Lösungen der Übungsaufgaben

Abschnitt 1.2.7

Lösung zu Aufgabe 1.2.1 1.2.1

Wir schließen an Beispiel 2) in Abschn. 1.2.2 an. Wir hatten dort als allgemeine Lösung

$$r(t) = A\,\mathrm{e}^{\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

abgeleitet. Die Anfangsbedingungen liefern für A und B die Bestimmungsgleichungen:

$$r_0 = A + B\,; \quad -r_0\omega = (A - B)\omega\ .$$

Dies bedeutet $A = 0$ und $B = r_0$. Die Lösung lautet dann:

$$r(t) = r_0\,\mathrm{e}^{-\omega t}\ .$$

In diesem Spezialfall bewegt sich die Perle mit abnehmender Geschwindigkeit auf den Drehpunkt zu, um dort dann zur Ruhe zu kommen.

Lösung zu Aufgabe 1.2.2 1.2.2

1. Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z &= 0 && \text{(skleronom)} \\ y - x\tan\omega t &= 0 && \text{(rheonom)}\ . \end{aligned}$$

   Beide Zwangsbedingungen sind holonom, damit die Zahl der Freiheitsgrade $S = 3 - 2 = 1$. Eine passende generalisierte Koordinate ist natürlich der Abstand $q = r$ der Perle vom Drehpunkt.

2. Transformationsformeln:

$$x = q\cos\omega t \quad ; \quad y = q\sin\omega t$$

   damit folgt

$$\dot{x} = \dot{q}\cos\omega t - q\omega\sin\omega t$$

$$\dot{y} = \dot{q}\sin\omega t + q\omega\cos\omega t$$

   kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + q^2\omega^2\right) = T(q, \dot{q})$$

potentielle Energie:

$$V = m\,g\,y = mgq\sin\omega t = V(q,t)$$

Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + q^2\omega^2\right) - mgq\sin\omega t$$

3. Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q} \;\; ; \quad \frac{\partial L}{\partial q} = mq\omega^2 - mg\sin\omega t$$

zu lösen:

$$\ddot{q} - q\omega^2 + g\sin\omega t = 0$$

wir starten mit der zugehörigen homogenen Gleichung:

$$\ddot{q} - q\omega^2 = 0$$

allgemeine Lösung

$$q_0(t) = \alpha \mathrm{e}^{\omega t} + \beta \mathrm{e}^{-\omega t}\ .$$

Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$q_s(t) = \gamma\sin\omega t \qquad\qquad (\omega \neq 0)\ .$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung:

$$-\gamma\omega^2\sin\omega t - \omega^2\gamma\sin\omega t + g\sin\omega t = 0$$

$$-2\gamma\omega^2 + g = 0 \quad \curvearrowright \quad \gamma = \frac{g}{2\omega^2}\ .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$q(t) = \alpha\mathrm{e}^{\omega t} + \beta\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\ .$$

4. Wir benutzen die gegebenen Anfangsbedingungen:

$$q(t=0) = r_0 \quad \curvearrowright \quad r_0 = \alpha + \beta$$

$$\dot{q}(t=0) = 0 \quad \curvearrowright \quad \omega(\alpha - \beta) + \frac{g}{2\omega} = 0$$

$$\curvearrowright \quad 2\alpha = r_0 - \frac{g}{2\omega^2}$$

$$\curvearrowright \quad \alpha = \frac{r_0}{2} - \frac{g}{4\omega^2} \;\; ; \;\; \beta = \frac{r_0}{2} + \frac{g}{4\omega^2}$$

Das ergibt die vollständige Lösung:

$$q(t) = \frac{r_0}{2}\left(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}\right) - \frac{g}{4\omega^2}\left(\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}\right) + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\ .$$

Wir bilden die erste zeitliche Ableitung

$$\dot{q}(t) = \frac{r_0\omega}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) - \frac{g}{4\omega}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) + \frac{g}{2\omega}\cos\omega t\ .$$

Für große Zeiten gilt:

$$\dot{q}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}r_0\omega - \frac{g}{4\omega}\right) e^{\omega t}\ .$$

Die Perle bewegt sich nach außen, falls $\dot{q}(t \to \infty) > 0$ ist, d. h.

$$\omega^2 > \frac{g}{2r_0}\ .$$

5. Die Zwangskraft ist an sich schwer formulierbar. Es handelt sich aber im mitrotierenden Koordinatensystem um ein effektiv eindimensionales Problem:

$$m\ddot{r} = -F_g + F_z\ .$$

F_g ist die in Drahtrichtung wirkende Komponente der Schwerkraft:

$$F_g = mg\sin\omega t\ .$$

F_z ist die Zentrifugalkraft, für die allgemein gilt:

$$\boldsymbol{F}_z = -m\left(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\right) = -m\left(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}\omega^2\right) = m\boldsymbol{r}\omega^2\ .$$

Der letzte Schritt gilt, da $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{r}$ orthogonal zueinander sind. Setzen wir $F_z = m\omega^2 r$ in die obige Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich nach Herauskürzen der Masse m:

$$\ddot{r} - \omega^2 r + g\sin\omega t = 0\ .$$

Das ist identisch mit der Lagrange-Gleichung aus Teil 3.

Lösung zu Aufgabe 1.2.3 1.2.3

1. Zwangsbedingungen:

$$\varphi - \omega t = 0\ ;\quad z - \alpha\varrho^2 = 0 \quad\curvearrowright\quad S = 3 - 2 = 1 \quad \text{Freiheitsgrade}\ .$$

2. Transformationsformeln:

$$x = \varrho\cos\varphi \quad\curvearrowright\quad \dot{x} = \dot{\varrho}\cos\varphi - \varrho\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$y = \varrho\sin\varphi \quad\curvearrowright\quad \dot{y} = \dot{\varrho}\sin\varphi + \varrho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$z = \alpha\varrho^2 \quad\curvearrowright\quad \dot{z} = 2\alpha\varrho\dot{\varrho}\ .$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} m \left(\dot{\varrho}^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) + 4\alpha^2 \varrho^2 \dot{\varrho}^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} m \left(1 + 4\alpha^2 \varrho^2 \right) \dot{\varrho}^2 + \frac{1}{2} m \varrho^2 \omega^2 \\
V &= mgz = mg\alpha\varrho^2 \;.
\end{aligned}
$$

Lagrange-Funktion:

$$
L = T - V = \frac{1}{2} m \left(1 + 4\alpha^2 \varrho^2 \right) \dot{\varrho}^2 + \frac{1}{2} m \left(\omega^2 - 2\alpha g \right) \varrho^2 \;.
$$

3. Spezialfall:

$$
\omega = \sqrt{2\alpha g} \,.
$$

Die Lagrange-Funktion vereinfacht sich zu:

$$
L = \frac{1}{2} m \left(1 + 4\alpha^2 \varrho^2 \right) \dot{\varrho}^2 \,.
$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} &= m \left(1 + 4\alpha^2 \varrho^2 \right) \dot{\varrho} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} &= m \left(\left(1 + 4\alpha^2 \varrho^2 \right) \ddot{\varrho} + 8\alpha^2 \varrho \dot{\varrho}^2 \right) \\
\frac{\partial L}{\partial \varrho} &= 4m\alpha^2 \varrho \dot{\varrho}^2 \;.
\end{aligned}
$$

Bewegungsgleichung

$$
(\left(1 + 4\alpha^2 \varrho^2 \right) \ddot{\varrho} + 4\alpha^2 \varrho \dot{\varrho}^2 = 0 \;.
$$

Multiplizieren mit $\dot{\varrho}$ ergibt:

$$
(((\left(1 + 4\alpha^2 \varrho^2 \right) \dot{\varrho} \ddot{\varrho} + 4\alpha^2 \varrho \dot{\varrho}^3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(1 + 4\alpha^2 \varrho^2 \right) \dot{\varrho}^2 \stackrel{!}{=} 0 \;.
$$

Das bedeutet, dass $(1 + 4\alpha^2 \varrho^2) \dot{\varrho}^2$ ein Integral der Bewegung darstellt.

Lösung zu Aufgabe 1.2.4 1.2.4

1.

$$x = \varrho\cos\varphi\,; \quad y = \varrho\sin\varphi\,; \quad z = z\,,$$

$$\dot{x} = \dot{\varrho}\cos\varphi - \varrho\dot{\varphi}\sin\varphi\,; \quad \dot{y} = \dot{\varrho}\sin\varphi + \varrho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2\,.$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V_0 \ln\frac{\varrho}{\varrho_0}\,.$$

2.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varrho}} - \frac{\partial L}{\partial\varrho} = 0 = m\ddot{\varrho} - m\varrho\dot{\varphi}^2 + \frac{V_0}{\varrho}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 = m\varrho^2\ddot{\varphi} + 2m\varrho\dot{\varrho}\dot{\varphi}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 = m\ddot{z}\,.$$

3. φ und z sind zyklisch $\Rightarrow$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi} = \text{const} \quad : \quad z\text{-Komponente des Drehimpulses}\,,$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial\dot{z}} = m\dot{z} = \text{const} \quad : \quad z\text{-Komponente des Impulses}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.5 1.2.5

1. Die kinetische Energie:

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}\,,$$

setzt sich zusammen aus einem Translationsanteil

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2\,,$$

und einem Rotationsanteil

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\left(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\right)^2\,,$$

wobei

$$J = \frac{1}{2} m\, r^2$$

das Trägheitsmoment des Zylinders ist. Die Abrollbedingung lautet:

$$R\,\mathrm{d}\varphi = r\,\mathrm{d}\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vartheta} = -\frac{R}{r}\dot{\varphi}\ .$$

Die potentielle Energie ist:

$$V = m\,g(R-r)\,(1-\cos\varphi)\ .$$

Daraus folgt die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \\ &= \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\left(\dot{\varphi}+\dot{\vartheta}\right)^2 - m\,g(R-r)(1-\cos\varphi) = \\ &= \frac{1}{2}m\left((R-r)^2 + \frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{R}{r}\right)^2\right)\dot{\varphi}^2 - m\,g(R-r)(1-\cos\varphi) = \\ &= \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + m\,g(R-r)\cos\varphi - m\,g(R-r)\ . \end{aligned}$$

2. Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m\,g(R-r)\sin\varphi$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m(R-R)^2\ddot{\varphi}$$

folgt die Bewegungsgleichung für φ:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin\varphi\ .$$

3. Für kleine Ausschläge $\varphi \ll 1$ kann man nähern:

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\varphi\ .$$

Mit

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}$$

ist die allgemeine Lösung dann

$$\varphi(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \,,$$

wobei a und b sind durch Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Lösung zu Aufgabe 1.2.6

1.2.6

1. Zylinderkoordinaten (r, φ, z) erscheinen zunächst günstig.

Zwangsbedingung:

$$\tan\alpha = \frac{r}{z}$$

$$\Longleftrightarrow z = r \cot\alpha$$

Freiheitsgrade:

$$S = 3 - 1 = 2$$

generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = r \,; \quad q_2 = \varphi$$

Transformationsformeln:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = r\cot\alpha$$

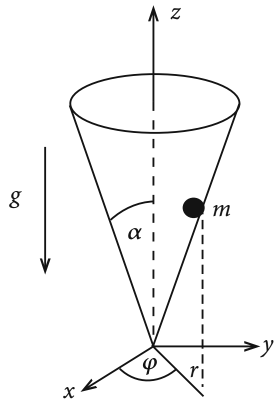

Abb. A.1.

2. Lagrange-Funktion:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cot\alpha$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{r}^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2\dot{r}r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \\ &\quad + \dot{r}^2\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \\ &\quad + \dot{r}^2\cot^2\alpha\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad T = \frac{m}{2}\left\{\left(1+\cot^2\alpha\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right\}$$

$$V = mgz = mgr\cot\alpha$$

$$\Rightarrow\quad L = T - V = \frac{m}{2}\left[\left(1+\cot^2\alpha\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\cot\alpha$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\left(1+\cot^2\alpha\right)\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\left(r\dot{\varphi}^2 - g\cot\alpha\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\left(r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{c}\left(1+\cot^2\alpha\right)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + g\cot\alpha = 0 \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0\end{array}\qquad (r \neq 0)$$

3. φ ist zyklisch

$$\Rightarrow\quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

Drehimpulserhaltung!

Lösung zu Aufgabe 1.2.7

1.2.7

1. Die Zwangsbedingungen sind:

$$z_1 = z_2 = 0$$

$$x_1 = y_2 = 0$$

$$x_2^2 + y_1^2 = l^2$$

Das System hat demnach einen Freiheitsgrad. Mit φ als generalisierter Koordinate ergeben sich die Transformationsformeln:

$$x_2 = l\cos\varphi$$

$$y_1 = l\sin\varphi$$

Damit ist die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\dot{y}_1^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

und die potentielle Energie:

$$V = mgy_1 + 0 = mgl\sin\varphi$$

Die Lagrange-Funktion ist dann:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\varphi$$

2. Die Lagrange'sche Bewegungsgleichung für φ ist:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = ml^2\ddot{\varphi} + mgl\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\cos\varphi$$

Man multipliziere mit $\dot{\varphi}$ und integriere:

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\cos\varphi\dot{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\sin\varphi = c = \mathrm{const}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\sin\varphi\right)}$$

Dies lässt sich dann mittels Variablentrennung weiter integrieren:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\sin\varphi\right)}}$$

$$\Rightarrow \quad t - t_0 = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\sin\varphi'\right)}}$$

Die Integrationskonstanten $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ und c ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.
Für „kleine Winkel“ vereinfacht sich die Lösung zu:

$$t - t_0 = -\frac{l}{g}\left(\sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\varphi\right)} - \sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\varphi_0\right)}\right) .$$

1.2.8 Lösung zu Aufgabe 1.2.8

1. Zwangsbedingungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 : \quad \text{holonom-skleronom} ,$$

$$\frac{y}{x} - \tan\omega t = 0 : \quad \text{holonom-rheonom} .$$

2. $q = \vartheta$

$$x = R\,\sin\vartheta\,\cos\omega t ,$$

$$y = R\,\sin\vartheta\,\sin\omega t ,$$

$$z = R\,\cos\vartheta .$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(R^2\sin^2\vartheta\,\omega^2 + R^2\dot{\vartheta}^2\right) .$$

Der erste Summand resultiert aus der Rotation des Ringes, der zweite aus der Bewegung auf dem Ring.

$$V = m\,g\,R(1 - \cos\vartheta) .$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2}R^2\left(\omega^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) - m\,g\,R(1 - \cos\vartheta) .$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = m\,R^2\ddot{\vartheta}\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vartheta} = m\,R^2\omega^2\sin\vartheta\,\cos\vartheta - m\,g\,R\,\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow\;\ddot{\vartheta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\cos\vartheta\right)\sin\vartheta = 0\,.$$

3. $\vartheta \ll 1:\;\; \cos\vartheta \approx 1,\;\sin\vartheta \approx \vartheta.$
Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$\ddot{\vartheta} + \overline{\omega}^2\vartheta = 0\,,$$

$$\overline{\omega}^2 = \frac{g}{R} - \omega^2$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$\vartheta(t) = A\,\cos\overline{\omega}t + B\,\sin\overline{\omega}t\,.$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.9 — 1.2.9

1. Es gibt vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$l = r + S\,, \qquad (\textit{Fadenlänge})\,,$$

$$z(m) = 0\,,$$

$$x(M) = 0\,,$$

$$y(M) = 0\,.$$

2. Bei vier Zwangsbedingungen bleiben $6-4=2$ Freiheitsgrade. Wir brauchen also zwei generalisierte Koordinaten

$$q_1 = \varphi\,;\qquad q_2 = S\,.$$

Wir lesen am Bild die Transformationsformeln ab:

$$x(m) = r\,\cos\varphi = (l-S)\cos\varphi\,,$$

$$y(m) = r\,\sin\varphi = (l-S)\sin\varphi\,,$$

$$z(M) = -S$$

$$\Rightarrow\;\dot{x}(m) = -\dot{S}\,\cos\varphi - (l-S)\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,,$$

$$\dot{y}(m) = -\dot{S}\,\sin\varphi + (l-S)\dot{\varphi}\,\cos\varphi\,,$$

$$\dot{z}(M) = -\dot{S}\,.$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2(m) + \dot{y}^2(m)\right) + \frac{1}{2} M \dot{z}^2(M) = \frac{1}{2}(m+M)\dot{S}^2 + \frac{1}{2} m(l-S)^2 \dot{\varphi}^2 \; .$$

Potentielle Energie:

$$V = M g z(M) = -M g S \; .$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m+M)\dot{S}^2 + \frac{1}{2} m(l-S)^2 \dot{\varphi}^2 + M g S \; .$$

Wir erkennen, dass die Koordinate φ zyklisch ist. Dies bedeutet:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l-S)^2 \dot{\varphi} = \text{const} = J \dot{\varphi} = L_0 \; .$$

Dies ist der Drehimpulserhaltungssatz. Es sind zwar

$$J = J(t) \qquad \text{und} \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$$

zeitlich veränderliche Größen. Das Produkt ist aber konstant.
Für die zweite Koordinate $q_2 = S$ stellen wir die Lagrange'sche Bewegungsgleichung auf:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{S}} &= (m+M)\ddot{S} \; , \\ \frac{\partial L}{\partial S} &= -\, m(l-S)\dot{\varphi}^2 + M g = -\frac{L_0^2}{m(l-S)^3} + M g \\ \Rightarrow \; (m+M)\ddot{S} &+ \frac{L_0^2}{m(l-S)^3} - M g = 0 \; . \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\dot{S}$ und integrieren:

$$\frac{1}{2}(m+M)\dot{S}^2 + \frac{L_0^2}{2m(l-S)^2} - M g S = \text{const} \; .$$

Das aber ist der Energiesatz:

$$T + V = E = \text{const} \; .$$

3. Gleichgewicht bedeutet:

$$\ddot{S} = 0 \; .$$

Dann gilt aber auch:

$$\frac{L_0^2}{m(l-S)^3} = M g \;\; \Rightarrow \;\; S = S_0 = \text{const} \; ,$$

$$\omega_0 = \dot{\varphi}_0 = \frac{L_0}{m(l-S_0)^2} = \sqrt{\frac{M g}{m(l-S_0)}} \; .$$

Wir lesen an der Bewegungsgleichung ab:

$$\dot{\varphi} > \omega_0 \iff \ddot{S} < 0 \iff \ddot{z}(M) > 0 : \quad M \text{ rutscht nach oben !}$$

$$\dot{\varphi} < \omega_0 \iff \ddot{S} > 0 \iff \ddot{z}(M) < 0 : \quad M \text{ rutscht nach unten !}$$

4. Für den Spezialfall $\omega = \dot{\varphi} = 0$ folgt aus der Bewegungsgleichung:

$$\ddot{S} = \frac{M}{m+M} g \; .$$

Dies ist der verzögerte, freie Fall der Masse M.

Lösung zu Aufgabe 1.2.10

1.2.10

1. Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\, l^2 \dot{\varphi}^2 - m\, g (1 - \cos\varphi) l \; ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\, l^2 \ddot{\varphi} \; ; \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m\, g\, l \, \sin\varphi \underbrace{\approx}_{\text{kleine Ausschläge}} -m\, g\, l\, \varphi$$

$\Rightarrow$ Schwingungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \; .$$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = A \; \cos\omega_0 t + B \; \sin\omega_0 t \; ; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \; .$$

Spezielle Randbedingung $\varphi(0) = 0$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\omega_0 t \; .$$

2. Die Fadenspannung ist die Zwangskraft, die die konstante Fadenlänge l realisiert.

$$m\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \; : \quad \text{Kraft, die an der Masse } m \text{ angreift.}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = l \dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad m \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = m\, l\, \ddot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} + m\, l\, \dot{\varphi}^2(t) \begin{pmatrix} -\cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \end{pmatrix} =$$

$$= m\, g\, \boldsymbol{e}_x - Z\, \boldsymbol{e}_r \; .$$

Daraus bestimmen wir die Fadenspannung:

$$\boldsymbol{Z} = Z\,\boldsymbol{e}_r\ ,$$

$$Z = m\,g(\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_r) - m\,\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \boldsymbol{e}_r\ ,$$

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\quad \boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_r = \cos\varphi(t)$$

$$\Rightarrow\ Z = m\,g\,\cos\varphi(t) + m\,l\,\dot{\varphi}^2(t)\ .$$

Kleine Pendelausschläge $\cos\varphi(t) \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2(t)$:

$$\Rightarrow\ Z = m\,g\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 \sin^2\omega_0 t\right) + m\,l\,\omega_0^2\varphi_0^2\cos^2\omega_0 t =$$

$$= m\,g\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 + \frac{1}{2}\varphi_0^2\cos^2\omega_0 t + \varphi_0^2\cos^2\omega_0 t\right)$$

$$\Rightarrow\ Z = m\,g\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 + \frac{3}{2}\varphi_0^2\cos^2\omega_0 t\right)\ .$$

1.2.11 Lösung zu Aufgabe 1.2.11

1. Die Zwangsbedingungen sind:

$$z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

$\Rightarrow\ s = 3 - 2 = 1$ Freiheitsgrad

2. Transformationsformeln:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$\Rightarrow\ \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\varphi \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}r\cos\varphi$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

potentielle Energie:

$$V = -mgx = -mgr\cos\varphi$$

Lagrange-Funktion:

$$L\left(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}\right) = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + mgr\cos\varphi$$

3. Seien:

$$q_1 := \varphi\,, \quad q_2 := r\,.$$

Allgemein gilt für m Variable und p holonome Zwangsbedingungen:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,\mathrm{d}q_j + b_{it}\,\mathrm{d}t = 0 \qquad i = 1, \dots, p$$

hier $m = 2$ Variable ($q_1 = \varphi$, $q_2 = r$) und $p = 1$ Zwangsbedingung:

$$q_2 = r = l = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}q_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{11} = 0\,, \quad a_{12} = 1\,, \quad b_{1t} = 0$$

Allgemein gilt für die Zwangskräfte:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{ij}$$

wobei die λ_i Lagrange'sche Multiplikatoren sind. Hier:

$$Q_1 = Q_\varphi = 0\,, \quad Q_2 = Q_r = \lambda$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
0 = Q_\varphi &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot\varphi\right) + mgr\sin\varphi = \\
&= mr^2\ddot\varphi + 2mr\dot r\dot\varphi + mgr\sin\varphi \\
\lambda = Q_r &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot r\right) - mr\dot\varphi^2 - mg\cos\varphi = \\
&= m\ddot r - mr\dot\varphi^2 - mg\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \ddot\varphi + \frac{2\dot r}{r}\dot\varphi + \frac{g}{r}\sin\varphi$$

$$\frac{Q_r}{m} = \ddot r - r\dot\varphi^2 - g\cos\varphi$$

Mit $r = l$ und $\ddot r = 0$ folgt aus der Bewegungsgleichung für r für die Fadenspannung Q_r:

$$Q_r = -m\left(l\dot\varphi^2 + g\cos\varphi\right)$$

(vgl. Lösung zu Aufgabe 1.2.10, Teil 1)

4. Mit $\dot{r} = 0$, der Kleinwinkelnäherung

$$\varphi \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi \approx \varphi$$

und der Definition

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{g}{l}}$$

folgt die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$\varphi(t) = \alpha \sin\omega_0 t + \beta \cos\omega_0 t$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

$$\dot{\varphi}(0) = \alpha\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\varphi_0 \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \varphi_0$$

ist die Lösung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\omega_0 t$$

1.2.12 Lösung zu Aufgabe 1.2.12

1. Mit den kartesischen Koordinaten des Blockes der Masse M

$$X = s\cos\alpha\,, \qquad Y = s\sin\alpha$$

und den Koordinaten der Masse m

$$x = s\cos\alpha + l\sin\varphi\,, \qquad y = s\sin\alpha - l\cos\varphi$$

lässt sich die kinetische Energie in s und φ ausdrücken als:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{M}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \\
&= \frac{M}{2}\left(\dot{s}^2\cos^2\alpha + \dot{s}^2\sin^2\alpha\right) + \\
&\quad + \frac{m}{2}\Big(\dot{s}^2\cos^2\alpha + 2l\dot{s}\dot{\varphi}\cos\alpha\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \\
&\qquad + \dot{s}^2\sin^2\alpha + 2l\dot{s}\dot{\varphi}\sin\alpha\sin\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\Big)
\end{aligned}$$

Mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

vereinfacht sich dies zu:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi)\ .$$

Mit der potentiellen Energie

$$V = Mgs\sin\alpha + mg\left(s\sin\alpha - l\cos\varphi\right)\ .$$

ergibt sich dann für die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) - \\ &\quad - (M+m)gs\sin\alpha + mgl\cos\varphi \end{aligned}$$

2. Lagrange-Bewegungsgleichung bezüglich s:

$$0 = (M+m)\ddot{s} + ml\left(\ddot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi)\right) + (M+m)g\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{s} = -g\sin\alpha - \frac{ml}{M+m}\left(\ddot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi)\right)$$

Lagrange-Bewegungsgleichung bezüglich φ:

$$\begin{aligned} 0 &= ml^2\ddot{\varphi} + ml\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi) + \\ &\quad + ml\ddot{s}\cos\left(\alpha-\varphi\right) - ml\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi) + mgl\sin\varphi \\ \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{\ddot{s}}{l}\cos(\alpha-\varphi) \end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 = \text{const} \\ \Rightarrow \quad \ddot{s} &= -g\sin\alpha = -g\frac{\sin\varphi_0}{\cos(\alpha-\varphi_0)} \\ \Rightarrow \quad s(t) &= s_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2\sin\alpha \\ \varphi(t) &= \alpha \end{aligned}$$

(s_0 und v_0 aus Anfangsbedingungen)

3. Einsetzen der Dgl. für $\ddot{s}$ in Dgl. für $\ddot{\varphi}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{g}{l}\left(\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \sin\varphi\right) + \\ &\quad + \frac{m}{M+m}\left(\ddot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi)\right)\cos(\alpha-\varphi) = \\ &= \frac{g}{l}\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi) + \\ &\quad + \frac{m}{M+m}\left(\ddot{\varphi}\cos^2(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\right) \end{aligned}$$

Dabei wurde das Additionstheorem

$$\sin\left(\alpha - \varphi\right) = \sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi$$

ausgenutzt.

Für $M \gg m$ lässt sich nähern:

$$\frac{m}{M+m} \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} \approx -\frac{g}{l}\cos\alpha\sin(\varphi - \alpha)$$

Mit der Abkürzung

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\cos\alpha}$$

und der Näherung für kleine Winkelausschläge ($\varphi \approx \alpha$)

$$\sin(\varphi - \alpha) \approx \varphi - \alpha$$

ergibt sich die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2(\varphi - \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = \alpha + \hat{\varphi}\sin(\omega t + \delta)$$

($\hat{\varphi}$ und δ aus Anfangsbedingungen)

1.2.13 Lösung zu Aufgabe 1.2.13

1. Es gibt fünf holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

   1. $z_1 = 0$
   2. $z_2 = 0$
   3. $-y_1 / -x_1 = \tan\alpha$
   4. $-y_2 / x_2 = \tan\beta$
   5. $r_1 + r_2 = l$

   Damit besitzt das System $s = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ Freiheitsgrade.
2. $s = 1 \Rightarrow 1$ generalisierte Koordinate, z. B.:

   $$q = r_1$$

   Transformationsformeln:

   $$x_1 = -q\cos\alpha$$
   $$y_1 = -q\sin\alpha$$
   $$z_1 = 0$$
   $$x_2 = (l-q)\cos\beta$$
   $$y_2 = -(l-q)\sin\beta$$
   $$z_2 = 0$$

3. kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \\ &= \frac{m_1}{2}\dot{q}^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + \frac{m_2}{2}\dot{q}^2\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{q}^2 \end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = \\ &= -m_1 g q \sin\alpha - m_2 g (l - q)\sin\beta \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{q}^2 + m_1 g q \sin\alpha + m_2 g (l - q)\sin\beta \end{aligned}$$

4. Lagrange'sche Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2)\ddot{q} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta)g$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q} = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} g \qquad \text{„verzögerter" freier Fall}$$

Integration der Bewegungsgleichung unter Verwendung der Anfangsbedingungen liefert:

$$q(t) = r_1(t) = \frac{1}{2}\frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} g t^2 + r_0$$

System im Gleichgewicht heißt:

$$\begin{aligned} & q(t) = \text{const} \\ \Rightarrow \quad & 0 = m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta \\ \Rightarrow \quad & \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \end{aligned}$$

5. Jetzt wird die 5. Zwangsbedingung nicht zur Eliminierung der Variablen benutzt. Damit werden zwei generalisierte Koordinaten benötigt:

$$q_1 = r_1\,; \qquad q_2 = r_2$$

Aus $r_1 + r_2 = l = \text{const}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}q_2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad a_{11} = a_{12} &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für die generalisierten Zwangskräfte:

$$Q_1 = Q_2 = \lambda$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2\right) + m_1 g q_1 \sin\alpha + m_2 q_2 \sin\beta$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i = \lambda \quad i = 1,2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad m_1\ddot{q}_1 - m_1 g \sin\alpha &= \lambda \\ m_2\ddot{q}_2 - m_2 g \sin\beta &= \lambda \end{aligned}$$

Aus der 5. Zwangsbedingung folgt:

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \ddot{q}_1 - g\sin\alpha &= \frac{\lambda}{m_1} \\ -\ddot{q}_1 - g\sin\beta &= \frac{\lambda}{m_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -g\left(\sin\alpha + \sin\beta\right) = \lambda\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

Damit ist die Zwangskraft „Fadenspannung“:

$$Q = \lambda = -g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\sin\alpha + \sin\beta\right)$$

Im Gleichgewicht gilt (s. letzte Teilaufgabe):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sin\alpha + \sin\beta &= \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\sin\alpha \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_2}\sin\alpha \end{aligned}$$

Damit ist die Fadenspannung im Gleichgewicht:

$$Q_0 = -m_1 g \sin\alpha = -m_2 g \sin\beta$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.14

1.2.14

1. Ausgangspunkt seien zwei körperfeste kartesische Koordinatensysteme mit parallelen Achsen, wie in der Skizze angedeutet. Koordinatenursprünge auf der Mitte der jeweiligen Zylinderachse. Drehachsen:

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{e}_z \; .$$

$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ seien die Auflagepunkte des Fadens, also die Angriffspunkte der Fadenspannung:

$$\boldsymbol{r}_1 = \big(0, R_1, z_1\big) \quad ; \quad \boldsymbol{r}_2 = \big(0, -R_2, z_2\big) \; .$$

Fadenspannungen:

$$\boldsymbol{F}_1 = (F, 0, 0) = -\boldsymbol{F}_2 \; .$$

Drehmomente:

$$\boldsymbol{M}_{\text{ex}}^{(1)} = \big(0, R_1, z_1\big) \times (F, 0, 0) = \big(0, z_1 F, -R_1 F\big)$$

$$\boldsymbol{M}_{\text{ex}}^{(2)} = \big(0, -R_2, z_2\big) \times (-F, 0, 0) = \big(0, -z_2 F, -R_2 F\big) \; .$$

Achsenparallele Komponenten:

$$\boldsymbol{M}_{\text{ex}}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_1 = R_1 F \quad ; \quad \boldsymbol{M}_{\text{ex}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{n}_2 = R_2 F \; .$$

Drehimpulssatz (4.17):

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = R_1 F \quad ; \quad J_2 \ddot{\varphi}_2 = R_2 F \; .$$

Trägheitsmomente der Zylinder mit homogener Massendichte nach (4.13):

$$J_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 \quad ; \quad J_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 \, .$$

Abrollbedingung:

$$x_2 = \text{const} + R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2$$

$$\curvearrowright \quad \ddot{x}_2 = R_1 \ddot{\varphi}_1 + R_2 \ddot{\varphi}_2 \, .$$

Translation von Zylinder 2 nach Schwerpunktsatz:

$$M_2 \ddot{x}_2 = M_2 g - F \; .$$

Damit folgt durch Einsetzen:

$$
\begin{aligned}
& M_2R_1\ddot{\varphi}_1 + M_2R_2\ddot{\varphi}_2 = M_2g - F \\
\curvearrowright\ & M_2R_1\frac{R_1F}{J_1} + M_2R_2\frac{R_2F}{J_2} = M_2g - F \\
\curvearrowright\ & F\left(1 + \frac{R_1^2M_2}{J_1} + \frac{R_2^2M_2}{J_2}\right) = M_2g \\
\curvearrowright\ & F\left(1 + 2\frac{M_2}{M_1} + 2\right) = M_2g\ .
\end{aligned}
$$

Damit gilt für die Fadenspannung:

$$
F = \frac{M_1M_2}{3M_1 + 2M_2}\,g\ .
$$

2. Generalisierte Koordinaten: φ_1, φ_2
Zwangsbedingung: Abwickeln des Fadens:

$$
\begin{aligned}
& x_2 = \text{const} + R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2 \\
\curvearrowright\ & \dot{x}_2 = R_1\dot{\varphi}_1 + R_2\dot{\varphi}_2 \\
& \ddot{x}_2 = R_1\ddot{\varphi}_1 + R_2\ddot{\varphi}_2\ .
\end{aligned}
$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 \\
V &= -M_2g(x_2 - \text{const})\ .
\end{aligned}
$$

Lagrange-Funktion:

$$
L = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}M_2\left(R_1\dot{\varphi}_1 + R_2\dot{\varphi}_2\right) + M_2g\left(R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2\right)\ .
$$

3. Bewegungsgleichungen:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_i} = 0 \qquad i = 1, 2\ .
$$

Wir berechnen die $i = 1$-Gleichung:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} = J_1\dot{\varphi}_1 + M_2R_1\left(R_1\dot{\varphi}_1 + R_2\dot{\varphi}_2\right) \\
\curvearrowright\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} = J_1\ddot{\varphi}_1 + M_2R_1\left(R_1\ddot{\varphi}_1 + R_2\ddot{\varphi}_2\right) \\
& \qquad = \left(\frac{1}{2}M_1 + M_2\right)R_1^2\ddot{\varphi}_1 + M_2R_1R_2\ddot{\varphi}_2 \\
& \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = M_2gR_1\ .
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich als erste Bewegungsgleichung:

$$\left(\frac{1}{2}M_1 + M_2\right) R_1\ddot{\varphi}_1 + M_2R_2\ddot{\varphi}_2 = M_2 g \; . \tag{A.1}$$

Wir berechnen die $i = 2$-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= J_2\dot{\varphi}_2 + M_2R_2\left(R_1\dot{\varphi}_1 + R_2\dot{\varphi}_2\right) \\
\curvearrowright \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= J_2\ddot{\varphi}_2 + M_2R_2\left(R_1\ddot{\varphi}_1 + R_2\ddot{\varphi}_2\right) \\
&= \frac{3}{2}M_2R_2^2\ddot{\varphi}_2 + M_2R_2R_1\ddot{\varphi}_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= M_2 g R_2 \; .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als zweite Bewegungsgleichung:

$$\frac{3}{2}R_2\ddot{\varphi}_2 + R_1\ddot{\varphi}_1 = g \; . \tag{A.2}$$

Wir setzen $R_2^2\ddot{\varphi}_2$ aus (A.2) in (A.1) ein:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{2}M_1 + M_2\right) R_1\ddot{\varphi}_1 + \tfrac{2}{3}M_2 g - \tfrac{2}{3}M_2R_1\ddot{\varphi}_1 &= M_2 g \\
\curvearrowright \quad \left(\tfrac{1}{2}M_1 + \tfrac{1}{3}M_2\right) R_1\ddot{\varphi}_1 &= \tfrac{1}{3}M_2 g \; .
\end{aligned}$$

Das ist die Bewegungsgleichung für φ_1:

$$R_1\ddot{\varphi}_1 = \frac{2M_2}{3M_1 + 2M_2}\, g \; . \tag{A.3}$$

Die für φ_2 folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
R_2\ddot{\varphi}_2 &= \frac{2}{3}g - \frac{2}{3}\frac{2M_2}{3M_1 + 2M_2}\, g = \frac{2}{3}g\,\frac{3M_1 + 2M_2 - 2M_2}{3M_1 + 2M_2} \\
\curvearrowright \quad R_2\ddot{\varphi}_2 &= \frac{2M_1}{3M_1 + 2M_2}\, g \; .
\end{aligned}$$

Bei gegebenen Anfangsbedingungen trivial integrierbar:

$$\ddot{x}_2 = R_1\ddot{\varphi}_1 + R_2\ddot{\varphi}_2 = 2g\,\frac{M_1 + M_2}{3M_1 + 2M_2} \; .$$

Das entspricht dem „verzögerten“ freien Fall. Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich leicht:

$$x_2(t) = \frac{M_1 + M_2}{3M_1 + 2M_2}\, g t^2 \; .$$

4. Die Newton-Mechanik liefert nach Teil 1. für die Fadenspannung:

$$M_2\ddot{x}_2 = M_2 g - F \qquad \curvearrowright \quad F = M_2 g\left(1 - \frac{2M_1 + 2M_2}{3M_1 + 2M_2}\right) .$$

Das ist das „alte" Ergebnis der Newton-Mechanik aus Teil 1.

$$F = \frac{M_1 M_2}{3M_1 + 2M_1}\, g .$$

1.2.15 Lösung zu Aufgabe 1.2.15

1. Die Zwangsbedingung ist das Abrollen des Vollzylinders im Hohlzylinder, d. h.:

$$\text{Kreisbogen } \widehat{AB} = \text{Kreisbogen } \widehat{AC}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad R(\psi + \varphi) = r\chi$$

Als generalisierte Koordinaten eignen sich:

$$q_1 := \varphi \quad q_2 := \psi$$

2. Der Hohlzylinder pendelt auf fester Achse um seinen Schwerpunkt. Damit ist dessen potentielle Energie konstant ($= 0$). Die potentielle Energie des Vollzylinders ist:

$$V_V = -mg(R - r)\cos\varphi$$

Die kinetische Energie der Zylinder setzt sich zusammen aus der Translation des Schwerpunkts S des Vollzylinders

$$T_t = \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\varphi}^2$$

und der Rotation der beiden Zylinder

$$T_r = \frac{1}{2}J_H\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_V\left(\dot{\chi} - \dot{\varphi}\right)^2 .$$

Dabei sind

$$J_H = MR^2 \qquad \text{und} \qquad J_V = \frac{1}{2}mr^2$$

das Trägheitsmoment des Hohl- bzw. Vollzylinders (Nachrechnen!). Mit der Abrollbedingung

$$\chi = \frac{R}{r}(\psi + \varphi)$$

ergibt sich:

$$T_r = \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\left(\frac{R}{r}\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\right)-\dot{\varphi}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\left(\frac{R^2}{r^2}\left(\dot{\psi}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}+\dot{\varphi}^2\right)-2\frac{R}{r}\left(\dot{\psi}\dot{\varphi}+\dot{\varphi}^2\right)+\dot{\varphi}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}R^2\left(M+\frac{1}{2}m\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{1}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

Damit ist die Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = T_r + T_t - V_V =$$
$$= \frac{1}{2}R^2\left(M+\frac{1}{2}m\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\varphi}\dot{\psi} +$$
$$+ \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos\varphi$$

3. ψ ist zyklisch:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$
$$\Rightarrow \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = R^2\left(M+\frac{1}{2}m\right)\dot{\psi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\varphi} = \text{const}$$
$$\Rightarrow \quad 0 = R^2\left(M+\frac{1}{2}m\right)\ddot{\psi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\varphi}$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{\psi} = -\frac{m(R-r)}{2R\left(M+\frac{1}{2}m\right)}\ddot{\varphi}$$

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(R-r)\sin\varphi$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\psi}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\psi}$$

folgt:

$$0 = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\psi} + mg(R-r)\sin\varphi$$
$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}R\ddot{\psi} + g\sin\varphi$$

Nach Ersetzen von $\ddot{\psi}$ ergibt sich:

$$0 = \frac{1}{2}(R-r)\left[3 - \frac{mR}{2R\left(M+\frac{1}{2}m\right)}\right]\ddot{\varphi} + g\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(R-r)\frac{3M+m}{M+\frac{1}{2}m}\ddot{\varphi} + g\sin\varphi$$

Damit ist die Bewegungsgleichung für φ:

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{2M+m}{3M+m}\frac{g}{R-r}\sin\varphi$$

4. Die übliche Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ für kleine Auslenkungen führt auf die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2\varphi = 0$$

mit der Eigenfrequenz

$$\omega_\varphi = \sqrt{\frac{2M+m}{3M+m}\frac{g}{R-r}}$$

und bekannter Lösung $\varphi(t)$. Weiterhin ergibt sich $\psi(t)$ aus

$$\ddot{\psi} = \frac{m(R-r)}{2R\left(M+\frac{1}{2}m\right)}\frac{2M+m}{3M+m}\frac{g}{R-r}\varphi(t) =$$

$$= \frac{mg}{R(3M+m)}\varphi(t)$$

durch Integration mit entsprechenden Anfangsbedingungen.

1.2.16 Lösung zu Aufgabe 1.2.16

1. Zwangsbedingungen:

$$z_1 = z_2 = 0$$
$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = l^2$$

$$\Rightarrow \quad S = 6 - 3 = 3 \text{ Freiheitsgrade}$$

generalisierte Koordinaten:

x, y: Schwerpunktkoordinaten

φ: Winkel der Hantel gegen x-Achse

Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{l}{2}\cos\varphi\,; \quad & y_1 &= y - \frac{l}{2}\sin\varphi \\ x_2 &= x + \frac{l}{2}\cos\varphi\,; \quad & y_2 &= y + \frac{l}{2}\sin\varphi \end{aligned}$$

2. Reibungskräfte:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= -\alpha\dot{x}_1 = -\alpha\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\ F_{y_1} &= -\alpha\dot{y}_1 = -\alpha\left(\dot{y} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) \\ F_{x_2} &= -\alpha\dot{x}_2 = -\alpha\left(\dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\ F_{y_2} &= -\alpha\dot{y}_2 = -\alpha\left(\dot{y} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) \end{aligned}$$

generalisierte Kräfte:

$$Q_j = F_{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_j} + F_{x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_j} + F_{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial q_j} + F_{y_2}\frac{\partial y_2}{\partial q_j}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_1}{\partial x} = 1\,; \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = \frac{l}{2}\sin\varphi \\ &\frac{\partial x_2}{\partial x} = 1\,; \quad \frac{\partial x_2}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = -\frac{l}{2}\sin\varphi \\ &\frac{\partial y_1}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = 1\,; \quad \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = -\frac{l}{2}\cos\varphi \\ &\frac{\partial y_2}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial y_2}{\partial y} = 1\,; \quad \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = \frac{l}{2}\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= F_{x_1} + F_{x_2} = -2\alpha\dot{x} \\ Q_y &= F_{y_1} + F_{y_2} = -2\alpha\dot{y} \\ Q_\varphi &= \frac{l}{2}\left(F_{x_1}\sin\varphi - F_{x_2}\sin\varphi - F_{y_1}\cos\varphi + F_{y_2}\cos\varphi\right) = \\ &= \frac{l}{2}\sin\varphi\,\underbrace{\left(F_{x_1} - F_{x_2}\right)}_{-\alpha l\dot{\varphi}\sin\varphi} - \frac{l}{2}\cos\varphi\,\underbrace{\left(F_{y_1} - F_{y_2}\right)}_{+\alpha l\dot{\varphi}\cos\varphi} = \\ &= -\frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

3. Bewegungsgleichungen:

holonome Zwangsbedingungen; nicht-konservative Kräfte

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = x, y, \varphi$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\,; & \dot{y}_1 &= \dot{y} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{x}_2 &= \dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\,; & \dot{y}_2 &= \dot{y} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\right) = \\ &= m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad m\ddot{x} &= -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -\alpha\dot{y} \\ m\ddot{\varphi} &= -\alpha\dot{\varphi} \end{aligned}$$

4. allgemeine Lösungen:

$$q_i(t) = \alpha_i + \beta_i \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right)$$

α_i, β_i aus Anfangsbedingungen:

$$x(0) = y(0) = 0\,; \qquad \varphi(0) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_i = -\beta_i$$

$$\Rightarrow \qquad q_i(t) = \alpha_i\left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right)\right)$$

$$\dot{q}_i(0) = \frac{\alpha_i \alpha}{m}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \alpha_x &= v_x\frac{m}{\alpha} \\ \alpha_y &= v_y\frac{m}{\alpha} \\ \alpha_\varphi &= \omega\,\frac{m}{\alpha} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.17

1.2.17

1. Zwangsbedingungen:

$$z = \text{const} = 0$$

$$y = (a(t) - x)\tan\alpha$$

Zwangsbedingung für y soll **nicht** zur Verringerung der Koordinatenzahl benutzt werden!

$$q_1 = x\,; \quad q_2 = y$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy$$

2. Zwangsbedingung in differentieller Form:

$$0 = \left(\dot{a}(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x\right)\sin\alpha - \mathrm{d}y\cos\alpha$$

Mit der Notation nach (1.95):

$$a_{11} = -\sin\alpha\,; \quad a_{12} = -\cos\alpha$$

verallgemeinerte Zwangskräfte:

$$Q_x = -\lambda\sin\alpha\,; \quad Q_y = -\lambda\cos\alpha$$

λ: Langrange'scher Multiplikator
Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = Q_\alpha\,; \quad \alpha = x, y$$

$$m\ddot{x} = -\lambda\sin\alpha$$

$$m\ddot{y} + mg = -\lambda\cos\alpha$$

Zusätzliche Bestimmungsgleichung aus Zwangsbedingung 1. durch zweimalige Zeitdifferentiation:

$$\ddot{y} = (c - \ddot{x})\tan\alpha$$

$\ddot{x}\,,\ddot{y}$ einsetzen:

$$-g - \frac{\lambda}{m}\cos\alpha = \left(c + \frac{\lambda}{m}\sin\alpha\right)\tan\alpha$$

$$-g\cos\alpha - \frac{\lambda}{m}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = c\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -mg\cos\alpha - cm\sin\alpha$$

$$Q_x = m\sin\alpha\left(g\cos\alpha + c\sin\alpha\right)$$

$$Q_y = m\cos\alpha\left(g\cos\alpha + c\sin\alpha\right)$$

3. Bewegungsgleichung für $x(t)$:

$$m\ddot{x} = Q_x$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = \sin\alpha\left(g\cos\alpha + c\cos\alpha\right) = \text{const}$$

mit Anfangsbedingungen:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin\alpha\left(g\cos\alpha + c\sin\alpha\right)t^2 + x_0$$

$y(t)$ durch Integration der Bewegungsgleichung oder direkt aus der Zwangsbedingung:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}ct^2 - x(t)\right)\tan\alpha$$

1.2.18 Lösung zu Aufgabe 1.2.18

1. Solange sich der Massenpunkt auf der Kugeloberfläche befindet, lautet die Zwangsbedingung:

$$R \geq z \geq z_0 \;:\quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0\,.$$

Unterhalb der „Absprunghöhe“ z_0 ist die Zwangsbedingung aber:

$$z_0 \geq z \;:\quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 > 0\,.$$

Im allgemeinen Fall sind die Zwangsbedingungen also nicht geeignet, um die Zahl der Variablen zu verringern.

Mit Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) als verallgemeinerte Koordinaten und den Transformationsformeln

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

ist die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) \end{aligned}$$

und die potentielle Energie:

$$V = mgz = mgr\cos\vartheta\ .$$

Damit ist die Lagrange-Funktion allgemein:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\vartheta\ .$$

2. Auf der Kugeloberfläche, d. h. im Bereich $R \geq z \geq z_0$, sind die Zwangsbedingungen holonom:

$$r = R = \text{const}$$

Es bleibt:

$$L = L(\vartheta, \varphi) = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) - mgR\cos\vartheta\ .$$

Die Bewegungsgleichungen für ϑ und φ lauten dann:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} &= mR^2\ddot{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = mR^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 + mgR\sin\vartheta \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mR^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}\right) = \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0\ . \end{aligned}$$

Die Koordinate φ ist zyklisch. Damit ist:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi} = \text{const}\ .$$

Die z-Komponente des Drehimpulses bzgl. des Ursprungs ist Integral der Bewegung, denn die Schwerkraft wirkt in z-Richtung und damit wirkt kein Drehmoment in z-Richtung.

3. Zwangsbedingung für $R \geq z \geq z_0$:

$$r - R = 0$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}r = 0\ , \quad \dot{r} = 0\ .$$

Lagrange-Gleichung 1. Art für r mit der Zwangskraft Q_r:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = Q_r$$

$$m\ddot{r} - mr\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) + mg\cos\vartheta = Q_r\ .$$

Mit

$$r = R = \text{const}\ , \quad \dot{r} = 0$$

und der Geschwindigkeit

$$v^2 = R^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right)$$

bleibt:

$$Q_r = mg\cos\vartheta - \frac{mv^2}{R}$$

Der Absprungpunkt $z_0 = R\cos\vartheta_0$ ist gekennzeichnet durch:

$$Q_r(z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mgz_0}{R} = \frac{mv_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad z_0 = \frac{v_0^2}{g}$$

wobei v_0 aus dem Energieerhaltungssatz bestimmt werden kann:

$$\frac{m}{2}v_0^2 + mgz_0 = mgR$$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = 2g\left(R - z_0\right)\ .$$

Damit ist die Bestimmungsgleichung für z_0:

$$z_0 = 2\left(R - z_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad z_0 = \frac{2}{3}R\ .$$

Danach bewegt sich der Massepunkt im freien Fall mit den Anfangsbedingungen:

$$z = z_0 = \frac{2}{3}R$$

$$v = v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gR}\ .$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.19 1.2.19

$\boldsymbol{F}$ hat nur eine Radialkomponente:

$$F_r = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right)$$

Wir setzen

$$U(r, \dot{r}) = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$$

und verifizieren durch Einsetzen, dass

$$Q_r = F_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

gilt.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\right] = -\frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\right] = 2\frac{\dot{r}}{r\,c^2} ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\right] = \frac{2}{r^2c^2}(r\ddot{r} - \dot{r}^2) ,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\right] = \frac{1}{r^2}\left(\frac{2r\ddot{r}}{c^2} - \frac{2\dot{r}^2}{c^2} + 1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})\right) = F_r .$$

Das obige $U(r, \dot{r})$ ist also in der Tat das verallgemeinerte Potential der Kraft $\boldsymbol{F}$. Da die Bewegung in der Ebene erfolgen soll,

$$x = r\,\cos\varphi\,; \quad y = r\,\sin\varphi\,,$$

gilt für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) .$$

Die Lagrange-Funktion lautet demnach:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) .$$

Die Kraft lautet:

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_r \qquad \text{mit} \qquad F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right) .$$

Wir geben eine alternative Lösung an, die etwas systematischer erscheint:

Für das verallgemeinerte Potential $U(r, \dot{r})$ muss gelten:

$$F = Q_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

Die Lösung lässt sich nur erraten. Wegen der zweiten Ableitung wird folgender Ansatz gewählt:

$$U(r, \dot{r}) = f(r) + g(r)\dot{r}^2$$

Einsetzen von F und diesem Ansatz für U in obige Gleichung und Sortieren nach Zeitableitungen von r:

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2g\dot{r}\right) - \left(f' + g'\dot{r}^2\right) =$$

$$= \left(2g\ddot{r} + 2g'\dot{r}^2\right) - \left(f' + g'\dot{r}^2\right)$$

$$\frac{2}{c^2 r}\ddot{r} - \frac{1}{c^2 r^2}\dot{r}^2 + \frac{1}{r^2} = 2g\ddot{r} + g'\dot{r}^2 - f' \,.$$

Vergleich der Koeffizienten von $\ddot{r}$ liefert:

$$g(r) = \frac{1}{c^2 r} \,. \quad \Rightarrow \quad g'(r) = -\frac{1}{c^2 r^2} \,,$$

was konsistent mit dem Koeffizienten von $\dot{r}^2$ ist. Der Vergleich der restlichen Terme liefert:

$$f'(r) = -\frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad f(r) = \frac{1}{r} + \text{const} \,.$$

Die Integrationskonstante ist frei wählbar und wird der Einfachheit halber Null gesetzt. Damit ist das verallgemeinerte Potential:

$$U(r, \dot{r}) = \frac{1}{r} + \frac{1}{c^2 r}\dot{r}^2 = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \,.$$

1.2.20 Lösung zu Aufgabe 1.2.20

1. $x_M = R\,\varphi$ (Rollbedingung!) ; $\quad y_M = R$.
2. Massenpunkt:

$$x_m = x_M - R\,\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi) \,,$$

$$y_m = y_M - R\,\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi) \,.$$

Dies ist die *gewöhnliche* Zykloide (s. Beispiel 4) in Abschn. 1.2.3).

Schwerpunkt:

$$\boldsymbol{R}_S = \frac{M\,\boldsymbol{r}_M + \frac{1}{2}M\,\boldsymbol{r}_m}{M + \frac{1}{2}M} = \frac{2}{3}\boldsymbol{r}_M + \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_m$$

$$\Rightarrow\; x_S = x_M - \frac{1}{3}R\,\sin\varphi = R\left(\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\right)\;,$$

$$y_S = y_M - \frac{1}{3}R\,\cos\varphi = R\left(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi\right)\;.$$

Dies ist die so genannte *verkürzte* Zykloide.

3. T_m: kinetische Energie des Massenpunktes

$$T_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right)\;,$$

$$\dot{x}_m = R\,\dot{\varphi}(1-\cos\varphi)\;;\quad \dot{y}_m = R\dot{\varphi}\,\sin\varphi$$

$$\Rightarrow\; T_m = m\,R^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi)$$

(T_M: Kinetische Energie der Scheibe).

T_M setzt sich aus einem Rotations- und einem Translationsanteil zusammen:

$$T_M = T_M^{\mathrm{rot}} + T_M^{\mathrm{tr}}\;,$$

$$T_M^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2\right) = \frac{1}{2}M\,R^2\dot{\varphi}^2\;.$$

Für den Rotationsanteil benötigen wir das Trägheitsmoment J der Scheibe bezüglich einer Achse durch den Scheibenmittelpunkt (D = Dicke der Scheibe):

$$J = \int r^2\,\mathrm{d}m = \varrho_0\int r^2\,\mathrm{d}^3r = \frac{M}{\pi R^2 D}\iiint \mathrm{d}z\,r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 D}\,D\,2\pi\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{2}M\,R^2\;.$$

Damit gilt:

$$T_M^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}J\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}M\,R^2\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow\; T_M = \frac{3}{4}M\,R^2\,\dot{\varphi}^2\;.$$

Die gesamte kinetische Energie ist dann:

$$T(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}M\,R^2\,\dot{\varphi}^2\left[\frac{3}{2} + (1-\cos\varphi)\right]\;.$$

Die potentielle Energie V lässt sich ebenfalls in Beträge des Massenpunktes und der Scheibe zerlegen:

$$V(\varphi) = V_m + V_M = m\,g\,y_m + C_m + V_M =$$
$$= -\frac{1}{2}M\,g\,R\,\cos\varphi + \frac{1}{2}M\,g\,R + C_m + V_M\ .$$

Der Beitrag der Scheibe ist konstant. Die Wahl des Nullpunktes ist frei. Wir können die Konstante C_m dann natürlich so wählen, dass

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}M\,g\,R\,\cos\varphi$$

bleibt.

4.

$$L = T(\varphi, \dot\varphi) - U(\varphi) = \frac{1}{2}M\left[R^2\dot\varphi^2\left(\frac{5}{2} - \cos\varphi\right) + g\,R\,\cos\varphi\right]\ .$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = M\,R^2\,\dot\varphi\left(\frac{5}{2} - \cos\varphi\right)\ ,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = M\,R^2\ddot\varphi\left(\frac{5}{2} - \cos\varphi\right) + M\,R^2\dot\varphi^2\sin\varphi\ ,$$
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{1}{2}M\left[R^2\dot\varphi^2\sin\varphi - g\,R\,\sin\varphi\right]$$
$$\Rightarrow\ \ddot\varphi(5 - 2\,\cos\varphi) + \left(\dot\varphi^2 + \frac{g}{R}\right)\sin\varphi = 0\ .$$

Vereinfachung für kleine Schwingungen:

$$\varphi \ll 1\ :\quad \cos\varphi \approx 1\ ,\quad \sin\varphi \approx \varphi\ ,\quad \dot\varphi^2 \approx 0$$
$$\Longleftrightarrow\ \ddot\varphi + \frac{g}{3R}\varphi \approx 0\ \Rightarrow\ \omega^2 \approx \frac{g}{3R}\ .$$

5. Die Bewegung der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse

$$M_{\mathrm{tot}} = M + m = \frac{3}{2}M$$

wird durch die Gesamtkraft

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Z} - \frac{3}{2}M\,g\,\boldsymbol{e}_y$$

bewirkt. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten deshalb:

$$\frac{3}{2}M\left(\ddot x_S, \ddot y_S\right) = \left(z_x, z_y - \frac{3}{2}M\,g\right)\ .$$

x_S, y_S haben wir bereits in 2. berechnet.

$$\dot{x}_S = R\,\dot{\varphi}\left(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi\right) \;, \qquad \dot{y}_S = \frac{1}{3}R\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_S = \frac{1}{3}R\left(\ddot{\varphi}(3-\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) \;,$$

$$\ddot{y}_S = \frac{1}{3}R\,\left(\ddot{\varphi}\,\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) \;.$$

Die Zwangskraft hat also die Komponenten:

$$Z_x = \frac{1}{2}M\,R\left(\ddot{\varphi}(3-\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) \;,$$

$$Z_y = \frac{1}{2}M\,R\left(\ddot{\varphi}\,\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{3g}{R}\right) \;.$$

6. Bedingung für *Abheben*: $Z_y \stackrel{!}{=} 0$

Wegen $\partial L/\partial t = 0$ und skleronomer Zwangsbedingungen gilt der Energiesatz:

$$E = T + V = \frac{1}{2}M\left[R^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{5}{2} - \cos\varphi\right) - g\,R\,\cos\varphi\right] = \text{const}\;.$$

Wir drücken E durch die Anfangsgeschwindigkeit v aus:

$$E = \frac{1}{2}M\left[v^2\left(\frac{5}{2} - 1\right) - g\,R\right] \;, \qquad v = R\,\dot{\varphi}\big|_{\varphi=0} = \dot{x}_M(\varphi = 0)\;.$$

Es gilt also für beliebige φ:

$$\frac{3}{2}v^2 - g\,R = R^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{5}{2} - \cos\varphi\right) - g\,R\,\cos\varphi\;.$$

Wir bestimmen v aus der Bedingung $Z_y = 0$ bei $\varphi = 2\pi/3$, benötigen nach Teil 5. also $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2\pi/3$:

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}\;; \qquad \cos\varphi = -\frac{1}{2}\;,$$

$$\dot{\varphi}^2\left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{R^2} - \frac{g}{R}\right)\;.$$

Nach Teil 4. gilt:

$$6\ddot{\varphi}\left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}\,\frac{g}{R}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi}\left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{24}\left(\frac{v^2}{R^2} + \frac{g}{R}\right)\;.$$

Bestimmungsgleichung für v:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} Z_y\left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2} M R \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ddot{\varphi}\left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{3g}{R}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= -\frac{1}{16}\left(\frac{v^2}{R^2} + \frac{g}{R}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{v^2}{R^2} - \frac{g}{R}\right) + \frac{3g}{R} \\ \Rightarrow \quad v^2 &= \frac{51}{5} g R\,. \end{aligned}$$

7.

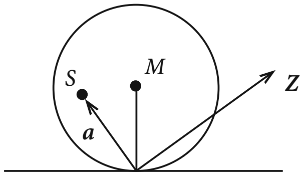

Abb. A.2.

Trägheitsmoment:

$$J_S = J_{mS} + J_{MS}\,,$$

J_S: Trägheitsmoment des gesamten Systems bezüglich Schwerpunkt S,
J_{mS}: Beitrag der Zusatzmasse,
J_{MS}: Beitrag der Scheibe.

Nach dem Steiner'schen Satz (Abschn. 4.3.4, Bd. 1) gilt:

$$J_{MS} = J + M\left[\left(x_M - x_S\right)^2 + \left(y_M - y_S\right)^2\right]\,.$$

J ist das in 3. berechnete Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich einer Achse durch den Scheibenmittelpunkt.

$$J_{MS} = \frac{1}{2} M R^2 + M\left(\frac{1}{9} R^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{9} R^2 \cos^2\varphi\right) = \frac{11}{18} M R^2\,,$$

$$\begin{aligned} J_{mS} &= \frac{1}{2} M\left[\left(x_m - x_S\right)^2 + \left(y_m - y_S\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2} M\left(\frac{4}{9} R^2 \sin^2\varphi + \frac{4}{9} R^2 \cos^2\varphi\right) = \frac{4}{18} M R^2 \\ \Rightarrow \quad J_S &= \frac{5}{6} M R^2\,. \end{aligned}$$

Die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$ greift am Auflagepunkt an. Sie bewirkt ein Drehmoment um S und damit die Rotation der Scheibe:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{Z} = \left(a_x Z_y - a_y Z_x\right) \boldsymbol{e}_z\,.$$

Da die Rotationsbewegung ausschließlich durch die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$ bewirkt wird, lautet die Bewegungsgleichung:

$$J_S \ddot{\varphi} = a_x Z_y - a_y Z_x\,.$$

Für den Vektor $\boldsymbol{a}$ gilt:

$$\boldsymbol{a} = \left(-\left(x_M - x_S\right), y_S, 0\right) = \left(-\frac{1}{3}R \sin\varphi, R\left(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi\right), 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad J_S\ddot{\varphi} = \left(-\frac{1}{3}R \sin\varphi\right)\frac{1}{2}M R\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{3g}{R}\right) -$$

$$- R\left(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi\right)\frac{1}{2}M R\left(\ddot{\varphi}(3 - \cos\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \quad 5\ddot{\varphi} = -\ddot{\varphi}\sin^2\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{3g}{R}\sin\varphi -$$

$$- \ddot{\varphi}\left(9 - 6\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) - \dot{\varphi}^2(3\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(15 - 6\cos\varphi) + 3\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \frac{3g}{R}\sin\varphi = 0\,,$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(5 - 2\cos\varphi) + \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\right)\sin\varphi = 0\,.$$

Dies stimmt mit der Bewegungsgleichung in Teil 4. überein!

Lösung zu Aufgabe 1.2.21 1.2.21

1. Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)\,.$$

Die Koordinate φ ist zyklisch:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\,r^2\dot{\varphi} = L_z = \text{const}\,.$$

Der Drehimpuls ist ein Integral der Bewegung.

2. Wegen Vernachlässigung der kinetischen Energie in radialer Richtung gilt $\dot{r}^2 \approx 0$:

$$T = \frac{1}{2}m\,r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{L_z^2}{2m\,r^2}\,.$$

Die geleistete Arbeit W entspricht der Änderung der kinetischen Energie (Energiesatz!):

$$W = T(r = R) - T(r = R_0) = \frac{L_z^2}{2m}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2}\right)\,.$$

3. Ja! Die Lagrange-Funktion ist dieselbe wie unter 1., φ nach wie vor zyklisch.
4. Aus $\dot{r}(t) = -b\,t$ folgt die Zwangsbedingung:

$$r(t) = -\frac{1}{2}b\,t^2 + R_0 \qquad \text{(holonom-rheonom)}\,.$$

Die diese Zeitabhängigkeit hervorrufende Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$ ist die einzige wirkende Kraft. Deswegen gilt:

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{Z}\ .$$

In ebenen Polarkoordinaten ist (s. (2.13), Bd. 1):

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\right)\,\boldsymbol{e}_r + \left(r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi}\right)\,\boldsymbol{e}_\varphi\ .$$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt:

$$\left(r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{r\,m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z = 0$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{Z} = m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\right)\,\boldsymbol{e}_r = -m\left(b + r\,\dot{\varphi}^2\right)\,\boldsymbol{e}_r = -\left(m\,b + \frac{L_z^2}{m\,r^3(t)}\right)\,\boldsymbol{e}_r\ .$$

5.

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}m\,b^2t^2 + \frac{L_z^2}{2m\,r^2} = -m\,b\,\left(r - R_0\right) + \frac{L_z^2}{2m\,r^2}$$

$$\Rightarrow\ W = -m\,b\left(R - R_0\right) + \frac{L_z^2}{2m}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2}\right)\ .$$

1.2.22 Lösung zu Aufgabe 1.2.22

1. Zwangsbedingung:

$$r = l - R_0\varphi \qquad \text{(holonom-skleronom)}\ .$$

Ortsvektor des Massenpunktes:

$$\boldsymbol{r}(P) = \boldsymbol{R}_0 + \bar{\boldsymbol{r}}\ ,$$

wobei
$\boldsymbol{R}_0 = R_0(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ und $\bar{\boldsymbol{r}} = r\,\boldsymbol{e}_\varphi = r(-\sin\varphi,\ \cos\varphi)$ ist.

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{r}(P) = \left(R_0\cos\varphi - \left(l - R_0\varphi\right)\sin\varphi, R_0\sin\varphi + \left(l - R_0\varphi\right)\cos\varphi\right)\ ,$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(P) = \left(-R_0\dot{\varphi}\,\sin\varphi + R_0\dot{\varphi}\,\sin\varphi - \left(l - R_0\varphi\right)\dot{\varphi}\,\cos\varphi,\right.$$
$$\left.R_0\dot{\varphi}\,\cos\varphi - R_0\dot{\varphi}\,\cos\varphi - \left(l - R_0\varphi\right)\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right) =$$
$$= -\left(l - R_0\varphi\right)\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_r\ .$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2(P) = \frac{1}{2}m\left(l - R_0\varphi\right)^2\dot{\varphi}^2\ .$$

Die Koordinate φ ist **nicht** zyklisch wie in der vorigen Aufgabe.

Wegen der holonom-skleronomen Zwangsbedingung und wegen $\partial L/\partial t = 0$ gilt jedoch der Energiesatz:

$$E = \text{const} = T \; .$$

2. Der Energiesatz erspart bereits eine Integration:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{2E}{m}}}{l - R_0\varphi} \; ; \quad t = 0 \; : \quad v_0 = \frac{l\sqrt{\frac{2E}{m}}}{l} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\Rightarrow \; \dot{\varphi} = \frac{v_0}{l - R_0\varphi} \; .$$

Dies lässt sich umschreiben:

$$v_0 = l\,\dot{\varphi} - R_0\varphi\,\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; v_0 t = l\,\varphi - \frac{1}{2}R_0\varphi^2 + C \; .$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt unmittelbar $C = 0$. Wir lösen nach φ auf:

$$\varphi = \frac{l}{R_0} \pm \sqrt{\frac{l^2}{R_0^2} - \frac{2}{R_0}v_0 t} \; .$$

Wegen $\varphi(0) = 0$ kann nur das Minuszeichen richtig sein:

$$\varphi(t) = \frac{l}{R_0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2R_0}{l^2}v_0 t}\right) \; .$$

Nach der Zeit t_0 ist der Faden voll aufgewickelt, d. h.:

$$R_0\varphi\left(t = t_0\right) = l \; .$$

Dies bedeutet:

$$t_0 = \frac{1}{2}\frac{l^2}{R_0 v_0} \; .$$

3.

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\left(l - R_0\varphi\right)^2\dot{\varphi} \; .$$

Drehimpuls bezüglich 0:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= m\,\boldsymbol{r}(P) \times \dot{\boldsymbol{r}}(P) = m\left(x(P)\dot{y}(P) - y(P)\,\dot{x}(P)\right)\,\boldsymbol{e}_z = \\
&= m\,\boldsymbol{e}_z\left\{\left[R_0\,\cos\varphi - \left(l - R_0\varphi\right)\sin\varphi\right]\left[-\left(l - R_0\varphi\right)\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right] - \right.\\
&\quad \left. - \left[R_0\sin\varphi + \left(l - R_0\varphi\right)\cos\varphi\right]\left[-\left(l - R_0\varphi\right)\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right]\right\} = \\
&= m\,\boldsymbol{e}_z\left[\left(l - R_0\varphi\right)^2\dot{\varphi}\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right] = \\
&= m\left(l - R_0\varphi\right)^2\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_z \qquad \text{q. e. d.}
\end{aligned}$$

1.2.23 Lösung zu Aufgabe 1.2.23

1. Wir berechnen zunächst das Trägheitsmoment der Walze. Dazu verwenden wir Zylinderkoordinaten r, φ, $\bar{z}$. Die $\bar{z}$-Richtung falle mit der Zylinderachse zusammen. Für die Massendichte gilt nach Voraussetzung:

$$\varrho(r, \varphi, \bar{z}) = \alpha\, r\,.$$

Wie groß ist α? Wir drücken α durch die Masse M der Walze aus:

$$M = \int\limits_{\text{Walze}} \mathrm{d}^3 r\, \varrho(\boldsymbol{r}) = 2\pi\, h\, \alpha \int\limits_0^R r^2 \mathrm{d}r = 2\pi\, h\, \alpha \frac{1}{3} R^3$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{3M}{2\pi\, h\, R^3}\,.$$

Trägheitsmoment bezüglich $\bar{z}$-Achse:

$$J = \int\limits_{\text{Walze}} r^2\, \mathrm{d}m = \int\limits_{\text{Walze}} r^2 \varrho(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^3 r = 2\pi\, h\, \alpha \int\limits_0^R r^4\, \mathrm{d}r = \frac{3M}{R^3} \frac{1}{5} R^5 = \frac{3}{5} M\, R^2\,.$$

Im Bereich $0 \leq z \leq l$ führt die Masse m eine eindimensionale Bewegung aus, d. h. ohne Seitenbewegung:

$$\text{generalisierte Koordinate:} \quad z\,,$$

$$\text{Zwangsbedingung:} \quad z = R\, \varphi\,.$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} J\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\, \dot{z}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} M + m\right) \dot{z}^2\,.$$

Potentielle Energie:

$$V = m\, g(l + R - z) \quad \text{(Minimum bei vollständig abgewickeltem Faden)}\,.$$

Lagrange-Funktion:

$$L\left(z, \dot{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} M + m\right) \dot{z}^2 - m\, g(l + R - z)\,.$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \left(\frac{3}{5} M + m\right) \ddot{z} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial z} = m\, g$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{z} = \frac{m}{m + \frac{3}{5} M} g\,.$$

Die Masse m führt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung aus (*verzögerter Fall!*).

Mit den Anfangsbedingungen

$$z(t=0)=0\,;\qquad \dot{z}(t=0)=0$$

folgt:

$$z(t)=\frac{1}{2}\frac{m}{m+\frac{3}{5}M}g\,t^2\ .$$

2. Für $z > l$ kommt die Seitenbewegung hinzu. An dem Bild liest man für den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_m$ der Masse m ab:

$$\boldsymbol{r}_m = (R\,\cos\varphi\, l + R\,\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow\quad \dot{\boldsymbol{r}}_m = R\,\dot{\varphi}(-\sin\varphi,\,\cos\varphi)\ .$$

$R\dot{\varphi}$ ist natürlich nun nicht mehr gleich $\dot{z}$!

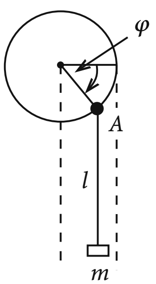

Abb. A.3.

Kinetische Energie:

$$T=\frac{1}{2}m\,R^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}J\,\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(m+\frac{3}{5}M\right)R^2\dot{\varphi}^2\ .$$

Potentielle Energie:

$$V=m\,g\,R(1-\sin\varphi)\ .$$

Lagrange-Funktion:

$$L(\varphi,\dot{\varphi})=\frac{1}{2}\left(m+\frac{3}{5}M\right)R^2\dot{\varphi}^2-m\,g\,R(1-\sin\varphi)\ .$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\left(m+\frac{3}{5}M\right)R^2\ddot{\varphi}-m\,g\,R\,\cos\varphi\overset{!}{=}0$$

$$\Rightarrow\quad \ddot{\varphi}=\frac{1}{R}\frac{m}{m+\frac{3}{5}M}g\,\cos\varphi\ .$$

Man vergleiche mit dem entsprechenden Ergebnis aus Teil 1. Von $z = l\ (\varphi = 0)$ bis $z = l + R\ \left(\varphi = \pi/2\right)$ nimmt $\ddot{\varphi}$ monoton auf Null ab. Wenn dann noch $M \gg m$ angenommen werden darf, so ist $\ddot{\varphi} \approx 0$. Dies bedeutet:

$$\dot{\varphi} \approx \dot{\varphi}_l = \text{const} \qquad (\dot{\varphi}_l \text{ aus 1. bekannt!})$$

Dies bedeutet:

$$z = l + R\ \sin\varphi \approx l + R\ \sin\left[\dot{\varphi}_l\left(t - t_l\right)\right]\ ,$$
$$\dot{z} = R\,\dot{\varphi}\ \cos\varphi \approx R\,\dot{\varphi}_l \cos\left[\dot{\varphi}_l\left(t - t_l\right)\right]\ ,$$
$$\ddot{z} = R\,\ddot{\varphi}\ \cos\varphi - R\,\dot{\varphi}^2\ \sin\varphi \approx -R\,\dot{\varphi}_l^2\ \sin\left[\dot{\varphi}_l\left(t - t_l\right)\right]\ .$$

t_l ist die Zeit, nach der der Faden auf seine volle Länge abgewickelt ist. Sie lässt sich mit dem Ergebnis aus Teil 1. berechnen:

$$l = \frac{1}{2}\frac{m}{m + \frac{3}{5}M}g\,t_l^2 \ \Rightarrow\ t_l = \sqrt{\frac{2l\left(m + \frac{3}{5}M\right)}{m\,g}}\ .$$

Im Bereich $l \le z \le l + R$ ist $0 \le \varphi \le \pi/2$ und damit $\ddot{z} < 0$. Es findet also eine Bremsung statt.

Wir müssen noch die Seitenbewegung diskutieren:

$$x = R\ \cos\varphi \approx R\ \cos\left[\dot{\varphi}_l\left(t - t_l\right)\right]\ ,$$
$$\dot{x} = -R\,\dot{\varphi}\ \sin\varphi \approx -R\,\dot{\varphi}_l \sin\left[\varphi_l\left(t - t_l\right)\right]\ ,$$
$$\ddot{x} = -R\,\ddot{\varphi}\ \sin\varphi - R\,\dot{\varphi}^2\ \cos\varphi \approx -R\,\dot{\varphi}_l^2\ \cos\left[\varphi_l\left(t - t_l\right)\right]\ .$$

3.

$$m\ddot{z} = m\,g - Z \ \Rightarrow\ Z = m\ \left(g - \ddot{z}\right)\ .$$

$0 \le z \le l:$

$$Z = m\,g\left(1 - \frac{m}{m + \frac{3}{5}M}\right) = m\frac{3M}{3M + 5m}g = \text{const} \approx m\,g\ .$$

$l \le z \le l + R:$

$$\ddot{z} \approx -R\,\dot{\varphi}_l^2\ \sin\varphi\ .$$

Nach Teil 1. gilt:

$$\dot{\varphi}_l = \frac{1}{R}\dot{z}\left(t = t_l\right) = \frac{1}{R}\frac{m}{m + \frac{3}{5}M}g\sqrt{\frac{2l\left(m + \frac{3}{5}M\right)}{m\,g}}$$

$$\Rightarrow\ R\,\dot{\varphi}_l^2 = \frac{1}{R}\,\frac{m}{m+\frac{3}{5}M}\,g\,2l$$

$$\Rightarrow\ \ddot{z} \approx -\frac{2}{R}g\,l\,\frac{5m}{3M}\sin\varphi$$

$$\Rightarrow\ Z \approx m\,g\left(1+\frac{10l\,m}{3M\,R}\sin\varphi\right) .$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.24

1.2.24

1. Zwangsbedingungen:

$$z_1 = z_2 = 0 \qquad \text{(ebene Bewegung)} ,$$

$$\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 = (2a)^2 \qquad \text{(konstanter Abstand)} .$$

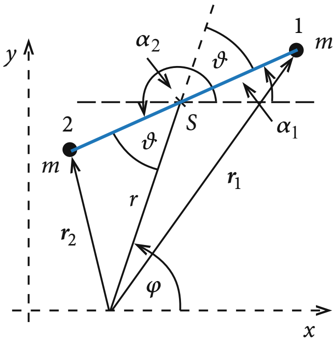

Abb. A.4.

$$p = 3:\ \text{Zahl der Zwangsbedingungen}$$

$\Rightarrow$ Zahl der Freiheitsgrade:

$$S = 3N - p = 6 - 3 = 3 .$$

Wir brauchen also drei generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = r\,; \quad q_2 = \varphi\,; \quad q_3 = \vartheta .$$

Kinetische Energie:

$$T = T_S + T_E ,$$

T_S: Schwerpunktbewegung, *Bahnbewegung*; T_E: Eigendrehung um S.

$$\text{Schwerpunkt:}\quad \boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i\boldsymbol{r}_i = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) ,$$

$$\text{Gesamtmasse:}\quad M = m_1 + m_2 = 2m ,$$

$$T_S = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{R}}^2 = m\left(\dot{R}_x^2 + \dot{R}_y^2\right) ,$$

$$R_x = r\,\cos\varphi \;\Rightarrow\; \dot{R}_x = \dot{r}\,\cos\varphi - r\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi ,$$

$$R_y = r\,\sin\varphi \;\Rightarrow\; \dot{R}_y = \dot{r}\,\sin\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi$$

$$\Rightarrow\; T_S = m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) .$$

Eigendrehung:

$$T_E = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a^2 \dot{\alpha}_2^2 ;$$

$$\alpha_1 = \varphi - \vartheta ; \quad \alpha_2 = \pi + \alpha_1 = \pi + \varphi - \vartheta$$

$$\Rightarrow\; T_E = m\,a^2\left(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}\right)^2 .$$

Potentielle Energie:

$$V = -m\,\gamma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) ,$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2r\,a\,\cos(\pi - \vartheta)} = \sqrt{r^2 + a^2 + 2r\,a\,\cos\vartheta} ,$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2r\,a\,\cos\vartheta} .$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T_S + T_E - V = m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + m\,a^2\left(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}\right)^2 +$$
$$+ m\,\gamma\left[\left(r^2 + a^2 + 2r\,a\,\cos\vartheta\right)^{-1/2} + \left(r^2 + a^2 - 2r\,a\,\cos\vartheta\right)^{-1/2}\right] .$$

Bewegungsgleichungen:

$q_1 = r$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2m\,\ddot{r} ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2m\,r\,\dot{\varphi}^2 - m\,\gamma\left[\frac{r + a\,\cos\vartheta}{\left(r^2 + a^2 + 2r\,a\,\cos\vartheta\right)^{3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{r - a\,\cos\vartheta}{\left(r^2 + a^2 - 2r\,a\,\cos\vartheta\right)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow\; \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{2}\gamma\left[\frac{r + a\,\cos\vartheta}{\left(r^2 + a^2 + 2r\,a\,\cos\vartheta\right)^{3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{r - a\,\cos\vartheta}{\left(r^2 + a^2 - 2r\,a\,\cos\vartheta\right)^{3/2}}\right] .$$

$q_2 = \varphi$: φ ist zyklisch!

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2m\, r^2 \dot{\varphi} + 2m\, a^2 \left(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}\right) = \text{const} \, .$$

$q_3 = \vartheta$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = -2m\, a^2 \left(\ddot{\varphi} - \ddot{\vartheta}\right) \, ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m\, \gamma\, r\, a \left[\frac{\sin\vartheta}{\left(r^2 + a^2 + 2r\, a\, \cos\vartheta\right)^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\vartheta}{\left(r^2 + a^2 - 2r\, a\, \cos\vartheta\right)^{3/2}} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\vartheta} - \frac{\gamma\, r}{2a} \sin\vartheta \left[\frac{1}{\left(r^2 + a^2 + 2r\, a\, \cos\vartheta\right)^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\left(r^2 + a^2 - 2r\, a\, \cos\vartheta\right)^{3/2}} \right] .$$

2. *Bahndrehimpuls* $\widehat{=}$ Drehimpuls des Schwerpunktes:

$$\boldsymbol{L}_B = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} r\, \cos\varphi \\ r\, \sin\varphi \end{pmatrix} \times M \begin{pmatrix} \dot{r}\, \cos\varphi - r\, \dot{\varphi}\, \sin\varphi \\ \dot{r}\, \sin\varphi + r\, \dot{\varphi}\, \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \left(2m\, r^2 \dot{\varphi}\right)\, \boldsymbol{e}_z \, .$$

Eigendrehimpuls $\widehat{=}$ Drehimpuls bezüglich S:

$$\boldsymbol{L}_E = \sum_{i=1}^{2} m_i a^2 \begin{pmatrix} \cos\alpha_i \\ \sin\alpha_i \end{pmatrix} \times \dot{\alpha}_i \begin{pmatrix} -\sin\alpha_i \\ \cos\alpha_i \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} m_i a^2 \dot{\alpha}_i \left(\cos^2\alpha_i + \sin^2\alpha_i\right)\, \boldsymbol{e}_z = 2m\, a^2 \left(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}\right)\, \boldsymbol{e}_z \, .$$

Gesamtdrehimpuls der Hantel:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_B + \boldsymbol{L}_E = 2m \left[r^2 \dot{\varphi} + a^2 \left(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}\right) \right] \boldsymbol{e}_z = p_\varphi \boldsymbol{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{L} = \textbf{const} \, , \qquad \text{da } \varphi \text{ zyklisch ist} \, .$$

3.

$$(1 + x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_{1,2}^3} = \frac{1}{r^3}\left[1+\left(\frac{a^2}{r^2} \pm 2\frac{a}{r}\cos\vartheta\right)\right]^{-3/2} =$$

$$= \frac{1}{r^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{r^2} \pm 2\frac{a}{r}\cos\vartheta\right) + \right.$$

$$+ \frac{15}{8}\left(\frac{a^4}{r^4} + 4\frac{a^2}{r^2}\cos^2\vartheta \pm 4\frac{a^3}{r^3}\cos\vartheta\right) -$$

$$\left. -\frac{35}{16}\left(\frac{a^6}{r^6} \pm 6\frac{a^5}{r^5}\cos\vartheta + 12\frac{a^4}{r^4}\cos^2\vartheta \pm 8\frac{a^3}{r^3}\cos^3\vartheta\right) + \ldots\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{r^3}\left[1 \mp 3\frac{a}{r}\cos\vartheta + \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}(5\cos^2\vartheta - 1) \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{5}{2}\frac{a^3}{r^3}\cos\vartheta\left(3 - 7\cos^2\vartheta\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{r + a\cos\vartheta}{r_1^3} + \frac{r - a\cos\vartheta}{r_2^3} \approx$$

$$\approx \frac{1}{r^3}\left[2r + 3\frac{a^2}{r}\left(5\cos^2\vartheta - 1\right) - \right.$$

$$\left. - 6\,\frac{a^2}{r}\cos^2\vartheta + 5\frac{a^4}{r^3}\cos^2\vartheta\left(3 - 7\cos^2\vartheta\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[2 + 3\frac{a^2}{r^2}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right) + 5\frac{a^4}{r^4}\cos^2\vartheta\left(3 - 7\cos^2\vartheta\right)\right] .$$

Damit schreiben wir die Bewegungsgleichungen aus Teil 1. um:
$q_1 = r$:

$$\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma}{r^2}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)\left(3\cos^2\vartheta - 1\right) + \ldots\right] .$$

$q_2 = \varphi$ (unverändert):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r^2\dot{\varphi} + a^2(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta})\right] = 0 .$$

$q_3 = \vartheta$:

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\vartheta} + \frac{3}{2}\frac{\gamma}{r^3}\sin 2\vartheta - \frac{5}{4}\frac{\gamma}{r^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\sin 2\vartheta(3 - 7\cos\vartheta) + \ldots$$

(unter Berücksichtigung von $\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\,\cos\vartheta$).

Für $a/r \longrightarrow 0$ vereinfachen sich diese Gleichungen weiter zu:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\gamma}{r^2} \approx 0 ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\varphi}\right) \approx 0 ,$$

$$\ddot{\varphi} - \ddot{\vartheta} - \frac{3}{2}\frac{\gamma}{r^3}\sin 2\vartheta \approx 0 .$$

Die ersten beiden Gleichungen enthalten **keine** ϑ-Anteile. Die Bahnbewegung $r = r(\varphi)$ ist damit von der Eigenbewegung, gekennzeichnet durch ϑ, entkoppelt.

4. **Fall 1:**

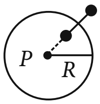

Abb. A.5.

Die Hantelstange sei stets auf P gerichtet

$$\Rightarrow \ \vartheta = 0 = \text{const} \ \Rightarrow \ \dot{\vartheta} = 0 .$$

Gleichförmige Kreisbewegung:

$$r = R = \text{const} ; \quad \dot{\varphi} = \omega_1 = \text{const} .$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
q_1 = r: &\quad -R\,\omega_1^2 = -\frac{\gamma}{R^2}\left[1 + 3\frac{a^2}{R^2} + \dots\right] , \\
q_2 = \varphi: &\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R^2\omega_1 + a^2\omega_1\right] = 0 , \\
q_3 = \vartheta: &\quad 0 = 0 .
\end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen sind identisch erfüllt, die erste liefert:

$$\omega_1^2 = \frac{\gamma}{R^3}\left[1 + 3\left(\frac{a}{R}\right)^2\right] .$$

Fall 2:

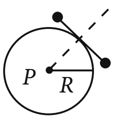

Abb. A.6.

Die Hantelstange liege stets tangential zum Kreis:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{const} \ \Rightarrow \ \dot{\vartheta} = 0 .$$

Gleichförmige Kreisbewegung:

$$r = R = \text{const}\ ; \qquad \dot{\varphi} = \omega_2 = \text{const}\ .$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
q_1 = r: &\quad -R\,\omega_2^2 = -\frac{\gamma}{R^2}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{R^2} + \dots\right] ,\\
q_2 = \varphi: &\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R^2\omega_2 + a^2\omega_2\right] = 0 ,\\
q_3 = \vartheta: &\quad 0 = 0\ .
\end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen sind wieder identisch erfüllt, die erste liefert:

$$\omega_2^2 = \frac{\gamma}{R^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{R^2}\right)\ .$$

Der zitierte Satz gilt natürlich auch für die Hantelbewegung. Nur ist wegen der Inhomogenität des Gravitationsfeldes in den beiden obigen Fällen die Gesamtkraft unterschiedlich!

1.2.25

Lösung zu Aufgabe 1.2.25

Bewegungsgleichungen zu L_1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L_1}{\partial x_i} = 0 \qquad \curvearrowright \quad m\ddot{x}_i = qE_i \qquad (i = 1, 2, 3)\ .$$

Bewegungsgleichungen zu L_2:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L_2}{\partial x_i} = 0 \qquad \curvearrowright \quad m\ddot{x}_i = qE_i \qquad (i = 1, 2, 3)\ .$$

Beide Lagrange-Funktionen führen zu denselben Bewegungsgleichungen, sind also äquivalent, beschreiben gleichermaßen die Bewegung des geladenen Teilchens im konstanten, homogenen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$. Das Ergebnis wird verständlich, wenn man bedenkt, dass gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}t) = q\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}t + q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}\ .$$

Damit hängen die beiden Funktionen durch eine mechanische Eichtransformation (1.84) miteinander zusammen:

$$L_1 = L_2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}t) \equiv L_2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\boldsymbol{r}, t)\ .$$

Das erklärt die Äquivalenz!

Abschnitt 1.3.5

Lösung zu Aufgabe 1.3.1 1.3.1

Mit der Notation aus Abschn. 1.3.2 gilt:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x\,.$$

Zu variieren ist also das Funktional

$$J = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x\,.$$

Wir setzen

$$f(x, y, y') = f(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,.$$

Für die Variation δJ hatten wir im Anschluss an (1.123) abgeleitet:

$$\delta J = \left.\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right|_A^B + \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x\,.$$

Dies bedeutet hier:

$$\delta J = \left.\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\delta y\right|_A^B - \int_A^B \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)\delta y\,\mathrm{d}x\,.$$

1. Zunächst sind A und B fest für **alle** Kurven der Konkurrenzschar. Es gilt deshalb:

   $$\delta y(A) = \delta y(B) = 0\,.$$

   Der erste Summand im obigen Ausdruck für δJ verschwindet also. Die Forderung $\delta J = 0$ führt bei sonst beliebigem δy auf

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const} \quad\Longleftrightarrow\quad y' = m = \text{const}\,.$$

   Die kürzeste Verbindung zwischen A und B ist also die Strecke $\overline{AB}$ (s. Beispiel 1) in Abschn. 1.3.2).
2. Jetzt besteht die Konkurrenzschar aus allen **Strecken** von A zu **beliebigen** Punkten B auf der Geraden g. Für jede zur Variation zugelassenen Kurve gilt also

$y' = \text{const}$, sodass nun der zweite Summand im obigen δJ-Ausdruck verschwindet. Der erste Summand ist dagegen ungleich Null, da nun nur A fest ist:

$$\delta y(A) = 0\,; \quad \delta y(B) \neq 0\,.$$

Dies bedeutet:

$$0 \overset{!}{=} \delta J = \frac{y'(B)}{\sqrt{1 + y'^2(B)}} \delta y(B)$$

$$\Rightarrow \; y'(B) = 0\,.$$

Die stationäre Bahn hat also die Steigung Null. Es handelt sich deshalb um das Lot von A auf die Gerade g.

1.3.2 Lösung zu Aufgabe 1.3.2

Linienelement in Zylinderkoordinaten:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\varrho\, \boldsymbol{e}_\varrho + \varrho\, \mathrm{d}\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{d}z\, \boldsymbol{e}_z\,.$$

Hier gilt $\mathrm{d}\varrho = 0$, da $\varrho \equiv R = \text{const}$. Bogenlänge:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \sqrt{R^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{R^2 + z'^2}\, \mathrm{d}\varphi \;\; ; \;\; z = z(\varphi)\,.$$

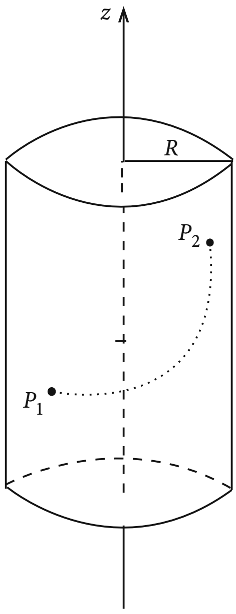

Abb. A.7.

Die Länge der Verbindungsstrecke berechnet sich aus:

$$S = \int_1^2 \mathrm{d}s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{R^2 + z'^2}\mathrm{d}\varphi \quad \curvearrowright \quad f\left(\varphi, z, z'\right) = \sqrt{R^2 + z'^2}\ .$$

Die Forderung, dass S minimal ist, führt auf die Euler-Gleichung:

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial f}{\partial z'} \stackrel{!}{=} 0\ .$$

Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ist

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \mathrm{const} = c = \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}}$$

und damit

$$z' = \frac{cR}{1 - c^2} = d = \mathrm{const}\ .$$

Die kürzeste Verbindung ist also eine Schraubenlinie:

$$z(\varphi) = d\,\varphi + \hat{d}\ .$$

Lösung zu Aufgabe 1.3.3 1.3.3

1. Unter *Massenverteilung* ist *Masse pro Länge* zu verstehen:

$$m(x) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\ .$$

Für die kinetische Energie T gilt dann

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m(x)\,\dot{y}^2\mathrm{d}x$$

mit

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}(x, t)\ .$$

2. Ansatz:

$$V = \alpha\left(\int_0^l \mathrm{d}s - l\right)\ ; \quad \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}\ .$$

Mit $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ folgt:

$$V = \alpha\left(\int\limits_0^l \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x - l\right) .$$

3. Kleine Auslenkung bedeutet auch *kleines* y',

$$\sqrt{1+y'^2} \approx 1 + \frac{1}{2}y'^2$$

$$\Rightarrow \quad V \approx \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^l y'^2\,\mathrm{d}x .$$

Wirkungsfunktional:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_0^l \left(m(x)\dot{y}^2 - \alpha\,y'^2\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t .$$

Die Konkurrenzschar besteht aus Kurven, deren Auslenkungen an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ Null sind (Zwangsbedingungen!) und zu den Zeiten t_1 und t_2 fest vorgegeben sind (Hamilton'sches Prinzip!).

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l \left(m(x)\dot{y}\,\delta\dot{y} - \alpha y'\,\delta y'\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^l m(x)\,\left[\dot{y}\,\delta y\right]\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}x - \alpha\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[y'\,\delta y\right]\Big|_0^l\,\mathrm{d}t - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l \left(m(x)\ddot{y} - \alpha y''\right)\delta y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t .$$

Da δy an den Grenzen verschwindet, bleibt:

$$0 = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l \left(m(x)\ddot{y} - \alpha y''\right)\delta y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t .$$

δy ist ansonsten frei wählbar, sodass bereits

$$m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gelten muss. Dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Für den Spezialfall einer *homogenen* Massenverteilung $m(x) = m/l$ ergibt sich die *einfache* Wellengleichung.

Lösung zu Aufgabe 1.3.4

1.3.4

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$$

Es gilt für die angegebene Bahn:

$$\dot{z}(t) = -gt + \dot{f}$$

Wirkungsfunktional:

$$\begin{aligned}
S &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{m}{2}\left(-gt + \dot{f}\right)^2 - mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + f\right)\right) = \\
&= \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{m}{2}g^2t^2 - mgt\dot{f} + \frac{m}{2}\dot{f}^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mgf\right) = \\
&= mg^2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, t^2 + \frac{m}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \dot{f}(t)^2 - mg\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(t\dot{f} + f\right)
\end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, t\dot{f} = \underbrace{tf\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0\text{, wegen } f(t_1)=f(t_2)=0} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, f\ .$$

Es bleibt:

$$S = mg^2 \cdot \frac{1}{3}\left(t_2^3 - t_1^3\right) + \frac{m}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \dot{f}(t)^2\ .$$

Der erste Summand ist unabhängig von $f(t)$. Der zweite ist minimal für

$$\dot{f}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \text{const}\ .$$

Wegen $f(t_1) = f(t_2) = 0$ muss dann also

$$f(t) \equiv 0$$

sein.

1.3.5 Lösung zu Aufgabe 1.3.5

Setze:

$$g(y,y') \equiv f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\;; \quad f = f(y,y')$$

Damit:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}f}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}_{=0} + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}y' - y'\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}y' + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' - \frac{\partial f}{\partial y'}y'' - y'\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' = \\ &= y'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''\right) = \\ &= y'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \\ &= 0\end{aligned}$$

Nach der Eulerschen Gleichung (1.124) ist die Klammer null.
Damit ist:

$$g(y,y') = f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const}\,.$$

1.3.6 Lösung zu Aufgabe 1.3.6

$$y(x)\;:\quad \text{Lage des Seils in der } xy\text{-Ebene}$$

$$F = \int\limits_{-d}^{+d} \mathrm{d}x\, y(x)\;:\quad \text{Fläche zwischen Seil und } x\text{-Achse}$$

$$l = \int\limits_1^2 \mathrm{d}S = \int\limits_1^2 \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int\limits_1^2 \mathrm{d}x\sqrt{1+y'^2}\;:\quad \text{Seillänge !}$$

Variationsaufgabe:

$$\delta\left(F - \lambda l\right) = \int\limits_{-d}^{+d} \mathrm{d}x\,\underbrace{\left(y(x) - \lambda\sqrt{1+y'^2}\right)}_{f = f(y,y')}$$

Voraussetzungen von Aufgabe 1.3.5 sind erfüllt:

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \qquad y - \lambda\sqrt{1+y'^2} + \lambda \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \overset{!}{=} a = \text{const}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad y - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = a$$

nach y'^2 auflösen:

$$(y-a)^2 = \frac{\lambda^2}{1+y'^2} \qquad \Rightarrow \qquad 1+y'^2 = \frac{\lambda^2}{(y-a)^2}$$

$$\Rightarrow \quad y'^2 = \frac{\lambda^2}{(y-a)^2} - 1 = \frac{\lambda^2-(y-a)^2}{(y-a)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\sqrt{\lambda^2-(y-a)^2}}{y-a}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{y-a}{\sqrt{\lambda^2-(y-a)^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\sqrt{\lambda^2-(y-a)^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \quad x - b = -\sqrt{\lambda^2-(y-a)^2}\,; \qquad b = \text{const}\,.$$

Bedeutet:

$$(x-b)^2 + (y-a)^2 = \lambda^2 \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{Kreis} \text{ mit Radius } \lambda \text{ und Mittelpunkt bei } (b, a)$$

a, b und λ aus Randpunkten und Nebenbedingung.

$$P_1: \quad (-d-b)^2 + (-a)^2 = \lambda^2$$

$$P_2: \quad (d-b)^2 + (-a)^2 = \lambda^2$$

Subtraktion:

$$(d+b)^2 - (d-b)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4db = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b=0}$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{\lambda^2 - d^2}$$

Seillänge:

$$l = \int_{-\mathrm{d}}^{+\mathrm{d}} \mathrm{d}x \sqrt{1+y'^2}$$

$$\text{s. o.} \qquad y - a = \sqrt{\lambda^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{\lambda^2 - x^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}$$

damit gilt:

$$l = \int\limits_{-\mathrm{d}}^{+\mathrm{d}} \mathrm{d}x \, \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = 2\lambda \arcsin \frac{d}{\lambda}$$

$\Rightarrow$ λ durch l und d festgelegt $\Rightarrow$ a bestimmt!

Abschnitt 1.4.4

1.4.1 Lösung zu Aufgabe 1.4.1

$$L' = L'\left(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha\right) = L\left(\boldsymbol{q}\left(\boldsymbol{q}', t, \alpha\right), \dot{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha\right), t\right) \; .$$

Damit berechnen wir:

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{S} \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right) \; .$$

Im zweiten Schritt haben wir die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen und die stetige Differenzierbarkeit der q_j ausgenutzt. Dieser Ausdruck gilt so für beliebige α, also auch für $\alpha = 0$:

$$\left. \frac{\partial L'}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \; .$$

Nach Voraussetzung soll nun aber die Lagrange-Funktion bei der Koordinatentransformation invariant bleiben. L' kann deshalb nicht explizit von α abhängen:

$$\left. \frac{\partial L'}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \; .$$

Damit ergibt sich unmittelbar das Noether-Theorem:

$$I\left(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t\right) = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left.\frac{\partial q_j\left(\boldsymbol{q}',t,\alpha\right)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \text{const} .$$

Jede Transformation, die L invariant lässt, führt demnach auf eine Erhaltungsgröße.

Lösung zu Aufgabe 1.4.2 1.4.2

Rotation um z-Achse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\ z' \end{pmatrix} .$$

$\alpha = 0$ bedeutet die identische Abbildung. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}'\cos\alpha + \dot{y}'\sin\alpha \\ \dot{y} &= -\dot{x}'\sin\alpha + \dot{y}'\cos\alpha \\ \dot{z} &= \dot{z}' . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 .$$

Ganz analog findet man:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2 \\ z &= z' . \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion ist also invariant gegenüber der hier vollzogenen Koordinatentransformation:

$$L\left(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\right) = L\left(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}'\right) .$$

Damit sind die Voraussetzungen des Noether-Theorems aus Aufgabe 1.4.1 erfüllt.

Zur Berechnung des Integrals der Bewegung benötigen wir nach Aufgabe 1.4.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x\left(\boldsymbol{q}',\alpha\right)}{\partial\alpha} &= -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = y \\ \frac{\partial y\left(\boldsymbol{q}',\alpha\right)}{\partial\alpha} &= -x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = -x \\ \frac{\partial z}{\partial\alpha} &= 0 . \end{aligned}$$

Damit finden wir die folgende Erhaltungsgröße:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \cdot (-x) = m\dot{x}y - m\dot{y}x = p_x \cdot y - p_y \cdot x = L_z = \text{const} .$$

Die z-Komponente des Drehimpulses ist also ein Integral der Bewegung!

1.4.3 Lösung zu Aufgabe 1.4.3

1. Es gilt natürlich auch jetzt wie in der Lösung zu Aufgabe 1.4.1:

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right) .$$

Allerdings ist nun:

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\boldsymbol{q}', t, \alpha\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \alpha} f\left(\boldsymbol{q}', t, \alpha\right) .$$

Das Integral der Bewegung lautet deshalb:

$$\widehat{I}\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right) = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left.\frac{\partial q_j\left(\boldsymbol{q}', t, \alpha\right)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} - \left.\frac{\partial}{\partial \alpha} f\left(\boldsymbol{q}', t, \alpha\right)\right|_{\alpha=0} = \text{const} .$$

2.

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx .$$

Die Galilei-Transformation

$$x \longrightarrow x' = x + \alpha t$$

erfüllt die Voraussetzungen, die wir an die Transformation stellen müssen. Mit $\dot{x} = \dot{x}' - \alpha$ folgt für die „neue" Lagrange-Funktion:

$$L'\left(x', \dot{x}', t, \alpha\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}' - \alpha\right)^2 - mg\left(x' - \alpha t\right) = L\left(x', \dot{x}'\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(x', t, \alpha\right) .$$

Dabei haben wir definiert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(x', t, \alpha\right) = -\alpha m \dot{x}' + \frac{m}{2}\alpha^2 + mg\alpha t$$

$$\curvearrowright \quad f\left(x', t, \alpha\right) = -\alpha m x' + \frac{m}{2}\alpha^2 t + \frac{1}{2} mg\alpha t^2$$

$$\curvearrowright \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = -mx + \frac{1}{2} mgt^2 .$$

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = -m\dot{x}t$$

folgt nach Teil 1.:

$$\widehat{I}\left(x, \dot{x}, t\right) = -m\dot{x}t + mx - \frac{1}{2}mgt^2 = m\left(x - \dot{x}t - \frac{1}{2}gt^2\right) .$$

Das ist das bekannte Ergebnis für den freien Fall. Mit

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\
\dot{x}(t) &= v_0 - g t
\end{aligned}
$$

ist

$$\widehat{I} = m x_0$$

mit Sicherheit eine Erhaltungsgröße, wenn auch eine triviale!

Abschnitt 2.1.1

Lösung zu Aufgabe 2.1.1 2.1.1

1.

$$
\begin{aligned}
f(x) = \alpha\, x^2 \;\Rightarrow\; u = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= 2\alpha\, x \;\Rightarrow\; x = \frac{u}{2\alpha} \\
&\Rightarrow\; f(x) - x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\alpha\, x^2 \\
&\Rightarrow\; g(u) = -\frac{u^2}{4\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = \alpha\, x^2 y^3 \;&\Rightarrow\; v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 3\alpha\, x^2 y^2 \\
&\Rightarrow\; y^2 = \frac{v}{3\alpha^2 x^2} \\
&\Rightarrow\; f(x,y) - y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -2\alpha\, x^2 y^3 = -2\alpha\, x^2 \frac{v^{3/2}}{(3\alpha\, x^2)^{3/2}} \\
&\Rightarrow\; g(x,v) = -\frac{2}{3}\frac{v^{3/2}}{(3\alpha\, x^2)^{1/2}}\,.
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 2.1.2 2.1.2

1.

$$f(x) = \alpha\left(x+\beta\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad u = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2\alpha\left(x+\beta\right) \quad\Rightarrow\quad x = \frac{u}{2\alpha} - \beta$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \alpha\left(\frac{u}{2\alpha}\right)^2 - u\left(\frac{u}{2\alpha} - \beta\right)$$
$$= \beta u - \frac{u^2}{4\alpha}$$
$$= g(u)$$

Rücktransformation:

$$g(u) = \beta u - \frac{u^2}{4\alpha}$$
$$\Rightarrow \quad -x = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = \beta - \frac{u}{2\alpha} \quad \Rightarrow \quad u = (\beta + x)\,2\alpha$$
$$\Rightarrow \quad g(u) - u\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = \beta u - \frac{u^2}{4\alpha} - \beta u + \frac{u^2}{2\alpha} =$$
$$= \frac{u^2}{4\alpha} = \alpha\left(\beta + x\right)^2 =$$
$$= f(x)$$

2.

$$f(x,y) = \alpha x^3 y^5$$
$$\Rightarrow \quad v = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 5\alpha x^3 y^4 \quad \Rightarrow \quad y^4 = \frac{v}{5\alpha x^3}$$
$$\Rightarrow \quad f(x,y) - y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \alpha x^3 y^5 - 5\alpha x^3 y^5 =$$
$$= -4\alpha x^3 y^5$$
$$\Rightarrow \quad g(x,v) = -4\alpha x^3 \frac{v^{5/4}}{\left(5\alpha x^3\right)^{5/4}}$$

Rücktransformation:

$$y = -\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_x = +5\alpha x^3 \frac{v^{1/4}}{\left(5\alpha x^3\right)^{5/4}}$$
$$\Rightarrow \quad v^{5/4} = y^5\left(5\alpha x^3\right)^{5/4}$$
$$\Rightarrow \quad g(x,v) - v\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_x = -4\alpha x^3 \frac{v^{5/4}}{\left(5\alpha x^3\right)^{5/4}} + 5\alpha x^3 \frac{v^{5/4}}{\left(5\alpha x^3\right)^{5/4}} =$$
$$= \alpha x^3 \frac{v^{5/4}}{\left(5\alpha x^3\right)^{5/4}} =$$
$$= \alpha x^3 y^5 = f(x,y)$$

Abschnitt 2.2.3

Lösung zu Aufgabe 2.2.1 2.2.1

Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$,

reduzierte Masse: $\mu = \left(m_1\, m_2\right)/M$,

Relativkoordinate: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$,

Massenmittelpunkt: $\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\left(m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2\right) = (X, Y, Z)$,

generalisierte Koordinaten: $X, Y, Z, r, \vartheta, \varphi$.

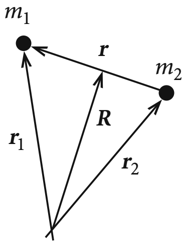

Abb. A.8.

Lagrange-Funktion nach (1.156):

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) - V(r) \,.$$

X, Y, Z, φ sind zyklisch. Daraus folgt:

$$P_x = M\,\dot{X} = \text{const} = C_x \,,$$

$$P_y = M\,\dot{Y} = \text{const} = C_y \,,$$

$$P_z = M\,\dot{Z} = \text{const} = C_z \,,$$

$$P_\varphi = \mu\, r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = \text{const} = C_\varphi \,.$$

Legendre-Transformation bezüglich $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\varphi}$:

$$R\left(X, Y, Z, r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, P_x, P_y, P_z, p_\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2M}\left(C_x^2 + C_y^2 + C_z^2\right) + \frac{C_\varphi^2}{2\mu\, r^2 \sin^2\vartheta} - \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2\right) + V(r) =$$

$$= R\left(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}\,\middle|\, C_x, C_y, C_z, C_\varphi\right) \,.$$

Bewegungsgleichungen:

r, ϑ nicht-zyklisch:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j}$$

$$q_j = r\ :\ -\mu\,\ddot{r} = -\frac{C_\varphi^2}{\mu\,r^3\sin^2\vartheta} - \mu\,r\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r}\ ,$$

$$q_j = \vartheta\ :\ -\mu\,r^2\ddot{\vartheta} = -\frac{C_\varphi^2\cos\vartheta}{\mu\,r^2\sin^3\vartheta}$$

X, Y, Z, φ zyklisch:

$$\dot{X} = \frac{\partial R}{\partial P_x} = \frac{\partial R}{\partial C_x} = \frac{C_x}{M}\ ,$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial R}{\partial P_y} = \frac{\partial R}{\partial C_y} = \frac{C_y}{M}\ ,$$

$$\dot{Z} = \frac{\partial R}{\partial P_z} = \frac{\partial R}{\partial C_z} = \frac{C_z}{M}\ ,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial R}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial R}{\partial C_\varphi} = \frac{C_\varphi}{\mu\,r^2\sin^2\vartheta}\ ,$$

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial R}{\partial X} = 0\ ;\quad \dot{P}_y = -\frac{\partial R}{\partial Y} = 0\ ;\quad \dot{P}_z = -\frac{\partial R}{\partial Z} = 0\ ,$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0\ .$$

2.2.2 Lösung zu Aufgabe 2.2.2

1. Wir haben in Aufgabe 1.2.4 die Lagrange-Funktion berechnet:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V_0\ln\frac{\varrho}{\varrho_0}\ .$$

Die generalisierten Impulse lauten dann:

$$p_\varrho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} = m\,\dot{\varrho}\ ;\quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,\varrho^2\dot{\varphi}\ ;\quad p_z = \frac{\partial L}{\partial z} = m\,\dot{z}$$

$$\Rightarrow\ H = p_\varrho\dot{\varrho} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L = \frac{1}{2}m(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + V_0\ln\frac{\varrho}{\varrho_0}\ .$$

Dies ergibt die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} + p_z^2\right) + V_0\ln\frac{\varrho}{\varrho_0}\ .$$

2. Hamilton'sche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{p}_\varrho = -\frac{\partial H}{\partial \varrho} = \frac{p_\varphi^2}{m\varrho^3} - \frac{V_0}{\varrho} ,$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 ; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} ,$$

$$\dot{\varrho} = \frac{\partial H}{\partial p_\varrho} = \frac{p_\varrho}{m} ; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\varrho^2} ; \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} ,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 .$$

3. Erhaltungssätze
φ, z sind zyklisch. Daraus folgt:

$$p_\varphi = m\varrho^2\dot{\varphi} = \text{const} : \quad \text{Drehimpulssatz} ,$$

$$p_z = m\dot{z} = \text{const} : \quad \text{Impulssatz} .$$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}, t) = 0$. Daraus folgt:

$$H = E = \text{const} : \quad \text{Energiesatz} .$$

Lösung zu Aufgabe 2.2.3 2.2.3

1. Σ: ruhendes Koordinatensystem

Zwangsbedingungen:

1-dim. Bewegung $\Rightarrow$ $z = y = 0$

$$q = x$$

Feder „entspannt" für $x' = d$

kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

potentielle Energie:

$$V = \frac{k}{2}\left(x' - d\right)^2 = \frac{k}{2}\left(x - v_0 t - d\right)^2$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\left(x - v_0 t - d\right)^2$$

verallgemeinerter Impuls:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\Rightarrow \quad L^*(x, p_x, t) = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{k}{2}\left(x - v_0 t - d\right)^2$$

$\Rightarrow$ Hamilton-Funktion:

$$H = p_x\dot{x} - L = \frac{p_x^2}{m} - L^*$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(x - v_0 t - d\right)^2$$

offensichtlich:

$$H = T + V = E$$

aber:

$$\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0\,; \quad \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$$

$\Rightarrow$ H **keine** Erhaltungsgröße

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_x = m\ddot{x}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -k\left(x - v_0 t - d\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = k\left(v_0 t + d\right)$$

2. Σ': mitbewegtes Koordinatensystem

$$x' = x - v_0 t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}' = \dot{x} - v_0$$

$$\Rightarrow \quad \overline{L}\left(x', \dot{x}'\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}' + v_0\right)^2 - \frac{k}{2}\left(x' - d\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad p_x' = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{x}'} = m\left(\dot{x}' + v_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{L}^*\left(x', p_x'\right) = \frac{p_x'^2}{2m} - \frac{k}{2}\left(x' - d\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{H} = p_x'\dot{x}' - \overline{L}^*\left(x', p_x'\right)$$

$$= p_x'\left(\frac{p_x'}{m} - v_0\right) - \frac{p_x'^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(x' - d\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{H} = \frac{p_x'^2}{2m} - p_x'v_0 + \frac{k}{2}\left(x' - d\right)^2$$

Umgekehrte Situation wie unter 1.:

$$\overline{H} \neq E = \frac{p_x'^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(x' - d\right)^2$$

$\overline{H}$ ist **nicht** die Gesamtenergie.

aber:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}: \qquad \text{Integral der Bewegung}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{x}' = \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_x'} = \frac{p_x'}{m} - v_0$$

$$\Rightarrow \quad p_x' = m\left(\dot{x}' + v_0\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_x' = m\ddot{x}'$$

$$\dot{p}_x' = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial x'} = -k\left(x' - d\right)$$

Kombination:

$$m\ddot{x}' + kx' = kd$$

ungedämpfter harmonischer Oszillator mit zeitunabhängiger äußerer Kraft!

Lösung zu Aufgabe 2.2.4 2.2.4

Das System besitzt holonom-skleronome Zwangsbedingungen und ist konservativ. Die Hamilton-Funktion ist damit mit der Gesamtenergie identisch und ein Integral der Bewegung:

$$H = T + V = E = \text{const}\,.$$

Die Kräfte sind konservativ:

$$\boldsymbol{F}_1 = +k\left(x_2 - x_1\right)\,\boldsymbol{e}_x = -\nabla_1 V$$

$$\boldsymbol{F}_2 = +k\left(x_3 - x_2\right)\,\boldsymbol{e}_x - k\left(x_2 - x_1\right)\,\boldsymbol{e}_x = -\nabla_2 V$$

$$\boldsymbol{F}_3 = -k\left(x_3 - x_2\right)\,\boldsymbol{e}_x = -\nabla_3 V\,.$$

Das führt zu der potentiellen Energie:

$$V = \frac{1}{2}k\left(\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(x_3 - x_2\right)^2\right).$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2.$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k\left(\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(x_3 - x_2\right)^2\right).$$

Generalisierte Impulse:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\,\dot{x}_1 \quad \curvearrowright \quad \dot{x}_1 = \frac{p_1}{m_1}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\,\dot{x}_2 \quad \curvearrowright \quad \dot{x}_2 = \frac{p_2}{m_2}$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_1\,\dot{x}_3 \quad \curvearrowright \quad \dot{x}_3 = \frac{p_3}{m_1}.$$

Impulse in die Lagrange-Funktion einsetzen:

$$L^*\left(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3\right) = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{2m_2}p_2^2 - \frac{1}{2}k\left(\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(x_3 - x_2\right)^2\right).$$

Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^{3} p_j\dot{x}_j - L^*\left(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3\right) \\ &= \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{2m_2}p_2^2 + \frac{1}{2}k\left(\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(x_3 - x_2\right)^2\right). \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -k\left(x_1 - x_2\right)$$

$$\curvearrowright \quad \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}\dot{p}_1 = -\frac{k}{m_1}\left(x_1 - x_2\right)$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1}\left(x_1 - x_2\right) = 0. \tag{A.4}$$

-
$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2} \\
\dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = k\left(x_1 - x_2\right) + k\left(x_3 - x_2\right) \\
\curvearrowright \quad \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2}\dot{p}_2 = \frac{k}{m_2}\left(x_1 - 2x_2 + x_3\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m_2}\left(-x_1 + 2x_2 - x_3\right) = 0\,. \tag{A.5}$$

-
$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m_1} \\
\dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -k\left(x_3 - x_2\right) \\
\curvearrowright \quad \ddot{x}_3 &= \frac{1}{m_1}\dot{p}_3 = -\frac{k}{m_1}\left(x_3 - x_2\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{x}_3 + \frac{k}{m_1}\left(x_3 - x_2\right) = 0\,. \tag{A.6}$$

Lösungsansatz:

$$x_i(t) = \alpha_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

Eingesetzt in (A.4), (A.5) und (A.6) ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem für die Koeffizienten α_i:

$$\begin{aligned}
-\alpha_1\omega^2 + \frac{k}{m_1}\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) &= 0 \\
-\alpha_2\omega^2 + \frac{k}{m_2}\left(2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3\right) &= 0 \\
-\alpha_3\omega^2 + \frac{k}{m_1}\left(\alpha_3 - \alpha_2\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Eine nicht-triviale Lösung erfordert das Verschwinden der Säkulardeterminante:

$$\begin{vmatrix}
-\omega^2 + \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} & 0 \\
-\frac{k}{m_2} & -\omega^2 + 2\frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} \\
0 & -\frac{k}{m_1} & -\omega^2 + \frac{k}{m_1}
\end{vmatrix} \overset{!}{=} 0\,.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1}\right)^2 \left(-\omega^2 + 2\frac{k}{m_2}\right) - \frac{2k^2}{m_1 m_2}\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1}\right) \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

Die erste Lösung (*Eigenfrequenz*) kann direkt abgelesen werden:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \,. \tag{A.7}$$

Die beiden anderen Lösungen ergeben sich aus

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1}\right)\left(-\omega^2 + 2\frac{k}{m_2}\right) - \frac{2k^2}{m_1 m_2} \stackrel{!}{=} 0 \,,$$

d. h.

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{k}{m_1} + 2\frac{k}{m_2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

Die beiden anderen *Eigenfrequenzen* lauten damit:

$$\omega_2 = 0 \tag{A.8}$$

$$\omega_3 = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right)} \,. \tag{A.9}$$

Um die Amplituden α_i zu bekommen, setzen wir die Lösungen (A.7), (A.8), (A.9) in das homogene Gleichungssystem ein.

- $\omega = \omega_1$

  Man findet unmittelbar:

  $$\alpha_2 = 0 \qquad ; \qquad \alpha_1 = -\alpha_3 \,.$$

  Das mittlere Atom ist in Ruhe, die beiden äußeren schwingen mit gleicher Amplitude gegenphasig.

- $\omega = \omega_2$

  Auch hier ist die Lösung einfach:

  $$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \,.$$

  Das entspricht einer einfachen Translation ohne Relativbewegung der drei Atome.

- $\omega = \omega_3$

  Es gilt

  $$-\alpha_1 k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right) + \frac{k}{m_1}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \quad \curvearrowright \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}\alpha_2 \,.$$

  Die zweite Gleichung des homogenen Gleichungssystems lautet für $\omega = \omega_3$:

  $$-\alpha_2 k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right) + \frac{k}{m_2}(2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3) = 0 \quad \curvearrowright \quad \alpha_1 = \alpha_3 \,.$$

Die beiden äußeren Atome schwingen mit gleicher Amplitude gleichphasig, das mittlere mit modifizierter Amplitude dazu gegenphasig.

Die allgemeine Schwingung ist dann eine Überlagerung der drei diskutierten Fundamentalschwingungen.

Lösung zu Aufgabe 2.2.5

2.2.5

Σ' : Inertialsystem; Achsen: x', y', z'

Σ : beschleunigtes (rotierendes) Nicht-Inertialsystem; Achsen: x, y, z

Rotation um $z = z'$-Achse mit $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} - \underbrace{m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}))}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}})}_{\text{Corioliskraft}}$$

außerdem

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V$$

Gibt es V_{tot}, aus dem auch die Scheinkräfte folgen? Wenn ja, wie sieht dies aus?

1. Zentrifugalkraft

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{(z)} &= -m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})) = -m\left\{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}\omega^2\right\} = \\ &= -m\left\{\omega^2 z \boldsymbol{e}_z - \omega^2 \boldsymbol{r}\right\} = \\ &= m\omega^2\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad V^{(z)} = -\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

Kontrolle:

$$\boldsymbol{F}^{(z)} = -\left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}\right) V^{(z)} = m\omega^2\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y\right)$$

2. Corioliskraft

$$\boldsymbol{F}^{(c)} = -2m\left(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}\right) = 2m\left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\omega}\right)$$

vergleiche Lorentz-Kraft:

$$\begin{aligned} 2m &\longleftrightarrow \hat{q} \quad \text{Ladung} \\ \boldsymbol{\omega} &\longleftrightarrow \boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ verallgemeinertes Potential gemäß (1.78):

$$V^{(c)} = -2m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}$$

mit:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{\omega}{2}\left(-y, x, 0\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad V^{(c)}\left(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t\right) &= -m\left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\right) = \\ &= -m\omega\left(-\dot{x}y + \dot{y}x\right) = \\ &= -m\omega\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ verallgemeinerte Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}L &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\varrho) - V^{(z)} - V^{(c)} = \\ &= T - V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \\ &\quad + m\omega\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\end{aligned}$$

1. kartesisch

generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\omega y &&\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m} + \omega y \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x &&\Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} - \omega x \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} &&\Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L^* &= \frac{m}{2}\left(\frac{p_x}{m} + \omega y\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{p_y}{m} - \omega x\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \\ &\quad + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + m\omega\left(\frac{p_y x}{m} - \omega x^2 - \frac{p_x y}{m} - \omega y^2\right) - \\ &\quad - V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \left(p_x\omega y - p_y\omega x\right) + \\ &\quad + \frac{m}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{m}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \\ &\quad - m\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + \omega\left(p_y x - p_x y\right) - \\ &\quad - V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\end{aligned}$$

$$L^* = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - V\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Mit

$$\dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z = \frac{1}{m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \omega y p_x - \omega x p_y$$

ergibt sich dann für die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \omega\left(xp_y - yp_x\right) + V\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + \omega y\,; \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \omega p_y - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} - \omega x\,; \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\omega p_x - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}\,; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

z ist zyklisch, p_z damit eine Erhaltungsgröße!

2. zylindrisch

$$x = \varrho\cos\varphi\,; \quad y = \varrho\sin\varphi\,; \quad z = z$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{\varrho}\cos\varphi - \varrho\dot{\varphi}\sin\varphi\,; \quad \dot{y} = \dot{\varrho}\sin\varphi + \varrho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad x\dot{y} - y\dot{x} &= \varrho\dot{\varrho}\cos\varphi\sin\varphi + \varrho^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi - \\ &\quad - \varrho\dot{\varrho}\cos\varphi\sin\varphi + \varrho^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi = \\ &= \varrho^2\dot{\varphi}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}L = \frac{m}{2}\left(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\varrho) + \frac{1}{2}m\omega^2\varrho^2 + \\ + m\omega\varrho^2\dot{\varphi}\end{aligned}$$

generalisierte Impulse:

$$p_\varrho = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varrho}} = m\dot{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varrho} = \frac{p_\varrho}{m}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi} + m\omega\varrho^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\varrho^2} - \omega$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial\dot{z}} = m\dot{z} \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

damit:

$$
\begin{aligned}
L^* = \frac{m}{2}\left(\frac{p_\varrho^2}{m^2} + \varrho^2\left(\frac{p_\varphi}{m\varrho^2} - \omega\right)^2 + \frac{p_z^2}{m^2}\right) - \\
- V\varrho + \frac{1}{2}m\omega^2\varrho^2 + m\omega\varrho^2\left(\frac{p_\varphi}{m\varrho^2} - \omega\right) = \\
= \frac{1}{2m}\left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} + p_z^2\right) - \varrho^2\frac{p_\varphi\omega}{\varrho^2} + \\
+ \frac{m}{2}\varrho^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\varrho^2 + \omega p_\varphi - m\omega^2\varrho^2 - V(\varrho) = \\
= \frac{1}{2m}\left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} + p_z^2\right) - V(\varrho)
\end{aligned}
$$

außerdem:

$$
p_\varrho\dot{\varrho} + p_\varphi\dot{\phi} + p_z\dot{z} = \frac{1}{m}\left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} + p_z^2\right) - p_\varphi\omega
$$

$\Rightarrow$

$$
H = \frac{1}{2m}\left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} + p_z^2\right) - \omega p_\varphi + V(\varrho)
$$

Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varrho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varrho} = \frac{p_\varrho}{m} \; ; \quad \dot{p}_\varrho = -\frac{\partial H}{\partial \varrho} = \frac{p_\varphi^2}{m\varrho^3} - \frac{\partial V}{\partial \varrho} \\
\dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\varrho^2} - \omega \; ; \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\
\dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \; ; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ z und φ zyklisch

$\Rightarrow$ 2 Erhaltungssätze:

$$
p_\varphi = m\varrho^2\dot{\varphi} + m\omega\varrho^2 = \text{const} \; ; \quad p_z = m\dot{z} = \text{const} \; .
$$

Abschnitt 2.4.6

Lösung zu Aufgabe 2.4.1 2.4.1

1. Für beliebige Phasenfunktionen $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ gilt nach (2.114):

$$\left\{f, p_j\right\} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \; .$$

Dies bedeutet:

$$\left\{L_x, p_x\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\, p_z - z\, p_y\right) = 0 \; ,$$

$$\left\{L_x, p_y\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\, p_z - z\, p_y\right) = p_z \; ,$$

$$\left\{L_x, p_z\right\} = \frac{\partial}{\partial z}\left(y\, p_z - z\, p_y\right) = -p_y \; .$$

Analog findet man die anderen Klammern:

$$\left\{L_i, p_j\right\} = \varepsilon_{ijl} p_l \; ,$$

wobei $(i, j, l) = (x, y, z)$ und zyklisch, ε_{ijl} : total antisymmetrischer Einheitstensor.

2.

$$\left\{L_x, L_x\right\} = \left\{L_y, L_y\right\} = \left\{L_z, L_z\right\} = 0 \; ,$$

$$\begin{aligned}
\left\{L_x, L_y\right\} &= \left\{y\, p_z - z\, p_y,\, z\, p_x - x\, p_z\right\} = \\
&= \left\{y\, p_z,\, z\, p_x\right\} - \underbrace{\left\{z\, p_y,\, z\, p_x\right\}}_{=0} - \underbrace{\left\{y\, p_z,\, x\, p_z\right\}}_{=0} + \left\{z\, p_y,\, x\, p_z\right\} = \\
&= y\left\{p_z,\, z\right\} p_x + x\left\{z,\, p_z\right\} p_y = -y\, p_x + x\, p_y = \\
&= L_z \; .
\end{aligned}$$

Ganz analog ergeben sich die anderen Klammern:

$$\left\{L_i, L_j\right\} = \varepsilon_{ijl}\, L_l \; ,$$

wobei $(i, j, l) = (x, y, z)$ und zyklisch.

2.4.2 Lösung zu Aufgabe 2.4.2

1. Benutze Aufgabe 2.4.1, Teil 2:

$$\left\{\boldsymbol{L}^2, L_x\right\} = \left\{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x\right\} = \left\{L_y^2 + L_z^2, L_x\right\} =$$

$$= L_y\{L_y, L_x\} + \{L_y, L_x\}L_y + L_z\{L_z, L_x\} + \{L_z, L_x\}L_z =$$

$$= -L_yL_z - L_zL_y + L_zL_y + L_yL_z =$$

$$= 0$$

analog:

$$\left\{\boldsymbol{L}^2, L_y\right\} = \left\{\boldsymbol{L}^2, L_z\right\} = 0$$

2. Die Aussage folgt direkt aus dem Poisson'schen Satz. Als Beispiel sei der Fall untersucht, dass L_x und L_y Integrale der Bewegung sind. Wegen

$$\frac{\partial L_x}{\partial t} = \frac{\partial L_y}{\partial t} = 0$$

sind L_x und L_y Integrale der Bewegung, falls gilt:

$$\{H, L_x\} = \{H, L_y\} = 0$$

Jacobi-Identität:

$$0 = \{L_x, \{L_y, H\}\} + \{H, \{L_x, L_y\}\} + \{L_y, \{H, L_x\}\} =$$

$$= 0 + \{H, \{L_x, L_y\}\} + 0 =$$

$$= \{H, L_z\}$$

Mit

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = 0$$

folgt, dass L_z auch Integral der Bewegung ist.

2.4.3 Lösung zu Aufgabe 2.4.3

1. Teilchen ohne Zwang im Zentralfeld:

$$V(\boldsymbol{r}) = V(r)\,.$$

Kugelkoordinaten sind offensichtlich günstig. Die Hamilton-Funktion wurde bereits in (2.45) abgeleitet:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\vartheta}\right) + V(r)\,.$$

Für die Impulse gilt dabei:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \\ p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} = mr^2\dot\vartheta \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi\,. \end{aligned}$$

Man erkennt natürlich bereits hier, dass φ zyklisch ist, der zugehörige generalisierte Impuls also ein Integral der Bewegung.

2. Wegen

$$\begin{aligned} L_z &= xp_y - yp_x = m(x\dot y - y\dot x) \\ &= m\left(r\sin\vartheta\cos\varphi\left(\dot r\sin\vartheta\sin\varphi + r\dot\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + r\sin\vartheta\dot\varphi\cos\varphi\right)\right. \\ &\quad\left.- r\sin\vartheta\sin\varphi\left(\dot r\sin\vartheta\cos\varphi + r\dot\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi - r\sin\vartheta\dot\varphi\sin\varphi\right)\right) \\ &= m\left(r^2\sin^2\vartheta\dot\varphi\cos^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\dot\varphi\sin^2\varphi\right) \\ &= mr^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi \end{aligned}$$

ist

$$p_\varphi = L_z\,.$$

Poisson-Klammer:

$$\{H, L_z\} = \{H, p_\varphi\} = \frac{\partial H}{\partial\varphi} = 0$$

L_z ist nicht explizit zeitabhängig: $\partial L_z/\partial t = 0$. Gemäß (2.121) ist L_z damit ein Integral der Bewegung!

2.4.4 Lösung zu Aufgabe 2.4.4

1.

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial p_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial q_j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{S}\left[\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j}\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial t}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right] =$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} .$$

2. Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\} = \left\{\{f,g\},H\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = -\{\{g,H,\},f\} - \{\{H,f\},g\} +$$

$$+ \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} = \qquad \text{(Jacobi-Identität)}$$

$$= \left\{f, \{g,H\} + \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \left\{\{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} =$$

$$= \left\{f, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\} + \left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, g\right\} .$$

3.

$$\{f,g\,h\} = \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}(g\,h) - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}(g\,h)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{S}\left(h\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} + g\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - g\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j} - h\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right) =$$

$$= h\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right) + g\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right) =$$

$$= h\,\{f,g\} + g\,\{f,h\} .$$

Lösung zu Aufgabe 2.4.5

2.4.5

1. Für eine beliebige Phasenfunktion $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ gilt:

$$\{f, p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_j}$$
$$\{f, q_j\} = -\frac{\partial f}{\partial p_j}$$

Mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ und $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ ist dann:

$$L_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j p_k$$
$$\begin{aligned}\{L_i, A_m\} &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \{x_j p_k, A_m\} = \\ &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left(x_j \{p_k, A_m\} + \{x_j, A_m\} p_k\right) = \\ &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial A_m}{\partial p_j} p_k - x_j \frac{\partial A_m}{\partial x_k}\right)\end{aligned}$$

2. Speziell für x_m ist dann:

$$\begin{aligned}\{L_i, x_m\} &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_m}{\partial p_j} p_k - x_j \frac{\partial x_m}{\partial x_k}\right) = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left(-x_j \delta_{mk}\right) = \\ &= \sum_{j} \varepsilon_{imj}\, x_j\end{aligned}$$

3. Analog:

$$\begin{aligned}\{L_i, p_m\} &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \delta_{mj} p_k = \\ &= \sum_{k} \varepsilon_{imk}\, p_k\end{aligned}$$

4. Für die Drehimpulskomponenten ist nach der Formel aus Teil 1.:

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} \left(\frac{\partial L_j}{\partial p_k} p_l - x_k \frac{\partial L_j}{\partial x_l}\right)$$

Mit Einsetzen von

$$L_j = \sum_{mn} \varepsilon_{jmn}\, x_m\, p_n$$
$$\frac{\partial L_j}{\partial p_k} = \sum_{mn} \varepsilon_{jmn}\, x_m \delta_{nk} = \sum_{m} \varepsilon_{jmk}\, x_m = -\sum_{m} \varepsilon_{jkm}\, x_m$$

$$\frac{\partial L_j}{\partial x_l} = \sum_{mn} \varepsilon_{jmn}\delta_{ml}\, p_n = \sum_m \varepsilon_{jlm}\, p_m$$

ergibt sich:

$$\{L_i, L_j\} = -\sum_{klm} \varepsilon_{ikl}\left(\varepsilon_{jkm}x_m p_l + \varepsilon_{jlm}x_k p_m\right)$$

Mit

$$\sum_k \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkm} = \delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj}$$

$$\sum_l \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jlm} = -\delta_{ij}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kj}$$

ergibt sich:

$$\{L_i, L_j\} = -\delta_{ij}\sum_l x_l p_l + x_i p_j + \delta_{ij}\sum_k x_k p_k - x_j p_i =$$

$$= x_i p_j - x_j p_i =$$

$$= \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$$

5. Mit

$$\boldsymbol{A}^2 = \sum_m A_m^2$$

ist:

$$\{L_i, \boldsymbol{A}^2\} = 2\sum_{jkm} \varepsilon_{ijk} A_m \left(\frac{\partial A_m}{\partial p_j} p_k - x_j \frac{\partial A_m}{\partial x_k}\right)$$

2.4.6 Lösung zu Aufgabe 2.4.6

1. Das Zwei-Teilchensystem besitzt sechs Freiheitsgrade und wird deshalb durch sechs kartesische Koordinaten $(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3}; \alpha = 1, 2)$ und die sechs zugehörigen Impulse $(p_{\alpha 1}, p_{\alpha 2}, p_{\alpha 3}; \alpha = 1, 2)$ beschrieben. Für die Drehimpulse gilt:

$$\boldsymbol{L}_\alpha = \boldsymbol{L}_\alpha\left(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{p}_\alpha\right) \qquad \alpha = 1, 2\,.$$

Dann lautet die Poisson-Klammer:

$$\{\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2\} = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_1\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1\right)}{\partial x_{\alpha j}}\frac{\partial \boldsymbol{L}_2\left(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_2\right)}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial \boldsymbol{L}_1\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1\right)}{\partial p_{\alpha j}}\frac{\partial \boldsymbol{L}_2\left(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_2\right)}{\partial x_{\alpha j}}\right)\,.$$

Für jedes $\alpha = 1, 2$ ist in den beiden Produkten innerhalb der Klammer ein Faktor gleich null, da nach den *falschen* Koordinaten abgeleitet wird. Daraus folgt die Behauptung!

2. Wir benutzen das Ergebnis aus Aufgabe 2.4.1 und das aus Teil 1.:

$$\begin{aligned}\left\{L_{11}, \boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right\} &= \sum_j \left\{L_{11}, L_{1j}L_{2j}\right\} = \sum_j \left\{L_{11}, L_{1j}\right\} L_{2j} \\ &= \sum_{jk} \varepsilon_{1jk} L_{1k} L_{2j} = \sum_{jk} \varepsilon_{1jk} L_{2j} L_{1k} \\ &= \left(\boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_1\right)_1 = -\left(\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2\right)_1 \ .\end{aligned}$$

Das gilt so analog für die beiden anderen Komponenten. Damit folgt die Behauptung:

$$\left\{\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right\} = -\left(\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2\right) \ .$$

3. Beweis durch vollständige Induktion mit dem Ergebnis aus Teil 2. als Induktionsanfang. Die Behauptung sei richtig für $n = k$. Wir schließen auf $k + 1$:

$$\begin{aligned}\left\{\boldsymbol{L}_1, \left(\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right)^{k+1}\right\} &= \left\{\boldsymbol{L}_1, \left(\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right)^{k}\right\} (\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2) \\ &+ \left(\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right)^{k} \left\{\boldsymbol{L}_1, \left(\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right)\right\} \\ &= -k \left(\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right)^{k-1} \left(\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2\right) \left(\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right) \\ &- \left(\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right)^{k} \left(\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2\right) \\ &= -(k+1) \left(\boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\right)^{k} \left(\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2\right) \ .\end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung!

Lösung zu Aufgabe 2.4.7 — 2.4.7

1. Die Bewegungsgleichung für die Observable f ist:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Mit

$$f \text{ Integral der Bewegung} \quad \Longleftrightarrow \quad \{f, H\} = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

und

$$H \text{ Integral der Bewegung} \iff \{H, H\} = -\frac{\partial H}{\partial t} \iff \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

ist dann:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, H\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f, H\} - \left\{f, \frac{\partial H}{\partial t}\right\} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} \qquad \text{Integral der Bewegung}$$

2.

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H \qquad \text{Integral der Bewegung}$$

$$\{f, H\} = \left\{q - \frac{pt}{m}, \frac{p^2}{2m}\right\} = \left\{q, \frac{p^2}{2m}\right\} - \left\{\frac{pt}{m}, \frac{p^2}{2m}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2m}\left\{q, p^2\right\} - \frac{t}{2m^2}\left\{p, p^2\right\} =$$
$$= \frac{1}{2m}\Big(p\underbrace{\{q, p\}}_{=1} + \underbrace{\{q, p\}}_{=1}p\Big) - \frac{t}{2m^2}\Big(p\underbrace{\{p, p\}}_{=0} + \underbrace{\{p, p\}}_{=0}p\Big) =$$
$$= \frac{p}{m} = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

f ist also Integral der Bewegung (obwohl explizit zeitabhängig). Also sollte auch $\partial f/\partial t$ Integral der Bewegung sein:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, H\right\} = \left\{-\frac{p}{m}, \frac{p^2}{2m}\right\} = -\frac{1}{2m^2}\underbrace{\left\{p, p^2\right\}}_{=0} = 0 = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Damit ist $\partial f/\partial t$ Integral der Bewegung.

2.4.8 Lösung zu Aufgabe 2.4.8

1. $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$: Integral der Bewegung

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$\Rightarrow \quad f$: Integral der Bewegung, falls

$$\{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

2. f, g: Integrale der Bewegung

$$\{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial t} \; ; \qquad \{H, g\} = \frac{\partial g}{\partial t}$$

Jacobi-Identität (2.119)

$$\begin{aligned} 0 &= \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} = \\ &= -\left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \left\{g, \frac{\partial f}{\partial t}\right\} + \{H, \{f, g\}\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \{H, \{f, g\}\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\}$$

$$\Rightarrow \quad \{f, g\}\text{: Integral der Bewegung}$$

3.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

$$\begin{aligned} \{H, f\} &= \left\{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2, p \sin \omega t - m\omega q \cos \omega t\right\} = \\ &= \left\{\frac{p^2}{2m}, p \sin \omega t\right\} - \left\{\frac{p^2}{2m}, m\omega q \cos \omega t\right\} + \dots \\ &\quad \dots + \left\{\frac{1}{2} m\omega^2 q^2, p \sin \omega t\right\} - \left\{\frac{1}{2} m\omega^2 q^2, m\omega q \cos \omega t\right\} = \\ &= \frac{1}{2m} \sin \omega t \left\{p^2, p\right\} - \frac{m\omega \cos \omega t}{2m} \left\{p^2, q\right\} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{2} m\omega^2 \sin \omega t \left\{q^2, p\right\} - \frac{1}{2} m^2 \omega^3 \cos \omega t \left\{q^2, q\right\} \end{aligned}$$

Fundamentalklammern:

$$\begin{aligned} \left\{p^2, p\right\} &= p \underbrace{\{p, p\}}_{0} + \underbrace{\{p, p\}}_{0} p = 0 \\ \left\{p^2, q\right\} &= p \underbrace{\{p, q\}}_{-1} + \underbrace{\{p, q\}}_{-1} p = -2p \\ \left\{q^2, p\right\} &= q \underbrace{\{q, p\}}_{+1} + \underbrace{\{q, p\}}_{+1} q = 2q \end{aligned}$$

$$\left\{q^2, q\right\} = q\,\underbrace{\left\{q, q\right\}}_{0} + \underbrace{\left\{q, q\right\}}_{0}\,q = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left\{H, f\right\} = +\omega \cos\omega t \cdot p + m\omega^2 \sin\omega t \cdot q$$

andererseits

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \omega p \cos\omega t + m\omega^2 q \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad \left\{H, f\right\} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad f(q, p, t) \; : \qquad \text{Integral der Bewegung}\,.$$

2.4.9 Lösung zu Aufgabe 2.4.9

Taylor-Entwicklung:

$$A(t) = A(0) + \frac{1}{1!}\dot{A}(0)\,t + \frac{1}{2!}\ddot{A}(0)\,t^2 + \ldots$$

Wegen

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

gilt:

$$\dot{A}(0) = \{A(0), H\}\;.$$

Wegen

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

ist zudem

$$\frac{\partial}{\partial t}\{A(0), H\} = 0\,.$$

Dies bedeutet

$$\ddot{A}(0) = \{\{A(0), H\}, H\}\;.$$

Das lässt sich so fortsetzen und führt zu:

$$A(t) = A(0) + \frac{1}{1!}\{A(0), H\}\;t + \frac{1}{2!}\{\{A(0), H\}, H\}\;t^2 + \ldots$$

Abschnitt 2.5.6

Lösung zu Aufgabe 2.5.1 2.5.1

1.

$$\mathrm{d}F_4 = \left(\overline{H} - H\right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{S} \left(p_j dq_j - dp_j q_j - p_j dq_j + d\bar{p}_j \bar{q}_j\right) \ .$$

Daran liest man ab:

$$\frac{\partial F_4}{\partial t} = \overline{H} - H \ ; \quad \frac{\partial F_4}{\partial p_j} = -q_j \ ; \quad \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} = \bar{q}_j \ .$$

Man löst nun

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} = q_j \left(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}, t\right)$$

nach $\bar{p}_j$ auf und erhält damit den ersten Teil der Transformation:

$$\bar{p}_j = \bar{p}_j(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \ .$$

In die zweite Beziehung

$$\bar{q}_j = \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} = \bar{q}_j \left(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}, t\right)$$

setzen wir das so gewonnene $\bar{\boldsymbol{p}}$ ein:

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \ .$$

Für die *neue* Hamilton-Funktion finden wir:

$$\overline{H}\left(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{p}}, t\right) = H\left(\boldsymbol{q}(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{p}}, t), \boldsymbol{p}(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{p}}, t), t\right) + \frac{\partial}{\partial t} F_4\left(\boldsymbol{p}\left(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{p}}, t\right), \bar{\boldsymbol{p}}, t\right) \ .$$

2. Im modifizierten Hamilton'schen Prinzip

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H\right) =$$

$$= \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\sum_j \left(\dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j - \dot{\bar{p}}_j \bar{q}_j\right) - \overline{H}\right] +$$

$$+ \delta \left\{F_4\left(\bar{\boldsymbol{p}}\left(t_2\right), \boldsymbol{p}\left(t_2\right), t_2\right) - F_4\left(\bar{\boldsymbol{p}}\left(t_1\right), \boldsymbol{p}\left(t_1\right), t_1\right)\right\} \ ,$$

ist zu beachten, dass $\bar{\boldsymbol{p}}(t_{1,2})$ und $\boldsymbol{p}(t_{1,2})$ nicht fest sind. Es gilt vielmehr:

$$\delta \left\{F_4\left(\bar{\boldsymbol{p}}\left(t_2\right), \boldsymbol{p}\left(t_2\right), t_2\right) - F_4\left(\bar{\boldsymbol{p}}\left(t_1\right), \boldsymbol{p}\left(t_1\right), t_1\right)\right\} = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} \delta \bar{p}_j\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \ .$$

Damit bleibt:

$$0 \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} \delta \bar{p}_j \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{j=1}^{S} \Bigg(\delta \dot{p}_j q_j + \dot{p}_j \delta q_j + \delta p_j \dot{q}_j + p_j \delta \dot{q}_j -$$

$$- \delta \dot{\bar{p}}_j \bar{q}_j - \dot{\bar{p}}_j \delta \bar{q}_j - \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{q}_j} \delta \bar{q}_j - \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{p}_j} \delta \bar{p}_j \Bigg) \, .$$

Wir führen einige partielle Integrationen durch:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, q_j \delta \dot{p}_j = q_j \delta p_j \big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \dot{q}_j \delta p_j \, ,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, p_j \delta \dot{q}_j = \underbrace{p_j \delta q_j}_{=0} \big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \dot{p}_j \delta q_j \, ,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \bar{q}_j \delta \dot{\bar{p}}_j = \bar{q}_j \delta \bar{p}_j \big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \dot{\bar{q}}_j \delta \bar{p}_j \, .$$

Dies ergibt:

$$0 \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{S} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j} + q_j \right)}_{=0} \delta p_j \big|_{t_1}^{t_2} + \underbrace{\left(\frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} - \bar{q}_j \right)}_{=0} \delta \bar{p}_j \big|_{t_1}^{t_2} \right] +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{j=1}^{S} \Bigg[\left(-\dot{q}_j + \dot{q}_j \right) \delta p_j + \left(\dot{p}_j - \dot{p}_j \right) \delta q_j +$$

$$+ \left(\dot{\bar{q}}_j - \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{p}_j} \right) \delta \bar{p}_j - \left(\dot{\bar{p}}_j + \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{q}_j} \right) \delta \bar{q}_j \Bigg] \, .$$

Da $\delta \bar{p}_j$, $\delta \bar{q}_j$ unabhängig sind, folgt schließlich:

$$\dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{p}_j} \, ; \quad \dot{\bar{p}}_j = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{q}_j} \, .$$

Lösung zu Aufgabe 2.5.2 2.5.2

Nach (2.203) müsste dann

$$\left\{L_i,\, L_j\right\} = 0$$

gelten. In Aufgabe 2.4.1, Teil 2) haben wir aber gezeigt:

$$\left\{L_i,\, L_j\right\} = \varepsilon_{ijl} L_l \ .$$

Dies bedeutet speziell:

$$\left\{L_x,\, L_y\right\} = L_z \ .$$

L_x und L_y können also nicht gleichzeitig als kanonische Impulse auftreten.

Lösung zu Aufgabe 2.5.3 2.5.3

Trivialerweise sind $\{\bar{q}, \bar{q}\} = \{\bar{p}, \bar{p}\} = 0$. Wir haben also noch

$$\left\{\bar{q}, \bar{p}\right\}_{q,p} = 1$$

nachzuweisen.

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial q} = \frac{q}{\sin p}\left(-\frac{\sin p}{q^2}\right) = -\frac{1}{q} \ ,$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial p} = \frac{q}{\sin p}\left(\frac{\cos p}{q}\right) = \cot p \ ,$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = \cot p \ ,$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial p} = -\frac{q}{\sin^2 p} \ .$$

Damit folgt:

$$\left\{\bar{q}, \bar{p}\right\} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial q}\frac{\partial \bar{p}}{\partial p} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = \frac{1}{\sin^2 p} - \cot^2 p = \frac{1-\cos^2 p}{\sin^2 p} = 1 \ .$$

Lösung zu Aufgabe 2.5.4 2.5.4

1. Wir zeigen

$$\left\{\bar{q}, \bar{p}\right\} = 1 \ .$$

Dazu benötigen wir:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial q}\frac{\partial \bar{p}}{\partial p} = \frac{\frac{1}{2}q^{-1/2}\cos p}{1+q^{1/2}\cos p}\left[2\left(1+q^{1/2}\cos p\right)q^{1/2}\cos p - 2q^{1/2}\sin p\; q^{1/2}\sin p\right] =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}q^{-1/2}\cos p}{1+q^{1/2}\cos p}\left[2q^{1/2}\cos p + 2q(\cos^2 p - \sin^2 p)\right] =$$

$$= \cos^2 p - \sin^2 p \frac{q^{1/2}\cos p}{1+q^{1/2}\cos p}\,,$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = \frac{-q^{1/2}\sin p}{1+q^{1/2}\cos p}\left[\left(1+q^{1/2}\cos p\right)q^{-1/2}\sin p + q^{-1/2}\cos p\, q^{1/2}\sin p\right] =$$

$$= -\sin^2 p - \sin^2 p\,\frac{q^{1/2}\cos p}{1+q^{1/2}\cos p}\,.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial q}\frac{\partial \bar{p}}{\partial p} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = \cos^2 p + \sin^2 p = 1\,.$$

Die Transformation ist also kanonisch!

2. Wenn $F_3(p, \bar{q})$ die *Erzeugende* ist, dann muss

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}\,; \quad \bar{p} = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}}$$

gelten. Das überprüfen wir:

$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = -\left(e^{\bar{q}} - 1\right)^2 \frac{1}{\cos^2 p} \stackrel{!}{=} -q$$

$$\iff e^{\bar{q}} = 1 + q^{1/2}\cos p \iff \bar{q} = \ln\left(1+q^{1/2}\cos p\right) \quad \text{q. e. d.}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}} = -2\left(e^{\bar{q}} - 1\right)e^{\bar{q}}\tan p = -2\left(1+q^{1/2}\cos p - 1\right)\left(1+q^{1/2}\cos p\right)\tan p =$$

$$= -2q^{1/2}\sin p\left(1+q^{1/2}\cos p\right) \stackrel{!}{=} -\bar{p}$$

$$\iff \bar{p} = 2q^{1/2}\sin p\left(1+q^{1/2}\cos p\right) \quad \text{q. e. d.}$$

2.5.5 Lösung zu Aufgabe 2.5.5

1. Wir überprüfen die fundamentalen Poisson-Klammern. Die Klammern

$$\left\{\hat{q}, \hat{q}\right\}_{q,p} = \left\{\hat{p}, \hat{p}\right\}_{q,p} = 0$$

sind trivial. Mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für} \qquad |x| < 1$$

folgt:

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}}}} \left(\frac{1}{\sqrt{q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}}} - \frac{\dfrac{1}{2} q \cdot 2q}{\left(q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}\right)^{3/2}} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \left(1 - \frac{q^2}{q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}} \right) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \frac{\dfrac{p^2}{\alpha^2}}{q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\dfrac{p^2}{\alpha^2}}}{q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}}$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}}}} \frac{-\dfrac{1}{2} q \dfrac{2p}{\alpha^2}}{\left(q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \frac{qp}{\alpha^2 q^2 + p^2}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial q} = \alpha q$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial p} = \frac{p}{\alpha} \; .$$

Damit ist die Poisson-Klammer:

$$\left\{\hat{q}, \hat{p}\right\}_{q,p} = \frac{\partial \hat{q}}{\partial q}\frac{\partial \hat{p}}{\partial p} - \frac{\partial \hat{q}}{\partial p}\frac{\partial \hat{p}}{\partial q} = \frac{\dfrac{p^2}{\alpha^2}}{q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}} + \frac{\alpha}{p} \frac{pq}{\alpha^2 q^2 + p^2} \alpha q =$$

$$= \frac{1}{q^2 + \dfrac{p^2}{\alpha^2}} \left(\frac{p^2}{\alpha^2} + q^2 \right) = 1 \; .$$

2. Es gilt:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \alpha q \cot \hat{q}$$

$$\hat{p} = -\frac{\partial F}{\partial \hat{q}} = \frac{1}{2} \alpha q^2 \frac{1}{\sin^2 \hat{q}} \; .$$

Daraus folgt:

$$\hat{p} = \frac{1}{2}\alpha q^2 \frac{1}{\sin^2 \hat{q}} = \frac{1}{2}\alpha q^2 \left(1 + \cot^2 \hat{q}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha q^2 \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right)$$

beziehungsweise:

$$\sin^2 \hat{q} = \frac{1}{2}\alpha q^2 \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\alpha q^2}{\alpha^2 q^2 + \frac{p^2}{\alpha}} = \frac{q^2}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{q} = \hat{q}(p, q) = \arcsin \frac{q}{\sqrt{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}} \ .$$

Die Transformation ist genau die aus Teil 1.

2.5.6 Lösung zu Aufgabe 2.5.6

1.

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \sqrt{m\,k}\frac{\bar{q}}{q^2} \ ,$$

$$\bar{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = \frac{\sqrt{m\,k}}{q} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\sqrt{m\,k}}{\bar{p}} \ ,$$

$$p = \sqrt{m\,k}\ \bar{q}\ \frac{\bar{p}^2}{m\,k} = \frac{1}{\sqrt{m\,k}}\bar{q}\,\bar{p}^2 \ .$$

2. Wegen $\partial F_1/\partial t = 0$ gilt:

$$\overline{H}\left(\bar{q}, \bar{p}\right) = H\left(q\left(\bar{q}, \bar{p}\right), p\left(\bar{q}, \bar{p}\right)\right) = \frac{1}{2m}\,\frac{1}{m\,k}\bar{q}^2\bar{p}^4\frac{(m\,k)^2}{\bar{p}^4} + \frac{1}{2}k\frac{\bar{p}^2}{m\,k}$$

$$\Rightarrow \ \overline{H}\left(\bar{q}, \bar{p}\right) = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\,\omega^2\bar{q}^2 \ , \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \ .$$

3. $\overline{H}$ ist nach 2. die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators. Die Lösung ist deshalb bekannt.

2.5.7 Lösung zu Aufgabe 2.5.7

1. Transformationsformeln:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = 2\alpha q \hat{p}^3$$

$$\hat{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{p}} = 3\alpha q^2 \hat{p}^2$$

$$\Rightarrow \quad \hat{p} = \left(\frac{p}{2\alpha q}\right)^{1/3}$$

$$\hat{q} = 3\left(\frac{1}{4}\alpha q^4 p^2\right)^{1/3} \quad .$$

2. Die fundamentalen Poisson-Klammern sind zu überprüfen. Die Klammern

$$\{\hat{q}, \hat{q}\}_{q,p} = 0\,, \qquad \{\hat{p}, \hat{p}\}_{q,p} = 0$$

sind trivial erfüllt. Es bleibt zu zeigen:

$$\{\hat{q}, \hat{p}\}_{q,p} = 1\,.$$

Mit

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial q} = 4\left(\frac{1}{4}\alpha p^2\right)^{1/3} q^{1/3} \qquad \frac{\partial \hat{q}}{\partial p} = 2\left(\frac{1}{4}\alpha q^4\right)^{1/3} p^{-1/3}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial q} = -\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)^{1/3} q^{-4/3} \qquad \frac{\partial \hat{p}}{\partial p} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\alpha q}\right)^{1/3} p^{-2/3}$$

folgt

$$\{\hat{q}, \hat{p}\}_{q,p} = \frac{\partial \hat{q}}{\partial q}\frac{\partial \hat{p}}{\partial p} - \frac{\partial \hat{q}}{\partial p}\frac{\partial \hat{p}}{\partial q} = 4\left(\frac{\alpha p^2}{4}\right)^{1/3} q^{1/3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\alpha q}\right)^{1/3} p^{-2/3} +$$

$$+ 2\left(\frac{\alpha q^4}{4}\right)^{1/3} p^{-1/3}\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)^{1/3} q^{-4/3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

und damit die Kanonizität der Transformation.

3. Die neue Hamiltonfunktion ergibt sich aus der alten durch:

$$\widehat{H}\left(\hat{q}, \hat{p}\right) = \widehat{H}\left(q\left(\hat{q}, \hat{p}\right), p\left(\hat{q}, \hat{p}\right)\right) + \frac{\partial F_2\left(q\left(\hat{q}, \hat{p}\right), \hat{p}, t\right)}{\partial t}\,.$$

Mit

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

und

$$\hat{q}\hat{p} = 3\left(\frac{1}{4}\alpha q^4 p^2\right)^{1/3}\left(\frac{p}{2\alpha q}\right)^{1/3} = \frac{3}{2}qp$$

folgt:

$$\widehat{H}\left(\hat{q}, \hat{p}\right) = \frac{3}{2}\beta q\left(\hat{q}, \hat{p}\right) p\left(\hat{q}, \hat{p}\right) = \beta\hat{q}\hat{p}\,.$$

4. Damit sind die neuen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\hat{q}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}} = \beta \hat{q} \qquad \dot{\hat{p}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}} = -\beta \hat{p} \; .$$

2.5.8 Lösung zu Aufgabe 2.5.8

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial q}\frac{\partial \bar{p}}{\partial p} = \alpha q^{\alpha-1}\cos(\beta p)\,\beta q^{\alpha}\cos(\beta p) = \alpha\beta q^{2\alpha-1}\cos^2(\beta p) \; ,$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = -\beta q^{\alpha}\sin(\beta p)\,\alpha q^{\alpha-1}\sin(\beta p) = -\alpha\beta q^{2\alpha-1}\sin^2(\beta p) \; ,$$

Damit folgt:

$$\left\{\bar{q}, \bar{p}\right\} = \alpha\beta q^{2\alpha-1} \stackrel{!}{=} 1 \; .$$

Die Transformation ist nur für $\alpha = 1/2$ und $\beta = 2$ kanonisch.

2.5.9 Lösung zu Aufgabe 2.5.9

1. Mit

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

genügt $\boldsymbol{A}$ der Coulomb-Eichung. Ferner ergibt sich aus $\boldsymbol{A}$ das korrekte Magnetfeld:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}B \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}B\left(\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z\right) = (0, 0, B) \; .$$

2. Allgemein lautet die Lagrange-Funktion für ein Teilchen der Ladung $\hat{q}$ im elektromagnetischen Feld mit elektrischem Potential $\varphi(\boldsymbol{q})$ und Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$:

$$L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\right) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^2 + \hat{q}\left(\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) - \varphi(\boldsymbol{q})\right) \; .$$

Damit unterscheiden sich die generalisierten Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = m\dot{q}_j + \hat{q}A_j(\boldsymbol{q})$$

von den Komponenten des mechanischen Impulses:

$$\boldsymbol{p}_{\text{mech}} = m\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} - \hat{q}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) \; .$$

Mit

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{mech}}}{m} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - \hat{q}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\right)$$

ergibt sich für die Hamilton-Funktion im allgemeinen Fall:

$$\begin{aligned} H\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\right) &= \boldsymbol{p}\,\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - L\left(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\right) = \\ &= \boldsymbol{p}\,\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^2 - \hat{q}\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + \hat{q}\varphi = \\ &= \frac{1}{m}\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{p} - \hat{q}\boldsymbol{A}\right) - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \hat{q}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{1}{m}\hat{q}\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \hat{q}\boldsymbol{A}\right) + \hat{q}\varphi = \\ &= \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \hat{q}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\right)^2 + \hat{q}\varphi(\boldsymbol{q})\ . \end{aligned}$$

Hier gilt speziell:

$$\hat{q} = -e$$

$$\varphi(\boldsymbol{q}) \equiv 0$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \left(-q_2, q_1, 0\right)$$

Damit ist die Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\right) &= \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + e\,\boldsymbol{A}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2m}\left[\left(p_1 - \frac{1}{2}eBq_2\right)^2 + \left(p_2 + \frac{1}{2}eBq_1\right)^2 + p_3^2\right] = \\ &= \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left[\left(p_1 - \frac{1}{2}m\omega_c q_2\right)^2 + \left(p_2 + \frac{1}{2}m\omega_c q_1\right)^2\right] = \\ &= \frac{p_3^2}{2m} + H_0\ . \end{aligned}$$

3. Allgemein gilt

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \qquad \text{und} \qquad \hat{p}_j = -\frac{\partial F_1}{\partial \hat{q}_j}\ .$$

Hier ergibt sich:

$$p_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = m\omega_c\left(\hat{q}_1 - \frac{1}{2}q_2\right)$$

$$p_2 = \frac{\partial F_1}{\partial q_2} = m\omega_c\left(\hat{q}_2 - \frac{1}{2}q_1\right)$$

$$\hat{p}_1 = -\frac{\partial F_1}{\partial \hat{q}_1} = -m\omega_c \left(q_1 - \hat{q}_2\right)$$

$$\hat{p}_2 = -\frac{\partial F_1}{\partial \hat{q}_2} = -m\omega_c \left(q_2 - \hat{q}_1\right) \; .$$

Damit erhält man den ersten Satz von Transformationsformeln:

$$\hat{q}_1 \left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\right) = \frac{1}{m\omega_c} p_1 + \frac{1}{2} q_2$$

$$\hat{q}_2 \left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\right) = \frac{1}{m\omega_c} p_2 + \frac{1}{2} q_1$$

$$\hat{p}_1 \left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\right) = p_2 - \frac{1}{2} m\omega_c q_1$$

$$\hat{p}_2 \left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\right) = p_1 - \frac{1}{2} m\omega_c q_2 \; .$$

Durch Umkehrung ergibt sich:

$$q_1 \left(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}\right) = \hat{q}_2 - \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1$$

$$q_2 \left(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}\right) = \hat{q}_1 - \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_2$$

$$p_1 \left(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}\right) = \frac{1}{2} m\omega_c \hat{q}_1 + \frac{1}{2} \hat{p}_2$$

$$p_2 \left(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}\right) = \frac{1}{2} m\omega_c \hat{q}_2 + \frac{1}{2} \hat{p}_1 \; .$$

4. Mit obigen Transformationsformeln ergibt sich:

$$p_1 - \frac{1}{2} m\omega_c q_2 = \hat{p}_2$$

und

$$p_2 + \frac{1}{2} m\omega_c q_1 = m\omega_c \hat{q}_2 \; .$$

Damit ist die tranformierte Hamilton-Funktion

$$\hat{H}_0 \left(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{q}}\right) = H_0 \left(\boldsymbol{q}\left(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{q}}\right), \boldsymbol{p}\left(\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{q}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_2^2 + m^2 \omega_c^2 \hat{q}_2^2\right) =$$

$$= \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_c^2 \hat{q}_2^2$$

formal identisch mit der des harmonischen Oszillators, dessen Bewegungsgleichungen bekannt sind:

$$\hat{q}_2(t) \; , \quad \hat{p}_2(t) \; .$$

Ferner sind $\hat{q}_1$ und $\hat{p}_1$ zyklisch und damit beide Konstanten der Bewegung:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{q}}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial \hat{p}_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{q}_1 = \text{const} \\
\dot{\hat{p}}_1 &= -\frac{\partial H_0}{\partial \hat{q}_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \text{const}\,.
\end{aligned}$$

Mittels der Transformationsformeln aus 3. folgen dann mit den entsprechenden Anfangsbedingungen die Bewegungsgleichungen für die „alten" Variablen.

5. Es gilt:

$$p_j = \frac{\partial F_2(\boldsymbol{q}, \hat{\boldsymbol{p}})}{\partial q_j} \qquad \hat{q}_j = \frac{\partial F_2(\boldsymbol{q}, \hat{\boldsymbol{p}})}{\partial \hat{p}_j}\,.$$

Mittels der Transformationsformeln aus 3. können die p_j und $\hat{q}$ als Funktionen der q_j und $\hat{p}_j$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{2} m\omega_c q_2 + \hat{p}_2 \\
p_2 &= \frac{1}{2} m\omega_c q_1 + \hat{p}_1 \\
\hat{q}_1 &= \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_2 + q_2 \\
\hat{q}_2 &= \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 + q_1\,.
\end{aligned}$$

Durch Intergration und Differentiation erhält man:

$$\begin{aligned}
& p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{1}{2} m\omega_c q_2 + \hat{p}_2 \\
\Rightarrow \quad & F_2 = \frac{1}{2} m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + f(q_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2) \\
& p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{1}{2} m\omega_c q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} = \frac{1}{2} m\omega_c q_1 + \hat{p}_1 \\
\Rightarrow \quad & F_2 = \frac{1}{2} m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + \hat{p}_1 q_2 + g(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \\
& \hat{q}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{p}_1} = q_2 + \frac{\partial g}{\partial \hat{p}_1} = \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_2 + q_2 \\
\Rightarrow \quad & F_2 = \frac{1}{2} m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + \hat{p}_1 q_2 + \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 \hat{p}_2 + h(\hat{p}_2) \\
& \hat{q}_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{p}_2} = q_1 + \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\hat{p}_2} = \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 + q_1 \\
\Rightarrow \quad & F_2 = \frac{1}{2} m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + \hat{p}_1 q_2 + \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 \hat{p}_2 + \text{const}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist F_2 bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt:

$$F_2 = \frac{1}{2} m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + \hat{p}_1 q_2 + \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 \hat{p}_2 \,.$$

Abschnitt 3.7

3.7.1 Lösung zu Aufgabe 3.7.1

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \;\Rightarrow\; \frac{\partial H}{\partial t} = 0\,; \qquad H = E\,.$$

Damit lautet die HJD:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] = E\,.$$

Da x, y, z zyklisch sind, ist die HJD trivial separierbar:

$$W = \alpha_x\, x + \alpha_y\, y + \alpha_z\, z\,; \qquad \left(\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}\right)\,.$$

Bei W handelt es sich also um die identische Transformation.

3.7.2 Lösung zu Aufgabe 3.7.2

$$H = \frac{p^2}{2m} - bx \;\Rightarrow\; \frac{\partial H}{\partial t} = 0\,; \qquad H = E\,.$$

Damit ergibt sich die HJD:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - bx = E \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{2m(E+bx)}\,.$$

Bis auf die triviale additive Konstante folgt somit:

$$W(x) = \pm\frac{1}{3mb}\left[2m(E+bx)\right]^{3/2}\,.$$

Wir setzen $E = \alpha$ und erhalten dann aus (3.66):

$$t + \beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \pm\frac{1}{b}\left[2m(\alpha + bx)\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow\; x(t) = \frac{b}{2m}(t+\beta)^2 - \frac{\alpha}{b}\,.$$

Mit den Anfangsbedingungen lautet die Lösung:

$$x(t) = \frac{b}{2m}\left(t + \frac{m\,v_0}{b}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{m}{b} v_0^2 + x_0\,.$$

Lösung zu Aufgabe 3.7.3

3.7.3

Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + c\,\mathrm{e}^{\gamma q}\,.$$

Wegen

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

ist

$$H = E = \text{const}\,.$$

Die Transformation

$$(q, p) \quad \Rightarrow \quad (\hat{q}, \hat{p}) \qquad\qquad H \quad \Rightarrow \quad \widehat{H}$$

sei so, dass $\hat{q}$ zyklisch ist. Erzeugende:

$$W = F_2(q, \hat{p}) = W(q, \hat{p})\,.$$

Wegen

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \qquad\qquad \text{folgt} \qquad\qquad \widehat{H} = H = \widehat{H}(\hat{p})\,.$$

Da $\hat{q}$ zyklisch ist, ist der neue Impuls $\hat{p} = \alpha = \text{const.}$

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + c\,\mathrm{e}^{\gamma q} = E = E(\alpha)\,.$$

Auflösen nach W führt zu:

$$W(q, \hat{p}) = \sqrt{2m}\int \mathrm{d}q\sqrt{E - c\,\mathrm{e}^{\gamma q}}\,.$$

Wähle

$$E = E(\alpha) = \alpha \quad \curvearrowright \quad \frac{\partial E}{\partial \alpha} = 1\,.$$

Das ergibt für die *neue* Koordinate das triviale Resultat:

$$\hat{q}(t) = t + \beta \qquad\qquad \beta = \text{const}\,.$$

Andererseits muss auch gelten:

$$\hat{q} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{2m}\int \mathrm{d}q\,\frac{1}{\sqrt{\alpha - c\,\mathrm{e}^{\gamma q}}}\,.$$

Substitution:

$$x = \sqrt{c}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\gamma q} \quad \curvearrowright \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{2}\gamma x \quad \curvearrowright \quad \mathrm{d}q = \frac{2}{\gamma}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\hat{q} &= \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}\int \frac{1}{\sqrt{\alpha - x^2}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha - x^2}}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left(\sqrt{\frac{\alpha}{x^2}}+\sqrt{\frac{\alpha}{x^2}-1}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{x}\right)\,.
\end{aligned}$$

Dass lässt sich nach x auflösen:

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{x} = \cosh\left(-\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}\,(t+\beta)\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{c}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma q}$$

$$\curvearrowright \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\gamma q} = \sqrt{\frac{\alpha}{c}}\,\frac{1}{\cosh\left(\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}\,(t+\beta)\right)}$$

($\cosh x = \cosh(-x)$). Damit ist die generalisierte Koordinate bereits bestimmt:

$$q(t) = \frac{2}{\gamma}\ln\left\{\sqrt{\frac{\alpha}{c}}\,\frac{1}{\cosh\left(\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}\,(t+\beta)\right)}\right\}\,.$$

Der generalisierte Impuls bestimmt sich aus (s. o.):

$$\begin{aligned}
p^2 = 2m\left(\alpha - c\,\mathrm{e}^{\gamma q}\right) &= 2m\alpha - 2mc\frac{\alpha}{c}\,\frac{1}{\cosh^2\left(\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}\,(t+\beta)\right)} \\
&= 2m\alpha\left(1 - \frac{1}{\cosh^2\left(\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}\,(t+\beta)\right)}\right) \\
&= 2m\alpha\tanh^2\left(\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}\,(t+\beta)\right)\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir das Ergebnis:

$$p(t) = \sqrt{2m\alpha}\tanh\left(\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}\,(t+\beta)\right)\,.$$

Die Lösung ist nun vollständig. α und β folgen aus Anfangsbedingungen.

Lösung zu Aufgabe 3.7.4

3.7.4

Die Hamilton-Funktion ist:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + c(x-y) \,, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \,.$$

Die Erzeugende $W(x, y, \hat{p}_x, \hat{p}_y)$ für die Transformation

$$(x, y, p_x, p_y) \xrightarrow{W} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x, \hat{p}_y)$$

soll so beschaffen sein, dass die neuen Koordinaten sämtlich zykisch sind. Die Erzeugende W ist vom Typ F_2:

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} \,, \quad p_y = \frac{\partial W}{\partial y} \,, \quad \hat{x} = \frac{\partial W}{\partial \hat{p}_x} \,, \quad \hat{y} = \frac{\partial W}{\partial \hat{p}_y} \,.$$

Damit ist die HJD:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) + c(x-y) = E \,.$$

Zur Lösung empfiehlt sich ein Separationsansatz:

$$W(x, y, \hat{p}_x, \hat{p}_y) = W_x(x, \hat{p}_x, \hat{p}_y) + W_y(y, \hat{p}_x, \hat{p}_y) \,.$$

Damit folgt aus der HJD:

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + cx}_{\text{nur von } x \text{ abhängig}} = \underbrace{E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y}\right)^2 + cy}_{\text{nur von } y \text{ abhängig}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + cx = \alpha_1$$

$$E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y}\right)^2 + cy = \alpha_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{2m\left(\alpha_1 - cx\right)}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y} = \pm\sqrt{2m\left(E - \alpha_1 + cy\right)}$$

$$\Rightarrow \quad W_x = \mp\frac{1}{3mc}\left(2m(\alpha_1 - cx)\right)^{3/2}$$

$$W_y = \pm\frac{1}{3mc}\left(2m(E - \alpha_1 + cy)\right)^{3/2} \,.$$

Somit ist die gesamte charakteristische Funktion:

$$W = \mp\frac{1}{3mc}(2m)^{3/2}\left\{(\alpha_1 - cx)^{3/2} - (E - \alpha_1 + cy)^{3/2}\right\} \,.$$

Identifiziere die neuen Impulse mit den Konstanten:

$$\hat{p}_j = \alpha_j = \text{const}$$

wobei α_2 noch unbestimmt bleibt. Damit ist:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \pm\sqrt{2m(\alpha_1 - cx)} \\ p_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = \mp\sqrt{2m(E - \alpha_1 + cy)}\ . \end{aligned}$$

Wähle weiterhin (aus Zweckmäßigkeit):

$$E = E(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2\ .$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \beta_1 \\ \dot{\hat{y}} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = t + \beta_2\ . \end{aligned}$$

Auflösen von

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \mp\frac{1}{c}\left(\sqrt{2m(\alpha_1 - cx)} + \sqrt{2m(\alpha_2 - \alpha_1 + cy)}\right) \\ t + \beta_2 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{2m(\alpha_2 - \alpha_1 + cy)} \end{aligned}$$

ergibt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{c}{2m}(t + \beta_2)^2 - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{c} \\ x(t) &= -\frac{c}{2m}(t + \beta_1 + \beta_2)^2 + \frac{\alpha_1}{c} \\ p_x &= \pm\sqrt{c^2(t + \beta_1 + \beta_2)^2} = \pm c(t + \beta_1 + \beta_2) \\ p_y &= \mp\sqrt{c^2(t + \beta_2)^2} = \mp c(t + \beta_2)\ . \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -c \quad \Rightarrow \quad p_x(t) = -c(t + \beta_1 + \beta_2) \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = c \quad \Rightarrow \quad p_y(t) = c(t + \beta_2)\ . \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen ergeben:

$$\begin{aligned}
p_y(0) &= 0 &&\Rightarrow \quad \beta_2 = 0\\
p_x(0) &= m v_{0x} &&\Rightarrow \quad \beta_1 = -\frac{m v_{0x}}{c}\\
y(0) &= 0 &&\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2\\
x(0) &= 0 &&\Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{c^2}{2m}\left(-\frac{m v_{0x}}{c}\right)^2 = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = E\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Lösung:

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{c}{2m}\left(t - \frac{m v_{0x}}{c}\right)^2 + \frac{m}{2c} v_{0x}^2\\
y(t) &= \frac{c}{2m} t^2\,.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3.7.5

3.7.5

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0\,; \qquad H = E\,.$$

Die HJD lautet:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right) = E\,.$$

Separationsansatz:

$$W = W(x, y; \boldsymbol{\alpha}) = W_x(x; \boldsymbol{\alpha}) + W_y(y; \boldsymbol{\alpha})\,.$$

Dies wird in die HJD eingesetzt:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 = E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y}\right)^2 - \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2\,.$$

Beide Seiten müssen für sich genommen bereits konstant sein. Wir setzen $E = \alpha_1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 &= \alpha_2 = \text{const}\\
\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 &= \alpha_1 - \alpha_2 = \text{const}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x} &= m\omega_x \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m\omega_x^2} - x^2}\,,\\
\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y} &= m\omega_y \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{m\omega_y^2} - y^2}\,.
\end{aligned}$$

Für die charakteristische Funktion erhalten wir schließlich:

$$W(x,y,\boldsymbol{\alpha}) = m\omega_x \left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{2\alpha_2}{m\omega_x^2} - x^2} + \frac{\alpha_2}{m\omega_x^2}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{m\omega_x^2}{2\alpha_2}}\right)\right] +$$

$$+ m\omega_y \left[\frac{y}{2}\sqrt{\frac{2(\alpha_1-\alpha_2)}{m\omega_y^2} - y^2} + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{m\omega_y^2}\arcsin\left(y\sqrt{\frac{m\omega_y^2}{2(\alpha_1-\alpha_2)}}\right)\right] .$$

Es gilt weiter:

$$\beta_1 + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\omega_y}\int \mathrm{d}y \left[\frac{2(\alpha_1-\alpha_2)}{m\omega_y^2} - y^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{\omega_y}\arcsin\left[y\sqrt{\frac{m\omega_y^2}{2(\alpha_1-\alpha_2)}}\right]$$

$$\Rightarrow\ y(t) = \sqrt{\frac{2(\alpha_1-\alpha_2)}{m\omega_y^2}}\sin\left[\omega_y(\beta_1+t)\right] ,$$

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\omega_x}\int \mathrm{d}x \left(\frac{2\alpha_2}{m\omega_x^2} - x^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{\omega_y}\int \mathrm{d}y \left[\frac{2(\alpha_1-\alpha_2)}{m\omega_y^2} - y^2\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\omega_x}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{m\omega_x^2}{2\alpha_2}}\right) - \beta_1 - t$$

$$\Rightarrow\ x(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m\omega_x^2}}\sin\left[\omega_x(\beta_1+\beta_2+t)\right] .$$

$\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ sind durch Anfangsbedingungen festzulegen!

3.7.6 Lösung zu Aufgabe 3.7.6

Mit der Erzeugenden $F_3 = F_3(p, \hat{q}, t)$,

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} , \qquad \hat{p} = -\frac{\partial F_3}{\partial \hat{q}}$$

soll die Transformation so erfolgen, dass die „neue“ Koordinate und der „neue“ Impuls konstant sind:

$$(q, p) \xrightarrow{F_3} (\hat{q} = \alpha = \text{const}, \hat{p} = \beta = \text{const}) .$$

Dies gelingt mit einer Erzeugenden $S(p, \hat{q}, t) = F_3(p, \hat{q}, t)$, durch die $\hat{H} \equiv 0$ wird:

$$0 \overset{!}{=} \widehat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = H\left(p, -\frac{\partial S}{\partial p}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \qquad \text{(HJD)} .$$

Diese Differentialgleichung für S ist hier explizit:

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 .$$

Zur Lösung wird ein Separationsansatz gewählt:

$$S(p,\hat{q},t) = W(p,\hat{q}) + V(t,\hat{q}) \ .$$

Die HJD macht keine Aussage über die $\hat{q}$-Abhängigkeit von S. Allerdings muss $\hat{q} = \beta =$ const gelten, was z. B. durch Gleichsetzen mit einer Integrationskonstanten erreicht wird. Damit wird die HJD:

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}p}\right)^2 = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

Die linke Seite hängt nur von p, die rechte nur von t ab. Damit muss bereits jede Seite für sich konstant sein. Setze deshalb:

$$\beta = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad V(t) = -\beta t$$

bis auf eine unbedeutende additive Konstante. Somit folgt aus der linken Seite für W:

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}p}\right)^2 = \frac{2}{m\omega_0^2}\left(\beta - \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{1}{m^2\omega_0^2}\left(2m\beta - p^2\right) \ .$$

Damit ist die Lösung der HJD:

$$S(\beta,p,t) = \pm\frac{1}{m\omega_0}\int \mathrm{d}p\sqrt{2m\beta - p^2} - \beta t \ .$$

Setze nun:

$$\alpha = \hat{p} = -\frac{\partial S}{\partial \beta} = t \mp \frac{1}{m\omega_0}\int \mathrm{d}p\frac{m}{\sqrt{2m\beta - p^2}} = t \mp \frac{1}{\omega_0}\arcsin\frac{p}{\sqrt{2m\beta}}$$

Damit ist der „alte" Impuls:

$$p = \pm\sqrt{2m\beta}\sin\left(\omega_0(t-\alpha)\right)$$

Und für die „alte" Koordinate erhält man:

$$\begin{aligned} q = -\frac{\partial S}{\partial p} = -\frac{\partial W}{\partial p} &= \mp\frac{1}{m\omega_0}\sqrt{2m\beta - p^2} = \\ &= \mp\frac{\sqrt{2m\beta}}{m\omega_0}\cos\left(\omega_0(t-\alpha)\right) \ . \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} p_0 &= p(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \\ q_0 &= q(t=0) > 0 \end{aligned}$$

folgt dann:

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2\beta}{m\omega_0^2}}\cos\left(\omega_0 t\right) \\ p(t) &= -\sqrt{2m\beta}\sin\left(\omega_0 t\right) \ . \end{aligned}$$

In den vorangegangenen Gleichungen gilt jeweils das untere Vorzeichen.

Mit

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\beta}{m\omega_0^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_0^2 = E$$

folgt nach Einsetzen von q_0:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos \omega_0 t \\ p(t) &= -m\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t \ . \end{aligned}$$

Zur physikalischen Bedeutung:

$$S(\beta, p, t) = -\frac{\sqrt{2m\beta}}{m\omega_0} \int \sqrt{1 - \sin^2 \omega_0 t}\, \mathrm{d}p - \beta t \ .$$

Mit

$$\mathrm{d}p = -m\omega_0^2 q_0 \cos\left(\omega_0 t\right)\, \mathrm{d}t$$

folgt dann:

$$\begin{aligned} S(\beta, p, t) &= \frac{\sqrt{2m\beta}}{m\omega_0} m\omega_0^2 \sqrt{\frac{2\beta}{m\omega_0^2}} \int \cos^2 \omega_0 t\, \mathrm{d}t - \beta t = \\ &= 2\beta \int \cos^2(\omega_0 t)\, \mathrm{d}t - \beta t \ . \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2m} m^2 \omega_0^2 q_0^2 \sin^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_0^2 \cos^2 \omega_0 t = \\ &= \beta\left(\sin^2 \omega_0 t - \cos^2 \omega_0 t\right) = \\ &= -2\beta \cos^2(\omega_0 t) + \beta \end{aligned}$$

Also ist die Erzeugende das negative unbestimmte Wirkungsfunktional:

$$S(\beta, p, t) = -\int L\, \mathrm{d}t$$

3.7.7 Lösung zu Aufgabe 3.7.7

Aus

$$\overline{H} = H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right) = \alpha_1$$

folgt durch Umsortieren:

$$\frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right) = \alpha_1 - \frac{1}{2m} p_z^2 - \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2 \ .$$

Separationsansatz:

$$W = W_x(x, \boldsymbol{\alpha}) + W_y(y, \boldsymbol{\alpha}) + W_z(z, \boldsymbol{\alpha})$$
$$\Rightarrow \; p_x = \frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x} \; ; \quad p_y = \frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y} \; ; \quad p_z = \frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}z} \; .$$

Einsetzen in die obige Gleichung bedeutet, dass die rechte Seite nur von z abhängt, die linke nur von x und y. Also muss gelten:

$$\alpha_1 - \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 = \text{const} = \alpha_z$$
$$\Rightarrow \; p_z = \frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}z} = m\omega_z\sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m\omega_z^2} - z^2} \; .$$

Umkehrpunkte:

$$z_\pm = \pm\sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m\omega_z^2}} \; .$$

$$J_z = \oint p_z \mathrm{d}z = 2m\omega_z \int\limits_{z_-}^{z_+} \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m\omega_z^2} - z^2} \; \mathrm{d}z =$$
$$= 2m\omega_z \left[\frac{1}{2} z \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m\omega_z^2} - z^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_z}{m\omega_z^2} \arcsin \frac{z}{\sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m\omega_z^2}}} \right] \Bigg|_{z_-}^{z_+} =$$
$$= 2m\omega_z \frac{\alpha_1 - \alpha_z}{m\omega_z^2} \pi$$
$$\Rightarrow \; J_z = \frac{2\pi}{\omega_z}(\alpha_1 - \alpha_z) \; .$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 = \alpha_z - \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2$$
$$\Rightarrow \; p_x = \frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}x} = m\omega_x\sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2} - x^2} \; .$$

Umkehrpunkte:

$$x_\pm = \pm\sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2}} \; .$$

Dies bedeutet:

$$J_x = 2m\omega_x \int\limits_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2} - x^2} \; \mathrm{d}x \; .$$

Dieselbe Rechnung wie oben ergibt:

$$J_x = \frac{2\pi}{\omega_x}\alpha_x \; .$$

Schließlich bleibt noch:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_y}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 = \alpha_z - \alpha_x \; .$$

Dieselben Überlegungen wie oben ergeben jetzt:

$$J_y = \frac{2\pi}{\omega_y}\left(\alpha_z - \alpha_x\right) \; .$$

Schließlich folgt:

$$\overline{H} = \alpha_1 = \frac{\omega_z}{2\pi}J_z + \alpha_z = \frac{\omega_z}{2\pi}J_z + \frac{\omega_y}{2\pi}J_y + \alpha_x$$

$$\Rightarrow \; \overline{H}(\boldsymbol{J}) = \frac{1}{2\pi}\left(\omega_x J_x + \omega_y J_y + \omega_z J_z\right) \; .$$

Frequenzen:

$$\nu_\alpha = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J_\alpha} = \frac{1}{2\pi}\omega_\alpha \; ; \quad \alpha = x, y, z \; .$$

3.7.8 Lösung zu Aufgabe 3.7.8

Entartungsbedingungen:

$$\nu_x - \nu_y = 0 \; ; \quad \nu_y - \nu_z = 0 \; .$$

Dies ergibt gemäß (3.159) die Erzeugende:

$$F_2 = \left(\omega_x - \omega_y\right)\overline{J}_1 + \left(\omega_y - \omega_z\right)\overline{J}_2 + \omega_z \overline{J}_3$$

$$\Rightarrow \; \bar{\omega}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \overline{J}_1} = \omega_x - \omega_y \; ; \quad \bar{\omega}_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \overline{J}_2} = \omega_y - \omega_z \; ; \quad \bar{\omega}_3 = \frac{\partial F_2}{\partial \overline{J}_3} = \omega_z \; .$$

Dies bedeutet:

$$\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = 0 \; ; \qquad \bar{\nu}_3 = \nu_z \; .$$

Aus F_2 folgt auch:

$$J_x = \frac{\partial F_2}{\partial \omega_x} = \overline{J}_1 \; ; \quad J_y = \frac{\partial F_2}{\partial \omega_y} = -\overline{J}_1 + \overline{J}_2 \; ; \quad J_z = \frac{\partial F_2}{\partial \omega_z} = -\overline{J}_2 + \overline{J}_3$$

$$\Rightarrow \; J_x + J_y + J_z = \overline{J}_3 = \overline{J} \; .$$

Dies bedeutet:

$$\overline{H} = \frac{\omega}{2\pi}\overline{J} \; .$$

Sachverzeichnis