quad \Rightarrow \quad A = 3; \quad x_p = 3 \cdot e^{2t}$$

$$x = x_0 + x_p = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \sin t + C_4 \cdot \cos t + 3 \cdot e^{2t}$$

$$\dot{x} = C_1 \cdot e^t - C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot \cos t - C_4 \cdot \sin t + 6 \cdot e^{2t}$$

$$\ddot{x} = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} - C_3 \cdot \sin t - C_4 \cdot \cos t + 12 \cdot e^{2t}$$

$$\ddot{x} = C_1 \cdot e^t - C_2 \cdot e^{-t} - C_3 \cdot \cos t + C_4 \cdot \sin t + 24 \cdot e^{2t}$$

$$\text{Spezielle Lösung: } x = 3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot \sin t + 3 \cdot e^{2t}$$

$$d) \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2/3} = \pm 1; \quad \lambda_{4/5} = \pm j;$$

$$v_0 = C_1 + C_2 \cdot e^t + C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot \sin t + C_5 \cdot \cos t$$

$$\text{Störglied: } g(t) = 2t + 2 \quad (a_0 = 0) \quad \Rightarrow \quad v_p = t(at + b) = at^2 + bt$$

$$\underbrace{-2at - b}_{2} = \underbrace{2t + 2}_{2} \quad \Rightarrow \quad a = -1; \quad b = -2; \quad v_p = -t^2 - 2t$$

$$v = v_0 + v_p = C_1 + C_2 \cdot e^t + C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot \sin t + C_5 \cdot \cos t - t^2 - 2t$$

$$\dot{v} = C_2 \cdot e^t - C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot \cos t - C_5 \cdot \sin t - 2t - 2$$

$$\ddot{v} = C_2 \cdot e^t + C_3 \cdot e^{-t} - C_4 \cdot \sin t - C_5 \cdot \cos t - 2$$

$$\ddot{v} = C_2 \cdot e^t - C_3 \cdot e^{-t} - C_4 \cdot \cos t + C_5 \cdot \sin t$$

$$v^{(4)} = C_2 \cdot e^t + C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot \sin t + C_5 \cdot \cos t$$

$$\text{Spezielle Lösung: } v = 5 - 4 \cdot \cos t - t^2 - 2t$$

$$12) \quad \lambda_{1/2} = 0; \quad \lambda_{3/4} = \pm j\alpha; \quad y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \sin(\alpha x) + C_4 \cdot \cos(\alpha x)$$

$$\text{Ansatz: } y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x) \quad (\text{da } \beta \neq \alpha)$$

$$\underbrace{\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)A}_{K_0} \cdot \sin(\beta x) + \underbrace{\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)B}_0 \cdot \cos(\beta x) = K_0 \cdot \sin(\beta x) + 0 \cdot \cos(\beta x) \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{K_0}{\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)}; \quad B = 0; \quad y_p = \frac{K_0}{\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)} \cdot \sin(\beta x)$$

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \sin(\alpha x) + C_4 \cdot \cos(\alpha x) + \frac{K_0}{\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)} \cdot \sin(\beta x)$$

Aus den Randbedingungen folgt (mit $\beta l = \pi$ und $\sin(\beta l) = \sin \pi = 0$):

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad C_1 + C_4 = 0 \\ y''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad C_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = C_4 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(III)} \quad C_2 l + C_3 \cdot \sin(\alpha l) = 0 \\ y''(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(IV)} \quad \underbrace{C_3 \cdot \sin(\alpha l)}_{\neq 0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_2 = C_3 = 0$$

$$\text{Spezielle Lösung: } y = \frac{K_0}{\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)} \cdot \sin(\beta x) = \frac{Q_0 l^4}{\pi^2(\pi^2 EI - Fl^2)} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Abschnitt 6

1) *Exakte Lösung* (durch Aufsuchen einer partikulären Lösung): $y_{\text{exakt}} = 2 \cdot e^{(1-x)} + x - 1$

$$y' + y = x$$

$$y_0 = C \cdot e^{-x}; \quad y_p = ax + b$$

$$ax + \underbrace{(a + b)}_0 = x \Rightarrow$$

$$1 \quad 0$$

$$a = 1; \quad b = -1; \quad y_p = x - 1$$

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-x} + x - 1$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow C = 2 \cdot e^1 \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot e^{(1-x)} + x - 1$$

x	y (Euler)	y (Runge-Kutta)	y _{exakt}
1,0	2	2	2
1,1	1,9	1,909675	1,909675
1,2	1,82	1,837462	1,837462
1,3	1,758	1,781637	1,781636
1,4	1,7122	1,740641	1,740640

2)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1	1,127259	1,320830	1,608237	2,042283	2,738426

3) *Erstrechnung (Feinrechnung)* für $h = 0,05$:

x	y (Euler)	y (Runge-Kutta)
1	1	1
1,05	1,070711	1,071773
1,10	1,143524	1,145655
1,15	1,218416	1,221621
1,20	1,295364	1,299648

Die *Erstrechnung* liefert also folgende Ergebnisse:

Nach *Euler*: $y(1,2) = 1,295364$

Nach *Runge-Kutta*: $y(1,2) = 1,299648$

Zweitrechnung (Grobrechnung) für $h = 0,1$:

Nach *Euler*: $y(1,2) = 1,291135$

Nach *Runge-Kutta*: $y(1,2) = 1,299648$

Fehlerabschätzung:

Nach *Euler*: $\Delta y_k \approx 1,295364 - 1,291135 = 0,004229 \approx 0,004$

Nach *Runge-Kutta*: $\Delta y_k \approx \frac{1}{15} (1,299648 - 1,299648) = 0$

4) $y'' + y' - 2y = 0; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -2; \quad y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x}$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1; \quad y'(0) = C_1 - 2C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2/3; \quad C_2 = 1/3$$

Exakte Lösung: $y_{\text{exakt}} = \frac{2}{3} \cdot e^x + \frac{1}{3} \cdot e^{-2x}; \quad y'_{\text{exakt}} = \frac{2}{3} (e^x - e^{-2x})$

Näherungsrechnung nach Runge-Kutta:

x	y (Runge-Kutta)	y _{exakt}	y' (Runge-Kutta)	y' _{exakt}
0	1	1	0	0
0,1	1,009692	1,009690	0,190958	0,190960
0,2	1,037710	1,037708	0,367386	0,367388
0,3	1,082845	1,082843	0,534028	0,534031

- 5) a) *Exakte Lösung* (siehe Übungsaufgabe 4a) aus Abschnitt 4):

$$x = e^{-2t} \cdot \cos(5t); \quad v = \dot{x} = -e^{-2t} [5 \cdot \sin(5t) + 2 \cdot \cos(5t)]$$

$$x(0,1) = 0,718\,504 \approx 0,7185; \quad v(0,1) = \dot{x}(0,1) = -3,399\,610 \approx -3,3996$$

- b) *Näherungslösung nach Runge-Kutta:*

$$x(0,1) = 0,718\,521 \approx 0,7185; \quad v(0,1) = \dot{x}(0,1) = -3,399\,706 \approx -3,3997$$

- 6) $\ddot{\varphi} + \sin \varphi = 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = 1$

Näherungslösung nach Runge-Kutta:

$$\varphi(0,1) = 0,099\,875 \approx 0,0999; \quad \dot{\varphi}(0,1) = 0,995\,837 \approx 0,9958$$

Für *kleine* Winkel erhalten wir näherungsweise die *lineare* Differentialgleichung $\ddot{\varphi} + \varphi = 0$. Sie besitzt die *allgemeine* Lösung $\varphi = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t$ und für die *Anfangswerte* $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 1$ die *spezielle* Lösung $\varphi = \sin t$. Somit ist:

$$\varphi(0,1) = \sin 0,1 = 0,099\,833 \approx 0,0998; \quad \dot{\varphi}(0,1) = \cos 0,1 = 0,995\,004 \approx 0,9950$$

Abschnitt 7

- 1) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -1 \pm j$

$$y_1 = e^{-x} (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$$

$$y_2 = -y_1 - \frac{1}{2} y_1' = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} [(-C_1 + C_2) \cdot \sin x - (C_1 + C_2) \cdot \cos x]$$

- b) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1$

$$x_1 = (C_1 + C_2 t) \cdot e^t; \quad x_2 = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 - x_1) = \frac{1}{2} C_2 \cdot e^t$$

- c) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -16 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 4j$

$$y_1 = C_1 \cdot \sin(4x) + C_2 \cdot \cos(4x); \quad y_2 = y_1' = 4[C_1 \cdot \cos(4x) - C_2 \cdot \sin(4x)]$$

- d) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -15 \\ 3 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm 3j$

$$y_1 = e^x [C_1 \cdot \sin(3x) + C_2 \cdot \cos(3x)]$$

$$y_2 = \frac{1}{15} (7y_1 - y_1') = \frac{1}{5} \cdot e^x [(2C_1 + C_2) \cdot \sin(3x) - (C_1 - 2C_2) \cdot \cos(3x)]$$

- e) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 \\ 6 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm \sqrt{3}j$

$$x_1 = C_1 \cdot \sin(\sqrt{3}t) + C_2 \cdot \cos(\sqrt{3}t); \quad x_2 = \frac{1}{2} (-3x_1 - \dot{x}_1) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[(-\sqrt{3}C_1 + C_2) \cdot \sin(\sqrt{3}t) - (C_1 + \sqrt{3}C_2) \cdot \cos(\sqrt{3}t) \right]$$

- f) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 4$
 $y_1 = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{4x}; y_2 = \frac{1}{3}(6y_1 - y_1') = C_1 \cdot e^{3x} + \frac{2}{3}C_2 \cdot e^{4x}$
- 2) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -4 \\ 1 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 6$
 $y_1 = (C_1 + C_2x) \cdot e^{6x}; y_2 = \frac{1}{4}(4y_1 - y_1') = -\frac{1}{4}(2C_1 + 2C_2 + C_2x) \cdot e^{6x}$
- b) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 4$
 $x_1 = C_1 + C_2 \cdot e^{4t}; x_2 = 2x_1 - \dot{x}_1 = 2C_1 - 2C_2 \cdot e^{4t}$
- c) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -2 \pm j$
 $y_1 = e^{-2x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$
 $y_2 = -y_1 - y_1' = e^{-2x}[(C_1 + C_2) \cdot \sin x - (C_1 - C_2) \cdot \cos x]$
- 3) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$
 $x = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t}; y = \frac{1}{4}(3x - \dot{x}) = \frac{1}{4}C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t}$
- b) $a = -\text{Sp}(\mathbf{A}) = -1; b = \det \mathbf{A} = -2; \text{Störglieder: } g_1(t) = g_2(t) = 0;$
 $\tilde{g}(t) = \dot{g}_1(t) - \det \mathbf{B} = 0 - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$
 $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$
 $x = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t}; y = \frac{1}{4}(3x - \dot{x}) = \frac{1}{4}C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-t}$
- 4) a) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 2j$
 $y_{1(0)} = C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x)$
 $y_{2(0)} = \frac{1}{2}y_{1(0)}' = C_1 \cdot \cos(2x) - C_2 \cdot \sin(2x)$
Ansatz: $y_{1(p)} = ax + b; y_{2(p)} = Ax + B$ (in beide Dgln einsetzen)
- $$\left. \begin{array}{l} \underbrace{(2A + 8)x + 2B = a}_0 \quad \underbrace{}_a \\ \underbrace{-2ax - 2b = A}_0 \quad \underbrace{}_A \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0; b = 2; A = -4; B = 0 \\ \text{Somit: } y_{1(p)} = 2; y_{2(p)} = -4x \end{array}$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x) + 2$$

$$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(p)} = C_1 \cdot \cos(2x) - C_2 \cdot \sin(2x) - 4x$$

$$\text{b) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1$$

$$y_{1(0)} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^x; \quad y_{2(0)} = y_{1(0)} + y'_{1(0)} = (2C_1 + C_2 + 2C_2 x) \cdot e^x$$

Ansatz: $y_{1(p)} = A \cdot e^{2x}; \quad y_{2(p)} = B \cdot e^{2x}$ (in beiden Dgln einsetzen)

$$\left. \begin{array}{l} 3A - B = 4 \\ 4A = B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -4; \quad B = -16 \\ \text{Somit: } y_{1(p)} = -4 \cdot e^{2x}; \quad y_{2(p)} = -16 \cdot e^{2x} \end{array}$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^x - 4 \cdot e^{2x}$$

$$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(p)} = (2C_1 + C_2 + 2C_2 x) \cdot e^x - 16 \cdot e^{2x}$$

$$5) \quad \text{a) } a = -\text{Sp}(\mathbf{A}) = -2; \quad b = \det \mathbf{A} = 2; \quad \text{Störglieder: } g_1(x) = e^x; \quad g_2(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{g}(x) = g'_1(x) - \det \mathbf{B} = e^x - \begin{vmatrix} e^x & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot e^x$$

$$y''_1 - 2y'_1 + 2y_1 = -3 \cdot e^x \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm j$$

$$y_{1(0)} = e^x (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x); \quad \text{Ansatz: } y_{1(p)} = A \cdot e^x \Rightarrow y_{1(p)} = -3 \cdot e^x$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = e^x (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x - 3)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} (-2y_1 - y'_1 + e^x) = -\frac{1}{2} \cdot e^x [(3C_1 - C_2) \cdot \sin x + (C_1 + 3C_2) \cdot \cos x - 10]$$

$$\text{b) } a = -\text{Sp}(\mathbf{A}) = 2; \quad b = \det \mathbf{A} = 1; \quad \text{Störglieder: } g_1(x) = 3x; \quad g_2(x) = 2x \Rightarrow$$

$$\bar{g}(x) = g'_1(x) - \det \mathbf{B} = 3 - \begin{vmatrix} 3x & -2 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = 3 - 7x$$

$$y''_1 + 2y'_1 + y_1 = 3 - 7x \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -1$$

$$y_{1(0)} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-x}; \quad \text{Ansatz: } y_{1(p)} = ax + b$$

$$\underbrace{(2a + b)}_3 + \underbrace{ax}_{-7} = 3 - 7x \Rightarrow a = -7; \quad b = 17; \quad y_{1(p)} = -7x + 17$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-x} - 7x + 17$$

$$y_2 = \frac{1}{2} (-3y_1 - y'_1 + 3x) = -(C_1 + 0,5C_2 + C_2 x) \cdot e^{-x} + 12x - 22$$

$$\text{c) } a = -\text{Sp}(\mathbf{A}) = -6; \quad b = \det \mathbf{A} = 8; \quad \text{Störglieder: } g_1(t) = 8 \cdot e^{3t}; \quad g_2(t) = 8 \Rightarrow$$

$$\bar{g}(t) = \dot{g}_1(t) - \det \mathbf{B} = 24 \cdot e^{3t} - \begin{vmatrix} 8 \cdot e^{3t} & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

$$\ddot{x}_1 - 6\dot{x}_1 + 8x_1 = -8 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$$

$$x_{1(0)} = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{4t}; \text{ Ansatz: } x_{1(p)} = \text{const.} = B;$$

$$8B = -8 \Rightarrow B = -1; x_p = -1$$

Allgemeine Lösung:

$$x_1 = x_{1(0)} + x_{1(p)} = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{4t} - 1$$

$$x_2 = 3x_1 - \dot{x}_1 + 8 \cdot e^{3t} = C_1 \cdot e^{2t} - C_2 \cdot e^{4t} + 8 \cdot e^{3t} - 3$$

$$6) \quad a) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 2$$

$$y_{1(0)} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x}; \quad y_{2(0)} = \frac{1}{3}(y_{1(0)} + y'_{1(0)}) = C_1 \cdot e^{2x} - \frac{1}{3}C_2 \cdot e^{-2x}$$

Ansatz: $y_{1(p)} = Ax + B; \quad y_{2(p)} = Cx + D$ (in beide Dgln einsetzen)

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{(-A + 3C + 1)x + (-B + 3D)}_0 = A \\ \underbrace{(A + C)x + (B + D)}_0 = C \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4; \quad B = -1/4; \\ C = -1/4; \quad D = 0 \\ \text{Somit: } y_{1(p)} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}; \\ y_{2(p)} = -\frac{1}{4}x \end{cases}$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(p)} = C_1 \cdot e^{2x} - \frac{1}{3}C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}x$$

$$b) \quad a = -\text{Sp}(\mathbf{A}) = 0; \quad b = \det \mathbf{A} = -4; \quad \text{Störglieder: } g_1(x) = x; \quad g_2(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{g}(x) = g'_1(x) - \det \mathbf{B} = 1 - \begin{vmatrix} x & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$

$$y''_1 - 4y_1 = 1 - x \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 2$$

$$y_{1(0)} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x}; \text{ Ansatz: } y_{1(p)} = Ax + B;$$

$$\underbrace{-4B - 4Ax}_1 = \underbrace{1 - x}_{-1} \Rightarrow A = \frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad y_{1(p)} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{1}{3}(y_1 + y'_1 - x) = C_1 \cdot e^{2x} - \frac{1}{3}C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}x$$

$$7) \quad a) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 5 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -1 \pm j$$

$$y_1 = e^{-x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$$

$$y_2 = \frac{1}{5}(3y_1 + y'_1) = \frac{1}{5} \cdot e^{-x}[(2C_1 - C_2) \cdot \sin x + (C_1 + 2C_2) \cdot \cos x]$$

Spezielle Lösung: $y_1 = e^{-x} (\sin x + 2 \cdot \cos x)$; $y_2 = e^{-x} \cdot \cos x$

$$\text{b) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$$

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}; \quad y_2 = \frac{1}{4} (y_1' - y_1) = \frac{1}{2} (-C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x})$$

Spezielle Lösung: $y_1 = -2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{3x}$; $y_2 = e^{-x} + e^{3x}$

c) Einsetzungsverfahren: $a = -\text{Sp}(\mathbf{A}) = -1$; $b = \det \mathbf{A} = -2$

Störglieder: $g_1(t) = t$; $g_2(t) = 3 \cdot e^t \Rightarrow$

$$\bar{g}(t) = \dot{g}_1(t) - \det \mathbf{B} = 1 - \begin{vmatrix} t & 2 \\ 3 \cdot e^t & 3 \end{vmatrix} = 1 - 3t + 6 \cdot e^t$$

$$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 - 2x_1 = 1 - 3t + 6 \cdot e^t \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 2$$

$$x_{1(0)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{2t}; \quad \text{Ansatz: } x_{1(p)} = At + B + C \cdot e^t$$

$$\underbrace{(-A - 2B)}_1 - \underbrace{2At}_{-3} - \underbrace{2C \cdot e^t}_6 = 1 - 3t + 6 \cdot e^t \Rightarrow$$

$$A = 3/2; \quad B = 5/4; \quad C = -3; \quad x_{1(p)} = \frac{3}{2}t - \frac{5}{4} - 3 \cdot e^t$$

Allgemeine Lösung:

$$x_1 = x_{1(0)} + x_{1(p)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{2t} - 3 \cdot e^t + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 + 2x_1 - t) = \frac{1}{2} (C_1 \cdot e^{-t} + 4C_2 \cdot e^{2t} - 9 \cdot e^t + 2t - 1)$$

$$\text{Spezielle Lösung: } x_1 = \frac{5}{3} \cdot e^{-t} - \frac{5}{12} \cdot e^{2t} - 3 \cdot e^t + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{5}{6} \cdot e^{-t} - \frac{5}{6} \cdot e^{2t} - \frac{9}{2} \cdot e^t + t - \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -1 \\ 5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -1 \pm j$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = e^{-x} (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$$

$$y_2 = -3y_1 - y_1' = -e^{-x} [(2C_1 - C_2) \cdot \sin x + (C_1 + 2C_2) \cdot \cos x]$$

Spezielle Lösung: $y_1 = e^{-x} \cdot \sin x$; $y_2 = -e^{-x} \cdot (2 \cdot \sin x + \cos x)$

$$\text{e) } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -1 \\ 5 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 40 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 6 \pm 2j$$

Allgemeine Lösung:

$$y_1 = e^{6x} [C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x)]$$

$$y_2 = 7y_1 - y_1' = e^{6x} [(C_1 + 2C_2) \cdot \sin(2x) - (2C_1 - C_2) \cdot \cos(2x)]$$

Spezielle Lösung: $y_1 = e^{6x} [\sin(2x) + 2 \cdot \cos(2x)]$; $y_2 = 5 \cdot e^{6x} \cdot \sin(2x)$

$$8) \quad a) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$$

$$x_{1(0)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t}; \quad x_{2(0)} = \frac{1}{4} (\dot{x}_{1(0)} - x_{1(0)}) = -\frac{1}{2} (C_1 \cdot e^{-t} - C_2 \cdot e^{3t})$$

Ansatz: $x_{1(p)} = B \cdot e^t$; $x_{2(p)} = C \cdot e^t$ (in beide Dgln einsetzen)

$$\left. \begin{array}{l} 4C - 1 = 0 \\ B + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B = -2; & C = 1/4 \\ x_{1(p)} = -2 \cdot e^t; & x_{2(p)} = \frac{1}{4} \cdot e^t \end{cases}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } x_1 = x_{1(0)} + x_{1(p)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t} - 2 \cdot e^t$$

$$x_2 = x_{2(0)} + x_{2(p)} = -\frac{1}{2} (C_1 \cdot e^{-t} - C_2 \cdot e^{3t}) + \frac{1}{4} \cdot e^t$$

$$\text{Spezielle Lösung: } x_1 = e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3t} - 2 \cdot e^t$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{4} \cdot e^{3t} + \frac{1}{4} \cdot e^t$$

$$b) \quad a = -\text{Sp}(\mathbf{A}) = -2; \quad b = \det \mathbf{A} = -3$$

$$\text{Störglieder: } g_1(t) = -e^t; \quad g_2(t) = 2 \cdot e^t \Rightarrow$$

$$\bar{g}(t) = \dot{g}_1(t) - \det \mathbf{B} = -e^t - \begin{vmatrix} -e^t & 4 \\ 2 \cdot e^t & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot e^t$$

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - 3x_1 = 8 \cdot e^t \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$$

$$x_{1(0)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t}$$

$$\text{Ansatz: } x_{1(p)} = C \cdot e^t; \quad -4C = 8 \Rightarrow C = -2; \quad x_{1(p)} = -2 \cdot e^t$$

Allgemeine Lösung:

$$x_1 = x_{1(0)} + x_{1(p)} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{3t} - 2 \cdot e^t$$

$$x_2 = \frac{1}{4} (\dot{x}_1 - x_1 + e^t) = \frac{1}{4} (-2C_1 \cdot e^{-t} + 2C_2 \cdot e^{3t} + e^t)$$

Spezielle Lösung: siehe a)

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \dot{y} \\ \ddot{y} = -\dot{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm j$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } u = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t; \quad v = \dot{u} = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t$$

Rücksubstitution:

$$x = \int \dot{x} dt = \int u dt = \int (C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t) dt = -C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t + K_1$$

$$y = \int \dot{y} dt = \int v dt = \int (C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t) dt = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t + K_2$$

Spezielle Lösung:

Aus den Anfangswerten erhält man

$$C_1 = K_1 = 1 \quad \text{und} \quad C_2 = K_2 = 0.$$

$$\text{Somit: } x = -\cos t + 1; \quad y = \sin t$$

$$\cos t = 1 - x; \quad \sin t = y$$

Aus $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt weiter:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(Kreis um den Mittelpunkt $M = (1; 0)$
mit dem Radius $r = 1$; Bild A-42).

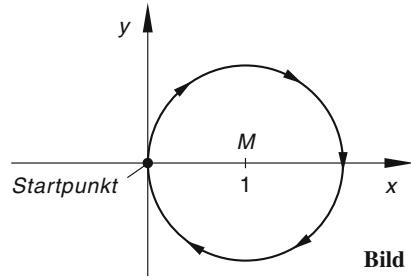


Bild A-42

V Fourier-Transformationen

Hinweise

- 1) Die Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte).
- 2) Die Fourier-Transformationen wurden den *Tabellen* in Kap. V, Abschnitt 5.2 entnommen (Angabe der Tabelle, der laufenden Nummer der Transformation und der Parameterwerte).
- 3) Häufig verwendete Formeln:

$$e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2 \cdot \cos \varphi; \quad e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j \cdot \sin \varphi$$

Abschnitt 1

$$1) \quad a) \quad f(t) = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t} & t \leq 0 \\ e^{-2t} & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{für}$$

$$\begin{aligned} F\{\omega\} &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(2-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(2+j\omega)t} dt = \\ &= \left[\frac{e^{(2-j\omega)t}}{2-j\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2-j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} = \frac{4}{4+\omega^2} \end{aligned}$$

(Integral: 312 mit $a = 2 - j\omega$ bzw. $a = -(2 + j\omega)$)

$$\begin{aligned} b) \quad F(\omega) &= \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-(1+j\omega)t} dt = \\ &= \left[\frac{(1+j\omega)^2 t^2 + 2(1+j\omega)t + 2}{-(1+j\omega)^3} \cdot e^{-(1+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{(1+j\omega)^3} \end{aligned}$$

(Integral: 314 mit $a = -(1 + j\omega)$)

$$\begin{aligned}
 \text{c) } F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} \cdot \sin(\omega_0 t) dt = \\
 &= \left[\frac{-(a+j\omega) \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t)}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2} \cdot e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \\
 &= \frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2} \quad (\text{Integral: 322 mit } a \rightarrow -(a+j\omega) \text{ und } b = \omega_0)
 \end{aligned}$$

$$2) \quad F(\omega) = \int_{-a}^a (a^2 - t^2) \cdot e^{-j\omega t} dt = a^2 \cdot \underbrace{\int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt}_{I_1} - \underbrace{\int_{-a}^a t^2 \cdot e^{-j\omega t} dt}_{I_2} = a^2 I_1 - I_2$$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2 :

$$I_1 = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-a}^a = \frac{e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}}{j\omega} = \frac{2 \cdot \sin(\omega a)}{\omega} \quad (\text{Integral: 312 mit } a = -j\omega)$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \left[\frac{(-\omega^2 t^2 + j2\omega t + 2) \cdot e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^3} \right]_{-a}^a = \\
 &= \frac{\omega^2 a^2 (e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}) + j2\omega a (e^{j\omega a} + e^{-j\omega a}) - 2(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a})}{j\omega^3} = \\
 &= \frac{2a^2 \cdot \sin(\omega a)}{\omega} + \frac{4a \cdot \cos(\omega a)}{\omega^2} - \frac{4 \cdot \sin(\omega a)}{\omega^3} \quad (\text{Integral: 314 mit } a = -j\omega)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= a^2 I_1 - I_2 = \frac{2a^2 \cdot \sin(\omega a)}{\omega} - \frac{2a^2 \cdot \sin(\omega a)}{\omega} - \frac{4a \cdot \cos(\omega a)}{\omega^2} + \frac{4 \cdot \sin(\omega a)}{\omega^3} = \\
 &= \frac{4[\sin(\omega a) - a\omega \cdot \cos(\omega a)]}{\omega^3}
 \end{aligned}$$

$$3) \quad \text{a) } F(\omega) = \int_{t_0}^{t_0+T} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{t_0}^{t_0+T} = j \frac{e^{-j\omega t_0} (e^{-j\omega T} - 1)}{\omega}$$

(Integral: 312 mit $a = -j\omega$)

$$\begin{aligned}
 \text{b) } F(\omega) &= \int_{-T}^0 \left(1 + \frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \int_{-T}^0 e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{-T}^0 t \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^T e^{-j\omega t} dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T t \cdot e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T}^T + \left[\frac{(j\omega t + 1) \cdot e^{-j\omega t}}{\omega^2 T} \right]_{-T}^0 - \left[\frac{(j\omega t + 1) \cdot e^{-j\omega t}}{\omega^2 T} \right]_0^T =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} + \frac{1 - (-j\omega T + 1) \cdot e^{j\omega T} - (j\omega T + 1) \cdot e^{-j\omega T} + 1}{\omega^2 T} = \\
&= \frac{2 \cdot \sin(\omega T)}{\omega} + \frac{2 + j\omega T (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})}{\omega^2 T} = \\
&= \frac{2 \cdot \sin(\omega T)}{\omega} + \frac{2 - 2\omega T \cdot \sin(\omega T) - 2 \cdot \cos(\omega T)}{\omega^2 T} = \\
&= \frac{2[1 - \cos(\omega T)]}{\omega^2 T} \quad (\text{Integrale: 312 und 313, jeweils mit } a = -j\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } F(\omega) &= \int_0^T 1 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{2T}^{3T} (-1) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^T e^{-j\omega t} dt - \int_{2T}^{3T} e^{-j\omega t} dt = \\
&= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^T - \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{2T}^{3T} = j \frac{e^{-j\omega T} + e^{-2j\omega T} - e^{-3j\omega T} - 1}{\omega}
\end{aligned}$$

(Integral: 312 mit $a = -j\omega$)

Abschnitt 2

$$1) \quad \text{a) } F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot \cos(\omega t) dt = \left[\frac{(-a \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)) \cdot e^{-at}}{a^2 + \omega^2} \right]_0^\infty = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

(Integral: 324 mit $a \rightarrow -a$ und $b = \omega$)

$$\begin{aligned}
\text{b) } F_c(\omega) &= \int_0^\infty t \cdot e^{-t/T} \cdot \cos(\omega t) dt = \\
&= \left[\frac{t \cdot e^{-t/T}}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} \left(-\frac{1}{T} \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-t/T}}{\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2 \right)^2} \left(\left(\frac{1}{T^2} - \omega^2 \right) \cdot \cos(\omega t) - \frac{2\omega}{T} \cdot \sin(\omega t) \right) \right]_0^\infty = \\
&= \frac{T^2(1 - \omega^2 T^2)}{(1 + \omega^2 T^2)^2} \quad (\text{Integral: 331 mit } a = -1/T \text{ und } b = \omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } F_c(\omega) &= \int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin t \cdot \cos(\omega t) dt = \\
&= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin(1 - \omega)t dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} \cdot \sin(1 + \omega)t dt}_{I_2} \right] = \frac{1}{2} (I_1 + I_2)
\end{aligned}$$

Vorgenommene Umformung: $\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} [\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)]$

mit $x_1 = t$, $x_2 = \omega t$ und somit $x_1 \pm x_2 = (1 \pm \omega)t$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2 :

$$I_{1/2} = \left[\frac{e^{-t} [-\sin(1 \mp \omega)t - (1 \mp \omega) \cdot \cos(1 \mp \omega)t]}{1 + (1 \mp \omega)^2} \right]_0^\infty = \frac{1 \mp \omega}{1 + (1 \mp \omega)^2}$$

(Integral: 322 mit $a = -1$ und $b = 1 - \omega$ bzw. $b = 1 + \omega$)

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \omega}{1 + (1 - \omega)^2} + \frac{1 + \omega}{1 + (1 + \omega)^2} \right]$$

- 2) Wegen der *Achsensymmetrie* (gerade Funktion) gilt: $F(\omega) = 2 \cdot F_c(\omega)$. Es genügt daher, die Fourier-Kosinus-Transformierte $F_c(\omega)$ zu bestimmen.

a) $f(t) = \frac{1}{T^2} (T - t); \quad 0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \int_0^T \frac{1}{T^2} (T - t) \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos(\omega t) dt - \frac{1}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^T - \frac{1}{T^2} \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} + \frac{t \cdot \sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^T = \frac{1 - \cos(\omega T)}{(\omega T)^2} \end{aligned}$$

(Integrale: 228 und 232, jeweils mit $a = \omega$)

$$F(\omega) = 2 \cdot F_c(\omega) = \frac{2[1 - \cos(\omega T)]}{(\omega T)^2}$$

b) $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} t & 0 \leq t \leq 1 \\ \text{für} & \\ 2 - t & 1 \leq t \leq 2 \end{array} \right\}$

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \int_0^1 t \cdot \cos(\omega t) dt + \int_1^2 (2 - t) \cdot \cos(\omega t) dt = \\ &= \int_0^1 t \cdot \cos(\omega t) dt + 2 \cdot \int_1^2 \cos(\omega t) dt - \int_1^2 t \cdot \cos(\omega t) dt = \\ &= \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} + \frac{t \cdot \sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 + \left[\frac{2 \cdot \sin(\omega t)}{\omega} - \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} - \frac{t \cdot \sin(\omega t)}{\omega} \right]_1^2 = \\ &= \frac{2 \cdot \cos \omega - \cos(2\omega) - 1}{\omega^2} = \frac{2[\cos \omega - \cos^2 \omega]}{\omega^2} \end{aligned}$$

(Integrale: 228 und 232, jeweils mit $a = \omega$; $\cos(2\omega) = 2 \cdot \cos^2 \omega - 1$)

$$F(\omega) = 2 \cdot F_c(\omega) = \frac{4[\cos \omega - \cos^2 \omega]}{\omega^2}$$

- 3) $x(t)$ ist eine *ungerade* Funktion. Es genügt daher, die Fourier-Sinus-Transformierte $X_s(\omega)$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -2j \cdot X_s(\omega) = -2j \cdot \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(\omega t) dt = \\ &= -j \cdot \left[\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-at} \cdot \cos(\omega - \omega_0) t dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-at} \cdot \cos(\omega + \omega_0) t dt}_{I_2} \right] = -j(I_1 - I_2) \end{aligned}$$

Vorgenommene Umformung: $\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2} [\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)]$

mit $x_1 = \omega t$, $x_2 = \omega_0 t$ und somit $x_1 \pm x_2 = (\omega \pm \omega_0) t$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2 :

$$I_{1/2} = \left[\frac{e^{-at} [-a \cdot \cos(\omega \mp \omega_0) t + (\omega \mp \omega_0) \cdot \sin(\omega \mp \omega_0) t]}{a^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \right]_0^{\infty} = \frac{a}{a^2 + (\omega \mp \omega_0)^2}$$

(Integral: 324 mit $a \rightarrow -a$ und $b = \omega - \omega_0$ bzw. $b = \omega + \omega_0$)

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -j(I_1 - I_2) = -j \left(\frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right) = \\ &= -ja \left(\frac{1}{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\omega_0\omega} - \frac{1}{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega} \right) = \\ &= -ja \cdot \frac{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega - (a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega}{\underbrace{[(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\omega_0\omega][(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega]}_{3. \text{ Binom}}} = \\ &= -j \cdot \frac{4a\omega_0\omega}{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2)^2 - 4\omega_0^2\omega^2} \end{aligned}$$

$$A(\omega) = |X(\omega)| = \frac{4a\omega_0|\omega|}{(a^2 + \omega_0^2 + \omega^2)^2 - 4\omega_0^2\omega^2}$$

4) a) $F_s(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t/T} \cdot \sin(\omega t) dt = \left[\frac{e^{-t/T} \left(-\frac{1}{T} \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t) \right)}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} \right]_0^{\infty} =$

$$= \frac{T^2 \omega}{1 + (\omega T)^2} \quad (\text{Integral: 322 mit } a = -1/T \text{ und } b = \omega)$$

b) $F_s(\omega) = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega t) dt = \left[\frac{t \cdot e^{-at} [-a \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)]}{a^2 + \omega^2} - \frac{e^{-at} [(a^2 - \omega^2) \cdot \sin(\omega t) + 2a\omega \cdot \cos(\omega t)]}{(a^2 + \omega^2)^2} \right]_0^{\infty} = \frac{2a\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$

(Integral: 330 mit $a \rightarrow -a$ und $b = \omega$)

$$\begin{aligned}
 \text{c) } F_s(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \cos t \cdot \sin(\omega t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos t dt = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \sin(\omega - 1)t dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \sin(\omega + 1)t dt}_{I_2} \right] = \frac{1}{2} (I_1 + I_2)
 \end{aligned}$$

Vorgenommene Umformung: $\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} [\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)]$

mit $x_1 = \omega t$, $x_2 = t$ und somit $x_1 \pm x_2 = (\omega \pm 1)t$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2 :

$$I_{1/2} = \left[\frac{e^{-t} [-\sin(\omega \mp 1)t - (\omega \mp 1) \cdot \cos(\omega \mp 1)t]}{1 + (\omega \mp 1)^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\omega \mp 1}{1 + (\omega \mp 1)^2}$$

(Integral: 322 mit $a = -1$ und $b = \omega - 1$ bzw. $b = \omega + 1$)

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega - 1}{1 + (\omega - 1)^2} + \frac{\omega + 1}{1 + (\omega + 1)^2} \right]$$

$$5) F_c(\omega) = \int_0^T 1 \cdot \cos(\omega t) dt = \int_0^T \cos(\omega t) dt = \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^T = \frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

$$F_s(\omega) = \int_0^T 1 \cdot \sin(\omega t) dt = \int_0^T \sin(\omega t) dt = \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^T = \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega}$$

(Integrale: 228 und 204, jeweils mit $a = \omega$)

6) Wegen der *Punktsymmetrie* (*ungerade* Funktion) gilt: $F(\omega) = -2j \cdot F_s(\omega)$. Es genügt daher, die Fourier-Sinus-Transformierte zu bestimmen.

$$\text{a) } F_s(\omega) = \int_0^T 1 \cdot \sin(\omega t) dt = \int_0^T \sin(\omega t) dt = \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^T = \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega}$$

(Integral: 204 mit $a = \omega$)

$$F(\omega) = -2j \cdot F_s(\omega) = j \frac{2[\cos(\omega T) - 1]}{\omega}$$

$$\text{b) } F_s(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot \sin(\omega t) dt = \left[\frac{e^{-at} [-a \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)]}{a^2 + \omega^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

(Integral: 322 mit $a \rightarrow -a$ und $b = \omega$)

$$F(\omega) = -2j \cdot F_s(\omega) = -j \frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Abschnitt 3

- 1) $f(t) = \sigma(t + T) + \sigma(t - T) - 1$
- 2) Verlauf der „ausgeblendeten“ Exponentialfunktion: siehe Bild A-43 (a) bis c))

a) $g(t) = e^{-t} \cdot \sigma(t)$

b) $g(t) = e^{-t} [\sigma(t - 1) - \sigma(t - 2)]$

c) $g(t) = e^{-t} \cdot \sigma(t + 1)$

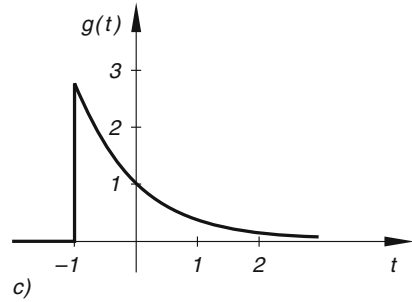
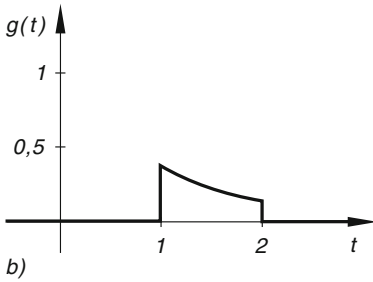
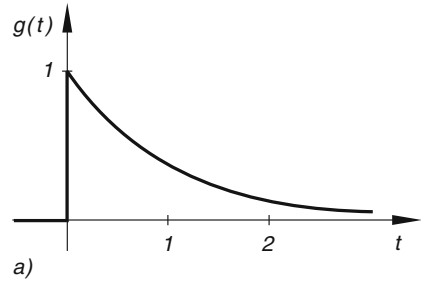


Bild A-43

3) $g(t) = f(t - 2) \cdot \sigma(t) = e^{-0,2|t-2|} \cdot \sigma(t)$

Verlauf der Kurven: siehe Bild A-44 (a) und b))

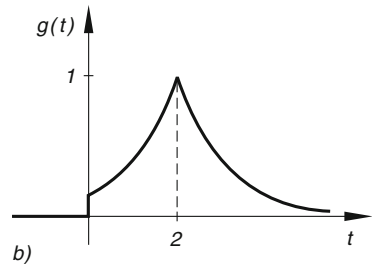
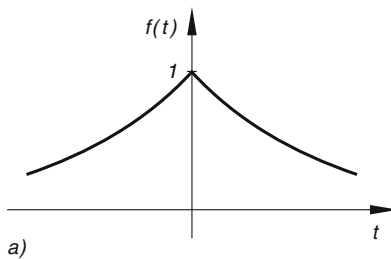


Bild A-44

- 4) a) $T = -\pi/2$ liegt im Integrationsbereich. Daher:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t + \pi/2) \cdot \sin(2t) dt = \sin(2T) = \sin(-\pi) = 0$$

b) $T = 3$ liegt im Integrationsintervall: $\int_0^{10} \delta(t-3) \cdot e^{-2t} dt = e^{-2T} = e^{-6}$

c) $T = 10$ liegt außerhalb des Integrationsintervalls: $\int_{-\infty}^0 \delta(t-10) \cdot \frac{\cos t}{1+t^2} dt = 0$

d) $T = e < 3$ liegt im Integrationsintervall: $\int_0^3 \delta(t-e) \cdot \ln t dt = \ln T = \ln e = 1$

- e) T liegt stets im Integrationsbereich $(-\infty < T < \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T) \cdot [\sigma(t+\pi) - \sigma(t-\pi)] \cdot \cos t dt =$$

$$= [\sigma(T+\pi) - \sigma(T-\pi)] \cdot \cos T = \begin{cases} 1 \cdot \cos T = \cos T & -\pi \leq T \leq \pi \\ 0 \cdot \cos T = 0 & \text{für alle übrigen } T \end{cases}$$

- 5) Der Parameterwert $T = 5$ muss im Intervall $0 \leq 5 \leq a$ liegen $\Rightarrow a \geq 5$

Integralwert für $a \geq 5$: $\cos(T-2) = \cos(5-2) = \cos 3$

6) a) Sprung der Höhe 2 bei $t = 0$: $\frac{Df(t)}{Dt} = -2 \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t) + 2 \cdot \delta(t)$

- b) Sprung der Höhe $\cos(2\pi - 1) = 0,5403$ bei $t = \pi$:

$$\frac{Df(t)}{Dt} = -2 \cdot \sin(2t-1) \cdot \sigma(t-\pi) + 0,5403 \cdot \delta(t-\pi)$$

- c) Sprung der Höhe $f(-5) = 26$ an der Stelle $t = -5$:

$$\frac{Df(t)}{Dt} = 2t \cdot \sigma(t+5) + 26 \cdot \delta(t+5)$$

- 7) Sprünge der Höhe 1 bei $t = \mp a$:

$$\frac{Df(t)}{Dt} = 0 + 1 \cdot \delta(t+a) + 1 \cdot \delta(t-a) = \delta(t+a) + \delta(t-a)$$

Fourier-Transformierte der Ableitung: $F(\omega) = e^{j\omega a} + e^{-j\omega a} = 2 \cdot \cos(\omega a)$

8) $F(\omega) = e^{-j\omega 3} + 1 + e^{j\omega 5} = 1 + e^{-j3\omega} + e^{j5\omega}$

$$9) \quad F(\omega) = 2[\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi)] + j[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi)] \cdot e^{j\omega t} d\omega + \\ &\quad + \frac{j}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{(e^{j\pi t} + e^{-j\pi t})}_{2 \cdot \cos(\pi t)} + \frac{j}{2\pi} \underbrace{(e^{jt} - e^{-jt})}_{2j \cdot \sin t} = \frac{2}{\pi} \cdot \cos(\pi t) - \frac{1}{\pi} \cdot \sin t \end{aligned}$$

Die Teilintegrale sind alle vom gleichen Typ und lassen sich nach der *Ausblendvorschrift*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - T) \cdot e^{j\omega t} d\omega = e^{jTt} \quad (\text{mit } -\infty < T < \infty)$$

auswerten (der Parameter T liegt dabei stets im Integrationsbereich und besitzt der Reihe nach die speziellen Werte π , $-\pi$, 1 und -1).

Abschnitt 4

$$1) \quad a) \quad F(\omega) = 3 \cdot \mathcal{F}\{e^{-2t} \cdot \sigma(t)\} - 5 \cdot \mathcal{F}\{e^{-8t} \cdot \sigma(t)\} = \frac{3}{2 + j\omega} - \frac{5}{8 + j\omega}$$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 2$ bzw. $a = 8$)

$$b) \quad F(\omega) = a \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2^2 + t^2}\right\} + b \cdot \mathcal{F}\{t \cdot e^{-2t} \cdot \sigma(t)\} = \frac{a\pi}{2} \cdot e^{-2|\omega|} + \frac{b}{(2 + j\omega)^2}$$

(Tab. 1: Nr. 6 und Nr. 10, jeweils mit $a = 2$)

$$\begin{aligned} c) \quad F(\omega) &= A \cdot \mathcal{F}\{e^{-at} \cdot \sin t \cdot \sigma(t)\} - 2A \cdot \mathcal{F}\{e^{-at} \cdot \cos t \cdot \sigma(t)\} = \\ &= A \cdot \frac{1}{(a + j\omega)^2 + 1} - 2A \cdot \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + 1} = \frac{A(1 - 2a - j2\omega)}{(a + j\omega)^2 + 1} \end{aligned}$$

(Tab. 1: Nr. 13 und Nr. 14, jeweils mit $a = a$ und $b = 1$)

$$2) \quad a) \quad \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \mathcal{F}\{e^{-|at|}\} = \frac{1}{a} \cdot F(\omega/a) = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{1 + (\omega/a)^2} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \mathcal{F}\{e^{-at^2}\} &= \mathcal{F}\{e^{-(\sqrt{a}t)^2}\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot F(\omega/\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{-(\omega/\sqrt{a})^2/4} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\omega^2/4a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \mathcal{F}\{t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{a} \cdot (at) \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)\right\} = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{F}\{(at) \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)\} = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot F(\omega/a) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/a)^2} = \frac{1}{(a + j\omega)^2} \end{aligned}$$

3) Verschobene Funktion: $g(t) = f(t - 3)$. Die Bildfunktion multipliziert sich mit $e^{-j3\omega}$:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t - 3)\} = e^{-j3\omega} \cdot F(\omega)$$

a) $G(\omega) = \frac{e^{-j3\omega}}{2 + j\omega}$ b) $G(\omega) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-(\omega^2/4 + j3\omega)}$ c) $G(\omega) = \frac{e^{-j3\omega}}{(1 + j\omega)^2 + 1}$

4) a) Verschiebung um a nach rechts: $g(t) = f(t - a) = \sigma(t) - \sigma(t - 2a)$

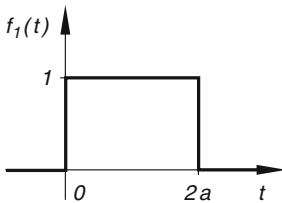
$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = e^{-j\omega a} \cdot F(\omega) = \frac{2 \cdot \sin(\omega a) \cdot e^{-j\omega a}}{\omega}$$

b) Verschiebung um $T/2$ nach rechts:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = e^{-j\omega T/2} \cdot F(\omega) = \frac{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot e^{-j\omega T/2}}{(\omega T)^2}$$

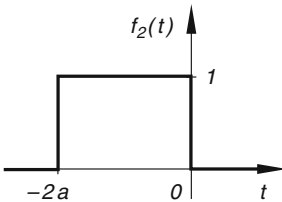
5) $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\omega - \omega_0) = \frac{2 \cdot \sin[(\omega - \omega_0)a]}{\omega - \omega_0}$

6) Wir verschieben den Impuls $f(t)$ um die Strecke a nach rechts bzw. links und erhalten die Impulse $f_1(t)$ und $f_2(t)$ mit den folgenden Bildfunktionen (siehe Bild A-45 bzw. A-46):



$$F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = e^{-j\omega a} \cdot F(\omega) = e^{-j\omega a} \cdot \frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega}$$

Bild A-45 Rechteckiger Impuls $f_1(t)$



$$F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = e^{j\omega a} \cdot F(\omega) = e^{j\omega a} \cdot \frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega}$$

Bild A-46 Rechteckiger Impuls $f_2(t)$

Der vorgegebene rechteckige Impuls $g(t)$ nach Bild V-55 ist die *Differenz* der Impulse $f_1(t)$ und $f_2(t)$, wenn man $a = T$ setzt. Somit gilt:

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} - \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) = e^{-j\omega T} \cdot F(\omega) - e^{j\omega T} \cdot F(\omega) = -\underbrace{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}_{2j \cdot \sin(\omega T)} \cdot F(\omega) = -j \frac{4 \cdot \sin^2(\omega T)}{\omega}$$

$$7) \quad \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2j} \cdot e^{-\delta t} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \cdot \sigma(t) = \\ &= \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sigma(t) - e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sigma(t)] = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} \cdot f(t) - e^{-j\omega_0 t} \cdot f(t)] \end{aligned}$$

$$\text{mit } f(t) = e^{-\delta t} \cdot \sigma(t) \quad \text{und} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-\delta t} \cdot \sigma(t)\} = \frac{1}{\delta + j\omega}.$$

Somit lässt sich $g(t)$ als Überlagerung zweier Funktionen darstellen, die aus $f(t)$ durch *Dämpfung* mit $e^{j\omega_0 t}$ bzw. $e^{-j\omega_0 t}$ hervorgehen. Der *Dämpfungssatz* liefert dann:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{2j} [\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)\} - \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t} \cdot f(t)\}] = \\ &= \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{\delta + j(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{\delta + j(\omega + \omega_0)} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(\delta + j\omega) - j\omega_0} - \frac{1}{(\delta + j\omega) + j\omega_0} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \underbrace{\frac{(\delta + j\omega) + j\omega_0 - (\delta + j\omega) + j\omega_0}{[(\delta + j\omega) - j\omega_0][(\delta + j\omega) + j\omega_0]}}_{\text{3. Binom}} = \frac{\omega_0}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

$$8) \quad g'(t) = e^{-at} \cdot \sigma(t) - \underbrace{a t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)}_{g(t)} = e^{-at} \cdot \sigma(t) - a \cdot g(t)$$

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-at} \cdot \sigma(t)\} - a \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\omega) - a \cdot G(\omega)$$

Ableitungssatz für Originalfunktionen: $\mathcal{F}\{g'(t)\} = j\omega \cdot G(\omega)$. Somit gilt:

$$j\omega \cdot G(\omega) = F(\omega) - a \cdot G(\omega) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = \frac{F(\omega)}{a + j\omega} = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

9) Gliedweise Transformation unter Verwendung des *Ableitungssatzes für Originalfunktionen* liefert mit den Bezeichnungen $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ und $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$:

$$\mathcal{F}\{\ddot{x}\} + 2\delta \cdot \mathcal{F}\{\dot{x}\} + \omega_0^2 \cdot \mathcal{F}\{x\} = \mathcal{F}\{g(t)\} \quad \Rightarrow$$

$$(j\omega)^2 \cdot X(\omega) + 2\delta \cdot j\omega \cdot X(\omega) + \omega_0^2 \cdot X(\omega) = G(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega) \cdot X(\omega) = G(\omega)$$

$$10) \quad f'(t) = \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) = \omega_0 \cdot g(t)$$

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \omega_0 \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} = \omega_0 \cdot G(\omega)$$

Ableitungssatz für Originalfunktionen: $\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega \cdot F(\omega)$. Somit gilt:

$$\omega_0 \cdot G(\omega) = j\omega \cdot F(\omega) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = j \frac{\omega \cdot F(\omega)}{\omega_0} = j \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$11) \quad F'(\omega) = -j \cdot \mathcal{F}\left\{ \underbrace{t \cdot f(t)}_{g(t)} \right\} = -j \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} \Rightarrow \mathcal{F}\{g(t)\} = j \cdot F'(\omega)$$

$$a) \quad \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t \cdot e^{-5t} \cdot \sigma(t)\} = j \cdot F'(\omega) = j \cdot \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{5 + j\omega} \right) = \frac{1}{(5 + j\omega)^2}$$

$$b) \quad \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t \cdot e^{-a|t|}\} = j \cdot F'(\omega) = j \cdot \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2a}{a^2 + \omega^2} \right) = -j \frac{4a\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$$

$$c) \quad \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t \cdot e^{-t^2}\} = j \cdot F'(\omega) = j \cdot \frac{d}{d\omega} (\sqrt{\pi} \cdot e^{-\omega^2/4}) = \\ = -j \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \omega \cdot e^{-\omega^2/4}$$

$$12) \quad \int_{-\infty}^t g(u) du = \int_{-\infty}^t u \cdot e^{-au} \cdot \sigma(u) du = \int_0^t \underbrace{\tau}_{\alpha} \cdot \underbrace{e^{-a\tau}}_{\beta'} du = [\alpha\beta]_0^t - \int_0^t \alpha' \beta du =$$

$$= \left[-\frac{1}{a} u \cdot e^{-au} \right]_0^t + \frac{1}{a} \cdot \int_0^t e^{-au} du = -\frac{1}{a} (t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)) + \frac{1}{a} \cdot \int_0^t e^{-au} du$$

$$\left(\text{nach partieller Integration mit } \alpha = u, \beta' = e^{-au} \text{ und somit } \alpha' = 1, \beta = -\frac{1}{a} \cdot e^{-au} \right)$$

Gliedweise Fouriertransformation in Verbindung mit dem *Integrationsatz* führt dann zu:

$$\underbrace{\mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^t g(u) du \right\}}_{\frac{1}{j\omega} \cdot G(\omega)} = -\frac{1}{a} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)\}}_{G(\omega)} + \frac{1}{a} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\left\{ \int_0^t e^{-au} du \right\}}_{\frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{j\omega} \cdot G(\omega) + \frac{1}{a} \cdot G(\omega) = \frac{1}{ja\omega} \cdot F(\omega) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \cdot F(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$13) \quad f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos u \cdot \sigma(u) \cdot \sin(t - u) \cdot \sigma(t - u) du = \int_0^t \cos u \cdot \sin(t - u) du =$$

$$= \int_0^t \cos u (\sin t \cdot \cos u - \cos t \cdot \sin u) du =$$

$$= \sin t \cdot \int_0^t \cos^2 u du - \cos t \cdot \int_0^t \sin u \cdot \cos u du =$$

$$= \sin t \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin u \cdot \cos u}{2} \right]_0^t - \cos t \left[\frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^t = \frac{1}{2} t \cdot \sin t$$

Hinweis: $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ (sonst = 0) und $\sigma(t - u) = 1$ für $u \leq t$ (sonst = 0). Somit gilt: $\sigma(u) \cdot \sigma(t - u) = 1$ im Intervall $0 \leq u \leq t$ (sonst = 0). Ferner: $\sin(t - u)$ nach dem Additionstheorem für den Sinus entwickeln. Integrale: 229 und 254, jeweils mit $a = 1$.

$$14) \quad f * g = \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(u+T) - \sigma(u-T)] \cdot \frac{1}{1+(t-u)^2} du = \int_{-T}^T \frac{1}{1+(t-u)^2} du$$

Hinweis: $\sigma(u+T) - \sigma(u-T) = 1$ für $-T \leq u \leq T$ (sonst = 0)

Integralsubstitution: $z = t - u$, $dz = -du$; untere Grenze: $u = -T \Rightarrow z = t + T$;
obere Grenze: $u = T \Rightarrow z = t - T$

$$f * g = - \int_{t+T}^{t-T} \frac{1}{1+z^2} dz = - \left[\arctan z \right]_{t+T}^{t-T} = \arctan(t+T) - \arctan(t-T)$$

$$15) \quad a) \quad F(\omega) = \underbrace{\left(\frac{1}{1+j\omega} \right)}_{F_1(\omega)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3+j\omega} \right)}_{F_2(\omega)} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$f_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{1+j\omega} \right\} = e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

$$f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{3+j\omega} \right\} = e^{-3t} \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 1$ bzw. $a = 3$)

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \cdot \sigma(u) \cdot e^{-3(t-u)} \cdot \sigma(t-u) du = \\ &= \int_0^t e^{-u} \cdot e^{-3t} \cdot e^{3u} du = e^{-3t} \cdot \int_0^t e^{2u} du = e^{-3t} \left[\frac{e^{2u}}{2} \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t}) \cdot \sigma(t) \end{aligned}$$

Hinweis: $\sigma(u) \cdot \sigma(t-u) = 1$ im Intervall $0 \leq u \leq t$ (sonst = 0); siehe hierzu auch Aufgabe 13.

$$b) \quad F(\omega) = \underbrace{\left(\frac{1}{(1+j\omega)^2} \right)}_{F_1(\omega)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1+j\omega} \right)}_{F_2(\omega)} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$f_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{(1+j\omega)^2} \right\} = t \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

$$f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{1+j\omega} \right\} = e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 10 und Nr. 9, jeweils mit $a = 1$)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot e^{-u} \cdot \sigma(u) \cdot e^{-(t-u)} \cdot \sigma(t-u) du =$$

$$= \int_0^t u \cdot e^{-t} du = e^{-t} \cdot \int_0^t u du = e^{-t} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^t = \frac{1}{2} t^2 \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

(bezüglich des Integrationsintervalls $0 \leq u \leq t$: siehe Hinweis zu a)).

$$16) \quad F(t) = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a|t|} \circ \bullet 2\pi \cdot f(-\omega) = \frac{2\pi}{a^2 + \omega^2} \Rightarrow$$

$$g(t) = e^{-a|t|} = \frac{a}{\pi} \cdot F(t) \circ \bullet G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{a^2 + \omega^2} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$17) \quad F(t) = 2\pi \cdot \delta(t-a) \circ \bullet 2\pi \cdot f(-\omega) = 2\pi \cdot e^{-j\omega a} \Rightarrow$$

$$e^{-j\omega a} \bullet \circ \delta(t-a) \quad \text{und} \quad e^{j\omega a} \bullet \circ \delta(t+a) \quad (a \text{ durch } -a \text{ ersetzt})$$

$$\cos(a\omega) = \frac{1}{2} (e^{j\omega a} + e^{-j\omega a}) \bullet \circ \frac{1}{2} [\delta(t+a) + \delta(t-a)]$$

Abschnitt 5

$$1) \quad a) \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{10}{25 + \omega^2}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2 \cdot 5}{5^2 + \omega^2}\right\} = e^{-5|t|} \quad (\text{Tab. 1: Nr. 8 mit } a = 5)$$

$$b) \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5}{(2 + j\omega)^2}\right\} = 5 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2 + j\omega)^2}\right\} = 5t \cdot e^{-2t} \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 10 mit $a = 2$)

$$c) \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{(1 + j\omega)^2 + 4}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{(1 + j\omega)^2 + 2^2}\right\} = e^{-t} \cdot \sin(2t) \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 13 mit $a = 1$ und $b = 2$)

$$d) \quad \mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega + 3)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{2\pi \cdot \delta(\omega + 3)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-j3t}$$

(Tab. 1: Nr. 18 mit $a = 3$)

$$e) \quad \mathcal{F}^{-1}\{\cos(5\omega)\} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{2 \cdot \cos(5\omega)\} = \frac{1}{2} [\delta(t+5) + \delta(t-5)]$$

(Tab. 1: Nr. 22 mit $a = 5$)

$$f) \quad \mathcal{F}_s^{-1}\{e^{-2\omega}\} = \frac{2}{\pi} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} \cdot e^{-2\omega}\right\} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{4 + t^2}$$

(Tab. 2: Nr. 4 mit $a = 2$)

$$g) \quad \mathcal{F}_c^{-1}\left\{\frac{1}{9 + \omega^2}\right\} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3}{3^2 + \omega^2}\right\} = \frac{1}{3} \cdot e^{-3t}$$

(Tab. 3: Nr. 4 mit $a = 3$)

$$h) \quad \mathcal{F}_c^{-1}\left\{\frac{\sin(5\omega)}{\omega}\right\} = \sigma(t) - \sigma(t-5) \quad (\text{Tab. 3: Nr. 1 mit } a = 5)$$

- 2) a) $F(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{5 + j\omega} - 3 \cdot \frac{1}{2 + j\omega} \Rightarrow f(t) = (2 \cdot e^{-5t} - 3 \cdot e^{-2t}) \cdot \sigma(t)$
 (Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 5$ bzw. $a = 2$)
- b) $F(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{(1 + j\omega)^2} + 10 \cdot \frac{1}{2 + j\omega} \Rightarrow f(t) = (2t \cdot e^{-t} + 10 \cdot e^{-2t}) \cdot \sigma(t)$
 (Tab. 1: Nr. 10 mit $a = 1$ und Nr. 9 mit $a = 2$)
- c) $f(t) = 2 \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{3 + j\omega} \right\} - \frac{5\pi}{2} \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \cdot 1}{1^2 + \omega^2} \right\} = 2 \cdot e^{-3t} \cdot \sigma(t) - \frac{5\pi}{2} \cdot e^{-|t|}$
 (Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 3$ und Nr. 8 mit $a = 1$)
- d) $f(t) = 6 \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2 + j\omega)^2} \right\} - \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{5} \cdot e^{-5|\omega|} \right\} + 2 \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \cdot 2}{2^2 + \omega^2} \right\} =$
 $= 6t \cdot e^{-2t} \cdot \sigma(t) - \frac{1}{25 + t^2} + 2 \cdot e^{-2|t|}$
 (Tab. 1: Nr. 10 mit $a = 2$, Nr. 6 mit $a = 5$ und Nr. 8 mit $a = 2$)

Abschnitt 6

- 1) Trigonometrische Umrechnung nach der Formel $\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]$ mit $x = \omega_0 t$:

$$F(\omega) = \mathcal{F} \{ \sin^2(\omega_0 t) \} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F} \{ 1 - \cos(2\omega_0 t) \} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F} \{ 1 \} - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F} \{ \cos(2\omega_0 t) \} = \pi \cdot \delta(\omega) - \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0)]$$

(Tab. 1: Nr. 19 und Nr. 20 mit $a = 2\omega_0$)

Das Frequenzspektrum enthält genau drei Spektrallinien bei $\omega_1 = 0$ und $\omega_{2/3} = \pm 2\omega_0$.

- 2) a) $F(\omega) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{1 + t^2} \right\} = \pi \cdot e^{-|\omega|}$ (Tab. 1: Nr. 6 mit $a = 1$)
 $A(\omega) = |F(\omega)| = \pi \cdot e^{-|\omega|}$; $\varphi(\omega) = 0$ (wegen $F(\omega) > 0$)
- b) $F(\omega) = \mathcal{F} \{ e^{-at} \cdot \sigma(t) \} = \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a - j\omega}{\underbrace{(a + j\omega)(a - j\omega)}} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$
 (Tab. 1: Nr. 9)
 3. Binom
- $$A(\omega) = |F(\omega)| = \frac{1}{|a + j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$
- $$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(F(\omega))}{\text{Re}(F(\omega))} = \frac{-\omega}{a} \Rightarrow \varphi(\omega) = \arctan(-\omega/a) = -\arctan(\omega/a)$$
- 3) $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$
 $g(t) = e^{-\delta|t|} \cdot \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\delta|t|} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) =$
 $= \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-\delta|t|} + e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-\delta|t|}) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} \cdot f(t) + e^{-j\omega_0 t} \cdot f(t))$

Dabei gilt: $f(t) = e^{-\delta|t|}$ und $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{2\delta}{\delta^2 + \omega^2}$

$g(t)$ ist somit als Überlagerung zweier Funktionen darstellbar, die jeweils aus $f(t)$ durch Dämpfung mit $e^{j\omega_0 t}$ bzw. $e^{-j\omega_0 t}$ hervorgehen. Der Dämpfungssatz liefert dann:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t} \cdot f(t)\}] = \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} \left(\frac{2\delta}{\delta^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{2\delta}{\delta^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right) = \\ &= \delta \left(\frac{1}{(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\omega_0\omega} + \frac{1}{(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega} \right) = \\ &= \delta \cdot \frac{(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega + (\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\omega_0\omega}{\underbrace{[(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 2\omega_0\omega][(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + 2\omega_0\omega]}_{\text{3. Binom}}} = \\ &= \frac{2\delta(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2)}{(\delta^2 + \omega_0^2 + \omega^2)^2 - 4\omega_0^2\omega^2} \end{aligned}$$

Amplitudenspektrum: $A(\omega) = |G(\omega)| = G(\omega)$

- 4) a) $G(\omega)$ wird zunächst in Partialbrüche zerlegt:

$$G(\omega) = \frac{A}{2 + j\omega} + \frac{B}{5 + j\omega} = \frac{(5 + j\omega)A + (2 + j\omega)B}{(2 + j\omega)(5 + j\omega)} = \frac{3 + j0}{(2 + j\omega)(5 + j\omega)} \Rightarrow$$

$$(5 + j\omega)A + (2 + j\omega)B = (5A + 2B) + j\omega(A + B) = 3 + j0$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 5A + 2B = 3 \text{ und } A + B = 0 \Rightarrow A = 1; B = -1$$

$$G(\omega) = \frac{3}{(2 + j\omega)(5 + j\omega)} = \frac{1}{2 + j\omega} - \frac{1}{5 + j\omega}$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j\omega} - \frac{1}{5 + j\omega}\right\} = (e^{-2t} - e^{-5t}) \cdot \sigma(t)$$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 2$ bzw. $a = 5$)

$$A(\omega) = |G(\omega)| = \frac{3}{|(2 + j\omega)(5 + j\omega)|} = \frac{3}{\sqrt{(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)}}$$

- b) $G(\omega)$ wird zunächst wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= K \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} = K \frac{(1 + j\omega T) - 1}{1 + j\omega T} = K \left(\frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T} - \frac{1}{1 + j\omega T} \right) = \\ &= K \left(1 - \frac{1}{1 + j\omega T} \right) = K \left(1 - \frac{1}{T \left(\frac{1}{T} + j\omega \right)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = K \cdot \mathcal{F}^{-1}\{1\} - \frac{K}{T} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}\right\} = \\
 &= K \cdot \delta(t) - \frac{K}{T} \cdot e^{-t/T} \cdot \sigma(t)
 \end{aligned}$$

(Tab. 1: Nr. 15 und Nr. 9 mit $a = 1/T$)

$$A(\omega) = |G(\omega)| = \frac{K|\omega|T}{|1 + j\omega T|} = \frac{K|\omega|T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$5) \quad G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{K}{T} \cdot \mathcal{F}\{e^{-t/T} \cdot \sigma(t)\} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

(Tab. 1: Nr. 9 mit $a = 1/T$)

$$A(\omega) = |G(\omega)| = \frac{K}{|1 + j\omega T|} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$G(\omega)$ in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$G(\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} = \frac{K(1 - j\omega T)}{\underbrace{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)}} = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

3. Binom

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))} = \frac{-K\omega T}{K} = -\omega T \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega) = \arctan(-\omega T) = -\arctan(\omega T)$$

VI Laplace-Transformationen

Hinweise

- 1) Die Integrale wurden der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Angabe der laufenden Nummer und der Parameterwerte).
- 2) Die Laplace-Transformationen wurden der *Tabelle* in Kap. VI, Abschnitt 4.2 entnommen (Angabe der laufenden Nummer der Transformation und der Parameterwerte).

Abschnitt 1

$$1) \quad a) \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \int_0^{\infty} \cos(\omega t) \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{-s \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)}{s^2 + \omega^2} \cdot e^{-st} \right]_0^{\infty} = \\ = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{Integral: 324 mit } a = -s \text{ und } b = \omega)$$

$$b) \quad \mathcal{L}\{2t \cdot e^{-4t}\} = \int_0^{\infty} 2t \cdot e^{-4t} \cdot e^{-st} dt = 2 \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-(s+4)t} dt = \\ = 2 \left[\frac{-(s+4)t - 1}{(s+4)^2} \cdot e^{-(s+4)t} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{(s+4)^2}$$

(Integral: 313 mit $a = -(s+4)$)

$$c) \quad \mathcal{L}\{e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) \cdot e^{-(s+\delta)t} dt = \\ = \left[\frac{-(s+\delta) \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t)}{(s+\delta)^2 + \omega^2} \cdot e^{-(s+\delta)t} \right]_0^{\infty} = \frac{\omega}{(s+\delta)^2 + \omega^2}$$

(Integral: 322 mit $a = -(s+\delta)$ und $b = \omega$)

$$d) \quad \mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \int_0^{\infty} \sinh(at) \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{-s \cdot \sinh(at) - a \cdot \cosh(at)}{s^2 - a^2} \cdot e^{-st} \right]_0^{\infty} = \\ = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (\text{Integral: 327 mit } a = -s \text{ und } b = a)$$

$$e) \quad \mathcal{L}\{t^3\} = \int_0^{\infty} t^3 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{t^3 \cdot e^{-st}}{s} - \frac{3(s^2 t^2 + 2st + 2) \cdot e^{-st}}{s^4} \right]_0^{\infty} = \frac{6}{s^4}$$

(Integrale: 315 mit $n = 3$ und $a = -s$ und 314 mit $a = -s$)

$$\begin{aligned} \text{f) } \mathcal{L}\{\sin^2 t\} &= \int_0^{\infty} \sin^2 t \cdot e^{-st} dt = \\ &= \left[\frac{\sin t (-s \cdot \sin t - 2 \cdot \cos t) \cdot e^{-st}}{s^2 + 4} - \frac{2 \cdot e^{-st}}{s(s^2 + 4)} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{s(s^2 + 4)} \end{aligned}$$

(Integrale: 323 mit $n = 2$, $a = -s$, $b = 1$ und 312 mit $a = -s$)

$$2) \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \text{a) } \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^a A \cdot e^{-st} dt + \int_a^{2a} (-A) \cdot e^{-st} dt = A \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^a - A \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_a^{2a} = \\ &= \frac{A}{s} \underbrace{(e^{-2as} - 2 \cdot e^{-as} + 1)}_{\text{2. Binom}} = \frac{A(1 - e^{-as})^2}{s} \quad (\text{Integral: 312 mit } a = -s) \end{aligned}$$

Umformung: $e^{-2as} - 2 \cdot e^{-as} + 1 = 1 - 2 \cdot e^{-as} + (e^{-as})^2 = (1 - e^{-as})^2$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^a A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} t\right) \cdot e^{-st} dt = \\ &= \frac{Aa}{a^2 s^2 + \pi^2} \left[\left(-as \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} t\right) - \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} t\right)\right) \cdot e^{-st} \right]_0^a = \frac{\pi a A (1 + e^{-as})}{a^2 s^2 + \pi^2} \end{aligned}$$

(Integral: 322 mit $a = -s$ und $b = \pi/a$)

$$\begin{aligned} \text{c) } \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^a 0 \cdot e^{-st} dt + \int_a^{2a} A \cdot e^{-st} dt + \int_{2a}^{3a} 2A \cdot e^{-st} dt + \dots = \\ &= \frac{A}{s} (e^{-as} + e^{-2as} + e^{-3as} + \dots) = \frac{A}{s} \cdot e^{-as} \underbrace{(1 + e^{-as} + e^{-2as} + \dots)}_{\text{geometrische Reihe } (q = e^{-as})} = \\ &= \frac{A}{s} \cdot e^{-as} \left(\frac{1}{1 - e^{-as}} \right) = \frac{A}{s(e^{as} - 1)} \end{aligned}$$

Abschnitt 2

$$1) \quad \text{a) } \mathcal{L}\{4t^3 - t^2 + 2t\} = 4 \cdot \mathcal{L}\{t^3\} - \mathcal{L}\{t^2\} + 2 \cdot \mathcal{L}\{t\} = \frac{24}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}$$

(Nr. 16 mit $n = 4$, Nr. 10 und Nr. 4)

$$\text{b) } \mathcal{L}\{C(1 - e^{-\lambda t})\} = C[\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\}] = C\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda}\right)$$

(Nr. 2 und Nr. 3 mit $a = -\lambda$)

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \mathcal{L}\{A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) + C \cdot e^{\lambda t}\} &= \\
 &= A \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} + B \cdot \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} + C \cdot \mathcal{L}\{e^{\lambda t}\} = \\
 &= \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{Bs}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{s - \lambda} = \frac{Bs + A\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{s - \lambda}
 \end{aligned}$$

(Nr. 18 und Nr. 19, jeweils mit $a = \omega$ und Nr. 3 mit $a = \lambda$)

$$\begin{aligned}
 2) \text{ a) } \mathcal{L}\{(3t)^5\} &= \frac{1}{3} \cdot F(s/3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{120}{(s/3)^6} = \frac{29160}{s^6} \\
 \text{b) } \mathcal{L}\{\cos(4t)\} &= \frac{1}{4} \cdot F(s/4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(s/4)}{(s/4)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 16} \\
 \text{c) } \mathcal{L}\{e^{\lambda t}\} &= \frac{1}{\lambda} \cdot F(s/\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{(s/\lambda) - 1} = \frac{1}{s - \lambda} \\
 \text{d) } \mathcal{L}\{\cos^2(\omega t)\} &= \frac{1}{\omega} \cdot F(s/\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{(s/\omega)^2 + 2}{(s/\omega)[(s/\omega)^2 + 4]} = \frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ a) } \mathcal{L}\left\{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma(t)\right\} &= e^{\frac{\pi}{2}s} \left(F(s) - \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot e^{-st} dt \right) = \\
 &= e^{\frac{\pi}{2}s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} + \left[\frac{(s \cdot \sin t + \cos t) \cdot e^{-st}}{s^2 + 1} \right]_0^{\pi/2} \right) = \\
 &= e^{\frac{\pi}{2}s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1 - s \cdot e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1} \right) = \frac{s}{s^2 + 1}
 \end{aligned}$$

(Integral: 322 mit $a = -s$ und $b = 1$)

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \mathcal{L}\{(t-4)^2 \cdot \sigma(t-4)\} &= e^{-4s} \cdot F(s) = e^{-4s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{2 \cdot e^{-4s}}{s^3} \\
 \text{c) } \mathcal{L}\{e^{t-b} \cdot \sigma(t-b)\} &= e^{-bs} \cdot F(s) = e^{-bs} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{e^{-bs}}{s-1} \\
 \text{d) } \mathcal{L}\{\cos^2(t-3) \cdot \sigma(t-3)\} &= e^{-3s} \cdot F(s) = e^{-3s} \cdot \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)} = \frac{(s^2 + 2) \cdot e^{-3s}}{s(s^2 + 4)} \\
 \text{e) } \mathcal{L}\{\delta(t-T) \cdot \sigma(t-T)\} &= e^{-Ts} \cdot F(s) = e^{-Ts} \cdot 1 = e^{-Ts}
 \end{aligned}$$

4) 2. Verschiebungssatz (Verschiebung um φ nach links):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{\sin(t + \varphi) \cdot \sigma(t)\} = e^{\varphi s} \left(\mathcal{L}\{\sin t\} - \int_0^{\varphi} \sin t \cdot e^{-st} dt \right) = \\
 &= e^{\varphi s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} + \left[\frac{(s \cdot \sin t + \cos t) \cdot e^{-st}}{s^2 + 1} \right]_0^{\varphi} \right) = \\
 &= e^{\varphi s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{(s \cdot \sin \varphi + \cos \varphi) \cdot e^{-\varphi s} - 1}{s^2 + 1} \right) = \frac{s \cdot \sin \varphi + \cos \varphi}{s^2 + 1} = F_1(s)
 \end{aligned}$$

(Integral: 322 mit $a = -s$ und $b = 1$)

Jetzt wird die Funktion $g(t) = \sin(t + \varphi) \cdot \sigma(t)$ der Ähnlichkeitstransformation $t \rightarrow \omega t$ unterworfen. Dann gilt nach dem Ähnlichkeitssatz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(\omega t)\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t + \varphi) \cdot \sigma(t)\} = \frac{1}{\omega} \cdot F_1(s/\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{(s/\omega) \cdot \sin \varphi + \cos \varphi}{(s/\omega)^2 + 1} = \\ &= \frac{s \cdot \sin \varphi + \omega \cdot \cos \varphi}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$5) \quad a) \quad \mathcal{L}\{e^{3t} \cdot \cos(2t)\} = F(s-3) = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 4}$$

$$b) \quad \mathcal{L}\{A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t)\} = A \cdot F(s+\delta) = \frac{A\omega}{(s+\delta)^2 + \omega^2}$$

$$c) \quad f(t) = 2^{3t} = e^{\ln(2^{3t})} = e^{3t \cdot \ln 2} = e^{(3 \cdot \ln 2)t} \cdot 1$$

$$\mathcal{L}\{2^{3t}\} = \mathcal{L}\{e^{(3 \cdot \ln 2)t} \cdot 1\} = F(s - 3 \cdot \ln 2) = \frac{1}{s - 3 \cdot \ln 2}$$

$$6) \quad a) \quad f'(t) = a \cdot \cosh(at); \quad f(0) = \sinh 0 = 0$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{a \cdot \cosh(at)\} = s \cdot \mathcal{L}\{\sinh(at)\} - 0 = s \cdot \frac{a}{s^2 - a^2} = \frac{as}{s^2 - a^2}$$

$$\text{(Nr. 24); Neues Funktionenpaar: } \mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$b) \quad f'(t) = 3t^2; \quad f(0) = 0; \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{3t^2\} = s \cdot \mathcal{L}\{t^3\} - 0 = s \cdot \frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^3}$$

$$\text{(Nr. 16 mit } a = 4\text{); Neues Funktionenpaar: } \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

$$c) \quad f'(t) = a \cdot \cos(at + b); \quad f(0) = \sin b$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{a \cdot \cos(at + b)\} = s \cdot \mathcal{L}\{\sin(at + b)\} - \sin b =$$

$$= s \cdot \frac{(\sin b) \cdot s + a \cdot \cos b}{s^2 + a^2} - \sin b = \frac{(a \cdot \cos b) \cdot s - a^2 \cdot \sin b}{s^2 + a^2} \quad \text{(Nr. 20)}$$

$$\text{Neues Funktionenpaar: } \mathcal{L}\{\cos(at + b)\} = \frac{(\cos b) \cdot s - a \cdot \sin b}{s^2 + a^2}$$

$$7) \quad f(0) = \sin 0 = 0; \quad f'(t) = \omega \cdot \cos(\omega t); \quad f'(0) = \omega \cdot \cos 0 = \omega$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\{f''\} &= \mathcal{L}\{-\omega^2 \cdot f\} = -\omega^2 \cdot \mathcal{L}\{f\} = -\omega^2 \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = -\omega^2 \cdot F(s) \\ \mathcal{L}\{f''\} &= s^2 \cdot F(s) - s \cdot 0 - \omega = s^2 \cdot F(s) - \omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$-\omega^2 \cdot F(s) = s^2 \cdot F(s) - \omega \quad \text{oder} \quad F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$8) \quad \mathcal{L}\{t \cdot \sin(\omega t)\} = -F'(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 \cdot \sin(\omega t)\} = F''(s) = \frac{d}{ds} \left(-\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \right) = \frac{6\omega s^2 - 2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^3} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

$$9) \quad a) \quad \mathcal{L} \left\{ \underbrace{\int_0^t \cos u \, du}_{\sin t} \right\} = \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\mathcal{L}\{\cos t\}}_{\text{Nr. 19, } a=1} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$b) \quad \mathcal{L} \left\{ \underbrace{\int_0^t u^2 \, du}_{\frac{1}{3}t^3} \right\} = \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\mathcal{L}\{t^2\}}_{\text{Nr. 10}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^4} \Rightarrow \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

$$10) \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{t} \cdot \sin(\omega t) \right\} = \int_s^\infty F(u) \, du = \int_s^\infty \frac{\omega}{u^2 + \omega^2} \, du = \omega \left[\frac{1}{\omega} \cdot \arctan\left(\frac{u}{\omega}\right) \right]_s^\infty = \\ = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{s}\right) \quad (\text{Integral: 29 mit } a = \omega)$$

$$11) \quad a) \quad t * e^{-t} = \int_0^t u \cdot e^{-(t-u)} \, du = e^{-t} \cdot \int_0^t u \cdot e^u \, du = e^{-t} [(u-1) \cdot e^u]_0^t = \\ = e^{-t} [(t-1) \cdot e^t + 1] = t - 1 + e^{-t} \quad (\text{Integral: 313 mit } a = 1)$$

$$b) \quad e^t * \cos t = \cos t * e^t = \int_0^t \cos u \cdot e^{(t-u)} \, du = e^t \cdot \int_0^t \cos u \cdot e^{-u} \, du = \\ = e^t \left[\frac{1}{2} (-\cos u + \sin u) \cdot e^{-u} \right]_0^t = e^t \left[\frac{1}{2} (\sin t - \cos t) \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \right] = \\ = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^t) \quad (\text{Integral: 324 mit } a = -1 \text{ und } b = 1)$$

12) $F(s)$ wird in ein *Produkt* zerlegt, die Originalfunktionen der Faktoren der Transformationstabelle aus Kap. VI, Abschnitt 4.2 entnommen. (Nr. 3 mit $a = 2$ bzw. $a = -4$)

$$a) \quad F(s) = \left(\frac{1}{s-2} \right) \cdot \left(\frac{1}{s+4} \right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} = e^{2t}; \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+4} \right\} = e^{-4t}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f_1 * f_2 = \int_0^t e^{2u} \cdot e^{-4(t-u)} \, du = e^{-4t} \cdot \int_0^t e^{6u} \, du = \\ = e^{-4t} \left[\frac{e^{6u}}{6} \right]_0^t = \frac{1}{6} (e^{2t} - e^{-4t}) \quad (\text{Integral: Nr. 312 mit } a = 6)$$

$$\text{b) } F(s) = \left(\frac{2}{s^2 + 1} \right) \cdot \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 1} \right\} = 2 \cdot \sin t; \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} = \cos t$$

(Nr. 18 und Nr. 19, jeweils mit $a = 1$)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = f_1 * f_2 = \int_0^t 2 \cdot \sin u \cdot \cos(t - u) du$$

Den Faktor $\cos(t - u)$ entwickeln wir nach dem *Additionstheorem* der Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cdot \int_0^t \sin u (\cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot \sin u) du = 2 \cdot \cos t \cdot \int_0^t \sin u \cdot \cos u du + \\ &+ 2 \cdot \sin t \cdot \int_0^t \sin^2 u du = 2 \cdot \cos t \left[\frac{1}{2} \cdot \sin^2 u \right]_0^t + 2 \cdot \sin t \left[\frac{u - \sin u \cdot \cos u}{2} \right]_0^t = \\ &= \cos t \cdot \sin^2 t + \sin t (t - \sin t \cdot \cos t) = t \cdot \sin t \end{aligned}$$

(Integrale: 254 und 205, jeweils mit $a = 1$)

$$\text{c) } F(s) = \left(\frac{1}{s^2 + 9} \right) \cdot \left(\frac{1}{s} \right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 9} \right\} = \frac{1}{3} \cdot \sin(3t); \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1$$

(Nr. 18 mit $a = 3$ und Nr. 2)

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = f_1 * f_2 = \int_0^t \frac{1}{3} \cdot \sin(3u) \cdot 1 du = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{3} \cdot \cos(3u) \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{9} [1 - \cos(3t)] \quad (\text{Integral: 204 mit } a = 3) \end{aligned}$$

$$13) \quad F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \left(\frac{1}{s^2 + a^2} \right) \cdot \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} \right\} = \frac{\sin(at)}{a}; \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} = \cos(at)$$

(Nr. 18 und Nr. 19)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = f_1 * f_2 = \int_0^t \frac{\sin(au)}{a} \cdot \cos[a(t - u)] du$$

Umformung des Faktors $\cos[a(t - u)] = \cos(at - au)$ (Additionstheorem des Kosinus):

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_1 \cdot \sin x_2 \quad \text{mit } x_1 = at \quad \text{und } x_2 = au$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{a} \cdot \int_0^t \sin(au) [\cos(at) \cdot \cos(au) + \sin(at) \cdot \sin(au)] du = \\
 &= \frac{1}{a} \left[\cos at \cdot \int_0^t \sin(au) \cdot \cos(au) du + \sin(at) \cdot \int_0^t \sin^2(au) du \right] = \\
 &= \frac{\cos(at)}{a} \left[\frac{\sin^2(au)}{2a} \right]_0^t + \frac{\sin(at)}{a} \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(au) \cdot \cos(au)}{2a} \right]_0^t = \\
 &= \frac{\cos(at) \cdot \sin^2(at)}{2a^2} + \frac{t \cdot \sin(at)}{2a} - \frac{\sin^2(at) \cdot \cos(at)}{2a^2} = \frac{t \cdot \sin(at)}{2a}
 \end{aligned}$$

(Integrale: 254 und 205)

$$14) \quad a) \quad f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\frac{3s}{s^2 + 8} + \frac{1}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3s^2}{s^2 + 8} + \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{1 + 8/s^2} + \frac{1}{s} \right) = 3$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{s+4} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s+4} \right) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{1+4/s} \right) = 1
 \end{aligned}$$

$$15) \quad a) \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s(s+4)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s+4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$b) \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{e^s - s - 1}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{e^s - s - 1}{s} \right) \rightarrow \frac{0}{0} \quad (\text{unbestimmter Ausdruck})$$

Nach der Grenzwertregel von Bernoulli-de L'Hospital folgt weiter:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(e^s - s - 1)'}{(s)'} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{e^s - 1}{1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} (e^s - 1) = 1 - 1 = 0$$

Abschnitt 3

$$\begin{aligned}
 1) \quad a) \quad F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}} \cdot \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) \cdot e^{-st} dt = \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}} \left[\frac{\sin(\omega t) [-s \cdot \sin(\omega t) - 2\omega \cdot \cos(\omega t)] \cdot e^{-st}}{s^2 + 4\omega^2} - \frac{2\omega^2 \cdot e^{-st}}{s(s^2 + 4\omega^2)} \right]_0^{\pi/\omega} = \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}} \left(-\frac{2\omega^2 \cdot e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{s(s^2 + 4\omega^2)} + \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)} \right) = \frac{2\omega^2 (1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s})}{s(s^2 + 4\omega^2) (1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s})} = \\
 &= \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}
 \end{aligned}$$

(Integrale: 323 mit $n = 2$, $a = -s$, $b = \omega$ und 312 mit $a = -s$)

$$\begin{aligned}
 \text{b) } F(s) &= \frac{A}{1 - e^{-2as}} \cdot \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) \cdot e^{-st} dt = \\
 &= \frac{Aa}{1 - e^{-2as}} \left[\frac{\left[-as \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) - \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}t\right)\right] \cdot e^{-st}}{a^2s^2 + \pi^2} \right]_0^a = \\
 &= \frac{Aa}{\underbrace{(1 - e^{-2as})}_{\text{3. Binom}}} \cdot \frac{\pi \cdot e^{-as} + \pi}{a^2s^2 + \pi^2} = \frac{Aa\pi(1 + e^{-as})}{(a^2s^2 + \pi^2)(1 + e^{-as})(1 - e^{-as})} = \\
 &= \frac{\pi a A}{(a^2s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})} \quad (\text{Integral: 322 mit } a = -s \text{ und } b = \pi/a)
 \end{aligned}$$

Vorgenommene Umformung (3. Binom): $1 - e^{-2as} = (1 + e^{-as})(1 - e^{-as})$

$$\begin{aligned}
 \text{2) } F(s) &= \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \cdot \int_0^a (a - t) \cdot e^{-st} dt = \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \left[a \cdot \int_0^a e^{-st} dt - \int_0^a t \cdot e^{-st} dt \right] = \\
 &= \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \left(a \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^a + \left[\frac{(st + 1) \cdot e^{-st}}{s^2} \right]_0^a \right) = \\
 &= \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \left(\frac{a(1 - e^{-as})}{s} + \frac{(as + 1) \cdot e^{-as} - 1}{s^2} \right) = \\
 &= \frac{A}{a(1 - e^{-as})} \cdot \frac{as - as \cdot e^{-as} + as \cdot e^{-as} + e^{-as} - 1}{s^2} = \\
 &= \frac{A(e^{-as} + as - 1)}{as^2(1 - e^{-as})} \quad (\text{Integrale: 312 und 313, jeweils mit } a = -s)
 \end{aligned}$$

Abschnitt 4

- 1) a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - 8} \right\} = e^{8t}$ (Nr. 3 mit $a = 8$)
- b) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4} \right\} = \frac{t^3}{6}$ (Nr. 16 mit $n = 4$)
- c) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s^2 + 25} \right\} = 3 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 5^2} \right\} = \frac{3}{5} \cdot \sin(5t)$ (Nr. 18 mit $a = 5$)
- d) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s}{s^2 + 36} \right\} = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 6^2} \right\} = 4 \cdot \cos(6t)$ (Nr. 19 mit $a = 6$)
- e) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s - 4}{(s - 4)^2 + 4} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s - 4}{(s - 4)^2 + 2^2} \right\} = e^{4t} \cdot \cos(2t)$
(Nr. 23 mit $a = 2$ und $b = 4$)
- f) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 25} - \frac{3s}{s^2 - 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 5^2} \right\} - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - 1^2} \right\} =$
 $= \frac{1}{5} \cdot \sin(5t) - 3 \cdot \cosh t$ (Nr. 18 mit $a = 5$ und Nr. 25 mit $a = 1$)

- 2) a) Nennernullstellen: $s^2 + s - 2 = 0 \Rightarrow s_1 = 1; s_2 = -2$

$$\text{Ansatz: } \frac{5s + 1}{(s - 1)(s + 2)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 2} = \frac{A(s + 2) + B(s - 1)}{(s - 1)(s + 2)} \Rightarrow$$

$$A(s + 2) + B(s - 1) = 5s + 1$$

Einsetzen der Werte $s = 1$ bzw. $s = -2$ liefert $A = 2$ und $B = 3$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s + 1}{s^2 + s - 2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s - 1} + \frac{3}{s + 2} \right\} = 2 \cdot e^t + 3 \cdot e^{-2t}$$

(Nr. 3 mit $a = 1$ bzw. $a = -2$)

$$\begin{aligned} \text{b) } f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 2}{s^2 + 2s - 3} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s + 3} \right\} = \\ &= \frac{3}{4} \cdot e^t + \frac{1}{4} \cdot e^{-3t} \quad (\text{Nr. 3 mit } a = 1 \text{ bzw. } a = -3) \end{aligned}$$

- c) Nennernullstellen: $s^3 - s^2 - 8s + 12 = 0 \Rightarrow s_{1/2} = 2; s_3 = -3$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } \frac{-2s^2 + 18s - 3}{(s - 2)^2(s + 3)} &= \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{(s - 2)^2} + \frac{C}{s + 3} = \\ &= \frac{A(s - 2)(s + 3) + B(s + 3) + C(s - 2)^2}{(s - 2)^2(s + 3)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A(s - 2)(s + 3) + B(s + 3) + C(s - 2)^2 = -2s^2 + 18s - 3$$

Einsetzen der Werte 2, -3 bzw. 0 für die Variable s liefert $A = 1$, $B = 5$, $C = -3$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2s^2 + 18s - 3}{s^3 - s^2 - 8s + 12} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - 2} + \frac{5}{(s - 2)^2} - \frac{3}{s + 3} \right\} = \\ &= e^{2t} + 5t \cdot e^{2t} - 3 \cdot e^{-3t} \quad (\text{Nr. 3 und Nr. 6 mit } a = 2, \text{ Nr. 3 mit } a = -3) \end{aligned}$$

- 3) a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s - 1} \right\} = 2 - 3t + 4 \cdot e^t$ (Nr. 2, Nr. 4 und Nr. 3 mit $a = 1$)

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - 5)^3} + \frac{2s}{s^2 + 5^2} + \frac{5}{(s - 3)^2 + 1^2} \right\} &= \\ &= \frac{1}{2} t^2 \cdot e^{5t} + 2 \cdot \cos(5t) + 5 \cdot e^{3t} \cdot \sin t \end{aligned}$$

(Nr. 17 mit $n = 3$ und $a = 5$, Nr. 19 mit $a = 5$ und Nr. 22 mit $a = 1$ und $b = 3$)

Abschnitt 5

1) a) $3[s \cdot Y(s) - 0] + 2 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ (Nr. 4) $\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(3s + 2)}$

b) $[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 1 - 0] + 2[s \cdot Y(s) - 1] + Y(s) = \mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{s}{s^2 + 4}$

(Nr. 19 mit $a = 2$) $\Rightarrow Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 5s + 8}{(s + 1)^2(s^2 + 4)}$

$$2) \quad a) \quad [s \cdot Y(s) - 1] - Y(s) = \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1} \quad (\text{Nr. 3 mit } a = 1) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s-1)^2}; \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\} = (1+t) \cdot e^t$$

(Nr. 8 mit $a = 1$)

$$b) \quad [s \cdot Y(s) - 5] + 3 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{-\cos t\} = -\frac{s}{s^2+1} \quad (\text{Nr. 19 mit } a = 1) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \left(-\frac{s}{s^2+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{s+3}\right) + \frac{5}{s+3} = F_1(s) \cdot F_2(s) + \frac{5}{s+3}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} + 5 \cdot e^{-3t} \quad (\text{Nr. 3 mit } a = -3)$$

$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$ wird mit Hilfe des *Faltungssatzes* berechnet:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{s}{s^2+1}\right\} = -\cos t; \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

(Nr. 19 mit $a = 1$ und Nr. 3 mit $a = -3$)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t (-\cos u) \cdot e^{-3(t-u)} du =$$

$$= -e^{-3t} \cdot \int_0^t \cos u \cdot e^{3u} du = -e^{-3t} \left[\frac{e^{3u}}{10} (3 \cdot \cos u + \sin u) \right]_0^t =$$

$$= -0,3 \cdot \cos t - 0,1 \cdot \sin t + 0,3 \cdot e^{-3t} \quad (\text{Integral: 324 mit } a = 3 \text{ und } b = 1)$$

$$\text{Lösung: } y(t) = f_1(t) * f_2(t) + 5 \cdot e^{-3t} = -0,3 \cdot \cos t - 0,1 \cdot \sin t + 5,3 \cdot e^{-3t}$$

$$c) \quad [s \cdot Y(s) - 0] - 5 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{2 \cdot \cos t - \sin(3t)\} = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+9}$$

(Nr. 19 mit $a = 1$ und Nr. 18 mit $a = 3$)

$$Y(s) = \left(\frac{s}{s^2+1}\right) \left(\frac{2}{s-5}\right) - \left(\frac{3}{s^2+9}\right) \left(\frac{1}{s-5}\right) = F_1(s) \cdot F_2(s) - F_3(s) \cdot F_4(s)$$

Bestimmung der Lösung $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ mit Hilfe des *Faltungssatzes*:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t; \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\} = 2 \cdot e^{5t};$$

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = \sin(3t); \quad f_4(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = e^{5t}$$

(Nr. 19 mit $a = 1$, Nr. 18 mit $a = 3$ und Nr. 3 mit $a = 5$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} &= f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \cos u \cdot 2 \cdot e^{5(t-u)} du = \\
&= 2 \cdot e^{5t} \cdot \int_0^t \cos u \cdot e^{-5u} du = 2 \cdot e^{5t} \left[\frac{e^{-5u}}{26} (-5 \cdot \cos u + \sin u) \right]_0^t = \\
&= \frac{1}{13} (\sin t - 5 \cdot \cos t + 5 \cdot e^{5t}) \quad (\text{Integral: 324 mit } a = -5 \text{ und } b = 1) \\
\mathcal{L}^{-1}\{F_3(s) \cdot F_4(s)\} &= f_3(t) * f_4(t) = \int_0^t \sin(3u) \cdot e^{5(t-u)} du = \\
&= e^{5t} \cdot \int_0^t \sin(3u) \cdot e^{-5u} du = e^{5t} \left[\frac{e^{-5u}}{34} (-5 \cdot \sin(3t) - 3 \cdot \cos(3t)) \right]_0^t = \\
&= \frac{1}{34} (-5 \cdot \sin(3t) - 3 \cdot \cos(3t) + 3 \cdot e^{5t}) \quad (\text{Integral: 322 mit } a = -5 \text{ und } b = 3) \\
\text{Lösung: } y(t) &= f_1(t) * f_2(t) - f_3(t) * f_4(t) = \\
&= \frac{1}{13} (\sin t - 5 \cdot \cos t) + \frac{1}{34} (5 \cdot \sin(3t) + 3 \cdot \cos(3t)) + \frac{131}{442} \cdot e^{5t}
\end{aligned}$$

$$3) \quad \text{a) } [s \cdot Y(s) - \alpha] - 3 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{4t \cdot e^t\} = \frac{4}{(s-1)^2} \quad (\text{Nr. 6 mit } a = 1) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s-1)^2(s-3)} + \frac{\alpha}{s-3} = -\frac{1}{s-1} - \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1+\alpha}{s-3}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -(1+2t) \cdot e^t + (1+\alpha) \cdot e^{3t}$$

(Nr. 3 mit $a = 1$, Nr. 6 mit $a = 1$ und Nr. 3 mit $a = 3$)

$$\text{b) } [s \cdot Y(s) - \alpha] - 4 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{5 \cdot \sin t\} = \frac{5}{s^2+1} \quad (\text{Nr. 18 mit } a = 1) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s^2+1} \right) \cdot \left(\frac{5}{s-4} \right) + \frac{\alpha}{s-4} = F_1(s) \cdot F_2(s) + \frac{\alpha}{s-4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} + \alpha \cdot e^{4t} \quad (\text{Nr. 3 mit } a = 4)$$

$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$ wird mit Hilfe des *Faltungssatzes* berechnet:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} = \sin t; \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{5}{s-4} \right\} = 5 \cdot e^{4t}$$

(Nr. 18 mit $a = 1$ und Nr. 3 mit $a = 4$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} &= f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \sin u \cdot 5 \cdot e^{4(t-u)} du = \\ &= 5 \cdot e^{4t} \cdot \int_0^t \sin u \cdot e^{-4u} du = 5 \cdot e^{4t} \left[\frac{e^{-4u}}{17} (-4 \cdot \sin u - \cos u) \right]_0^t = \\ &= \frac{5}{17} (-4 \cdot \sin t - \cos t + e^{4t}) \quad (\text{Integral: 322 mit } a = -4 \text{ und } b = 1) \\ \text{Lösung: } y(t) &= -\frac{5}{17} (4 \cdot \sin t + \cos t) + \left(\frac{5}{17} + \alpha \right) \cdot e^{4t} \end{aligned}$$

$$4) \quad [s \cdot Y(s) - y(0)] + 4 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4} \quad (\text{Nr. 16 mit } n = 4) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \left(\frac{6}{s^4} \right) \left(\frac{1}{s+4} \right) + \frac{y(0)}{s+4} = F_1(s) \cdot F_2(s) + \frac{y(0)}{s+4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} + y(0) \cdot e^{-4t} \quad (\text{Nr. 3 mit } a = -4)$$

$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$ wird mit Hilfe des *Faltungssatzes* berechnet:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} = t^3; \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = e^{-4t}$$

(Nr. 16 mit $n = 4$ und Nr. 3 mit $a = -4$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} &= f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t u^3 \cdot e^{-4(t-u)} du = e^{-4t} \cdot \int_0^t u^3 \cdot e^{4u} du = \\ &= e^{-4t} \left[\frac{u^3 \cdot e^{4u}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{16u^2 - 8u + 2}{64} \cdot e^{4u} \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{128} (32t^3 - 24t^2 + 12t - 3 + 3 \cdot e^{-4t}) \end{aligned}$$

(Integrale: 315 mit $n = 3$, $a = 4$ und 314 mit $a = 4$)

$$\text{Somit: } y(t) = \frac{1}{128} (32t^3 - 24t^2 + 12t - 3 + 3 \cdot e^{-4t}) + y(0) \cdot e^{-4t}$$

Berechnung des *Anfangswertes* $y(0)$: $y(1) = 2 \Rightarrow y(0) = 101,9215$

$$\text{Lösung: } y(t) = \frac{1}{128} (32t^3 - 24t^2 + 12t - 3) + 101,9450 \cdot e^{-4t}$$

$$5) \quad \text{a) } y' - 3y = 0 \Rightarrow y_0 = K \cdot e^{3t} \Rightarrow \text{Ansatz: } y = K(t) \cdot e^{3t} \Rightarrow$$

$$K'(t) = t \cdot e^{-2t} \Rightarrow K(t) = -\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-2t} + C$$

(Integral: 313 mit $a = -2$)

$$y = -\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^t + C \cdot e^{3t} \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

$$\text{Spezielle Lösung: } y = -\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^t + \frac{5}{4} \cdot e^{3t}$$

b) $y = y_0 + y_p = C \cdot e^{3t} + y_p$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

Ansatz für y_p : $y_p = (At + B) \cdot e^t$ (Begründung: Das Störglied ist ein Produkt aus einer linearen Funktion und der e-Funktion)

Einsetzen in die inhomogene Dgl liefert: $-2At + (A - 2B) = t + 0$

Koeffizientenvergleich: $-2A = 1$ und $A - 2B = 0 \Rightarrow A = -1/2; B = -1/4$

Allgemeine Lösung: $y = y_0 + y_p = C \cdot e^{3t} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^t$

c) $[s \cdot Y(s) - 1] - 3 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{t \cdot e^t\} = \frac{1}{(s-1)^2}$ (Nr. 6 mit $a = 1$)

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s-1)^2} + \frac{1}{s-3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s-3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{5}{4} \cdot e^{3t} - \frac{1}{4} \cdot e^t - \frac{1}{2} t \cdot e^t = \frac{5}{4} \cdot e^{3t} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^t$$

(Nr. 3 mit $a = 3$ bzw. $a = 1$ und Nr. 6 mit $a = 1$)

6) a) $L[s \cdot I(s) - 0] + R \cdot I(s) = \mathcal{L}\{u_0\} = \frac{u_0}{s}$ (Nr. 2) $\Rightarrow I(s) = \frac{u_0}{L} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)}$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{u_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (\text{Nr. 5 mit } a = -R/L)$$

b) $L[s \cdot I(s) - 0] + R \cdot I(s) = \mathcal{L}\{at\} = \frac{a}{s^2}$ (Nr. 4) $\Rightarrow I(s) = \frac{a}{L} \cdot \frac{1}{s^2\left(s + \frac{R}{L}\right)}$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{aL}{R^2} \left(e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}t - 1 \right) \quad (\text{Nr. 11 mit } a = -R/L)$$

7) $m[s \cdot V(s) - v_0] + k \cdot V(s) = \mathcal{L}\{F\} = \frac{F}{s}$ (Nr. 2) \Rightarrow

$$V(s) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{k}{m}\right)} + \frac{v_0}{s + \frac{k}{m}}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \left(v_0 - \frac{F}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}$$

(Nr. 5 und Nr. 3, jeweils mit $a = -k/m$)

8) $[s \cdot I(s) - 0] + 20 \cdot I(s) = \mathcal{L}\{10 \cdot \sin(2t)\} = \frac{20}{s^2 + 4}$ (Nr. 18 mit $a = 2$) \Rightarrow

$$I(s) = \left(\frac{2}{s^2 + 4}\right) \cdot \left(\frac{10}{s + 20}\right) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$$

$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\}$ wird mit Hilfe des *Faltungssatzes* berechnet:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} = \sin(2t); \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s + 20}\right\} = 10 \cdot e^{-20t}$$

(Nr. 18 mit $a = 2$ und Nr. 3 mit $a = -20$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} &= f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \sin(2u) \cdot 10 \cdot e^{-20(t-u)} du = \\ &= 10 \cdot e^{-20t} \cdot \int_0^t \sin(2u) \cdot e^{20u} du = 10 \cdot e^{-20t} \left[\frac{e^{20u}}{404} (20 \cdot \sin(2u) - 2 \cdot \cos(2u)) \right]_0^t = \\ &= \frac{5}{101} (10 \cdot \sin(2t) - \cos(2t) + e^{-20t}) \quad (\text{Integral: 322 mit } a = 20 \text{ und } b = 2) \end{aligned}$$

$$\text{Lösung: } i(t) = f_1(t) * f_2(t) = \frac{5}{101} (10 \cdot \sin(2t) - \cos(2t) + e^{-20t})$$

9) a) $[s^2 \cdot Y(s) - 2 \cdot s - 1] + 4 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0 \Rightarrow$

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 4} = \frac{2s}{s^2 + 4} + \frac{1}{s^2 + 4}$$

Rücktransformation (Nr. 19 und Nr. 18 mit $a = 2$):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2t)$$

b) $[s^2 \cdot Y(s) - 0 \cdot s - 4] + 6[s \cdot Y(s) - 0] + 10 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0 \Rightarrow$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + 6s + 10} = \frac{4}{(s - \alpha)(s - \beta)} \quad (\alpha = -3 + j; \beta = -3 - j)$$

Rücktransformation (Nr. 7 mit $a = \alpha$ und $b = \beta$):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 4 \cdot \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = 4 \cdot e^{-3t} \cdot \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = 4 \cdot e^{-3t} \cdot \sin t$$

c) $[s^2 \cdot Y(s) - 0 \cdot s - 1] + [s \cdot Y(s) - 0] = \mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s + 2}$ (Nr. 3, $a = -2$)

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right) + \frac{1}{s(s+1)}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

Rücktransformation (Nr. 2, Nr. 3 mit $a = -1$ bzw. $a = -2$ und Nr. 5 mit $a = -1$):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} - 2 \cdot e^{-t} + \frac{3}{2}$$

d) $[s^2 \cdot Y(s) - 1 \cdot s - 0] + 2[s \cdot Y(s) - 1] - 3 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{2t\} = \frac{2}{s^2}$ (Nr. 4)

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 2}{s^2(s-1)(s+3)} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{7}{36} \cdot \frac{1}{s+3}$$

(nach Partialbruchzerlegung)

Rücktransformation (Nr. 2, Nr. 4 und Nr. 3 mit $a = 1$ bzw. $a = -3$):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{4}{9} - \frac{2}{3} \cdot t + \frac{5}{4} \cdot e^t + \frac{7}{36} \cdot e^{-3t}$$

$$10) \quad a) \quad [s^2 \cdot Y(s) - \alpha \cdot s - \beta] + 2[s \cdot Y(s) - \alpha] + Y(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad (\text{Nr. 4})$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{\alpha \cdot s}{(s+1)^2} + \frac{2\alpha + \beta}{(s+1)^2} =$$

$$= -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{2\alpha + \beta + 1}{(s+1)^2} + \frac{\alpha \cdot s}{(s+1)^2}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

Rücktransformation (Nr. 2, Nr. 4 sowie Nr. 3, Nr. 6 und Nr. 8, jeweils mit $a = -1$):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$= -2 + t + 2 \cdot e^{-t} + (2\alpha + \beta + 1) \cdot t \cdot e^{-t} + \alpha(1-t) \cdot e^{-t} =$$

$$= -2 + t + [(\alpha + \beta + 1)t + 2 + \alpha] \cdot e^{-t}$$

$$b) \quad [s^2 \cdot Y(s) - \alpha \cdot s - \beta] - 2[s \cdot Y(s) - \alpha] - 8 \cdot Y(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$$

(Nr. 3 mit $a = 2$)

$$Y(s) = \frac{1}{(s-4)(s+2)(s-2)} + \frac{\alpha \cdot s}{(s-4)(s+2)} + \frac{\beta - 2\alpha}{(s-4)(s+2)} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{\alpha \cdot s}{(s-4)(s+2)} + \frac{\beta - 2\alpha}{(s-4)(s+2)}$$

(nach Partialbruchzerlegung des 1. Summanden, grau unterlegt)

Rücktransformation (Nr. 3 mit $a = 4$ bzw. $a = -2$ bzw. $a = 2$, Nr. 9 und Nr. 7 jeweils mit $a = 4$ und $b = -2$):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{12} \cdot e^{4t} + \frac{1}{24} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{8} \cdot e^{2t} +$$

$$+ \alpha \cdot \frac{4 \cdot e^{4t} + 2 \cdot e^{-2t}}{6} + (\beta - 2\alpha) \cdot \frac{e^{4t} - e^{-2t}}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + 2\alpha + \beta \right) \cdot e^{4t} - \frac{1}{8} \cdot e^{2t} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + 4\alpha - \beta \right) \cdot e^{-2t}$$

$$11) \quad a) \quad y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -1 \Rightarrow$$

$$y_0 = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-t}; \text{ Ansatz für } y_p: y_p = At + B + C \cdot \sin t + D \cdot \cos t$$

Einsetzen in die inhomogene Dgl, dann Koeffizientenvergleich:

$$At + (2A + B) - 2D \cdot \sin t + 2C \cdot \cos t = t + \sin t \Rightarrow$$

$$A = 1, \quad 2A + B = 0, \quad -2D = 1, \quad 2C = 0 \Rightarrow$$

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}; \quad y_p = t - 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos t$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } y = y_0 + y_p = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-t} + t - 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos t$$

$$\text{Spezielle Lösung: } y = \frac{1}{2} (5t + 7) \cdot e^{-t} + t - 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos t$$

$$\text{b) } [s^2 \cdot Y(s) - 1 \cdot s - 0] + 2[s \cdot Y(s) - 1] + Y(s) = \mathcal{L}\{t + \sin t\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

(Nr. 4 und Nr. 18 mit $a = 1$)

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} = \\ &= -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

(nach Partialbruchzerlegung der ersten beiden Summanden, jeweils grau unterlegt)

Rücktransformation (Nr. 2 sowie Nr. 4 sowie Nr. 3, Nr. 6 und Nr. 8, jeweils mit $a = -1$ und Nr. 19 mit $a = 1$):

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -2 + t + \frac{5}{2} \cdot e^{-t} + \frac{7}{2} t \cdot e^{-t} + (1-t) \cdot e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot \cos t = \\ &= \frac{1}{2} (5t + 7) \cdot e^{-t} + t - 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos t \end{aligned}$$

$$12) \text{ a) } [s^2 \cdot X(s) - 0 \cdot s - v_0] + \alpha^2 \cdot X(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0 \Rightarrow X(s) = \frac{v_0}{s^2 + \alpha^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{v_0}{\alpha} \cdot \sin(\alpha t) \quad (\text{Nr. 18})$$

$$\text{b) } [s^2 \cdot X(s) - 1 \cdot s + 2] + 4[s \cdot X(s) - 1] + 29 \cdot X(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0$$

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+29} = \frac{s}{(s-\alpha)(s-\beta)} + \frac{2}{(s-\alpha)(s-\beta)}$$

(mit $\alpha = -2 + 5j$ und $\beta = -2 - 5j$)

Rücktransformation (Nr. 7 und Nr. 9, jeweils mit $a = \alpha$ und $b = \beta$):

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{\alpha \cdot e^{\alpha t} - \beta \cdot e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + \frac{2(e^{\alpha t} - e^{\beta t})}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{(2+\alpha) \cdot e^{\alpha t} - (2+\beta) \cdot e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = e^{-2t} \left(\frac{e^{5jt} + e^{-5jt}}{2} \right) = e^{-2t} \cdot \cos(5t) \end{aligned}$$

$$\text{c) } [s^2 \cdot X(s) - 1 \cdot s + 1] + [s \cdot X(s) - 1] + 0,25 \cdot X(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0 \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{s}{(s+0,5)^2} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = (1-0,5t) \cdot e^{-0,5t}$$

(Nr. 8 mit $a = -0,5$)

$$\text{d) } [s^2 \cdot X(s) - 5s - 0] + 7[s \cdot X(s) - 5] + 12 \cdot X(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0 \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{5s}{(s+3)(s+4)} + \frac{35}{(s+3)(s+4)} \Rightarrow$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 20 \cdot e^{-3t} - 15 \cdot e^{-4t}$$

(Nr. 9 und Nr. 7, jeweils mit $a = -3$ und $b = -4$)

13) $\ddot{x} - 6,54x = 0$; Anfangswerte: $x(0) = 0,75$; $\dot{x}(0) = 0$

$$[s^2 \cdot X(s) - 0,75s - 0] - 6,54 \cdot X(s) = 0 \Rightarrow X(s) = \frac{0,75s}{s^2 - 6,54} = \frac{0,75s}{s^2 - 2,557^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 0,75 \cdot \cosh(2,557t) \quad (\text{Nr. 25 mit } a = 2,557)$$

Lösung: $x(t) = 0,75 \text{ m} \cdot \cosh(2,557 \text{ s}^{-1} \cdot t)$

14) $\ddot{x} + 83,33x = 0$; Anfangswerte: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0,5$

$$[s^2 \cdot X(s) - 0 \cdot s - 0,5] + 83,33 \cdot X(s) = 0 \Rightarrow X(s) = \frac{0,5}{s^2 + 83,33} = \frac{0,5}{s^2 + 9,13^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 0,055 \cdot \sin(9,13t) \quad (\text{Nr. 18 mit } a = 9,13)$$

Lösung: $x(t) = 0,055 \text{ m} \cdot \sin(9,13 \text{ s}^{-1} \cdot t)$

15) a) $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$ (mit $\omega_0^2 = g/l$); Anfangswerte: $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$

$$[s^2 \cdot \phi(s) - \varphi(0) \cdot s - \dot{\varphi}(0)] + \omega_0^2 \cdot \phi(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0$$

$$\phi(s) = \varphi(0) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \dot{\varphi}(0) \cdot \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$$

Rücktransformation (Nr. 19 und Nr. 18, jeweils mit $a = \omega_0$):

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\} = \varphi(0) \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

b) $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$

16) $\ddot{x} + 16\dot{x} + 256x = 0$; Anfangswerte: $x(0) = 0,2$; $\dot{x}(0) = 0$

$$[s^2 \cdot X(s) - 0,2s - 0] + 16[s \cdot X(s) - 0,2] + 256 \cdot X(s) = \mathcal{L}\{0\} = 0 \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{0,2s + 3,2}{s^2 + 16s + 256} = \frac{0,2s}{(s - \alpha)(s - \beta)} + \frac{3,2}{(s - \alpha)(s - \beta)}$$

(mit $\alpha = -8 + 8\sqrt{3}j$ und $\beta = -8 - 8\sqrt{3}j$)

Rücktransformation (Nr. 9 und Nr. 7, jeweils mit $a = \alpha$ und $b = \beta$):

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 0,2 \cdot \frac{\alpha \cdot e^{\alpha t} - \beta \cdot e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + 3,2 \cdot \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(0,2\alpha + 3,2) \cdot e^{\alpha t} - (0,2\beta + 3,2) \cdot e^{\beta t}}{\alpha - \beta} =$$

$$= e^{-8t} (0,1155 \cdot \sin(8\sqrt{3}t) + 0,2 \cdot \cos(8\sqrt{3}t))$$

Lösung: $x(t) = e^{-8s^{-1}t} [0,1155 \text{ m} \cdot \sin(8\sqrt{3} \text{ s}^{-1} \cdot t) + 0,2 \text{ m} \cdot \cos(8\sqrt{3} \text{ s}^{-1} \cdot t)]$

- 17) *Energielos* bedeutet: $i(0) = 0$ und $q(0) = \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = 0$ (stromlos und keine Ladungen zu Beginn). Somit gilt für $t \geq 0$:

$$Ri + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau = u_0 \Rightarrow R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = \mathcal{L}\{u_0\} = \frac{u_0}{s} \quad (\text{Nr. 2}) \Rightarrow$$

$$I(s) = \frac{u_0}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \Rightarrow i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{u_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{Nr. 3 mit } a = -1/RC)$$

- 18) $0,1 \cdot \frac{di}{dt} + 10i = 100$; Anfangswert: $i(0) = 0$

$$0,1 [s \cdot I(s) - 0] + 10 \cdot I(s) = \mathcal{L}\{100\} = \frac{100}{s} \quad (\text{Nr. 2}) \Rightarrow I(s) = \frac{1000}{s(s + 100)}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = 10(1 - e^{-100t}) \quad (\text{Nr. 5 mit } a = -100)$$

$$\text{Lösung: } i(t) = 10 \text{ A}(1 - e^{-100s^{-1} \cdot t})$$

- 19) *Energielos* bedeutet: $i(0) = 0$ und $q(0) = \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = 0$ (stromlos und keine Ladungen zu Beginn). Die *Schwingungsgleichung* lautet somit für $t \geq 0$:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau = u_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$L[s \cdot I(s) - 0] + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = \mathcal{L}\{u_0 \cdot \sin(\omega_0 t)\} = \frac{u_0 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (\text{Nr. 18 mit } a = \omega_0)$$

$$I(s) = \frac{u_0 \omega_0}{L} \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \quad \left(\text{mit } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\right)$$

Rücktransformation (Nr. 30 mit $a = \omega_0$):

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{u_0 \omega_0}{L} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}\right\} = \frac{u_0 \omega_0}{L} \cdot \frac{t \cdot \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0} = \\ &= \frac{u_0}{2L} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Literaturhinweise

Formelsammlungen

1. *Bronstein / Semendjajew*: Taschenbuch der Mathematik. Deutsch, Thun—Frankfurt/M..
2. *Papula*: Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Aufgabensammlungen

1. *Minorski*: Aufgabensammlung der Höheren Mathematik. Vieweg, Braunschweig.
2. *Papula*: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klausur- und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
3. *Papula*: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Anwendungsbeispiele. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Weiterführende und ergänzende Literatur

1. *Ameling*: Laplace-Transformation. Vieweg, Braunschweig.
2. *Ayres*: Differentialgleichungen. Mc Graw-Hill, New York.
3. *Blatter*: Analysis (Bd. II und III). HTB. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
4. *Braun*: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
5. *Burg / Haf / Wille*: Höhere Mathematik für Ingenieure I, II, III. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
6. *Collatz*: Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart.
7. *Courant*: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung (Bd. II). Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
8. *Dietrich / Stahl*: Matrizen und Determinanten. Deutsch, Thun—Frankfurt/M..
9. *Dirschmid*: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
10. *Endl / Luh*: Analysis (Bd. I—III). Aula-Verlag, Wiesbaden.
11. *Fetzer / Fränkel*: Mathematik (Bd. II). VDI, Düsseldorf.
12. *Fischer / Lieb*: Funktionentheorie. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
13. *Föllinger*: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. Hüthig, Heidelberg.
14. *Heuser*: Lehrbuch der Analysis, Teil 1 und 2. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
15. *Heuser*: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg, Wiesbaden.
16. *Holbrook*: Laplace-Transformation. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
17. *Jänich*: Frunktionentheorie. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
18. *Jeffrey*: Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure (Bd. II). Verlag Chemie, Weinheim.
19. *Kamke*: Differentialgleichungen (Bd. I und II). Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden.
20. *Kamke*: Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen (Bd. I und II). Teubner, Stuttgart.
21. *Lipschutz*: Lineare Algebra. Mc Graw-Hill, New York.
22. *Madelung*: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
23. *Margenau/Murphy*: Die Mathematik für Physik und Chemie (Bd. I und II). Deutsch. Thun—Frankfurt/M..
24. *Meyberg, Vachenaue*r: Höhere Mathematik 1 + 2. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
25. *Smirnov*: Lehrgang der Höheren Mathematik (5 Bd.). Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
26. *Weber / Ulrich*: Laplace-Transformation. Teubner, Wiesbaden.
27. *Zurmühl / Falk*: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.
28. *Zurmühl*: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer, Berlin—Heidelberg—New York.

Sachwortverzeichnis

A

abhängige Variable 195
 – Veränderliche 195
 Abklingkonstante 424, 446
 Ableitung einer Funktion, verallgemeinerte
 571
 Ableitungen, partielle 213 ff., 222 f., 296 f.
 Ableitungssatz für eine verallgemeinerte
 Funktion 640
 Ableitungssätze der Fourier-Transformation
 581 ff.
 – der Laplace-Transformation 638 ff.
 absolutes Maximum 246
 – Minimum 246
 Addition von Matrizen 16
 – von Vektoren 2
 adjungierte Matrix 56
 Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation
 575
 – der Laplace-Transformation 631 f.
 Ähnlichkeitstransformation 575, 631
 äquatoriales Flächenmoment 295
 äquivalente Umformungen eines linearen
 Gleichungssystems 72, 74
 äußere Integration 272 f.
 äußeres Integral 272
 algebraisches Komplement 37, 39, 44 f.
 Algorithmus, Gaußscher 72 ff.
 allgemeine Lösung einer
 Differentialgleichung 346
 allgemeine Schwingungsgleichung der
 Mechanik 417 ff.
 Amplitude 184, 190
 Amplitudendichten 554
 Amplitudenfunktion 441
 amplitudenmodulierte Kosinusschwingung
 604 ff.
 Amplitudenspektrum 184, 190, 542, 549
 analytische Darstellung einer Funktion 197 f.
 Anfangswertaufgabe 351
 Anfangswerte 351
 Anfangswertproblem 351, 491

antiparallele Vektoren 95
 antisymmetrische Matrix 14
 Anwendungen der Fourier-Transformation
 602 ff.
 – der Laplace-Transformation 664 ff.
 – der partiellen Differentiation 238 ff.
 aperiodischer Grenzfall 431 ff., 449 f.
 aperiodisches Verhalten eines schwingungs-
 fähigen Systems 427 ff., 435, 449 f.
 Arbeitspunkt 242
 arithmetisches Mittel 259
 Aufsuchen einer partikulären Lösung 377,
 463 ff., 497
 Ausblendintegral 568
 Auswertung einer Messreihe 260
 axiales Flächenmoment 295

B

Basis des n -dimensionalen Raumes 3
 Basisfunktionen 397, 456, 495
 Basislösungen 397, 456, 495
 Basisvektoren 3
 beidseitig gedämpfte Kosinusschwingung
 604 ff.
 Berechnung einer 2-reihigen Determinante 25
 – einer dreireihigen Determinante nach der
 Regel von Sarrus 34
 – einer inversen Matrix nach dem
 Gauß-Jordan-Verfahren 93 f.
 – einer inversen Matrix unter Verwendung
 von Unterdeterminanten 56
 – einer n -reihigen Determinante 44 f., 50 f.
 – eines Doppelintegrals 269 ff.
 – eines Doppelintegrals unter Verwendung
 kartesischer Koordinaten 272
 – eines Doppelintegrals unter Verwendung
 von Polarkoordinaten 279
 – eines Dreifachintegrals 303 ff.
 – eines Dreifachintegrals unter Verwendung
 kartesischer Koordinaten 305
 – eines Dreifachintegrals unter Verwendung
 von Zylinderkoordinaten 309

- eines Matrizenproduktes (Falk-Schema) 20f.
- Bereichsintegral, 2-dimensionales 268
- , 3-dimensionales 302
- Betrag eines Vektors 2
- Biegegleichung 353, 470
- Biegelinie 353
- Bildbereich 548, 552, 622f., 628, 632
- Bildfunktion 547, 621, 623, 630, 632
- Bildraum 622f., 632
- bimolekulare chemische Reaktion 350

- C**
- charakteristische Gleichung einer
 - homogenen linearen Differentialgleichung 400, 405, 460
 - – einer Matrix 122, 126
 - – eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems 493f.
- charakteristische Matrix 121, 126, 133
- charakteristisches Polynom einer Matrix 126f.
- Cramersche Regel 90ff.

- D**
- Dämpfungsfaktor 424, 446
- Dämpfungssatz der Fourier-Transformation 579
 - der Laplace-Transformation 637
- Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum 280f.
- Darstellungsformen einer Funktion 197ff.
- Definitionsbereich einer Funktion 195
- Deltafunktion, Diracsche 565ff.
- Determinanten 23ff.
 - , dreireihige 33ff.
 - , elementare Umformungen 51
 - , Entwicklung nach Unterdeterminanten 37ff., 44f.
 - , Entwicklungsformel 37ff., 44
 - , Hauptdiagonale 25, 34
 - , Laplacescher Entwicklungssatz 39, 45
 - , Multiplikation mit einem Skalar 28, 47
 - , Multiplikationstheorem 31, 47
 - , Nebendiagonale 25, 34
 - , n -reihige 41ff.
 - , Ordnung 25, 34, 41
 - , Rechenregeln 26ff., 35, 47
 - , Stürzen 26
 - , Unterdeterminante 37, 63
 - , zweireihige 24ff.
- Determinanten höherer Ordnung 41ff.
 - n -ter Ordnung 41ff.
 - zweiter Ordnung 25ff.
- δ -Funktion 565
- Diagonalelemente einer Matrix 11
- Diagonalmatrix 11
 - , Eigenwerte 139
- Differential, totales 232ff.
 - , vollständiges 232ff.
- Differentialgleichung, allgemeine Lösung 346
 - , Basisfunktionen 397
 - , Basislösungen 397
 - , Definition 345
 - , explizite 345
 - , Fundamentalbasis 399
 - , Fundamentalsystem 399
 - , gewöhnliche 345
 - , implizite 345
 - , Integration 346
 - , lineare 1. Ordnung 370
 - , lineare 2. Ordnung 392
 - , lineare n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 455
 - , Linienelement 356
 - , Lösung 345
 - , Lösungskurve 356
 - , numerische Integration 473ff.
 - , Ordnung 345
 - , partielle 345
 - , partikuläre Lösung 346
 - , Richtungselement 356
 - , Richtungsfeld 356
 - , singuläre Lösung 346
 - , spezielle Lösung 346
- Differentialgleichung der Biegelinie 353, 470
 - des freien Falls 343, 386
 - des radioaktiven Zerfalls 384
 - einer bimolekularen chemischen Reaktion 350
 - einer elektromagnetischen Schwingung 446f.
 - einer erzwungenen Schwingung 419, 435ff.
 - einer freien gedämpften Schwingung 419, 424ff.
 - einer freien ungedämpften Schwingung 419ff.

- einer harmonischen Schwingung 349
- einer mechanischen Schwingung 418 f.
- eines Reihenschwingkreises 445 f.
- eines Wechselstromkreises 388
- Differentialgleichungen 343 ff.
 - , exakte 365 f.
 - , gekoppelte 489
 - , gewöhnliche 343 ff.
 - , lineare 1. Ordnung 370 ff.
 - , lineare 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 380 ff.
 - , lineare 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 392 ff.
 - , lineare n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 455 ff.
 - , Systeme 2. Ordnung 488 ff.
 - , Systeme 4. Ordnung 516 ff.
- Differentialgleichungen 1. Ordnung 355 ff.
 - 2. Ordnung 392 ff.
 - mit trennbaren Variablen 358 f.
 - n -ter Ordnung 345
- Differentialoperator, partieller 217
- Differentialquotient, partieller 217
- Differentiation, implizite 238 ff.
 - , partielle 213 ff.
- Differentiation einer Funktion nach einem Parameter (Kettenregel) 227 f.
- Differentiationssätze der Fourier-Transformation 581 ff.
 - der Laplace-Transformation 638 ff.
- Differenz zweier Matrizen 16
- Differenzmatrix 16
- Diracsche Deltafunktion 565 ff.
 - –, Eigenschaften 567 f.
 - –, Laplace-Transformierte 627
 - –, Rechenregeln 568
 - –, verallgemeinerte Fourier-Transformierte 569 f.
 - –, Zusammenhang mit der Sprungfunktion (Sigmafunktion) 570 ff.
- Dirac-Stoß 567
- Dirichletsche Bedingungen 170
- Distribution 565
- Doppelintegral, Berechnung 269 ff.
 - , Berechnung in kartesischen Koordinaten 272
 - , Berechnung in Polarkoordinaten 279
 - , geometrische Deutung 266 ff.
- Doppelintegrale 266 ff.

- Drehung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems 61, 130 f.
- dreidimensionales Bereichsintegral 302
 - Gebietsintegral 302
- Dreieckskurve 186
- Dreiecksmatrix 12
 - , Eigenwerte 139
 - , obere 13
 - , untere 13
- dreifaches Integral 302
- Dreifachintegral 302
 - , Berechnung 303 ff.
 - , Berechnung in kartesischen Koordinaten 305
 - , Berechnung in Zylinderkoordinaten 309
- Dreifachintegrale 301 ff.
- dreireihige Determinante, Rechenregeln 35
 - –, Regel von Sarrus 34
- dreireihige Determinanten 33 ff.
- Dualitätsprinzip der Fourier-Transformation 591

E

- Ebenen im Raum 201 f.
 - in allgemeiner Lage 202
- Eigenfunktionen 469
- Eigenkreisfrequenz 424, 446
- Eigenlösungen 469
- Eigenschaften einer hermiteschen Matrix 115
 - einer orthogonalen Matrix 60
 - einer schiefhermiteschen Matrix 117
 - einer unitären Matrix 119
- Eigenvektoren einer Matrix 122, 132
- Eigenwerte der Koeffizientenmatrix 493
 - einer Diagonalmatrix 139
 - einer Differentialgleichung 469
 - einer Dreiecksmatrix 139
 - einer Matrix 122, 126, 132
- Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix 125 ff.
 - – – einer hermiteschen Matrix 142
 - – – einer n -reihigen Matrix 132 ff.
 - – – einer quadratischen Matrix 120 ff.
 - – – einer symmetrischen Matrix 140
 - – – spezieller Matrizen 138 ff.
- Eigenwertproblem 120, 127, 132, 469
- Einheitsmatrix 12
- Einheitsvektoren 3

- Einschwingphase 439
 einseitige Faltung 646
 Einsetzungsverfahren 503 ff.
 elektrische Schwingungen 445 ff.
 elektrischer Reihenschwingkreis 445 ff.,
 675 ff.
 elektrisches Netzwerk 104 f.
 elementare Umformungen einer Determinante
 51
 – – einer Matrix 66
 elementare Zeilenumformungen 72, 74
 Elemente einer Determinante 25, 34, 41
 – einer Matrix 6
 Eliminationsverfahren 503 ff.
 Entladung eines Kondensators 620, 670 f.
 Entwicklung einer Determinante nach Spalten
 39, 45
 – – – nach Zeilen 39, 45
 Entwicklung einer periodischen Funktion in
 eine Fourier-Reihe, komplexe Darstellung
 174 ff.
 – – – – –, reelle Darstellung 165 ff.
 Entwicklungsformel für eine Determinante
 37 ff., 44
 Entwicklungssatz, Laplacescher 39, 49
 erster Verschiebungssatz der
 Laplace-Transformation 632 ff.
 erweiterte Koeffizientenmatrix 70
 erzwungene elektromagnetische Schwingung
 451 ff.
 – mechanische Schwingung 419, 435 ff.
 Eulersche Knickkraft 471
 – Knicklast 471
 exakte Differentialgleichung 365
 explizite Funktion 198
 Exponentialansatz 380, 400, 492, 494
 exponentielle Fourier-Transformation 547
 – –, Tabelle 598 f.
 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen
 252 ff.
 Extremwerte, hinreichende Bedingungen 249
 –, lokale 245 ff.
 –, notwendige Bedingungen 248
 –, relative 245 ff.
- F**
- Falk-Schema 20 f.
 Fallgeschwindigkeit 387
 Faltung 586 f., 646
 –, einseitige 646
 –, zweiseitige 586
 Faltungintegral der Fourier-Transformation
 586
 – der Laplace-Transformation 646
 Faltungsprodukt der Fourier-Transformation
 586 f.
 – der Laplace-Transformation 646
 Faltungssatz der Fourier-Transformation 586 f.
 – der Laplace-Transformation 646 f.
 Feder-Masse-Schwinger 348 f., 417
 Federpendel 348 f., 417
 Fehler 259
 –, größtmöglicher 263
 –, maximaler 263
 Fehlerfortpflanzung, lineare 259 ff.
 Fehlerfortpflanzungsgesetz, lineares 263
 Fläche, Inhalt 283 ff.
 –, Moment 295 ff.
 –, Schwerpunkt 289 ff.
 –, Trägheitsmoment 295 ff.
 Flächendifferential 269
 Flächenelement 269, 283
 Flächeninhalt 283 ff.
 – einer Ellipse 285 f.
 – einer Kardioide 288 f.
 – eines Bereiches 274
 Flächenintegral 269
 Flächenmoment 295 ff.
 –, äquatoriales 295
 –, axiales 295
 –, polares 295
 Flächenmoment einer Halbkreisfläche
 (polares) 298 f.
 – zweiten Grades 295 ff.
 Flächenschwerpunkt 289 ff.
 Flächenträgheitsmomente 295 ff.
 Fourier-Analyse 164, 183
 – einer beidseitig gedämpften Kosinus-
 schwingung 604 ff.
 – in komplexer Form 185
 – in reeller Form 183
 Fourier-Integral 547
 –, inverses 552
 Fourierkoeffizienten, Berechnung 169, 177
 –, komplexe 176 f.
 –, reelle 165 ff.

- Fourier-Kosinus-Transformation 555 f.
 - , Tabelle 601
- Fourier-Kosinus-Transformierte 556
 - einer geraden Funktion 556
- Fourier-Reihe der Dreieckskurve 186
 - der Kippschwingung 186
 - der Kippspannung 187 ff.
 - der Rechteckkurve 179 ff., 186
 - des Sägezahnimpulses 186
 - des Sinusimpulses 187
 - in komplexer Form 174 ff.
 - in reeller Form 165 ff.
- Fourier-Reihen 163 ff.
 - , spezielle (Tabelle) 186 f.
- Fourier-Sinus-Transformation 557 f.
 - , Tabelle 600
- Fourier-Sinus-Transformierte 558
 - einer ungeraden Funktion 558
- Fourier-Transformation 542 ff.
 - , Ableitungssätze 581 ff.
 - , Ähnlichkeitssatz 575
 - , Anwendungen 602 ff.
 - , Dämpfungssatz 579
 - , Differentiationssätze 581 ff.
 - , Dualitätssprinzip 591
 - , Eigenschaften 573 ff.
 - , exponentielle 547
 - , Faltungssatz 586 f.
 - , Fourier-Kosinus-Transformation 555 f.
 - , Fourier-Sinus-Transformation 557 f.
 - , Frequenzverschiebungssatz 579
 - , Integrationssatz 585
 - , inverse 552
 - , Linearitätssatz 573 f.
 - , Multiplikationssatz 583
 - , Rechenregeln (Tabelle) 593
 - , Satz über Linearkombinationen 573 f.
 - , Transformationssätze 573 ff.
 - , verallgemeinerte 569 f.
 - , Verschiebungssatz 576 f.
 - , Vertauschungssatz 590 f.
 - , Zeitverschiebungssatz 576 f.
- Fourier-Transformation in komplexer Form 542 ff.
 - in reeller Form 554
 - periodischer Funktionen 594
- Fourier-Transformationen 542 ff.
 - , Tabellen 598 ff.
- Fourier-transformierbare Funktion 548
 - Fourier-Transformierte 545, 547
 - der Ableitung einer Originalfunktion 581
 - des Faltungsproduktes 587
 - einer gedämpften Funktion 579
 - einer gedämpften Schwingung 580 f.
 - einer verallgemeinerten Funktion 569 f.
 - eines Rechteckimpulses 546, 549 f.
 - Fourier-Zerlegung 163 ff.
 - Fourier-Zerlegung einer Schwingung, komplexe Darstellung 185
 - – –, reelle Darstellung 182 ff.
 - Fourier-Zerlegung in komplexer Form 542 ff.
 - in reeller Form 554
 - nichtperiodischer Funktionen 542 ff.
- freie elektromagnetische Schwingung 448 ff.
 - gedämpfte Schwingung 419, 424 ff., 434 f., 448 ff.
 - gedämpfte Schwingung eines mechanischen Systems 419, 424 ff., 434 f.
 - ungedämpfte Schwingung 419 ff., 448, 450
- freier Fall 343
 - – unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes 385 ff.
- Frequenzbereich einer Fourier-Transformation 548
- Frequenzfunktion 548
- Frequenzgang der Amplitude 440, 443
 - der Phasenverschiebung 442 f., 454
 - des Scheitelwertes 453
 - eines Übertragungssystems 596, 606 ff.
- Frequenzspektrum 549
- Frequenzverschiebungssatz der Fourier-Transformation 579
- Fundamentalebasis einer linearen Differentialgleichung 399, 457
 - eines Differentialgleichungssystems 495
- Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung 399, 457
 - eines Differentialgleichungssystems 495
- Funktion, analytische Darstellung 197 f.
 - , Darstellung als Fläche im Raum 200 f.
 - , Darstellung durch eine Tabelle 198
 - , Darstellungsformen 197 ff.
 - , Definitionsbereich 195
 - , Deltafunktion 565 ff.
 - , δ -Funktion 565 ff.
 - , Diracsche Deltafunktion 565 ff.
 - , explizite 198
 - , Fourier-transformierbare 548

–, graphische Darstellung 200f.
 –, Grenzwert 209
 –, Höhenliniendiagramm 204f.
 –, implizite 198
 –, Impulsfunktion 565
 –, Laplace-transformierbare 624
 –, Linearisierung 242
 –, mittelbare 227
 –, Schnittpunktdiagramm 204ff.
 –, stetige 212
 –, Stetigkeit 211
 –, verallgemeinerte 567, 640
 –, verkettete 227
 –, Wertebereich 195
 –, Wertevorrat 195
 –, zusammengesetzte 227
 Funktionen von mehreren Variablen 194ff.
 – von zwei Variablen 195
 Funktionsgleichung 197
 Funktionstabelle 198
 Funktionstafel 198
 Funktionswert 195

G

Gauß-Jordan-Verfahren 93f.
 Gaußscher Algorithmus 72ff.
 Gebietsintegral, 2-dimensionales 269
 –, 3-dimensionales 302
 gedämpfte Schwingung 419, 424ff., 448, 450
 – –, Fourier-Analyse 604ff.
 – –, Fourier-Transformierte 580f.
 gekoppelte Differentialgleichungen 489
 – mechanische Schwingungen 678f.
 – schwingungsfähige Systeme 516ff.
 gestaffeltes lineares Gleichungssystem 72, 74
 gewöhnliche Differentialgleichung 343, 345
 Gleichheit von Matrizen 15
 Gleichungssystem, lineares 69ff.
 graphische Darstellung einer Funktion 200f.
 Grenzwert einer Funktion 209
 Grenzwertsätze der Laplace-Transformation 649f.
 größtmöglicher Fehler 263
 Grundschwingung 165, 182, 542

H

harmonische Analyse 164, 183
 harmonische Schwingung 163, 347ff., 352

– – einer Blattfeder 673ff.
 Hauptdiagonale 11, 25, 34
 hermitesche Matrix 113
 – –, Eigenschaften 115
 – –, Eigenwerte und Eigenvektoren 142
 Hilfsfunktionen der Fourier- und Laplace-Transformation 561ff.
 hinreichende Bedingungen für einen relativen Extremwert 249
 Hochpunkt 246
 Höhenkoordinate 200f., 205
 Höhenlinie 205
 Höhenliniendiagramm 204f.
 homogene lineare Differentialgleichung
 1. Ordnung 370f.
 – – – 2. Ordnung 392ff.
 – – – n -ter Ordnung 455ff.
 homogene Systeme linearer Differentialgleichungen 489, 491
 homogenes lineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung 494
 – – Gleichungssystem 70, 87f.
 – – (n, n) -System 87f.
 Hookesches Gesetz 349, 418, 517
 hyperbolisches Paraboloid 248

I

ideales Gas 196, 208, 220, 237
 Imaginärteil einer komplexen Matrix 108
 implizite Differentiation 238ff.
 – Funktion 198
 Impulsantwort 596, 607
 Impulse, rechteckige 564
 Impulsfunktion 565, 607
 indirekte Messung einer Größe 261ff.
 inhomogene lineare Differentialgleichung
 1. Ordnung 370, 373ff.
 – – – 2. Ordnung 392ff.
 – – – n -ter Ordnung 455ff.
 inhomogene Systeme linearer Differentialgleichungen 489, 491
 inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung 497
 – – Gleichungssystem 70, 83f.
 – – (n, n) -System 83f.
 innere Integration 271f.
 inneres Integral 272
 Integrabilitätsbedingung 366

- Integral, äußeres 272
- , Ausblendintegral 568
 - , Bereichsintegral 268, 302
 - , Doppelintegral 266 ff.
 - , dreifaches 302
 - , Dreifachintegral 301 ff.
 - , Flächenintegral 269
 - , Fourier-Integral 547
 - , inneres 272
 - , Laplace-Integral 624
 - , Umkehrintegral der Fourier-Transformation 552
 - , Umkehrintegral der Laplace-Transformation 628
 - , verallgemeinertes 568
 - , Volumenintegral 302
 - , zweifaches 269
- Integrand 269, 302
- Integrandfunktion 269, 302
- Integration, äußere 272 f., 279
- , innere 271 f., 279
- Integration einer Differentialgleichung durch Trennung der Variablen 358 f.
- einer Differentialgleichung 1. Ordnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung 478 ff.
 - einer Differentialgleichung 1. Ordnung nach dem Streckenzugverfahren von Euler 474 ff.
 - einer Differentialgleichung 2. Ordnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung 484 ff.
 - einer Differentialgleichung durch Substitution 362 f.
 - einer exakten Differentialgleichung 1. Ordnung 366 f.
 - einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung 371
 - einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 400 ff., 405
 - einer homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 456 ff.
 - einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung 373 ff.
 - einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 407 ff.
 - einer inhomogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 463 ff.
 - einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 380 ff., 602, 665 f.
 - einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 602, 667 f.
 - eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung 492 ff.
 - eines inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung 497 ff.
 - eines inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung durch „Aufsuchen einer partikulären Lösung“ 497 f.
 - eines inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung nach dem „Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren“ 503 ff.
- Integrationsbereich 269
- in Polarkoordinaten 278
 - in Zylinderkoordinaten 308 f.
- Integrationskonstante 344
- Integrationsätze der Laplace-Transformation 643 ff.
- Integrationsatz der Fourier-Transformation 585
- Integrationsvariable 269, 302
- integrierender Faktor 368
- Integro-Differentialgleichung 677
- Inverse einer Matrix 55
- inverse Fourier-Transformation 552
- Laplace-Transformation 628
- inverse Matrix 55
- –, Berechnung mit Hilfe von Unterdeterminanten 56
 - –, Berechnung nach Gauß-Jordan 93 f.
- inverses Fourier-Integral 552
- Laplace-Integral 628
- invertierbare Matrix 55
- Isokline 356
- Isothermen 209
- K**
- Kardioide 288
- kartesische Koordinaten 200

- kartesischer Normalbereich 273 f.
 kartesisches Koordinatensystem 200
 Kegelmantel 311
 Kegelmasse 318 f.
 Kegelvolumen 318
 Kehrmatrix 55
 Kennkreisfrequenz 424, 446
 Kennlinienfeld 207
 – eines idealen Gases 208 f.
 Kettenleiter 488, 512 ff.
 Kettenregel, verallgemeinerte 227 f.
 – für Funktionen mit einem Parameter 227 f.
 Kippschwingung 164, 170, 542
 Kippspannung 164, 174 ff., 187 ff.
 Kirchhoffsche Regeln 5, 265, 388, 445, 620, 676
 Knotenpunktregel 5
 Koeffizientendeterminante 24, 33
 Koeffizientenmatrix 6, 69
 –, erweiterte 70
 kollineare Vektoren 95
 komplexe Matrix 107
 – –, Imaginärteil 108
 – –, Realteil 108
 komplexe Matrizen 105 ff.
 – –, Rechenregeln 108 f., 111 f.
 komplexer Querwiderstand 106
 Komponentendarstellung eines Vektors 3
 konjugiert komplexe Matrix 110
 – transponierte Matrix 112
 Konjugierung 110
 Koordinaten, kartesische 200
 –, rechtwinklige 200
 Koordinatenebenen 201
 Koordinatensystem, kartesisches 200
 –, rechtwinkliges 200
 Kopplungsbedingung 252
 Korrespondenz 545, 547, 623
 Kosinusschwingung, amplitudenmodulierte 604 ff.
 –, beidseitig gedämpfte 604 ff.
 Kriechfall 427 ff., 435, 449 f., 538
 Kriterien für die Lösbarkeit eines
 homogenen linearen (n, n) -Systems 88
 – für die Lösbarkeit eines inhomogenen
 linearen (n, n) -Systems 84
 – für die Lösbarkeit eines linearen
 (m, n) -Systems 80
- Kriterium für die lineare Unabhängigkeit
 von Vektoren 100, 103
 Kugeloberfläche 312
- L**
- Lagrangescher Multiplikator 255
 Lagrangesches Multiplikatorverfahren 255
 Lambertsches Gesetz 257
 Laplace-Integral 624
 –, inverses 628
 Laplacescher Entwicklungssatz 39, 45
 Laplace-Transformation 620 ff.
 –, Ableitungssätze 638 ff.
 –, Ähnlichkeitssatz 631 f.
 –, Anwendungen auf lineare Differential-
 gleichungen 664 ff.
 –, Anwendungsbeispiele 670 ff.
 –, Dämpfungssatz 637
 –, Differentiationssätze 638 ff.
 –, Eigenschaften 629 ff.
 –, Faltungssatz 646 f.
 –, Grenzwertsätze 649 f.
 –, Integrationsätze 643 ff.
 –, inverse 628
 –, Linearitätssatz 630
 –, Rechenregeln (Zusammenfassung) 653
 –, Satz über Linearkombinationen 630
 –, Transformationssätze 629 ff.
 –, Verschiebungssätze 632 ff.
 Laplace-Transformationen 620 ff.
 –, spezielle (Tabelle) 661 ff.
 Laplace-Transformationsoperator 621, 623
 Laplace-transformierbare Funktion 624
 Laplace-Transformierte der Diracschen
 Deltafunktion 627
 – der linearen Funktion 625 f.
 – der Rampenfunktion 625 f.
 – der Rechteckkurve 656 f.
 – der Sägezahnfunktion 657 f.
 – der Sinusfunktion 626
 – der Sprungfunktion 625
 – des Faltungsproduktes 647
 – einer Funktion 621, 623 f.
 – einer Kippschwingung 657 f.
 – einer periodischen Funktion 654 ff.
 – eines Rechteckimpulses 627
 linear abhängige Lösungen 397, 456
 – – Vektoren 96 f., 99 f.
 linear unabhängige Lösungen 397, 456

- – Vektoren 3, 96 f., 99 f.
 - lineare Abhängigkeit von Vektoren 96 f.
 - Algebra 1 ff.
 - lineare Differentialgleichungen
 - 1. Ordnung 370 ff.
 - – 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 380 ff., 602, 665 f.
 - – 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 392 ff., 602, 667 f.
 - – mit konstanten Koeffizienten 455 ff., 664 ff.
 - – n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 455 ff.
 - lineare Fehlerfortpflanzung 259 ff.
 - Gleichungssysteme 69 ff.
 - Unabhängigkeit von Vektoren 95 ff.
 - lineares Differentialgleichungssystem
 - 2. Ordnung 490
 - – 4. Ordnung 517
 - lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz 263
 - lineares Gleichungssystem 69 ff.
 - –, äquivalente Umformungen 72, 74
 - –, gestaffeltes 72, 74
 - –, homogenes 70, 87 f.
 - –, inhomogenes 70, 83 f.
 - –, Lösbarkeit 78, 80, 84, 88
 - –, Lösungsverhalten 76, 79, 83 ff.
 - –, quadratisches 70
 - lineares (n, n) -System 70
 - Linearisierung einer Funktion 242
 - Linearitätssatz der Fourier-Transformation 573 f.
 - der Laplace-Transformation 630
 - Linearkombination von Basisfunktionen 397 f., 456, 495
 - von Lösungsfunktionen 396, 456
 - Linearkombination von Vektoren 3, 96
 - Linienelement 356
 - Linienspektrum 185, 542
 - Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n) -Systems 88
 - eines inhomogenen linearen (n, n) -Systems 84
 - eines linearen (m, n) -Systems 78
 - eines linearen (n, n) -Systems 84, 88
 - Lösung einer Differentialgleichung 345
 - eines Systems linearer Differentialgleichungen 489
 - Lösungsmenge eines linearen (m, n) -Systems 71
 - Lösungsvektor 69
 - eines Systems linearer Differentialgleichungen 490 f.
 - Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems 76 ff.
 - eines quadratischen linearen Gleichungssystems 83 ff.
 - lokale Extremwerte 245 ff.
- ## M
- Mantel eines Rotationsparaboloids 204, 206, 247
 - Maschenregel 5, 106, 388, 445, 488, 620, 676
 - Massenelement 326
 - Massenträgheitsmoment 326 ff.
 - eines Flügels 330 f.
 - eines homogenen Körpers 326
 - eines Rotationskörpers 328
 - eines Würfels 328 ff.
 - Matrix 6
 - , adjungierte 56
 - , antisymmetrische 14
 - , charakteristische 121, 126, 133
 - , charakteristische Gleichung 122, 126
 - , charakteristisches Polynom 126 f.
 - , Determinante einer quadratischen Matrix 24 f., 34, 41
 - , Diagonalelemente 11
 - , Diagonalmatrix 11
 - , Differenzmatrix 16
 - , Dreiecksmatrix 12
 - , Eigenvektoren 122, 126, 132
 - , Eigenwerte 122, 126, 132
 - , Einheitsmatrix 12
 - , elementare Umformungen 66
 - , Elemente 6
 - , erweiterte Koeffizientenmatrix 70
 - , Hauptdiagonale 11
 - , hermitesche 113
 - , inverse 55
 - , invertierbare 55
 - , Kehrmatrix 55
 - , Koeffizientenmatrix 6, 69
 - , komplexe 107
 - , konjugiert komplexe 110
 - , konjugiert transponierte 112
 - , Nebendiagonale 11
 - , n -reihige 7

- , n -ter Ordnung 7
 - , Nullmatrix 8
 - , Nullzeilen 67 f.
 - , Ordnung 7
 - , orthogonale 58
 - , quadratische 7, 11 ff.
 - , Rang 64 f.
 - , Rangbestimmung 65 ff.
 - , reelle 6
 - , reguläre 54
 - , schieferhermitesche 116
 - , schiefssymmetrische 14
 - , singuläre 54
 - , Spalten 6
 - , Spaltenmatrix 8
 - , Spur 126
 - , Summenmatrix 16
 - , symmetrische 13
 - , transponierte 10
 - , Trapezform 67 f.
 - , Umkehrmatrix 55
 - , unitäre 118
 - , Unterdeterminanten 63
 - , Zeilen 6
 - , Zeilenmatrix 8
 - , Zeilenumformungen 72, 74
 - Matrizeigenwertprobleme 120 ff.
 - Matrizelement 6
 - Matrizen 5 ff.
 - , Addition 16
 - , Differenz zweier Matrizen 16
 - , Eigenwertproblem 120, 127, 132
 - , elementare Umformungen 66
 - , Gleichheit 15
 - , komplexe 105 ff.
 - , Multiplikation mit einem Skalar 17
 - , Multiplikation zweier Matrizen 18 ff.
 - , Produkt zweier Matrizen 19
 - , Rechenoperationen 15 ff.
 - , Rechenregeln 16 f., 22
 - , Subtraktion 16
 - , Summe zweier Matrizen 16
 - Matrizenaddition 16
 - Matrizendarstellung eines Systems linearer Differentialgleichungen 490
 - Matrizenmultiplikation 18 ff.
 - Matrizenprodukt 19
 - Matrizensubtraktion 16
 - maximale Messunsicherheit 263 f.
 - maximaler Fehler 263
 - Maximum, absolutes 246
 - , relatives 246
 - mechanische Schwingungen 417 ff.
 - Mehrfachintegrale 266 ff.
 - Messabweichung 259
 - Messergebnis 259 f.
 - für eine „indirekte“ Messgröße 263
 - Messreihe 259
 - , Auswertung 260
 - Messung 259
 - , indirekte 261 ff.
 - Messunsicherheit 260
 - , maximale 263 f.
 - Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren 254 f.
 - Minimum, absolutes 246
 - , relatives 246
 - Mittel, arithmetisches 259
 - mittelbare Funktion 227
 - Mittelwert 259
 - , arithmetischer 259 f.
 - , mittlerer Fehler 260
 - , Standardabweichung 260
 - mittlerer Fehler des Mittelwertes 260
 - Modell zweier gekoppelter schwingungsfähiger Systeme 144 ff., 516 ff.
 - Multiplikation einer Determinante mit einem Skalar 28, 47
 - einer Matrix mit einem Skalar 17
 - eines Vektors mit einem Skalar 2
 - von Matrizen 18 ff.
 - Multiplikationssatz der Fourier-Transformation 583
 - Multiplikationstheorem für Determinanten 31, 47
- N**
- n -dimensionaler Raum 2
 - n -dimensionaler Vektor 1
 - n -dimensionales Eigenwertproblem 132
 - Nebenbedingung 252
 - Nebendiagonale 11, 25, 34
 - Normalbereich, kartesischer 273 f.
 - in Polarkoordinaten 278
 - Normalschwingungen 520 ff.
 - gekoppelter mechanischer Systeme 144 ff., 520 ff.

notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert 248
 n -reihige Determinante 41
 – –, Entwicklungsformel 44
 – –, Laplacescher Entwicklungssatz 45
 – –, Rechenregeln 47
 – –, Rechenvorschrift 42 ff.
 n -reihige Matrix 7
 Nullmatrix 8
 Nullvektor 3
 Nullzeile einer Matrix 67 f.
 numerische Integration einer Differentialgleichung 473 ff.
 – – einer Differentialgleichung 1. Ordnung 474 ff.
 – – einer Differentialgleichung 2. Ordnung 484 ff.

O

obere Dreiecksmatrix 13
 Oberfunktion 623
 Oberschwingung 165, 182, 542
 Ohmsches Gesetz 107, 194
 – – der Wechselstromtechnik 453
 Ordnung einer Determinante 25, 34, 41
 – einer Matrix 7
 – eines Systems linearer Differentialgleichungen 489
 Originalbereich 548, 552, 623, 628
 Originalfunktion 547, 621, 623, 640
 Originalraum 623
 orthogonale Matrix 58
 – –, Eigenschaften 60
 orthogonale Vektoren 3
 orthonormierte Vektoren 59

P

Paraboloid, hyperbolisches 248
 parallele Vektoren 95
 Parallelebenen 201
 Parallelschaltung von Widerständen 244
 Partialbruch 659
 Partialbruchzerlegung 659
 partielle Ableitungen 213 ff.
 – – 1. Ordnung 213 ff.
 – – höherer Ordnung 222 f.
 partielle Differentialgleichung 345
 – Differentialoperatoren 217

– Differentialquotienten 1. Ordnung 217
 partielle Differentiation 213 ff.
 – –, Anwendungen 238 ff.
 partielles Differenzieren 216, 293
 partikuläre Lösung einer Differentialgleichung 346
 Phasenspektrum 184, 549
 polares Flächenmoment 295
 – – eines Halbkreises 298 f.
 p -reihige Unterdeterminante 63
 Produkt, Faltungsprodukt der Fourier-Transformation 586 f.
 –, Faltungsprodukt der Laplace-Transformation 646
 Produkt aus einer Matrix und einem Skalar 17
 – zweier Matrizen 19
 PT_1 -Regelkreisglied 672

Q

quadratische Matrix 7
 – –, Eigenwerte und Eigenvektoren 120 ff.
 quadratische Matrizen, spezielle 11 ff.
 quadratisches lineares Gleichungssystem 70

R

radioaktiver Zerfall 384 f.
 Rampenfunktion 625
 Randbedingungen 353
 Randwertaufgabe 353
 Randwerte 353
 Randwertproblem 353
 Rang einer Matrix 64 f.
 Rangbestimmung einer Matrix mit Hilfe elementarer Umformungen 68
 – – – unter Verwendung von Unterdeterminanten 65
 Realteil einer komplexen Matrix 108
 Rechenoperationen für komplexe Matrizen 108 f., 111 f.
 – für n -dimensionale Vektoren 1 f.
 – für reelle Matrizen 15 ff.
 Rechenregeln für 2-reihige Determinanten 26 ff.
 – für 3-reihige Determinanten 35
 – für Faltungsprodukte 586 f., 647
 – für komplexe Matrizen 108 f.
 – für n -reihige Determinanten 47

- für reelle Matrizen 16f., 22
 - rechteckige Impulse, spezielle 564f.
 - Rechteckimpuls 171, 546, 549, 559, 627
 - Rechteckkurve 171 ff., 179 ff.
 - rechtwinklige Koordinaten 200
 - rechtwinkliges Koordinatensystem 200
 - reelle Matrix 6
 - Regel von Sarrus 34
 - reguläre Matrix 54
 - Reihenschaltung von Widerständen 197, 264f.
 - Reihenschwingkreis 445f.
 - relative Extremwerte 245 ff.
 - –, hinreichende Bedingungen 249
 - –, notwendige Bedingung 248
 - relatives Maximum 246
 - Minimum 246
 - Relativkoordinaten 236, 243
 - Resonanzfall 441, 443, 454
 - Resonanzfunktion 441
 - Resonanzkatastrophe 444
 - Resonanzkreisfrequenz 441, 443, 454
 - Resonanzkurve 441
 - Richtungselement 356
 - Richtungsfeld einer Differentialgleichung 356
 - Rotationsflächen 203
 - , Funktionsgleichung 310
 - Rotationskörper, Massenträgheitsmoment 328
 - , Schwerpunkt 321
 - , Volumen 316
 - Rotationsparaboloid 204, 281, 323
 - , Mantel 204, 311
 - , Volumen 281 f.
 - Rücktransformation der Fourier-Transformation 552, 595 f.
 - der Laplace-Transformation 628, 658 f.
 - Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung 478 ff., 484 ff.
- S**
- Sägezahnimpuls 164
 - Sattelfläche 249
 - Sattelpunkt 249
 - Satz über Linearkombinationen der Fourier-Transformation 573 f.
 - – – der Laplace-Transformation 630
 - Satz von Schwarz 223
 - von Steiner 298, 37
 - Schachbrettmuster 37
 - Scheinwiderstand 390
 - schiefer Wurf 194 f.
 - schiefermitesche Matrix 116
 - –, Eigenschaften 117
 - schiefsymmetrische Matrix 14
 - Schnittkurvendiagramm 204 ff.
 - Schwerpunkt einer Fläche 289 ff.
 - einer Halbkugel 321 ff.
 - einer Viertelkreisfläche 294 f.
 - eines Körpers 320 f.
 - eines Rotationskörpers 321
 - Schwerpunktachse 298, 327
 - Schwingung, amplitudenmodulierte 604 ff.
 - , aperiodischer Grenzfall 431 ff., 449 f.
 - , aperiodisches Verhalten 427 ff., 435
 - , beidseitig gedämpfte 604 ff.
 - , elektrische 445 ff.
 - , erzwungene 419, 435 ff., 451 ff.
 - , gedämpfte 419, 424 ff., 448, 450
 - , mechanische 417 ff.
 - , ungedämpfte 419 ff., 448, 450
 - Schwingung eines Feder-Masse-Schwingers 417 ff.
 - Schwingungen, gekoppelte 678 f.
 - Schwingungsfall 424 ff., 435, 448, 450
 - Schwingungsgleichung 347, 395, 399, 417 ff., 445 ff.
 - eines elektrischen Reihenschwingkreises 445 ff.
 - eines mechanischen Systems 417 ff.
 - Sigmafunktion 561 f.
 - singuläre Lösung einer Differentialgleichung 346
 - Matrix 54
 - Sinusimpuls 164, 174
 - Sinusschwingung 163
 - Skalarprodukt zweier Vektoren 2
 - Spalten einer Matrix 6
 - Spaltenindex 6
 - Spaltenmatrix 8
 - Spaltenvektor 1, 8
 - Spaltenzahl 6
 - Spektraldichte 547, 549
 - spektrale Amplitudendichte 549
 - Phasendichte 549
 - Spektralfunktionen 549, 554
 - Spektrum 549
 - spezielle Fourier-Transformationen 555 ff.
 - –, Tabellen 598 ff.

spezielle komplexe Matrizen 113 ff.
 – Lösung einer Differentialgleichung 346
 – Matrizen 8
 – quadratische Matrizen 11 ff.
 Sprungfunktion (Sigmafunktion) 561 f.
 –, Laplace-Transformierte 625
 –, Zusammenhang mit der Diracschen
 Deltafunktion 570 ff.
 Sprungfunktionen 672
 Spur einer Matrix 126
 Standardabweichung 259
 – des Mittelwertes 259 f.
 stationäre Lösung beim Wechselstromkreis
 391
 – – der Schwingungsgleichung 439, 443,
 453 f.
 stetige Funktion 212
 Stetigkeit einer Funktion 211
 Störfunktion 370, 392, 455, 489, 491
 Störglied 370, 392, 455, 489, 491
 Störvektor 490 f.
 Streckenzugverfahren von Euler 474 ff.
 Stürzen einer Determinante 26
 Subtraktion von Matrizen 16
 – von Vektoren 2
 Summe zweier Matrizen 16
 – zweier Vektoren 2
 Summenmatrix 16
 symmetrische Matrix 13
 – –, Eigenwerte und Eigenvektoren 140
 Systeme linearer Differentialgleichungen
 488 ff.
 – – – 1. Ordnung mit konstanten
 Koeffizienten 488 ff.
 – – – 2. Ordnung mit konstanten
 Koeffizienten 516 ff.
 Systemmatrix 144

T

Tabelle spezieller Fourier-Transformationen
 598 ff.
 – – –, exponentielle Fourier-Transformationen
 598 f.
 – – –, Fourier-Kosinus-Transformationen
 601
 – – –, Fourier-Sinus-Transformationen 600
 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen
 661 ff.

Tangentialebene 232 f.
 Tiefpunkt 246
 totales Differential 232 ff.
 – –, geometrische Deutung 236
 Transformationssätze der
 Fourier-Transformation 573 ff., 593
 – der Laplace-Transformation 629 ff., 653
 Transponieren einer Matrix 10
 Transponierte einer Matrix 10
 transponierte Matrix 10
 Transversalwelle 224 ff.
 Trapezform einer Matrix 67 f.
 Trennung der Variablen 358 f.
 triviale Lösung 71

U

Übertragungssystem 596, 606 ff.
 Umkehrintegral der Fourier-Transformation
 552
 – der Laplace-Transformation 628
 Umkehrmatrix 55
 unabhängige Lösungen 397, 456
 – Variable 195
 – Veränderliche 195
 ungedämpfte elektrische Schwingung 448,
 450
 unitäre Matrix 118
 – –, Eigenschaften 119
 Unstetigkeit 212
 Unterdeterminante 37, 63
 –, p -reihige 63
 –, p -ter Ordnung 63
 Unterdeterminante p -ter Ordnung 63
 Unterdeterminanten einer Matrix 63
 untere Dreiecksmatrix 13
 Unterfunktion 623

V

Variable, abhängige 195
 –, unabhängige 195
 Variation der Konstanten 373 f.
 Vektor 1
 –, Betrag 2
 –, Lösungsvektor 69
 –, n -dimensionaler 1
 –, Spaltenvektor 1
 –, Zeilenvektor 1
 Vektoren 1 ff.
 –, Addition 2

- , antiparallele 95
- , Basisvektoren 3
- , kollineare 95
- , linear abhängige 96 f.
- , Linearkombination 3, 96
- , linear unabhängig 3, 96 f.
- , Multiplikation mit einem Skalar 2
- , orthogonale 3
- , orthonormierte 59
- , parallele 95
- , Rechenoperationen 1 f.
- , Skalarprodukt 2
- , Subtraktion 2
- Vektorkoordinaten 1
- Veränderliche, abhängige 195
- , unabhängige 195
- verallgemeinerte Ableitung einer Funktion 571, 640
 - Funktion 567
 - –, Ableitungssatz 640
- verallgemeinerte Fourier-Transformierte 569 f.
 - – der Diracschen Deltafunktion 569 f.
 - – der Kosinusfunktion 594
 - – der Sinusfunktion 594
- verallgemeinerte Kettenregel 227 f.
- verallgemeinertes Integral 588
- verkettete Funktion 227
- Verschiebungssätze der Laplace-Transformation 632 ff.
- Verschiebungssatz der Fourier-Transformation 576 f.
- verschobene Sigmafunktion 561
 - Sprungfunktion 561
- Vertauschungssatz der Fourier-Transformation 590 f.
- Vierpol 106, 588
- vollständiges Differential 232 ff.
 - –, geometrische Deutung 236
- Volumen eines Körpers 312 ff.
 - eines Rotationskörpers 316
 - eines Rotationsparaboloids 281 f.
 - eines zylindrischen Körpers 268, 274, 305, 316
- Volumendifferential 302
- Volumenelement 302, 304, 308
- Volumenintegral 302
- W**
- Wechselstromkreis 388 ff.
- Wellengleichung 226
- Wertebereich einer Funktion 195
- Wertevorrat einer Funktion 195
- Widerstandsmatrix 107
- Widerstandsmoment 252, 256
- Wronski-Determinante 397, 456
- Wurf, schiefer 194 f.
- Wurfparabel 194 f.
- Z**
- Zeilen einer Matrix 6
- Zeilenindex 6
- Zeilenmatrix 8
- Zeilenumformungen einer Matrix, elementare 72, 74
- Zeilenvektor 1, 8
- Zeilenzahl 6
- Zeitbereich einer Fourier-Transformation 548
- Zeitfunktion 548
- Zeitverschiebungssatz der Fourier-Transformation 576 f.
- Zerfallsgesetz 385
- zusammengehöriges Funktionenpaar 547, 623
- zusammengesetzte Funktion 227
- Zustandsgleichung eines idealen Gases 196, 208, 220, 237
- zweidimensionales Bereichsintegral 268
 - Gebietsintegral 269
- zweifaches Integral 269
- zweireihige Determinanten 25 ff.
 - –, Eigenschaften 26 ff.
 - –, Rechenregeln 26 ff.
- zweireihige Matrix, Eigenwerte und Eigenvektoren 125 ff.
- zweiseitige Faltung 586
- zweiter Verschiebungssatz der Laplace-Transformation 635
- Zweiter 106, 588
- Zylinderkoordinaten 307