
Anhang

A.1 Konvexität und elementare Ungleichungen

Definition A.1. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}).

(a) Eine Teilmenge A von X heißt *konvex*, wenn mit $x, y \in A$ auch die Verbindungsstrecke in A liegt, wenn also $tx + (1 - t)y \in A$ für alle $t \in [0, 1]$.

(b) Eine auf einer konvexen Teilmenge A des Vektorraums X definierte reellwertige Funktion f heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in A$ und $t \in [0, 1]$ gilt

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

(c) Sind $x_1, \dots, x_k \in X$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t_i \leq 1$ und $\sum_i t_i = 1$, so heißt $\sum_i t_i x_i$ *Konvexkombination* der x_i .

(d) Die *konvexe Hülle* einer Menge $A \subset X$ besteht aus allen Konvexkombinationen von Elementen von A .

Satz A.2. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(a) Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann konvex, wenn alle Konvexkombinationen von Elementen von A in A liegen.

(b) Sei $A \subset X$ konvex. Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle Konvexkombinationen $\sum_i t_i x_i$, $x_i \in A$, gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^k t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k t_i f(x_i).$$

(c) Die konvexe Hülle einer Menge $A \subset X$ ist konvex.

Beweis. (a) Für konvexes A ist die Behauptung für $k = 2$ erfüllt. Für $k > 2$ verwenden wir Induktion über k . Für eine Konvexkombination $\sum_{i=1}^k t_i x_i$ mit $0 < t_k < 1$ folgt aus

$$y = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1-t_k} t_i x_i \in A,$$

daß

$$\sum_{i=1}^k t_i x_i = (1-t_k)y + t_k x_k \in A.$$

(b) ist wie (a).

(c) folgt aus der Tatsache, daß eine Konvexkombination von Konvexkombinationen wiederum eine Konvexkombination ergibt. \square

Satz A.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet. $f \in C^2(\Omega)$ ist genau dann konvex (konkav), wenn die Matrix $(D^2 f(x))$ für alle $x \in \Omega$ positiv (negativ) semidefinit ist.

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Funktion $\phi(t) = f(x_0 + ty)$ ist in einer Umgebung von 0 definiert. Wir schreiben den Satz von Taylor in der Form

$$\phi(t) - \phi(0) - \phi'(0)t = \frac{1}{2}\phi''(\tau)t^2, \quad \tau \in (0, t).$$

Ist f und damit ϕ konvex, so ist die linke Seite nichtnegativ, weil die Tangente einer konvexen Funktion unterhalb ihres Graphen liegt. Division durch t^2 und Grenzübergang $t \rightarrow 0$ liefern $\phi''(0) \geq 0$ und damit nach der Kettenregel $y^T D^2 f(x_0)y \geq 0$. Die umgekehrte Richtung zeigt man analog. \square

Die *Youngsche Ungleichung* mit ε

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2 \quad \forall a, b \geq 0, \varepsilon > 0, \quad (\text{A.1})$$

läßt sich mit der binomischen Formel beweisen. Die *verallgemeinerte Youngsche Ungleichung*

$$ab \leq \frac{1}{p}\varepsilon^p a^p + \frac{1}{q}\varepsilon^{-q} b^q \quad \forall a, b \geq 0, \varepsilon > 0, \quad (\text{A.2})$$

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p, q < \infty$, beweist man für $a, b > 0$, indem man ausnutzt, daß der Logarithmus konkav ist,

$$\ln\left(\frac{1}{p}\varepsilon^p a^p + \frac{1}{q}\varepsilon^{-q} b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(\varepsilon^p a^p) + \frac{1}{q}\ln(\varepsilon^{-q} b^q) = \ln(ab).$$

Ein anderer Typ von Ungleichung ist die *Cauchy-Ungleichung*

$$|(x, y)| \leq |x| |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n, \quad (\text{A.3})$$

die mit einem *Homogenitätsargument* bewiesen wird, das in dieser Form häufig vorkommt. Zunächst ist die Ungleichung richtig, wenn einer der beiden Vektoren verschwindet. Für $\tilde{x}, \tilde{y} \neq 0$ kann man die Cauchy-Ungleichung durch die

Setzung $x = |\tilde{x}|^{-1}\tilde{x}$, $y = |\tilde{y}|^{-1}\tilde{y}$ auf den Fall $|x| = |y| = 1$ zurückführen und dadurch die Homogenität der Cauchy-Ungleichung ausnutzen. Für solche x, y erhalten wir aus der Youngschen Ungleichung mit $\varepsilon = 1$

$$|(x, y)| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |\overline{y_i}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = 1.$$

Die verallgemeinerte Cauchy-Ungleichung

$$|(x, y)| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n \quad (\text{A.4})$$

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p, q < \infty$, beweist man genauso mit Hilfe der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung.

Für die *Ungleichung des geometrischen und des arithmetischen Mittels*

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad a_i > 0, \quad (\text{A.5})$$

gibt es eine Vielzahl von Beweisen. Am elegantesten nutzt man die Monotonie des natürlichen Logarithmus \ln aus, (A.5) ist äquivalent zu

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right).$$

Diese Ungleichung ist richtig, weil der Logarithmus konkav ist.

A.2 Fortsetzung stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der stetigen Fortsetzung von Funktionen, die auf einer Teilmenge eines metrischen Raums definiert sind. Wir benötigen zwei Lemmata:

Lemma A.4. *Sei A eine beliebige Teilmenge eines metrischen Raums X . Dann ist die Abstandsfunktion $f(x) = \text{dist}(x, A)$ lipschitzstetig.*

Beweis. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a \in A$ mit $\text{dist}(y, A) \geq \text{dist}(y, a) - \varepsilon$. Daher

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, a) - d(y, a) + \varepsilon \leq d(x, y) + \varepsilon,$$

also $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Die umgekehrte Richtung beweist man, indem man die Rollen von x und y vertauscht. \square

Lemma A.5 (Lemma von Urysohn). *Seien A, B nichtleere, abgeschlossene, disjunkte Teilmengen eines metrischen Raums X . Dann gibt es eine reellwertige stetige Funktion $\phi(x) = \phi(x; A, B)$ auf X mit $\phi(x) = 1$ in A , $\phi(x) = -1$ in B und $|\phi(x)| \leq 1$ in X .*

Beweis. Setze

$$\phi(x; A, B) = \frac{\text{dist}(x, B) - \text{dist}(x, A)}{\text{dist}(x, A) + \text{dist}(x, B)}.$$

Nach Aufgabe 1.20a) gilt $\text{dist}(x, A) > 0$ für $x \notin A$, weil A abgeschlossen ist. Der Nenner ist daher immer positiv, die Behauptung folgt aus dem vorigen Lemma. \square

Satz A.6 (Fortsetzungssatz von Tietze). *f sei reellwertig und stetig auf der abgeschlossenen Teilmenge D eines metrischen Raums X . Dann gibt es eine auf X stetige Fortsetzung F von f mit $\sup_X F = \sup_D f$ und $\inf_X F = \inf_D f$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für beschränktes f . Sei u eine auf D definierte stetige und beschränkte Funktion und $a = \|u\|_{\infty; D}$. Falls $a > 0$ sei A die Menge der Punkte mit $u \geq a/3$ und B die Menge der Punkte mit $u \leq -a/3$. Definiere einen Operator T durch $Tu = 0$ für $a = 0$ und, für $a > 0$,

$$Tu(x) = \begin{cases} \frac{a}{3}\phi(x; A, B) & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } B \neq \emptyset \\ -\frac{a}{3} & \text{falls } A = \emptyset \\ \frac{a}{3} & \text{falls } B = \emptyset \end{cases}, \quad x \in X,$$

wobei $\phi(x; A, B)$ die Funktion aus dem Urysohnschen Lemma ist. Genau eine der drei Alternativen muß im Fall $a > 0$ zutreffen. Es gilt dann

$$\|Tu\|_{\infty; X} = \frac{1}{3}\|u\|_{\infty; D}, \quad \|u - Tu\|_{\infty; D} = \frac{2}{3}\|u\|_{\infty; D}. \quad (\text{A.6})$$

Für eine auf D definierte stetige und beschränkte Funktion u definieren wir den Operator $Su = u - T(u - f)$, für den nach (A.6) gilt

$$\|Su - f\|_{\infty; D} = \|u - f - T(u - f)\|_{\infty; D} \leq \frac{2}{3}\|u - f\|_{\infty; D}. \quad (\text{A.7})$$

Fortgesetzte Anwendung von S verbessert die Approximation von f . Wir setzen daher $u_0 = 0$ und $u_{k+1} = Su_k$. Aus (A.7) folgt $\|Su_1 - f\|_{\infty; D} \leq \frac{2}{3}\|f\|_{\infty; D}$ und

$$\|Su_k - f\|_{\infty; D} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \|f\|_{\infty; D},$$

daher $u_k \rightarrow f$ gleichmäßig in D . Wir zeigen die Existenz einer stetigen Grenzfunktion der u_k auf X . Wegen $u_{k+1} - u_k = -T(u_k - f)$ folgt aus (A.6) und (A.7)

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{\infty; X} = \|T(u_k - f)\|_{\infty; X} = \frac{1}{3}\|u_k - f\|_{\infty; D} \leq c\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Damit ist

$$F = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k-1})$$

stetig in X , weil die Reihe $\sum (u_k - u_{k-1})$ gleichmäßig konvergent ist.

Ist f auf D unbeschränkt, wenden wir die gleiche Konstruktion auf $\tilde{f} = \arctan f$ an. Die daraus resultierende Fortsetzung \tilde{F} wird oben und unten durch $\sup_D \tilde{f}$ bzw. $\inf_D \tilde{f}$ abgeschnitten. Die abgeschnittene Funktion ist immer noch stetig. \square

A.3 Der Weierstraßsche Approximationssatz

Lemma A.7. Sei $\phi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ und $R > 0$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ mit rationalen Koeffizienten a_α mit

$$\|\phi - p\|_{\infty; B_R(0)} \leq \varepsilon.$$

Beweis. Wir können $R = 1/2$ und $g \in C_0^0(B_{1/2}(0))$ annehmen, der allgemeine Fall folgt durch eine einfache Streckung des Koordinatensystems. Auf dem Würfel $Q_1 = [-1, 1]^n$ setze

$$\phi_k(x) = \frac{1}{c_k} \prod_{i=1}^n (1 - x_i^2)^k \quad \text{mit} \quad c_k = \left(\int_{-1}^1 (1 - t^2)^k dt \right)^n$$

und $\phi_k(x) = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus Q_1$. Es gilt dann $\int \phi_k dx = 1$ und $\phi_k(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, gleichmäßig in $Q_1 \setminus Q_\delta$ für jedes (feste) $\delta > 0$. ϕ_k hat daher ähnliche Eigenschaften wie ein Mollifier und wird im folgenden als solcher verwendet. Wegen $g \in C_0^0(B_{1/2})$ stellt die Funktion

$$\phi_k * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x - y)g(y)dy = \frac{1}{c_k} \int_{B_{1/2}} \prod_{i=1}^n (1 - (x_i - y_i)^2)^k g(y) dy$$

ein Polynom im Bereich $|x| \leq 1/2$ dar.

Zu zeigen bleibt die Approximationseigenschaft von $\phi_k * g$. Wegen $\int \phi_k dx = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \|\phi_k * g - g\|_\infty &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y) - g(x)| \phi_k(y) dy \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |y| \leq \delta} |g(x - y) - g(x)| + 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \phi_k(y) dy. \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von g das $\delta > 0$ so wählen, daß der erste Term auf der rechten Seite $< \varepsilon/2$ ausfällt. Durch die anschließende Wahl eines genügend großen k wird auch der zweite Term klein.

Jedes Polynom kann auf einer kompakten Menge durch ein Polynom mit rationalen Koeffizienten approximiert werden. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen. \square

Satz A.8 (Weierstraßscher Approximationssatz). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann liegen die Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht in $C(K)$.*

Beweis. Jede auf K stetige Funktion kann mit Satz A.6 zu einer auf dem \mathbb{R}^n stetigen Funktion fortgesetzt und anschließend zu einer Funktion in $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ abgeschnitten werden. Das vorige Lemma liefert dann die Behauptung. \square

Interessanterweise benötigt man für den Weierstraßschen Approximationssatz nicht den vollständigen Polynomraum. Im Fall $n = 1$ läßt sich dazu eine präzise Aussage machen:

Satz A.9 (Müntz-Theorem). *Ist $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ eine Folge in \mathbb{N} , so liegt $\text{span}\{x^{n_0}, x^{n_1}, x^{n_2}, \dots\}$ genau dann dicht in $C([0, 1])$, wenn $\sum_k 1/n_k = \infty$.*

Beweis. Mit einem schönen und einfachen Argument aus [Gol83] zeigen wir, daß die Bedingung $\sum_k 1/n_k = \infty$ hinreichend ist.

Sei $m \neq n_k$. Definiere Funktionen q_k der Form

$$q_k(x) = x^m - \sum_{i=1}^k a_{ik} x^{n_i}, \quad 0 < x \leq 1,$$

durch die Rekursion $q_0(x) = x^m$,

$$q_k(x) = (n_k - m)x^{n_k} \int_x^1 q_{k-1}(t)t^{-1-n_k} dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Da $\|q_0\|_\infty = 1$ und $\|q_k\|_\infty \leq |1 - (m/n_k)| \|q_{k-1}\|_\infty$, gilt

$$\|q_k\|_\infty \leq \prod_{i=1}^k |1 - (m/n_i)|.$$

Wegen

$$\ln \prod_{n_i > m} \left(1 - \frac{m}{n_i}\right) = \sum_{n_i > m} \ln \left(1 - \frac{m}{n_i}\right) = - \sum_{n_i > m} \left(\frac{m}{n_i} + O(n_i^{-2})\right)$$

konvergiert das Produkt genau dann gegen Null, wenn $\sum_i 1/n_i = \infty$. \square

A.4 Der lokalkonvexe Raum $\mathcal{D}(\Omega)$

In diesem Abschnitt geben wir Halbnormen an, die auf $\mathcal{D}(\Omega)$ den Konvergenzbegriff „ $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ “ erzeugen. In Abschnitt 9.1 hatten wir definiert, daß $\phi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$ genau dann, wenn $\|\phi_k - \phi\|_{l,\infty} \rightarrow 0$ für alle l sowie $\text{supp}(\phi_k) \subset K \subset\subset \Omega$. Vor allem die zweite Bedingung bereitet hier Schwierigkeiten. Naheliegend ist die Wahl der Halbnormen $p_{K,l}(\phi) = \|\phi\|_{l,\infty;K}$ für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ und jedes $l \in \mathbb{N}$. Die Konvergenz einer Folge in $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich dieser Halbnormen garantiert aber nicht, daß die Grenzfunktion einen kompakten Träger besitzt. Als Beispiel kann man eine beliebige Funktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ nehmen und $\phi_k(x) = \sum_{j=1}^k \phi(x+j)/j$ setzen. Wir versehen daher $C_0^\infty(\Omega)$ mit allen auf diesem Raum definierten Halbnormen p mit der Eigenschaft: Für jedes $K \subset \Omega$ gibt es eine Konstante c und ein $l \in \mathbb{N}$ mit $p(\phi) \leq cp_{K,l}(\phi)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit Träger in K . Es gilt dann:

Satz A.10. *$C_0^\infty(\Omega)$ versehen mit den angegebenen Halbnormen ist ein lokalkonvexer Raum $\mathcal{D}(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega), \{p\})$, dessen Konvergenzbegriff mit $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ übereinstimmt.*

Beweis. Für eine Folge (ϕ_k) mit $p(\phi_k) \rightarrow 0$ sorgen die Halbnormen $p_{K,l}$ dafür, daß alle partiellen Ableitungen gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge konvergieren. Es muß gezeigt werden, daß die ϕ_k einen gemeinsamen kompakten Träger besitzen. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es eine aufsteigende Folge kompakter Teilmengen K_k mit $\cup K_k = \Omega$ und Punkte $x_k \in K_k \setminus K_{k-1}$ mit $\phi_k(x_k) \neq 0$ für eine Teilfolge. $p(\phi) = \sum_k |\phi_k(x_k)|^{-1} |\phi(x_k)|$ ist eine auf $C_0^\infty(\Omega)$ definierte Halbnorm mit $p(\phi) \leq cp_{K,0}(\phi)$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$. Es gilt $p(\phi_k) \geq 1$, was der Konvergenz $\phi_k \rightarrow 0$ widerspricht. □

A.5 Harmonische Funktionen und der Satz von Liouville

Wir können Definition 8.4 als Definition der komplexen Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ übernehmen. Wie im Reellen zeigt man aufgrund der Darstellung durch eine konvergente Potenzreihe, daß $f = u(x, y) + iv(x, y)$ nach den Variablen x und y reell differenzierbar ist. Ferner gelten die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$D_x u = D_y v, \quad D_y u = -D_x v,$$

weil sie für die einzelnen Glieder der Potenzreihe $(z - z_0)^n$ erfüllt sind. Differenzieren wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen weiter, so folgt $\Delta u = \Delta v = 0$ in D . Der Satz von Liouville besagt, daß eine auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbare und beschränkte Funktion f konstant ist. Er folgt daher aus:

Satz A.11. Sei $Lu = -D_i(a_{ij}D_ju)$ gleichmäßig elliptisch in \mathbb{R}^2 (siehe Definition 7.1) mit beschränkten und meßbaren Koeffizienten a_{ij} . Sei $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ eine schwache Lösung von $Lu = 0$. Ist u beschränkt, so ist u konstant.

Beweis. Sei τ eine Abschneidefunktion bezüglich $\{\tilde{B}_R, B_{2R}\}$ mit $|D\tau| \leq cR^{-1}$ in $B_{2R} \setminus B_R$. Wir setzen $v = \tau^2 u$ in die schwache Form ein und erhalten

$$\int a_{ij}D_juD_iu\tau^2 dx = - \int a_{ij}D_juuD_i\tau^2 dx.$$

Auf die linke Seite wenden wir die gleichmäßige Elliptizität an und die rechte Seite schätzen wir mit der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung ab,

$$\lambda \int |Du|^2\tau^2 dx \leq c \int |Du||u|\tau|D\tau| dx \leq \frac{1}{2}\lambda \int |Du|^2\tau^2 dx + c \int |u|^2|D\tau|^2 dx.$$

Mit $|u| \leq M$ erhalten wir hieraus

$$\int_{B_R} |Du|^2 dx \leq cM^2 \int_{B_{2R} \setminus B_R} |D\tau|^2 dx \leq cM^2.$$

Da die rechte Seite dieser Abschätzung unabhängig von R ist, folgt $Du \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$.

Mit der Poincaré-Ungleichung in Bemerkung 6.22 gilt für $u \in H^{1,2}(B_2 \setminus B_1)$

$$\int_{B_2 \setminus B_1} |u - \bar{u}|^2 dx \leq c \int_{B_2 \setminus B_1} |Du|^2 dx.$$

wobei \bar{u} den Mittelwert von u über $B_2 \setminus B_1$ bezeichnet. Dies wird mit $x = R^{-1}y$, $D_x = RD_y$, transformiert zu

$$\int_{B_{2R} \setminus B_R} |u - \bar{u}|^2 dx \leq cR^2 \int_{B_{2R} \setminus B_R} |Du|^2 dx. \quad (\text{A.8})$$

Wir testen nun die schwache Gleichung mit $v = \tau^2(u - \bar{u})$, \bar{u} ist der Mittelwert von u über $B_{2R} \setminus B_R$ und τ eine Abschneidefunktion bezüglich $\{\tilde{B}_R, B_{2R}\}$. Völlig analog zum ersten Teil des Beweises erhalten wir

$$\int_{B_R} |Du|^2 dx \leq c \int_{B_{2R} \setminus B_R} |D\tau|^2 |u - \bar{u}|^2 dx \leq cR^{-2} \int_{B_{2R} \setminus B_R} |u - \bar{u}|^2 dx$$

und mit (A.8)

$$\int_{B_R} |Du|^2 dx \leq c \int_{B_{2R} \setminus B_R} |Du|^2 dx.$$

Wir addieren auf beiden Seiten $c \int_{B_{2R} \setminus B_R} |Du|^2 dx$ und erhalten mit einem $\theta < 1$ (=Lochfülltechnik)

$$\int_{B_R} |Du|^2 dx \leq \theta \int_{B_{2R}} |Du|^2 dx.$$

Diese Abschätzung kann iteriert werden, so daß $\int_{B_R} |Du|^2 dx = 0$ bewiesen ist. \square

A.6 Polarkoordinaten

Für $x \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $r = |x|$ und $\omega = x/|x|$. Für eine Funktion $u(x) = u(r, \omega)$ folgt dann mit $D_i|x| = |x|^{-1}x_i$ aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} D_i u(x) &= D_r u(r, \omega) |x|^{-1} x_i + \sum_{j=1}^n D_{\omega_j} u(r, \omega) (|x|^{-1} \delta_{ij} - |x|^{-3} x_i x_j) \\ &= D_r u \omega_i + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n D_{\omega_j} u (\delta_{ij} - \omega_i \omega_j). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird mit dem kanonischen Einheitsvektor e_i multipliziert und über i summiert. Mit der Definition

$$D_\omega u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{\omega_j} u (\delta_{ij} - \omega_i \omega_j) e_i$$

und $D = \sum_i e_i D_i$ gilt daher

$$Du = D_r u \omega + \frac{1}{r} D_\omega u. \tag{A.9}$$

Bereits aufgrund der Herleitung ist $\omega \cdot D_\omega = 0$, man kann dies mit Hilfe von $\sum_i |\omega_i|^2 = 1$ auch sofort nachrechnen. Aus (A.9) folgt daher die häufig verwendete Beziehung $|Du|^2 = |D_r u|^2 + r^{-2} |D_\omega u|^2$, insbesondere $|D_r u| \leq |Du|$.

Wegen $x = r\omega$, $\omega \in S^{n-1}$, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} u(r, \omega) r^{n-1} d\omega dr, \tag{A.10}$$

wobei $d\omega$ das Flächenelement der Einheitskugel bezeichnet. Für die Funktion $u(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist insbesondere

$$|x|^\alpha \in L^1(B_1(0)) \Leftrightarrow \alpha > -n, \quad |x|^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)) \Leftrightarrow \alpha < -n.$$

$|x|^\alpha$ ist damit für kein α über dem \mathbb{R}^n integrierbar.

Mit (A.9) und (A.10) bringen wir die schwache Form des Laplace-Operators auf Polarkoordinaten

$$\int Du Dv dx = \int \int (D_r u \omega + \frac{1}{r} D_\omega u) (D_r v \omega + \frac{1}{r} D_\omega v) r^{n-1} dr d\omega,$$

nach partieller Integration wegen $\omega \cdot D_\omega = 0$

$$-\Delta = -\frac{1}{r^{n-1}} D_r (r^{n-1} D_r) - \frac{1}{r^2} \Delta_\omega$$

mit dem *Laplace-Beltrami-Operator* $-\Delta_\omega = D'_\omega D_\omega$.

In zwei Dimensionen verwenden wir die Parametrisierung $\omega = (\cos \phi, \sin \phi)$ mit $D_\omega u = D_\phi u(-\sin \phi, \cos \phi)$, daher

$$-\Delta = -\frac{1}{r}D_r(rD_r) - \frac{1}{r^2}D_\phi^2.$$

Selbstverständlich läßt sich dies auch direkt aus $u(r, \phi) = u(r \cos \phi, r \sin \phi)$ und

$$D_r u = D_1 u \cos \phi + D_2 u \sin \phi, \quad D_\phi u = -D_1 u r \sin \phi + D_2 u r \cos \phi,$$

herleiten.

A.7 Reelle und komplexe Vektorräume

Die meisten Aussagen aus den Kapiteln 8 und 9 sind nur für komplexe Räume formuliert, sie lassen sich durch die folgende Konstruktion sinngemäß auch auf reelle Räume übertragen. Ist X ein reeller Vektorraum, so setze $\hat{X} = X \times X$. Für $\alpha = a + ib$ und $\hat{x} = (x_1, x_2) = x_1 + ix_2$ definieren wir

$$\alpha x = ax_1 - bx_2 + i(bx_1 + ax_2), \quad \bar{x} = x_1 - ix_2.$$

Zusammen mit der üblichen komponentenweisen Addition wird \hat{X} zu einem komplexen Vektorraum.

Für eine auf X definierte Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ setzen wir

$$\hat{a}(\hat{x}, \hat{y}) = a(x_1, y_1) + a(x_2, y_2) + i(-a(x_1, y_2) + a(x_2, y_1)).$$

\hat{a} ist offenbar sesquilinear auf \hat{X} mit $\hat{a}(\hat{x}, \hat{x}) = a(x_1, x_1) + a(x_2, x_2)$. Koerzivität und Beschränktheit übertragen sich von a auf \hat{a} . Ferner wird ein Skalarprodukt a auf X zu einem Skalarprodukt \hat{a} auf \hat{X} mit zugehöriger Norm $\|\hat{x}\|_{\hat{X}}^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$. Daher ist \hat{X} ein Hilbert-Raum, wenn X ein Hilbert-Raum ist.

Im Fall eines normierten Raums X definieren wir die Norm auf \hat{X} durch

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}}^2 = \sup_{\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha|=1} (\|(\alpha x)_1\|^2 + \|(\alpha x)_2\|^2).$$

Auf diese Weise erreichen wir $\|\beta \hat{x}\|_{\hat{X}} = |\beta| \|\hat{x}\|_{\hat{X}}$ auch für komplexes β .

Lösungen

Es werden hauptsächlich die Aufgaben besprochen, auf denen im Text Bezug genommen wird.

Aufgaben aus Kapitel 1

1.6 Sei A das Komplement von $G(f)$ in $X \times Y$. Sei $(x_0, y_0) \in A$. Dann ist $y_0 \neq f(x_0)$. Nach dem Trennungsaxiom besitzen y_0 und $f(x_0)$ disjunkte Umgebungen V und W in Y . Da f stetig ist, gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset W$. Die Umgebung $U \times V$ von (x_0, y_0) liegt deshalb in A . Damit ist A offen.

1.7 Für $y = x$ folgt aus (ii) und (i), daß $d(y, z) \leq d(z, y)$, also auch die Symmetrie $d(y, z) = d(z, y)$. Aus (ii) folgt auch

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z) + 2d(y, z),$$

daher $d(y, z) \geq 0$.

1.8 Ist x ein Berührungspunkt von A , so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y_\varepsilon \in A$ mit $y_\varepsilon \in B_\varepsilon(x)$.

1.10 Sei X ein metrischer Raum mit $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dicht in X . Zu $A \subset X$ konstruieren wir eine dichte Teilmenge von A , indem wir zu jedem j und k ein $a_{jk} \in B_{1/j}(x_k) \cap A$ wählen, sofern diese Menge nichtleer ist. Die Menge $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ ist dann abzählbar. Zu beliebigem $a \in A$ gibt es ein k mit $d(a, x_k) < 1/j$ und ein a_{jk} mit $d(x_k, a_{jk}) < 1/j$. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $d(a, a_{jk}) < 2/j$. Damit ist $\{a_{jk}\}$ dicht in A .

1.11 \Rightarrow : Wir wählen aus jedem A_k ein Element x_k aus. Nach Voraussetzung bilden diese Elemente eine Cauchy-Folge, die gegen ein $x \in X$ konvergiert. Da für $l \geq k$ alle x_l in A_k enthalten sind, ist x Berührungspunkt aller Mengen A_k . Da diese abgeschlossen sind, gilt $x \in \bigcap A_k$. Wenn es zwei Punkte x, x' im Durchschnitt der A_k gibt, so folgt $d(x, x') \leq \text{diam } A_k$ für alle k , also $x = x'$.

\Leftarrow : Sei (x_k) eine Cauchy-Folge in X . Setze $A_k = \overline{\cup_{i=k}^{\infty} \{x_i\}}$. Die A_k sind nichtleer, abgeschlossen und der Durchmesser konvergiert gegen Null. Nach Voraussetzung gibt es ein x im Durchschnitt dieser A_k , das offensichtlich der Grenzwert der Folge ist.

1.14 Sei $M = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ die dichte Teilmenge des metrischen Raums X . Setze $Tx(i) = d(x_i, x) - d(x_i, x_1)$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt dann

$$d_{\infty}(Tx, Ty) = \sup_i |d(x_i, x) - d(x_i, y)| \leq d(x, y).$$

Mit $x_i \rightarrow x$, $x_i \in M$, erhält man Gleichheit in dieser Abschätzung. $Tx \in l_{\infty}$ folgt aus

$$\sup |Tx(i)| = d_{\infty}(Tx, Tx_1) \leq d(x, x_1).$$

1.20 a) Ist $\text{dist}(x, A) = 0$, so gibt es eine Folge (x_k) in A mit $d(x, x_k) \rightarrow 0$. Da A abgeschlossen ist, liegt auch x in A .

b) Sei (x_k) eine Minimalfolge in A , also $d(x, x_k) \rightarrow \text{dist}(x, A)$. Da A kompakt ist, besitzt (x_k) eine konvergente Teilfolge, die wieder mit (x_k) bezeichnet wird. Aus $x_k \rightarrow y$ folgt dann wegen der Stetigkeit der Metrik $d(x, x_k) \rightarrow d(x, y)$.

1.23 Wir können die f_k mit einer positiven reellen Zahl multiplizieren und damit $|f_k| \leq 1$ in X erreichen. Dann ist

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |f_k(x) - f_k(y)|$$

eine Metrik auf X , weil die f_k die Punkte in X trennen. Da die f_k stetig sind und die Reihe gleichmäßig konvergiert, ist d stetig auf $X \times X$. Insbesondere sind die Kugeln $B_r(x)$ offen. Damit ist die von der Metrik erzeugte Topologie größer als die Originaltopologie. Die Behauptung folgt aus Satz 1.36.

Aufgaben aus Kapitel 2

2.1 Die Partialsummen einer absolut summierbaren Reihe bilden eine Cauchy-Folge. Ist also X vollständig, so konvergiert die absolut summierbare Reihe. Ist umgekehrt (x_k) eine Cauchy-Folge, so gibt es eine Teilfolge (x_{k_l}) mit

$$\|x_{k_l} - x_{k_{l+1}}\| \leq 2^{-l}.$$

Die zugehörige Reihe ist damit absolut summierbar. Da sie nach Voraussetzung auch konvergent ist, konvergiert die Teilfolge (x_{k_l}) . Wenn eine Teilfolge einer Cauchy-Folge konvergiert, so konvergiert die gesamte Folge.

2.3 Angenommen, X wäre separabel. Dann gibt es eine abzählbare dichte Menge $S = \{s_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $u_{in} \in M$ mit

$$\|u_{in} - s_i\| \leq \frac{1}{n},$$

sofern ein solches Element existiert. Die Menge $\{u_{in}\}$ ist abzählbar; man beachte, daß für ihre Bildung das Auswahlaxiom verwendet wurde.

Zu vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ und $u \in M$ gibt es ein s_i mit $\|u - s_i\| \leq 1/n$. Damit existiert auch ein u_{in} mit $\|u_{in} - s_i\| \leq 1/n$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $\|u - u_{in}\| \leq 2/n$. Damit ist die Menge $\{u_{in}\}$ dicht in M , was einen Widerspruch bedeutet.

2.4 Als M wählen wir die Menge der $\{0,1\}$ -Folgen. Diese Menge ist überabzählbar und enthält keine abzählbare dichte Teilmenge.

Die Folgen mit rationalen Gliedern, die nur endlich viele nichtverschwindende Elemente enthalten, liegen dicht in $c_0(\mathbb{N})$ und sind abzählbar.

2.7 a) $X_1 + X_2$ enthält die endlichen Folgen.

b) $x = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1} e_{-i}$ ist in $l_2(\mathbb{Z})$, aber offenbar nicht in $X_1 + X_2$. Wegen a) kann $X_1 + X_2$ nicht abgeschlossen sein.

2.13 Für $f \in X'$, $g \in Y'$ ist $(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$ linear und stetig. Ist umgekehrt l ein stetiges lineares Funktional auf $X \times Y$, so setze $f(x) = l(x, 0)$ und $g(y) = l(0, y)$. Die Abbildung $T : (X \times Y)' \rightarrow X' \times Y'$, $l \mapsto (f, g)$ ist offenbar ein isometrischer Isomorphismus.

2.17 Beweis durch Induktion über n . Aus $TS^{n-1} - S^{n-1}T = (n-1)S^{n-2}$ folgt

$$TS^n - S^{n-1}TS = (n-1)S^{n-1},$$

daher

$$TS^n - S^nT = nS^{n-1}.$$

Hieraus erhalten wir $n\|S^{n-1}\| \leq 2\|S\|\|T\|\|S^{n-1}\|$, also $\frac{n}{2} \leq \|S\|\|T\|$ im Widerspruch zu $S, T \in \mathcal{L}(X)$.

2.23 Angenommen, die Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit ist nicht erfüllt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $\delta_k \rightarrow 0$, so daß für $x_k, y_k \in X$

$$|u(x_k) - u(y_k)| \geq \varepsilon, \quad d(x_k, y_k) \leq \delta_k.$$

Da X kompakt ist, besitzt (x_k) eine konvergente Teilfolge (x_{k_l}) und (y_{k_l}) enthält ebenfalls eine konvergente Teilfolge. Insgesamt bekommen wir konvergente Teilfolgen (x_l) und (y_l) mit $d(x_l, y_l) \leq \delta_l$. Es gilt daher $x_l, y_l \rightarrow x$, aber

$$|u(x_l) - u(y_l)| \geq \varepsilon,$$

was einen Widerspruch zur Stetigkeit von u im Punkt x bedeutet.

2.26 Sei (u_k) eine Folge in U mit $u_k \rightarrow u$ gleichmäßig. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|u - u_k\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Ferner gibt es ein R mit $|u(x)| \leq \varepsilon$ für alle $|x| \geq R$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $|u(x)| \leq 2\varepsilon$ für alle $|x| \geq R$.

Sei τ_R eine Abschneidefunktion bezüglich $\{\bar{B}_R, B_{R+1}\}$. Für $u \in U$ ist $\tau_R u \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - \tau_R u\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty; |x| \geq R} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$.

Aufgaben aus Kapitel 3

3.5 Endlich dimensionale Teilräume eines Banach Raums sind nach Satz 2.5 abgeschlossen. Da sie ferner keine offene Kugel enthalten, sind sie nirgends dicht. Gäbe es eine abzählbare Basis eines Banach Raumes, so könnte man den Raum als abzählbare Vereinigung von endlich dimensional Räumen darstellen, was dem Satz von Baire widerspricht.

3.11 Für $X = Y = l_2$ und $T_k x = x(k)e_k$ gilt $\|T_k x\| = |x(k)| \rightarrow 0$, aber $\|T_k\| = 1$.

3.12 Sei $x_k \rightarrow x_0$ in X und $y_k \rightarrow y_0$ in Y . Setze

$$f_k(x) = b(x, y_k).$$

Dann ist $f_k \in X'$ und wegen $f_k(x) \rightarrow b(x, y_0)$ folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, daß $\|f_k\| \leq K$. Aus

$$b(x_k, y_k) - b(x_0, y_0) = f_k(x_k - x_0) + b(x_0, y_k - y_0)$$

folgt daher $b(x_k, y_k) \rightarrow b(x_0, y_0)$.

3.14 $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ und $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ sind Banach-Räume mit $Id : X_2 \rightarrow X_1$ stetig und bijektiv. Nach dem Satz vom inversen Operator ist auch Id^{-1} stetig.

3.17 Sei $\tilde{f}(x) = f(Px)$, wobei $P : X \rightarrow U$ die orthogonale Projektion nach U bezeichnet. $\tilde{f} \in X'$ mit $|\tilde{f}(x)| = |f(Px)| \leq \|f\| \|G\| \|x\|$, also $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. Wegen $\tilde{f} = f$ in U folgt $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Sei g eine Fortsetzung von f mit $\|g\| = \|f\|$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es ein $y \in X$ mit $g(x) = (y, x)$ und $\|g\| = \|y\|$. Wegen der Zerlegung $X = U \oplus U^\perp$ gilt $y = Py + y^\perp$. Da $f = g$ auf U , ist $f(x) = (Py, x)$. Wir erhalten $\|f\|^2 = \|Py\|^2$ sowie $\|g\|^2 = \|Py\|^2 + \|y^\perp\|^2$. Somit ist $\|f\| = \|g\|$ nur möglich, wenn $y^\perp = 0$, was $g = 0$ auf U^\perp impliziert. Durch die Werte auf U und U^\perp ist ein lineares Funktional aber eindeutig bestimmt, also $g = \tilde{f}$.

3.25 Sei $p = 1$, die Argumentation für $p > 1$ verläuft genauso.

Ist $x_k \xrightarrow{*} x$ in l_1 , so $\sum_i y(i)x_k(i) \rightarrow \sum_i y(i)x(i)$ für alle y in c_0 . Setzen wir $y = e_i$, so folgt $x_k(i) \rightarrow x(i)$. Die Normbeschränktheit der Folge bekommen wir aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Sei nun $\|x_k\|_{l_1} \leq M$ und o.B.d.A. punktweise konvergent gegen Null. Sei $y \in c_0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein I_ε mit $|y(i)| \leq \varepsilon/(2M)$ für alle $i \geq I_\varepsilon$. Zu jedem I_ε gibt es ein K_ε mit

$$|x_k(i)| \leq \frac{\varepsilon}{2I_\varepsilon(\|y\| + 1)} \quad \text{für } i = 1, \dots, I_\varepsilon \text{ und alle } k \geq K_\varepsilon.$$

Für $k \geq K_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_i y(i)x_k(i) \right| &\leq \sum_{i=1}^{I_\varepsilon} |y(i)| |x_k(i)| + \sum_{i=I_\varepsilon+1}^{\infty} |y(i)| |x_k(i)| \\
 &\leq \|y\| \sum_{i=1}^{I_\varepsilon} |x_k(i)| + \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{i=I_\varepsilon+1}^{\infty} |x_k(i)| \\
 &\leq \|y\| \sum_{i=1}^{I_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2I_\varepsilon(\|y\| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{i=1}^{\infty} |x_k(i)| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

3.27 a) Mit $\|x_k\| \leq K$ gilt

$$\begin{aligned}
 |f_k(x_k) - f(x)| &\leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\
 &\leq \|f_k - f\|K + |f(x_k) - f(x)| \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

b) Entsprechend folgt aus $\|f_k\| \leq K$

$$\begin{aligned}
 |f_k(x_k) - f(x)| &\leq |f_k(x_k) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \\
 &\leq K\|x_k - x\| + |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

c) Diese Behauptung ist nicht richtig. In l_2 sei $x_k = e_k$ und $f_k(x) = x(k)$. Dann gilt $f_k(x_k) = 1$, aber $f_k \xrightarrow{*} 0$ und $x_k \rightarrow 0$.

3.31 Der Abschluß von M in l_∞ ist c_0 , weil die endlichen Abschnitte einer Folge in c_0 gegen diese konvergieren.

Wir müssen zeigen: In jeder schwachen* Umgebung eines $f_0 \in l_\infty$,

$$\bigcap_{i \in I_0} V_{x_i, r}(f_0) = \{f : |f(x_i) - f_0(x_i)| < r\}, \quad I_0 \text{ endlich,}$$

liegt ein $f \in M$. Sei y_1, \dots, y_I eine Basis von $\text{span}\{x_i\}_{i \in I_0}$. Es gibt ein J , so daß auch die Vektoren $(y_i(1), \dots, y_i(J))$ für $1 \leq i \leq I$ linear unabhängig sind. Damit besitzt die Matrix $(y_i(j))_{1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J}$ Rang I und das lineare Gleichungssystem $\sum_{j=1}^J z(j)y_i(j) = f_0(y_i)$, $1 \leq i \leq I$, hat eine Lösung. Das zugehörige Funktional $f(y) = \sum_j z(j)y(j)$ erfüllt $f(y_i) = f_0(y_i)$, daher auch $f(x_i) = f_0(x_i)$ für alle $i \in I_0$.

3.32 \Rightarrow : Für $g \in Y'$ ist die Menge $T^{-1}(g^{-1}(B_r(\alpha))) = (g \circ T)^{-1}(B_r(\alpha))$ schwach offen in X , weil $g \circ T \in X'$. Da die $B_r(\alpha)$ eine Basis der Topologie auf \mathbb{K} bilden, ist die Behauptung gezeigt.

\Leftarrow : Für $g \in Y'$ ist $(g \circ T)^{-1}(B_r(\alpha))$ schwach offen in X , daher $g \circ T \in X'$. Für $\|x\| \leq 1$ gilt demnach $|g \circ T(x)| \leq K_g \cdot \|Tx\| \leq K$ für $\|x\| \leq 1$ folgt aus Satz 3.21(a).

3.34 a) Für $f \in (c_0)'$ setze $f(i, j) = f e_{ij}$, wobei e_{ij} den kanonischen Einheitsvektor bezeichnet. Für endliche Folgen gilt dann

$$x = \sum_{i,j=1}^K x(i, j)e_{ij}, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^K x(i, j)f(i, j), \quad \|f\|_{c_0'} \leq \sum |f(i, j)|.$$

Damit können wir wegen der Stetigkeit von f den Grenzübergang $K \rightarrow \infty$ durchführen. $\|f\| = \sum |f(i, j)|$ beweist man durch die Wahl $x(i, j) = \frac{f(i, j)}{|f(i, j)|}$, falls $f(i, j) \neq 0$.

b) Ist $x_k \rightarrow x$ in l_1 , so auch $x_k(i, 1) \rightarrow x(i, 1)$ und $\sum_{j=2}^{\infty} x_k(i, j) \rightarrow \sum_{j=2}^{\infty} x(i, j)$.

c) Jede schwache* Umgebung eines $f \in l_1$ ist von der Form

$$U = \cap_{k=1}^K \{g \in l_1 : |g(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon\},$$

wobei $K \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_K \in c_0$. Wir müssen zeigen, daß in jeder solcher Umgebung ein Element von M liegt. Es gibt ein I , so daß $\tilde{f} \in l_1$ mit

$$\tilde{f}(i, j) = f(i, j) \text{ für } i, j \leq I, \quad \tilde{f}(i, j) = 0 \text{ sonst,}$$

der Abschätzung $|\tilde{f}(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$, $k = 1, \dots, K$, genügt, denn es gibt nur endlich viele solcher x_k . Für $l > I$ sei $g_l \in M$ definiert durch

$$g_l(i, j) = f(i, j) \text{ für } i, j \leq I, \quad g_l(i, l) = i g_l(i, 1) - \sum_{j=2}^I g_l(i, j) \text{ für } i \leq I,$$

für alle anderen (i, j) sei $g_l(i, j) = 0$. Wegen $x_k(i, j) \rightarrow 0$ läßt sich durch die Wahl eines genügend großen l erreichen, daß $|g_l(i, l)x_k(i, l)| < \varepsilon/2$ für alle $k = 1, \dots, K$. Daher

$$|g_l(x_k) - f(x_k)| \leq |g_l(x_k) - \tilde{f}(x_k)| + |\tilde{f}(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

d) Für $g \in B \cap M$ gilt

$$|g(i, 1)| \leq \frac{\|g\|_{l_1}}{i} \leq \frac{1}{i}.$$

Wir wählen $x = e_{i,1}$ und $f = 2e_{i,1}/i$. Dann gilt für die schwache* Umgebung von f

$$U = \{g : |g(i, 1) - \frac{2}{i}| < \frac{1}{i}\},$$

daß $g \notin U$ für alle $g \in B \cap M$. Wegen $\|f\| = 2/i$ enthält der schwache* Abschluß von $B \cap M$ keine offene Kugel $B_r(0)$. Für andere Kugeln beweist man das ganz analog.

3.35 Für $i \in \mathbb{N}$ setze $f_i(x) = x(i)$. Dann ist $f_i \in l'_\infty$ mit $\|f_i\| = 1$. Zu jeder Teilfolge (f_{i_k}) gibt es eine 0, 1-Folge x , so daß $f_{i_k}(x) = x_{i_k}$ nicht konvergent ist.

Aufgaben aus Kapitel 4

4.1 Die Schnittmenge der Z_k ist meßbar und besitzt Maß 0. Nach Satz 4.3(c) ist auch A eine Nullmenge.

4.3 Da die Mengen Ω_k meßbar und disjunkt sind, folgt aus der σ -Additivität, daß $\mu(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\Omega_k) > 0$, also auch $\mu(\Omega_k) > 0$ für ein k .

4.12 Seien $\Omega_i \subset \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, disjunkte meßbare Mengen mit positivem Maß. Der gesuchte Unterraum sind die Funktionen u mit $u = 0$ außerhalb $\cup \Omega_i$ und u konstant auf jeder Menge Ω_i . Der isometrische Isomorphismus auf diesen Unterraum ist $y \mapsto u(x) = y(i)$ für $x \in \Omega_i$.

4.22 a) Aus der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|u_k v_k - uv\|_1 &= \|(u_k - u)v_k + u(v_k - v)\|_1 \\ &\leq \|u_k - u\|_2 \|v_k\|_2 + \|u\|_2 \|v_k - v\|_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

b) Für $\phi \in L^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_k v_k - uv)\phi \, dx &= \int_{\Omega} (u_k(v_k - v) + (u_k - u)v)\phi \, dx \\ &\leq \|u_k\|_2 \|v_k - v\|_2 \|\phi\|_{\infty} + \int_{\Omega} (u_k - u)v\phi \, dx. \end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert gegen 0 wegen $\|u_k\|_2 \leq M$ und $v_k \rightarrow v$ in L^2 , der zweite Term wegen $u_k \rightarrow u$ und $v\phi \in L^2$.

c) Dies ist nicht richtig, wie das Beispiel $u_k(x) = v_k(x) = \sin kx$ mit $u_k, v_k \rightarrow 0$, aber

$$\int_0^{\pi} u_k v_k \phi \, dx \rightarrow d(\phi) > 0 \quad \text{für } \phi > 0,$$

zeigt.

Aufgaben aus Kapitel 5

5.1 Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\int u(x) J_{\varepsilon} * \phi(x) \, dx = \int \int u(x) J_{\varepsilon}(x - y)\phi(y) \, dx \, dy = \int J_{\varepsilon} * u(y)\phi(y) \, dy.$$

Wir setzen $DJ_{\varepsilon} * \phi = J_{\varepsilon} * D\phi$ in die Bedingung ein,

$$0 = \int u J_{\varepsilon} * D\phi \, dx = \int J_{\varepsilon} * u D\phi \, dx \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Daher $J_\varepsilon * u = \text{const}$ und wegen $J_\varepsilon * u \rightarrow u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ folgt $u = \text{const}$.

5.11 a) Die Abbildungen $T_\pm u = (u' \pm 1)^2$, $T : H^{1,2} \rightarrow L^1$ sind stetig, ebenso ist die Minimumfunktion $\min : L^1 \times L^1 \rightarrow L^1$ stetig, daher ist auch F stetig.

b) Wir verwenden die stetige, stückweise lineare Zickzackfunktion u_k , die beständig zwischen $1/k$ und $-1/k$ oszilliert mit Ableitung ± 1 . Der Minimumanteil im Funktional F verschwindet für diese Funktionen und es gilt $F(u_k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Da F nicht konvex ist, entsteht kein Widerspruch zu Satz 3.37.

5.12 Es gilt

$$\max\{u, v\} = (u - v)_+ + v, \quad \min\{u, v\} = (u - v)_- + v.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 5.20.

Aufgaben aus Kapitel 6

6.1 Sei $u(x) = x_1^\alpha$ mit $Du = (\alpha x_1^{\alpha-1}, 0)^T$. Dann gilt

$$\int_\Omega |Du|^p dx = |\alpha|^p \int_0^1 \int_0^{x_1^2} x_1^{(\alpha-1)p} dx_2 dx_1 = |\alpha|^p \int_0^1 x_1^{(\alpha-1)p+2} dx_1.$$

Das letzte Integral existiert für z. B. $\alpha = -\frac{1}{4}$ und $p = \frac{11}{5}$.

6.3 a) Mit $x = (x_1, x')$ gilt für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$u(y) = \int_{x_1 < y_1} D_1 u(x_1, y') dx_1.$$

Eine analoge Formel kann für den Integranden bezüglich der übrigen Variablen angewendet werden,

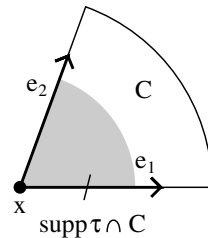
$$u(y) = \int_{x < y} D_1 \dots D_n u(x) dx,$$

wobei $x < y$ komponentenweise zu verstehen ist. Das Integral läßt sich offenbar durch $\|u\|_{n,1}$ abschätzen.

b) Wegen Satz 6.7 genügt es, die Abschätzung

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_{2,1}$$

für alle $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ zu zeigen. Zu $x \in \overline{\Omega}$ gibt es einen Kegel $C \subset \overline{\Omega}$, der wie in der nebenstehenden Skizze von den linear unabhängigen Einheitsvektoren e_1, e_2 aufgespannt wird. τ sei eine glatte Funktion mit $\tau(x) = 1$ und $\tau = 0$ in einer



Umgebung des Kegelbogens. Die Funktion $\tilde{u} = \tau u$ wird durch 0 auf den zugehörigen unendlichen Kegel fortgesetzt. Mit diesen Modifikationen kann wie in a) geschlossen werden:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= - \int_0^\infty D_\xi \tilde{u}(x + \xi e_1) d\xi = \int_0^\infty \int_0^\infty D_\xi D_\rho \tilde{u}(x + \xi e_1 + \rho e_2) d\xi d\rho \\ &= \sum_{i,j} \int_C D_{ij}^2 \tilde{u} e_{1,i} e_{2,j} |\det(e_1, e_2)|^{-1} dx \leq c \|D^2 \tilde{u}\|_{1,C} \leq c \|u\|_{2,1,C}. \end{aligned}$$

Die Konstante c hängt dabei vom Winkel zwischen e_1 und e_2 sowie den Ableitungen von τ ab. Beides kann unabhängig von x gewählt werden.

6.7 a) Die Matrix

$$M_{\alpha\beta} = \int_\Omega D^\alpha x^\beta dx, \quad |\alpha|, |\beta| \leq m - 1,$$

ist regulär, denn andernfalls gäbe es ein Polynom $p = \sum a_\beta x^\beta \in \mathbb{P}_{m-1}$ mit

$$\int D^\alpha p dx = 0, \quad |\alpha| \leq m - 1.$$

Hieraus folgt jedoch $p = 0$. Damit ist das lineare Gleichungssystem in $(a_\beta)_{|\beta| \leq m-1}$

$$\sum_{|\beta| \leq m-1} \int_\Omega D^\alpha (a_\beta x^\beta) dx = \int_\Omega D^\alpha u dx, \quad |\alpha| \leq m - 1,$$

eindeutig lösbar.

b) Wir wählen p wie in a) und erhalten

$$|F(u)| = |F(u - p)| \leq c \|u - p\|_{m,p;\Omega}.$$

Wegen $\int D^\alpha (u - p) dx = 0$ für $|\alpha| \leq m - 1$ können wir die Poincaré-Ungleichung anwenden beginnend mit $|\alpha| = 0$ und erhalten

$$|F(u)| \leq c \|D^m u\|_{p;\Omega}.$$

6.10 Setze

$$r_k(x) = \begin{cases} \min\{|\ln |\ln x||, k\} & \text{für } |x| < e^{-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\tilde{r}_k = 1 - \frac{1}{k} r_k.$$

Dann gilt

$$\tilde{r}_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| > e^{-1} \\ 0 & \text{in einer Umgebung von } 0 \end{cases}.$$

Zu $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ setze $\phi_k = \tilde{r}_k \phi$. Es gilt $\phi_k = 0$ in einer Umgebung von 0 sowie

$$\|\phi - \phi_k\|_{1,2} \leq c \|1 - \tilde{r}_k\|_{1,2} = \frac{c}{k} \|r_k\|_{1,2}.$$

In Anmerkung 6.12(iii) wird gezeigt, daß $r_k \in H^{1,2}$ mit $\|r_k\|_{1,2} \leq c$. Damit ist $J_\varepsilon * \phi_k \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ die gesuchte Approximation von ϕ .

Aufgaben aus Kapitel 7

7.4 Aus $u, v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ folgt $D_i u \in L^2(\Omega)$ und $u, v \in L^6(\Omega)$. Daher

$$D_i u \in L^2, v \in L^6 \Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow r = 3,$$

$$u \in L^6, v \in L^6 \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow s = \frac{3}{2}.$$

Damit sind $b_i \in L^3$ und $c \in L^{3/2}$ optimal.

7.5 a) Auf $H_0^{1,2}(0,1)$ gilt die Poincaré-Ungleichung, daher

$$\int_0^1 |u(x_1, x_2)|^2 dx_1 \leq c \int_0^1 |D_1 u(x_1, x_2)|^2 dx_1.$$

Durch Integration bezüglich x_2 folgt die Poincaré-Ungleichung auf Ω .

b) $u_k(x, y) = e^{k\pi x} \sin k\pi y$, $k \in \mathbb{Z}$, sind die gesuchten Lösungen.

7.15 Für die im Hinweis definierte Funktion

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$$

gilt aufgrund der Elliptizität von (a_{ij})

$$\begin{aligned} Lv(x) &= -e^{-\alpha r^2} \{4\alpha^2 a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha a_{ii}\} - 2\alpha b_i e^{-\alpha r^2} (x_i - y_i) \\ &\leq -e^{-\alpha r^2} \{4\alpha^2 \lambda r^2 - 2\alpha a_{ii} - c\alpha r\}. \end{aligned}$$

Für genügend großes α ist daher $Lv < 0$ in $A = B_R(y) \setminus B_\rho(y)$. Wegen $u(x) - u(x_0) > 0$ und der Stetigkeit von u gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $u(x) - u(x_0) - \varepsilon v(x) > 0$ auf $\partial B_\rho(y)$. Diese Ungleichung ist ebenso auf $\partial B_R(y)$ erfüllt, da dort $v = 0$ gilt. Also $L(u - u(x_0) - \varepsilon v) \geq 0$ in A und $u - u(x_0) - \varepsilon v \geq 0$ auf ∂A . Nach dem Maximumprinzip ist daher $u - u(x_0) - \varepsilon v \geq 0$ in A . Für die Normalableitung im Punkt x_0 gilt daher

$$D_\nu u(x_0) \leq \varepsilon D_\nu v(x_0) < 0.$$

7.16 Angenommen, das Minimum m von u wird im Inneren von Ω angenommen. Setze

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > m\}.$$

Nach Voraussetzung gibt es mindestens einen Randpunkt von Ω^+ , der innerhalb von Ω liegt. Es gibt daher einen Punkt $y \in \Omega^+$, der näher an einen solchen inneren Randpunkt liegt als an $\partial\Omega$. Die maximale Kugel $B_R(y)$ innerhalb von Ω^+ berührt daher $\partial\Omega^+$ in einem Punkt $x_0 \in \Omega$. Es gilt $u(x_0) < u(x)$ in dieser Kugel. Nach Aufgabe 7.15 gilt daher $D_\nu u(x_0) < 0$ im Widerspruch zur Tatsache, daß x_0 Minimumpunkt von u ist.

7.20 Das einzige Problem bei dieser Aufgabe ist der Beweis der Fehlerabschätzung

$$\|D(s - I_h s)\|_{2;\Omega} \leq ch^{\pi/\omega}.$$

Für ein am Nullpunkt anliegendes Dreieck A erhalten wir mit $\alpha = \pi/\omega$

$$\begin{aligned} \|D(s - I_h s)\|_{2;A}^2 &\leq 2 \int_A (|Ds|^2 + |DI_h s|^2) dx \\ &\leq c \int_0^{ch} r^{2\alpha-2} r dr + ch^{2\alpha-2} \mu(A) \leq ch^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Wegen Bedingung R hängt die Anzahl dieser Dreiecke nur von der Konstanten c_R ab.

Außerhalb der am Nullpunkt anliegenden Dreiecke ($= \Omega_r \subset \Omega$) verwenden wir die Interpolationsfehlerabschätzung aus Satz 7.19

$$\|D(s - I_h s)\|_{2;\Omega_r}^2 \leq ch^2 \int_{\Omega_r} |D^2 s|^2 dx \leq ch^2 \int_{ch}^c r^{2\alpha-4} r dr \leq ch^{2\alpha}.$$

Aufgaben aus Kapitel 8

8.17 In allen Fällen gilt $-u_k'' = \lambda_k u$ in $(0, 1)$. Hinzu kommen die erzwungenen und/oder natürlichen Randbedingungen:

a): $u'(0) = u'(1) = 0$, b): $u(0) = u(1) = 0$, c): $u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)$.

Wir erhalten daher die Eigenfunktionen:

a): $u_k(x) = \cos k\pi x, k \in \mathbb{N}_0$, b): $u_k(x) = \sin k\pi x, k \in \mathbb{N}$,

c): $u_k(x) = \cos 2k\pi x, k \in \mathbb{N}_0$, sowie $v_k(x) = \sin 2k\pi x, k \in \mathbb{N}$.

Die Eigenvektoren in c) werden gerne komplex geschrieben,

$$\phi_k(x) = e^{2k\pi i x}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Man überlegt sich leicht, daß die ϕ_k vollständige Orthogonalsysteme der komplexen Räume $L^2(0, 1)$ und $H_{\text{per}}^{1,2}(0, 1)$ sind.

8.19 Für $u(x, y)$ gilt

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin(i\pi x) t_i(y).$$

In die schwache Form des Eigenwertproblems setzen wir diesen Ansatz ein und testen mit $v(x, y) = \sin(j\pi x) v_j(y)$,

$$\int_0^1 (j^2 \pi^2 t_j(y) v_j(y) + t_j'(y) v_j'(y)) dy = \lambda \int_0^1 t_j(y) v_j(y) dy,$$

also

$$-t_j'' + j^2 \pi^2 t_j = \lambda t_j \quad \text{in } (0, 1), \quad t_j(0) = t_j(1) = 0,$$

mit Lösung $t_j(y) = \sin j\pi y$.

8.21 Die zugehörige Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij} D_j u D_i v dx$$

ist symmetrisch mit

$$\lambda \|Du\|_2^2 \leq a(u, u) \leq A \|Du\|_2^2.$$

Für den Rayleighquotienten $R_L(u) = a(u, u)/\|u\|^2$ folgt daher $\lambda R_{-\Delta}(u) \leq R_L(u) \leq \Lambda R_{-\Delta}(u)$. Die Behauptung folgt aus Satz 8.42 und dem Minmax-Prinzip.

8.23 Wie in (8.35) leitet man die Lösungsdarstellung

$$(*) \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_{0,i} e^{i\lambda_i t} u_i(x)$$

her. u_i sind die Eigenvektoren des Laplace-Operators und $v_{0,i}$ die Fourier-Koeffizienten von v_0 .

Zum Beweis der Energieerhaltung multiplizieren wir die Schrödinger-Gleichung mit \bar{u} und integrieren über Ω . Der Imaginärteil von $\int -\Delta u \bar{u} dx = \|Du\|^2$ verschwindet und für die zeitliche Ableitung gilt

$$\operatorname{Im} i \int_{\Omega} u_t \bar{u} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u|^2 dx.$$

Integration bezüglich t liefert die behauptete Gleichung. Man kann dies auch aus (*) herleiten, das hier verwendete Argument gilt auch für allgemeinere Gleichungen.

Aufgaben aus Kapitel 9

9.12 Sei $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da $K = \text{supp}(\phi)$ kompakt ist, gibt es endlich viele Ω_i , sagen wir $\Omega_1, \dots, \Omega_I$, die K überdecken. Sei ψ_1, \dots, ψ_I die zugehörige Zerlegung der 1. Setze

$$T(\phi) = \sum_{i=1}^I T_i(\psi_i \phi).$$

Diese Definition ist unabhängig von der endlichen Überdeckung $\{\Omega_i\}$. Ist nämlich $\{\Omega'_j\}$ eine andere endliche Überdeckung von K mit Zerlegung der Eins $\{\psi'_j\}$, so setze $\psi_{ij} = \psi_i \psi'_j \in \mathcal{D}(\Omega_i \cap \Omega'_j)$. Es gilt dann

$$T(\phi) = \sum_i \sum_j T_i(\psi_{ij} \phi) = \sum_j \sum_i T_j(\psi_{ij} \phi) = \sum_j T_j(\psi'_j \phi).$$

Aus dieser Überlegung folgt auch die Eindeutigkeit von T .

Nun beweisen wir, daß T eine Distribution ist. Sei $\phi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$. Dann gibt es ein $K \subset \subset \Omega$ mit $\text{supp}(\phi_k) \subset K$. K kann mit endlich vielen Ω_i überdeckt werden, sagen wir $i = 1, \dots, I$. Mit der zugehörigen Zerlegung der Eins $\{\psi_i\}$ folgt dann für diese i , daß $T_i(\psi_i \phi_k) \rightarrow T_i(\psi_i \phi)$, denn $\psi_i \phi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi_i \phi$. Daher auch $T(\phi_k) \rightarrow T(\phi)$.

Wenn $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_i)$, so gilt $T(\phi) = T_i(\phi)$, weil Ω_i den Träger von ϕ überdeckt und die Definition von T unabhängig von der Wahl des überdeckenden Mengensystems ist. Daher $T|_{\Omega_i} = T_i$.

9.13 Der Träger von ϕ sei nach oben durch $a > 0$ beschränkt. Nach Taylor gilt

$$\phi(x) = p_{n-1}(x) + r(x)$$

mit einem Polynom vom Grade $\leq n-1$ und einer Funktion r mit $|r(x)| \leq cx^n$. Damit ist $\int_\varepsilon^a x^{-n} r(x) dx$ als Funktion von ε beschränkt. Für $n > 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^a \frac{p_{n-1}(x)}{x^n} dx &= \frac{1}{-n+1} \int_\varepsilon^a (x^{-n+1})' p_{n-1}(x) dx \\ &= -\frac{1}{-n+1} \int_\varepsilon^a x^{-n+1} p'_{n-1}(x) dx + \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} p'_{n-1}(x) \Big|_\varepsilon^a. \end{aligned}$$

Auf diese Weise wird die Singularität schrittweise beseitigt, für $n = 1$ bekommen wir den Randterm $c \ln x p_{n-1}^{(n-1)}(x) \Big|_\varepsilon^a$, der den Term $a_0(\phi) \ln \varepsilon$ erzeugt. Die $a_0(\phi), \dots, a_{n-2}(\phi)$ sind damit Linearkombinationen von Ableitungen $\phi^k(0)$.

9.14 Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R = R(\varepsilon)$ mit $\int_{B_R} f dx = 1 - \varepsilon$. Sei $\phi \in \mathcal{D}$. Mit Hilfe der Transformation $y = x/\lambda$ folgt

$$\begin{aligned} \int f_\lambda(x)\phi(x) dx &= \int \lambda^{-n} f(x/\lambda)\phi(x) dx = \int f(y)\phi(\lambda y) dy \\ &= \int_{B_R} f(y)\phi(\lambda y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} f(y)\phi(\lambda y) dy = A + B. \end{aligned}$$

Für den Term A verwenden wir

$$\phi(\lambda y) = \phi(0) + D\phi(\xi)\lambda y.$$

Wegen $|D\phi| \leq c$ folgt dann

$$A \rightarrow \int_{B_R} f(y)\phi(0) dy = (1 - \varepsilon)\phi(0).$$

Für B gilt

$$|B| \leq \|\phi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} f(y) dy = \varepsilon \|\phi\|_\infty.$$

9.22 Die Funktion e^{-x} läßt sich in $x < 0$ abschneiden zu einer Funktion $\phi \in \mathcal{S}$. Damit ist $T_{e^x}(\phi)$ nicht definiert.

Mit $\frac{d}{dx} \sin e^x = \cos e^x e^x$ gilt

$$\begin{aligned} \int e^x \cos e^x \phi(x) dx &= \int \frac{d}{dx} \sin e^x \phi(x) dx \\ &= - \int \sin e^x \phi'(x) dx \leq \|\phi'\|_\infty. \end{aligned}$$

9.29 a) $\mathcal{F}'u_0$ ist stark fallend. Daher darf unter dem Integral differenziert werden,

$$-\Delta_{x'} \mathcal{F}u(x', x_n) = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} |\xi'|^2 \mathcal{F}'u_0(\xi') e^{-(1+|\xi'|^2)^{1/2} x_n} d\xi'.$$

Dies hebt sich mit den Termen $\mathcal{F}u$ und $D_{nn}\mathcal{F}u$ in $-\Delta \mathcal{F}u + \mathcal{F}u$ auf.

b) Es gilt

$$(*) \quad \mathcal{F}'\mathcal{F}u(\cdot, x_n)(\xi') = \mathcal{F}'u_0(\xi') e^{-(1+|\xi'|^2)^{1/2} x_n},$$

daher

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|)^{2m} |\mathcal{F}'\mathcal{F}u(\cdot, x_n)|^2 d\xi' dx_n \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|)^{2m} |\mathcal{F}'u_0(\xi')|^2 e^{-2(1+|\xi'|^2)^{1/2} x_n} d\xi' dx_n. \end{aligned}$$

Wir ziehen das Integral bezüglich x_n nach Innen und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-2(1+|\xi'|^2)^{1/2} x_n} dx_n = \frac{1}{2(1+|\xi'|^2)^{1/2}}.$$

Damit folgt die Behauptung für die Ableitungen D_1, \dots, D_{n-1} . Zum Nachweis von $D^m \mathcal{F}u \in L^2$ differenzieren wir $(*)$ nach x_n und schätzen analog ab.

Literaturverzeichnis

- [Ada75] Adams, R.A.: Sobolev Spaces. Academic Press, New York (1975)
- [AF03] Adams, R.A., Fournier, J.: Sobolev Spaces. Second Edition, Academic Press, New York (2003)
- [AD92] Apel, Th., Dobrowolski, M.: Anisotropic interpolation with applications to the finite element method. *Computing*, **47**, 277–293 (1992)
- [Agm65] Agmon, S.: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Van Nostrand, Princeton, N.J. (1965)
- [Agm64] Agmon, S., Douglis, L., Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Comm. Pure Appl. Math.*, **17**, 623–727 (1964)
- [Alt85] Alt, H.W.: Lineare Funktionalanalysis. Springer, Berlin Heidelberg New York (1985)
- [Aub79] Aubin, J.P.: Applied Functional Analysis. Wiley, New York (1979)
- [Bal76] Balakrishnan, A.V.: Applied Functional Analysis. Springer, Berlin Heidelberg New York (1976)
- [Ban32] Banach, St.: Théorie des Operations Linéaires. Monografie Matematyczne (1932)
- [Boa60] Boas, R.P.: A Primer of Real Functions. The Mathematical Association of America, Wiley, New York (1960)
- [Bra92] Braess, D.: Finite Elemente. Springer, Berlin Heidelberg New York (1992)
- [Cia78] Ciarlet, P.G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam (1978)
- [Cla36] Clarkson, J.A.: Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40**, 396–414 (1936)
- [DiB02] DiBenedetto, E.: Real Analysis. Birkhäuser, Boston (2002)

- [Dob] Dobrowolski, M.: Finite Elemente. Vorlesungsskript, Würzburg (1996) (unter Internetadresse <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~dobro/pub/index.html> erhältlich)
- [DS58] Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear Operators. Part I: General Theory. Wiley, New York (1958)
- [DS63] Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Wiley, New York (1963)
- [DS71] Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear Operators. Part III: Spectral Operators. Wiley, New York (1971)
- [GT77] Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Grundlehren der math. Wiss. **224**. Springer, Berlin Heidelberg New York (1977)
- [Gol83] v. Golitschek, M.: A short proof of Müntz's Theorem. J. Approximation Theory, **39**, 394–395 (1983)
- [Hal50] Halmos, P.R.: Measure Theory. D. van Nostrand, New York (1950)
- [HS67] Hanna, M.S., Smith, K.T.: Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooth domains. Comm. Pure Appl. Math., **20**, 575–593 (1967)
- [Heu92] Heuser, H.: Funktionalanalysis. Teubner, Stuttgart (1992)
- [HS69] Hewitt, E., Stromberg, K.: Real and Abstract Analysis. Springer, Berlin Heidelberg New York (1969)
- [HS71] Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliographisches Institut, Mannheim Wien Zürich (1971)
- [Kad64] Kadlec, J.: On the regularity of the solution of the Poisson problem on a domain with boundary locally similar to the boundary of a convex open set. Czech. Math. J., **14**, 386–393 (1964)
- [Kon67] Kondrat'ev, V.A.: Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trudy Moscov. Mat. Obshch. **16**, 209–292 (1967) [Englische Übersetzung: Trans. Moscow Math. Soc. **16**, 227–313 (1967)]
- [Lad85] Ladyzhenskaja, O.A.: The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Springer, Berlin Heidelberg New York (1985)
- [LM72] Lions, J.L., Magenes, E.: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I. Springer, Berlin Heidelberg New York (1972)
- [MNP91] Mazja, W.G., Nasarow, S.A., Plamenewski, B.A.: Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten I. Akademie-Verlag, Berlin (1991)
- [MS64] Meyers N., Serrin, J.: $H=W$. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **51**, 1055–1056 (1964)

- [RS80] Reed, M., Simon, B: Methods of Modern Mathematical physics. Academic press, New York.
I: Functional Analysis. 2. Auflage (1980)
II: Fourier Analysis, Self-Adjointness (1975)
III: Scattering Theory (1979)
IV: Analysis of Operators (1978)
- [RN56] Riesz, F., Nagy, B.Sc.: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften (1956)
- [Rud74] Rudin, W.: Functional Analysis. Tata McGraw-Hill PC (1974)
- [Tar07] Tartar, L.: An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces. Springer, Berlin Heidelberg New York (2007)
- [TL80] Taylor, A.E., Lay, D.C.: Introduction to Functional Analysis. Wiley, New York (1980)
- [Tri72] Triebel, H.: Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1972)
- [Tri92] Triebel, H.: Theory of Function Spaces. Birkhäuser Verlag, Basel (1992)
- [Vel76] Velte, W.: Direkte Methoden der Variationsrechnung. Teubner Studienbücher, Teubner, Stuttgart (1976)
- [Wal72] Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Heidelberger Taschenbücher **110**. Springer, Berlin Heidelberg New York (1972)
- [Wei00] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilbert Räumen. Teubner, Stuttgart (2000)
- [Wer97] Werner, D.: Funktionalanalysis. 2. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg New York (1997)
- [Wlo82] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen, Sobolevräume und Randwertaufgaben. Teubner, Stuttgart (1982)
- [WRL95] Wloka, J.T., Rowley, B., Lawruk, B.: Boundary Value Problems of Elliptic Systems. Cambridge University Press (1995)
- [Yos65] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer, Berlin Heidelberg New York (1965)

Symbolverzeichnis

Allgemeines

\mathbb{N}	natürliche Zahlen
\mathbb{N}_0	natürliche Zahlen einschließlich Null
\mathbb{K}	\mathbb{R} oder \mathbb{C}
i	$\sqrt{-1}$
$\operatorname{Re} \alpha$	Realteil von α
$\operatorname{Im} \alpha$	Imaginärteil von α
$\bar{\alpha}$	komplexe Konjugation
$ \alpha $	Betrag von $\alpha \in \mathbb{K}$
c	generische Konstante, muß nicht an jeder Stelle den gleichen Wert besitzen
χ_A	charakteristische Funktion der Menge A
δ_{ij}	Kroneckersymbol ($= 0$ für $i \neq j$, sonst $= 0$)
e_i	kanonische Einheitsvektoren ($e_i(j) = \delta_{ij}$)
$\ln x$	reeller natürlicher Logarithmus
e^z	komplexe Exponentialfunktion
Ω	Gebiet des \mathbb{R}^n
ν	äußerer Normaleneinheitsvektor
u_+	positiver Anteil der Funktion u ($u_+ = \max\{u, 0\}$)
u_-	negativer Anteil der Funktion u ($u_- = \min\{u, 0\}$)
$\operatorname{supp}(u)$	Träger der Funktion u ($= \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$)
$\operatorname{supp}(T)$	Träger der Distribution T , 219
$u * v$	Faltung der Funktionen u und v , 222
$T * \psi$	Faltung der Distribution T mit ψ , 222
$\mathcal{R}(T)$	Bild der Abbildung T

A^c	Komplement von A
\mathbb{P}_m	Raum der Polynome vom Grad $\leq m$

Multiindex und Differentialoperatoren

α	Multiindex ($\in \mathbb{N}_0^n$), 37
$ \alpha $	Ordnung des Multiindex ($= \alpha_1 + \dots + \alpha_n$)
x^α	Monom ($= x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$)
$\alpha!$	Fakultät des Multiindex ($= \alpha_1! \dots \alpha_n!$)
$\alpha \leq \beta$	Halbordnung für Multiindizes ($\Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i$)
D_i	partielle Ableitung nach x_i ($= \frac{\partial}{\partial x_i}$)
D	Gradient ($= (D_1, \dots, D_n)^T$)
D_{ij}^2	partielle Ableitung höherer Ordnung
D^m	Tensor sämtlicher partieller Ableitungen der Ordnung m , 37
D^α	partielle Ableitung nach dem Multiindex α , 37
Δ	Laplace-Operator ($= \sum_{i=1}^n D_{ii}^2$)

Topologische und metrische Räume

$\text{int } A$	Inneres von A , 2
\overline{A}	Abschluß von A , 2
∂A	Menge der Randpunkte von A , 2
$d(x, y)$	Metrik
$B_r(x)$	offene Kugel um x vom Radius r
$\tilde{B}_r(x)$	Menge der Punkte y mit $d(x, y) \leq r$
$\text{dist}(A, B)$	Abstand der Mengen A und B , 6
$\text{diam } A$	Durchmesser von A , 16
$D \subset\subset \Omega$	\overline{D} kompakt mit $\overline{D} \subset \Omega$

Lineare Räume

$\mathcal{N}(T)$	Nullraum der linearen Abbildung T
$\dim U$	Dimension des Unterraums U
$\text{codim } U$	Kodimension des Unterraums U , 192
Id	Identität
$\text{span } A$	lineare Hülle von A
$\ x\ $	Norm auf einem Vektorraum, 19
$p(x)$	Halbnorm auf einem Vektorraum, 19
(x, y)	inneres Produkt auf einem Vektorraum, 28

$\langle x, x' \rangle$	Dualitätsabbildung, 53
$\mathcal{L}(X, Y)$	Raum der stetigen linearen Operatoren, 23
$\mathcal{L}(X)$	$\mathcal{L}(X, X)$
$\mathcal{K}(X, Y)$	Raum der kompakten Operatoren, 179
X'	Dualraum des normierten Raums X , 24
X^*	Antidualraum des normierten Raums X , 32
X''	Bidualraum des normierten Raums X , 53
T'	adjungierte Abbildung zu T , 180
T^*	Hilbert-Adjungierte zu T , 182
$x \perp y$	x und y sind orthogonal, 31
A^\perp	orthogonales Komplement von A , 31
M^\perp, N_\perp	Annihilatoren, 181
j	für einen Hilbert-Raum ist $j : x \mapsto (\cdot, x)$, 31
i	kanonische Inklusion, $i : X \rightarrow X''$, 53
T_λ	$T - \lambda Id$, 175
R_λ	T_λ^{-1} , 175

Konkrete Räume und Normen

l	Raum aller Zahlenfolgen, 51
l_p	Raum der in p -ter Potenz summierbaren Zahlenfolgen, 20
$\ x\ _{l_p}$	Norm in l_p
$c = c(\mathbb{N})$	Raum der konvergenten Folgen, 41
$c_0 = c_0(\mathbb{N})$	Raum der Nullfolgen, 20
$\ x\ _{l_\infty}$	Supremumsnorm in l_∞, c, c_0 , 20
$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N})$	Raum der endlichen Folgen, 64
$C(X)$	stetige Funktionen auf dem kompakten Hausdorff-Raum X
$\ u\ _\infty$	Maximumsnorm in $C(X)$
$C^m(\Omega)$	Raum der m -mal stetig diff'baren Funktionen in Ω , $m \in \mathbb{N}_0$
$C_0^m(\Omega)$	Funktionen in $C^m(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω
$C^m(\overline{\Omega})$	Funktionen in $C^m(\Omega)$ mit gleichmäßig stetigen Ableitungen, 37
$\ u\ _{m, \infty; \Omega}$	Norm in $C^m(\overline{\Omega})$, 37
$C^{m, \alpha}(\overline{\Omega})$	Hölder- bzw. Lipschitzräume, 38
$ u _{C^\alpha}$	Halbnorm in $C^\alpha(\overline{\Omega})$, 38
$\ u\ _{C^{m, \alpha}}$	Norm in $C^{m, \alpha}(\overline{\Omega})$, 38
$L^p(\Omega)$	Raum der in p -ter Potenz integrierbaren Funktionen, 71
$\ u\ _{p; \Omega}$	Norm in $L^p(\Omega)$, 71
$L_{\text{loc}}^p(\Omega)$	Raum der Funktionen in $L^p(\Omega_0)$ für alle $\Omega_0 \subset\subset \Omega$

$L^p(\partial\Omega)$	L^p -Raum auf $\partial\Omega$, 112
$H^{m,p}(\Omega)$	Sobolev-Raum, 91
$\ u\ _{m,p;\Omega}$	Norm in $H^{m,p}(\Omega)$
$H^{s,p}(\Omega)$	Sobolev-Raum gebrochener Ordnung, 124
$H^{s,p}(\partial\Omega)$	Sobolev-Raum gebrochener Ordnung auf $\partial\Omega$, 130
$N^{s,p}(\Omega)$	Nikolski-Raum, 141
$\ u\ _{N^{s,p}(\Omega)}$	Norm in $N^{s,p}(\Omega)$, 141
$\mathcal{D}(\Omega)$	Raum der Testfunktionen auf Ω , 215
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Raum der Distributionen auf Ω , 215
\mathcal{S}	Raum der schnell fallenden Funktionen, 224
$p_{K,l}(\phi)$	Halbnorm in \mathcal{S} , 224
\mathcal{S}'	Raum der langsam wachsenden Distributionen, 228
$\mathcal{E}(\Omega)$	Raum der Funktionen in C^∞ , 51
$\mathcal{F}u$	Fourier-Transformation in \mathcal{S} , \mathcal{S}' oder L^2 , 224

Sachverzeichnis

- $C^{m,\alpha}$ -Diffeomorphismus, 102
- $C^{m,\alpha}$ -Lokalisierung, 102
- K -Funktional, 136
- σ -Algebra, 67
- σ -additiv, 67

- Abbildung
 - beschränkte, 23
 - folgenstetige, 4
 - kompakte, 26
 - lipschitzstetige, 9
 - offene, 3
 - stetige, 3
- abgeschlossene Menge, 2
- Abschluß einer Menge, 2
- Abschneidefunktion, 92
- Absolutstetigkeit
 - des Lebesgue Integrals, 70
- Abzählbarkeitsaxiom
 - erstes, 4
 - zweites, 5
- Alaoglu-Bourbaki
 - Satz von, 59
- Annihilator, 181
- Antidualraum, 32
- antilinear, 28
- Approximation
 - Finite Elemente, 166
 - Ritz-, 164
 - sukzessive, 9
- Approximationssatz
 - von Weierstraß, 252
- Arzela-Ascoli
 - Satz von, 34
- Auswahl der Diagonalfolge, 27

- Baire
 - Satz von, 43
- Banach-Raum, 20
 - gleichmäßig konvexer, 79
 - reflexiver, 59
- Banach-Saks
 - Satz von, 66
- Banach-Steinhaus
 - Satz von, 45
- Banachlimes, 64
- Banachscher Fixpunktsatz, 10
- Beppo-Levi
 - Satz von, 69
- Berührungspunkt, 2
- Bestapproximierende, 164
- Bidualraum, 53
- biharmonische Gleichung, 214
- biharmonischer Operator, 241
- Bramble-Hilbert
 - Lemma von, 143

- Calderon
 - Fortsetzungssatz von, 109
- Cantor-Menge, 84
- cantorähnliche Menge, 84
- Cauchy-Folge
 - im metrischen Raum, 8
 - schwache, 58
 - schwache*, 58
- Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen, 253

- Cauchy-Ungleichung, 28, 248
 - verallgemeinerte, 249
- Ceas Lemma, 165
- Clarksonsche Ungleichungen, 79
- Closed Range Theorem, 190
- Courant-Hilbert
 - Satz von, 200
- Courantsches Minmax-Prinzip, 200

- Diagonalfolgenargument, 27
- dicht, 5
- Diffeomorphismus, 102
- Differentialgleichungen
 - Cauchy-Riemannsche, 253
 - elliptische, 147, 210
 - gewöhnliche, 10, 35
 - hyperbolische, 210
 - parabolische, 211
- Differentialoperator
 - elliptisch, 160
 - gleichmäßig elliptisch, 150, 239
- Differenzenquotient, 97
 - \sim -en-Technik, 152
- Dirac-Distribution, 217
- Dirichlet-Problem, 149
- Distribution, 215
 - Differentiation einer \sim , 217
 - Dirac- \sim , 217
 - Einschränkung einer \sim , 219
 - gerade, ungerade, 244
 - langsam wachsende, 229
 - mit kompaktem Träger, 219
 - Multiplikation einer \sim , 217
 - reguläre, 216
 - temperierte, 229
 - Träger einer \sim , 219
 - von endlicher Ordnung, 216
- Dreiecksungleichung, 6, 19
 - umgekehrte, 6
- Dualitätsabbildung, 53
- Dualitätsargument, 169
- Dualraum, 24, 53
 - von \mathcal{S} , 228
 - von c_0 , 25
 - von $H_0^{m,2}$, 123
 - von $H^{m,p}$, 123
 - von L^p , 80
 - von l_p , 25
- Durchmesser, 16

- Eigenraum, 176
- Eigenwert, 176
- Eigenwertproblem
 - abstraktes, 200
 - für den Laplace Operator, 205
- Einbettung, 26
 - dichte, 26
 - kompakte, 26
 - kompakte von $H^{1,p}$ nach L^q , 116
 - von $H^{1,p}$ nach C^α , 121
 - von $H^{1,p}$ nach L^∞ , 120
 - von $H^{m,p}$ nach L^q , 109
 - von $H^{s,2}$ nach C^α , 233
- Elastische Gleichungen, 170
- elliptisch, 160
 - gleichmäßig, 150, 239
- Energieerhaltung, 211
- Erlanger Metrik, 7

- Faltung
 - einer Distribution, 222
 - von Funktionen, 222
- fast überall, 68
- Fatous Lemma, 70
- Finite Elemente Verfahren, 165
- folgenkompakt, 12
- folgenstetig, 4
- Fortsetzung
 - \sim ssatz von Calderon, 109
 - \sim ssatz für $H^{1,p}$ -Funktionen, 131
 - \sim ssatz für $H^{s,2}$ -Funktionen, 234
 - \sim ssatz für Sobolev-Funktionen, 108, 129
 - \sim ssatz von Hahn-Banach, 47
 - \sim ssatz von Tietze, 250
 - stetiger linearer Abbildungen, 26
- Fourier
 - Abschnitt, 200
 - Koeffizient, 200
- Fourier-Plancherel-Transformation, 231
- Fourier-Transformation
 - in \mathcal{S} , 224
 - in \mathcal{S}' , 229
- Fredholm-Operator, 192
- Fredholmsche Alternative, 192
- Fubini
 - Satz von, 70
- Fundamentallema der Variationsrechnung, 87

- Funktion
 gleichmäßig stetige, 42
 hölderstetige, 38
 harmonische, 241
 integrierbare, 69
 konkave, 247
 konvexe, 247
 lipschitzstetige, 38
 meßbare, 68
 mit beschränkter totaler Variation,
 99
 nirgends differenzierbare, 62
 schnell fallende, 224
- Funktional, 24
 antilineares, 32
 stetiges lineares, 24
 sublineares, 47
 unstetiges, 25
- Gårdingsche Ungleichung, 196
 für Operatoren der Ordnung $2m$, 239
 für Operatoren zweiter Ordnung, 199
- Galerkin-Verfahren, 165
- Gebiet, 36
 kompakt enthalten, 36
 Lipschitz \sim , 101
 mit stetigem Rand, 101
 von der Klasse $C^{m,\alpha}$, 101
- Gebietsmonotonie, 206
- Gelfandscher Dreier, 185
- gleichgradig stetig, 34
- gleichmäßig konvex, 79
- gleichmäßig stetig, 42
- Gradient, 37
- Graph
 einer Abbildung, 46
- Höldersche Ungleichung, 71
- hölderstetig, 38
- Hahn-Banach-Sätze, 47
- Halbnorm, 19
 in $\mathcal{D}(\Omega)$, 253
 in \mathcal{S} , 224
 in C^∞ , 51
 in c_0 , 64
 in l , 51
- Hardysche Ungleichung, 138
- Hauptwert, 243
- Hausdorff-Raum, 1
- Heaviside-Funktion, 218
- Hellinger-Toeplitz
 Satz von, 211
- Hilbert-Adjungierte, 182
- Hilbert-Raum, 29
- Homöomorphismus, 3
- Homogenitätsargument, 248
- Index eines Fredholm-Operators, 192
- Innenkugelbedingung, 173
- innerer Punkt, 2
- Inneres einer Menge, 2
- inneres Produkt, 28
- Integral, 69
- Integralgleichung, 195
- integrierbare Funktion, 69
- Interpolierende, 167
- Inversmonotonie
 für klassische Lösungen, 161
 für Matrizen, 172
 für schwache Lösungen, 159
- Isometrie, 9
- Kategorie
 von erster, 43
 von zweiter, 43
- Kegeleigenschaft, 103
- klassische Lösung, 147
- kompakt, 12
 folgen \sim , 12
 prä \sim , 13
 relativ \sim , 12
- Kontinuierliches Spektrum, 176
- Kontraktion, 9
- Konvergenz, 2
- konvex
 σ - \sim , 40
 \sim e Funktion, 247
 \sim e Hülle, 247
 \sim e Menge, 247
- Konvexkombination, 247
- Kubaturformel, 144
- Lösung
 klassische, 147
 schwache, 148
- Laplace-Beltrami-Operator, 255
- Laplace-Operator, 147
- Lax-Milgram

- Satz von, 32
- Lebesgue
 - Integral, 67
 - Maß, 67
 - Raum, 71
 - Raum auf $\partial\Omega$, 112
 - Satz von, 70
- Lemma
 - Rieszsches, 22
 - von Bramble-Hilbert, 143
 - von Cea, 165
 - von Fatou, 70
 - von Urysohn, 249
- Liouville
 - Satz von, 254
- Lipschitzgebiet, 101
- Lipschitzkonstante, 9
- lipschitzstetig, 9, 38
- Lochfülltechnik, 254
- lokale Basis, 5
- Lokalisierung, 102
- lokalkonvexer Raum, 50
 - metrisierbarer, 52
- Lusin
 - Satz von, 71
- Müntz-Theorem, 252
- mager, 43
- Matrix
 - adjungierte, 183
 - inversmonotone, 172
- Maximumprinzip
 - für klassische Lösungen, 160
 - für parabolische Gleichungen, 173
 - für schwache Lösungen, 159
 - starkes, 162, 173
- Mazur
 - Satz von, 61
- Maß, 67
- maßkonvergent, 77
- Metrik, 6
- metrischer Raum, 6
- Meyers und Serrin
 - Satz von, 93
- meßbare
 - Funktion, 68
 - Menge, 68
 - Treppenfunktion, 68
- Minkowski-Ungleichung, 72
- kontinuierliche, 83
- Mollifier, 76
- Monotone Konvergenz
 - Satz von der, 69
- Morrey
 - Einbettungssatz von, 120, 121
- Multiindex, 37
- Multiplikationsoperator, 41
- negative Norm, 184
- Neumann-Problem, 171, 236
- Neumannsche Reihe, 177
- Nikolski-Raum, 141
- nirgends dicht, 43
- nirgends differenzierbare Funktion, 62
- Norm, 19
 - äquivalente, 21
 - euklidische, 37
 - in $H^{m,p}$, 91
 - in $H^{s,2}$, 231
 - in $H^{s,2}(\partial\Omega)$, 234
 - in $H^{s,p}$, 124
 - in $H^{s,p}(\partial\Omega)$, 130
 - in L^p , 71
 - in $L^p(\partial\Omega)$, 112
 - in l_p , 20
 - in $N^{s,p}$, 141
 - negative, 184
- normierter Raum, 19
- Nullmenge, 68
- Nullumgebungsbasis, 51
- offene Abbildung, 3
- offene Menge, 1
- Operator
 - adjungierter, 180
 - analytisch abhängender, 178
 - biharmonischer, 241
 - formal adjungierter, 187
 - Fredholm-, 192
 - Hilbert-Adjungierte eines \sim s, 182
 - in Divergenzform, 160
 - in expliziter Form, 160
 - mit abgeschlossenem Bild, 188
 - nuklearer, 212
 - parabolischer, 173
 - polyharmonischer, 171
 - regulärer, 176
 - selbstadjungierter, 182

- Operatornorm, 24
- Ordnung einer Distribution, 216
- orthogonal, 31
 - \sim e Projektion, 31
 - \sim es Komplement, 31
- Orthogonalitätsrelation, 164
- Parallelogrammgleichung, 29
- Parsevalsche Gleichung, 230
- partielle
 - Integration, 88
 - Summation, 97
- Poincaré-Ungleichung, 111, 119
- Poisson-Gleichung, 147
- polyharmonischer Operator, 171
- präkompakt, 13
- Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, 45
- Prinzip der offenen Abbildung, 45
- Produktregel, 93, 95
- Produkttopologie, 6
- Projektion
 - im Banach-Raum, 189
 - orthogonale, 31
- Projektionssatz, 31
- Punktspektrum, 176
- Quotientennorm, 187
- Quotientenraum, 187
- Randbedingung
 - der dritten Art, 237
 - Dirichlet-, 149
 - erzwungene, 149
 - mit schiefer Ableitung, 237
 - natürliche, 149
 - Neumann-, 149
- Randintegral, 112
- Randwertproblem
 - adjungiertes, 187
 - erstes, 147
 - gemischtes, 149
 - zweites, 149
- Raum
 - Banach-, 20
 - Hausdorff-, 1
 - Hilbert-, 29
 - homöomorpher, 3
 - isometrischer, 9
 - kompakter, 12
 - lokalkonvexer, 50
 - metrischer, 6
 - normierter, 19
 - topologischer, 1
 - vollständiger metrischer, 8
- Rayleighquotient, 200
- Rayleighsches Minimumprinzip, 200
- reflexiver Banach-Raum, 59
- regulär
 - \sim er Operator, 176
- Reihe
 - absolut summierbar, 39
 - konvergent, 39
- relativ kompakt, 12
- Relativtopologie, 1
- Residuenspektrum, 176
- Resolventenmenge, 176
- Resolventenoperator, 175
- Riesz-Schauder
 - Satz von, 193
- Rieszscher Darstellungssatz, 30
- Rieszssches Lemma, 22
- Ritz-Approximation, 164
- Satz
 - Darstellungs \sim von Riesz, 30
 - Fixpunkt \sim von Banach, 10
 - Fortsetzungs \sim von Hahn-Banach, 47
 - Fortsetzungs \sim von Tietze, 250
 - Projektions \sim , 31
 - Trennungs \sim von Hahn-Banach, 49
 - vom abgeschlossenen Bild, 190
 - vom abgeschlossenen Graphen, 47
 - vom inversen Operator, 45
 - von Alaoglu-Bourbaki, 59
 - von Arzela-Ascoli, 34
 - von Baire, 43
 - von Banach-Saks, 66
 - von Banach-Steinhaus, 45
 - von Beppo-Levi, 69
 - von Courant-Hilbert, 200
 - von der monotonen Konvergenz, 69
 - von Dini, 42
 - von Fubini, 70
 - von Hellinger-Toeplitz, 211
 - von Lax-Milgram, 32
 - von Lebesgue, 70
 - von Liouville, 254

- von Lusin, 71
- von Müntz, 252
- von Mazur, 61
- von Meyers und Serrin, 93
- von Rellich-Kondrachov, 116
- von Riesz-Schauder, 193
- Schrödinger-Gleichung, 214
- schwach konvergent, 55
- schwach*
 - folgenkompakt, 58
 - kompakt, 59
 - konvergent, 57
- schwache Ableitung, 88
- schwache Konvergenz, 55
 - in L^p , 82
 - in l_1 , 65
- schwache Lösung, 148
- schwache Topologie, 55
- schwache* Konvergenz, 57
 - in L^∞ , 82
 - in l_1 , 57
- schwache* Topologie, 56
- Segmenteigenschaft, 101
- separabel, 5
- Sesquilinearform, 28
 - adjungierte, 33, 186
 - beschränkte, 32
 - koerzive, 32
- Shiftoperator, 41
- Singulärfunktion, 174
- Skalarprodukt, 28
- Sobolev-Norm, 91
- Sobolev-Raum, 91
 - auf $\partial\Omega$, 130, 234
 - gebrochener Ordnung, 124
 - mit Gewicht, 142
- Sobolev-Ungleichung, 109
- Spannungskonzentrationsfaktor, 174
- Spektralwerte, 176
- Spektrum, 176
- Spursatz, 112, 131, 234
- stetig, 3
 - folgen \sim , 4
 - gleichgradig, 34
 - gleichmäßig \sim , 42
 - holder \sim , 38
 - lipschitz \sim , 38
- sublineares Funktional, 47
- Summenkonvention, 150
- Tietze
 - Fortsetzungssatz von, 250
- Topologie, 1
 - Basis einer \sim , 5
 - feinere, 1
 - gröbere, 1
 - schwache, 55
 - schwache*, 56
 - Subbasis einer \sim , 5
- topologischer Raum, 1
- totale Variation, 99
- Träger
 - einer Distribution, 219
 - einer Funktion, 36
- Transformationsatz
 - für stetig differenzierbare Transformationen, 106
- Trennungsaxiom, 1
- Trennungssatz, 49, 50
- Treppenfunktion, 68
- Umgebung, 2
- Umgebungsbasis, 4
- Ungleichung
 - des geometrischen und arithmetischen Mittels, 249
 - von Hardy, 138
- Urysohn
 - Lemma von, 249
- Variationsprinzip, 148
- Verfahren
 - von Galerkin, 165
 - von Ritz, 164
- Vergleichsprinzip, 162
- Vervollständigung, 9
- Vierecksungleichung, 6
- Wärmeleitungsgleichung, 208
- Weierstraßscher Approximationssatz, 252
- Wellengleichung, 208
- wesentlich beschränkt, 71
- Youngsche Ungleichung, 248
 - verallgemeinerte, 248
- zentriertes System, 17
- Zerlegung der Eins, 92