Partie V

Annexes

A

Plans factoriels et représentation linéaire des groupes

Cette annexe est consacrée à l'interprétation algébrique des fractions régulières de plans d'expérience factoriels. Ceci permet une bonne compréhension des principaux résultats énoncés dans les chapitres 3, 4, 5 et 6 relatifs aux plans d'expérience pour facteurs quantitatifs ainsi qu'au chapitre 8 pour des facteur qualitatifs. L'objectif est de présenter ici les bases de cette théorie ainsi que les principaux résultats. Pour une vision plus complète on pourra se référer aux ouvrages de Serre [90] ou Rauch [79] concernant la théorie de représentation linéaire des groupes finis ainsi qu'à l'ouvrage de Collombier [19] pour une application plus détaillée de cette théorie aux fractions de plans factoriels.

A.1 Représentation linéaire des groupes finis

Considérons un espace vectoriel V, de dimension n, sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ et un groupe fini G muni d'une loi de composition interne notée multiplicativement. On note dans la suite $|G|$ le cardinal du groupe G (*i.e.* le nombre de ses éléments). Rappelons que $GL(V)$ désigne le groupe linéaire sur V, c'est-à-dire le groupe constitué par les isomorphismes de V dans V (la loi interne étant la composition des applications notée $\circ$). Une base de V étant fixée, chaque élément de $GL(V)$ peut être représenté par une matrice. La représentation linéaire des groupes consiste à identifier un groupe fini à un groupe de matrices selon la définition suivante :

Définition A.1. *On appelle* **représentation linéaire** *d'un groupe fini G tout morphisme ρ du groupe G dans le groupe $GL(V)$. En d'autres termes :*

$$\rho : G \rightarrow GL(V) \;\; et \; \forall \; g, h \in G \; , \; \rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h) \, .$$

L'espace vectoriel V est appelé **espace de la représentation**, *sa dimension est le* **degré** *de la représentation.*

On note dans la suite ρ_g au lieu de $\rho(g)$ afin de ne pas alourdir les notations.

Définition A.2. *Soient* ρ et ρ' *deux représentations linéaires du groupe* G *dans les espaces vectoriels* V *et* V'*. On dit qu'elles sont* **isomorphes** *s'il existe un isomorphisme linéaire* τ *de* V dans V' *vérifiant :*

$$\forall\, g \in G\ ,\ \rho_g = \tau^{-1} \circ \rho'_g \circ \tau.$$

Matriciellement, cette définition dit que si deux représentations sont isomorphes alors il existe une matrice de passage permettant de ramener une des deux représentations à l'autre par simple changement de base. Deux représentations isomorphes sont donc identifiables de manière naturelle (et ont même degré). Etant donné une représentation la question se pose alors de savoir si elle admet des sous-représentations (*i.e.* des représentations obtenues à partir d'un sous-espace vectoriel de V). Ceci conduit à la notion suivante :

Définition A.3. *Soit* $\rho : G \to GL\,(V)$ *une représentation linéaire du groupe fini* G*. On dit qu'elle est* **irréductible** *si aucun sous-espace vectoriel propre de* V *n'est stable par* G*.*

On montre ensuite qu'il n'est pas nécessaire de connaitre tous les ρ_g afin de caractériser une représentation. En effet, la connaissance de la trace de ces isomorphismes est suffisante. Ceci amène la définition des caractères d'une représentation :

Définition A.4. *Soit* $\rho : G \to GL\,(V)$ *une représentation linéaire du groupe fini* G*. On appelle* **caractère** *de cette représentation tout vecteur de* $\mathbb{C}^{|G|}$, noté χ_ρ (*ou simplement* χ), *tel que ses composantes sont données par :*

$$\forall\, g \in G\ ,\ \left(\chi_\rho\right)(g) = \mathrm{Trace}\,(\rho_g)\,.$$

Remarquons que quelle que soit la représentation ρ la composante associée à l'élément neutre 1 du groupe G vérifie (puisque ρ est un morphisme) :

$$\left(\chi_\rho\right)(1) = Tr\,(\rho_1) = Tr\,(Id_V) = n.$$

Considérons maintenant deux caractères χ et $\chi^{'}$ d'un même groupe fini. Leur produit scalaire est alors défini de la manière naturelle suivante :

$$\langle \chi \mid \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_g} \chi'_g = \frac{1}{|G|} {}^t\overline{\chi}\chi'.$$

Les relations ci-dessous, dites d'orthogonalité des caractères, sont toujours vérifiées (voir l'ouvrage de Serres [90] pour une démonstration) :

Proposition A.5. *Pour tout groupe G fini on peut dire que :*

1) *si χ est le caractère d'une* **représentation irréductible** alors :

$$\langle \chi \mid \chi \rangle = 1.$$

2) *les caractères χ et χ' de* **deux représentations irréductibles non-isomorphes** *sont orthogonaux:*

$$\langle \chi \mid \chi' \rangle = 0.$$

On manipule souvent dans la suite des groupes obtenus comme produit cartésien de deux ou plusieurs autres groupes. Rappelons que si G_1 et G_2 sont deux groupes finis, de cardinaux respectifs $|G_1|$ et $|G_2|$, munis d'une même loi de composition interne (notée multiplicativement) alors le **groupe produit** (direct) de G_1 et G_2 est l'ensemble :

$$G_1 \times G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \ / \ g_1 \in G_1 \text{ et } g_2 \in G_2 \right\}$$

muni du produit d'Hadamard comme loi de composition interne :

$$\forall\ g_1, h_1 \in G_1 \text{ et } \forall\ g_2, h_2 \in G_2\ ,\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 h_1 \\ g_2 h_2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $(G_1 \times G_2, \odot)$ est un groupe fini d'ordre $|G_1| \,.\, |G_2|$. Il sera souvent utile de déterminer de manière simple les caractères de tels groupes. Ceci est possible en utilisant l'opérateur de produit tensoriel :

Définition A.6. *Soient deux vecteurs $u \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^m$. On appelle* **produit tensoriel** *de u et v le vecteur de $\mathbb{R}^{nm}$ noté $u \otimes v$ défini par :*

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} v_1 u \\ v_2 u \\ \vdots \\ v_m u \end{pmatrix}.$$

Remarque. Attention au fait que la définition proposée ici ne correspond pas à l'ordre usuel des éléments du produit tensoriel de deux vecteurs. En effet on désigne classiquement par $u \otimes v$ le vecteur dont les éléments sont $u_1 v, u_2 v, ..., u_n v$. En d'autres termes, ce que nous écrivons ici $u \otimes v$ correspond à $v \otimes u$ dans d'autres ouvrages. On utilisera cependant cette convention car elle permet d'avoir des résultats très faciles à écrire dans la suite.

Considérons maintenant deux groupes finis G_1 et G_2 associés à deux représentations linéaires ρ^1 et ρ^2 dont les caractères sont connus. Le problème se pose d'en déduire les caractères du groupe produit $G_1 \times G_2$. On montre que :

Proposition A.7. *Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères des groupes G_1 et G_2 alors $\chi_1 \otimes \chi_2$ est un* **caractère** *du groupe produit $G_1 \times G_2$.*

Terminons enfin par les propriétés spécifiques des groupes commutatifs (voir aussi le paragraphe 13 de l'ouvrage de Hall [47]) :

Proposition A.8. *Soit un groupe abélien fini G d'ordre h. Ce groupe admet h* **représentations irréductibles** *(non-isomorphes) de degré un et l'ensemble des caractères constitue un groupe abélien fini (pour le produit d'Hadamard), noté G^*, isomorphe à G. Le groupe G^* est appelé* **dual** *de G.*

A.2 Application aux plans à deux niveaux

A.2.1 Cas des plans factoriels complets

Considérons un plan d'expérience factoriel complet à m facteurs (sans aucune réplications centrales) et deux niveaux par facteur. Comme cela a été montré au chapitre 3 il est donc constitué par les expériences situées aux sommets du cube $[-1,1]^m$, c'est-à-dire l'ensemble des points $\{-1,1\}^m$. Il est possible de munir cet ensemble de la loi de composition interne qu'est le produit d'Hadamard de $\mathbb{R}^m$. Cette loi est associative et commutative, elle admet un élément neutre $(\mathbb{I})$ et tout élément de $\{-1,1\}^m$ est son propre symétrique. D'où :

Proposition A.9. *Tout plan factoriel complet à m facteurs peut être identifié au* **groupe abélien** $(\{-1,1\}^m, \odot)$.

Déterminons maintenant les caractères du groupe $(\{-1,1\}^m, \odot)$. Comme il s'agit d'un groupe produit il suffit donc de connaitre uniquement les caractères du groupe $(\{-1,1\}, \times)$ obtenu lorsque $m=1$. Ce groupe étant abélien d'ordre 2 admet deux représentations irréductibles et donc deux caractères distincts. Comme on a toujours $\chi(1)=1$ la table des caractères de ce groupe est obtenue immédiatement par :

élémt. du groupe	caractère χ_0	caractère χ_1
-1	1	-1
1	1	1

Ecrivons maintenant les produits tensoriels de χ_0 avec χ_1. On obtient alors la matrice suivante qui n'est autre que la matrice du plan factoriel complet à deux facteurs écrite selon l'ordre de Yates :

$$\left[\chi_1 \otimes \chi_0 \;\; \chi_0 \otimes \chi_1\right] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De même, écrivons maintenant tous les produits tensoriels à trois vecteurs ne faisant intervenir qu'une fois χ_1. Ceci donne la matrice ci-dessous qui est cette fois la matrice du plan factoriel complet à trois facteurs :

$$\left[\chi_1 \otimes \chi_0 \otimes \chi_0 \ \chi_0 \otimes \chi_1 \otimes \chi_0 \ \chi_0 \otimes \chi_0 \otimes \chi_1\right] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ce raisonnement est généralisable sans difficulté pour m facteurs et on obtient le résultat suivant avec δ_{ij} le symbole de Kronecker (*i.e.* $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon) :

Proposition A.10. *Soit un plan d'expérience factoriel complet à m facteurs et D la matrice de ce plan écrite selon l'ordre de Yates. La colonne de D associée à l'effet linéaire β_i est aussi le* **caractère** *du groupe* $\left(\{-1,1\}^m, \odot\right)$ *donné par :*

$$\bigotimes_{k=1}^{m} \chi_{\delta_{ik}}$$

On vient donc de voir qu'il est possible d'identifier les m colonnes de la matrice d'un plan factoriel complet à m caractères du groupe $\left(\{-1,1\}^m, \odot\right)$. Montrons maintenant qu'il en est de même pour les colonnes des effets d'interactions. Ces colonnes sont obtenues en réalisant le produit d'Hadamard des colonnes des effets linéaires intervenant dans l'interaction considérée. Utilisons le résultat suivant (évident à démontrer) liant les opérateurs produit d'Hadamard et produit tensoriel :

Lemme A.11. *Soient a, b, c et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors :*

$$(a \otimes b) \odot (c \otimes d) = (a \odot c) \otimes (b \odot d).$$

Reprenons maintenant l'exemple du plan factoriel complet à 3 facteurs et déterminons la colonne de la matrice X du modèle associée à l'effet d'interaction β_{12}. Elle est obtenue en réalisant le produit d'Hadamard des colonnes associées à β_1 et β_2 ce qui donne d'après le lemme $A.11$:

$$(\chi_1 \otimes \chi_0 \otimes \chi_0) \odot (\chi_0 \otimes \chi_1 \otimes \chi_0) = (\chi_1 \odot \chi_0) \otimes (\chi_0 \odot \chi_1) \otimes (\chi_0 \odot \chi_0).$$

On a les règles de calculs suivantes (d'après la définition de χ_0 et χ_1) :

$$\chi_0 \odot \chi_0 = \chi_0 \ , \ \chi_1 \odot \chi_1 = \chi_0 \text{ et } \chi_0 \odot \chi_1 = \chi_1$$

donc :

$$(\chi_1 \otimes \chi_0 \otimes \chi_0) \odot (\chi_0 \otimes \chi_1 \otimes \chi_0) = \chi_1 \otimes \chi_1 \otimes \chi_0.$$

On vérifie de même que :

$$\begin{cases} \text{la colonne associée à } \beta_{13} \text{ est } \chi_1 \otimes \chi_0 \otimes \chi_1, \\ \text{la colonne associée à } \beta_{23} \text{ est } \chi_0 \otimes \chi_1 \otimes \chi_1, \\ \text{la colonne associée à } \beta_{123} \text{ est } \chi_1 \otimes \chi_1 \otimes \chi_1. \end{cases}$$

En d'autres termes si A est l'ensemble des indices utilisés pour l'interaction étudiée (par exemple $A = \{1, 2\}$ pour β_{12}), la colonne correspondante dans la matrice du modèle est obtenue par produit tensoriel des χ_i où $i = 1$ si i est dans A et $i = 0$ sinon. Ce résultat est généralisable sans difficulté et on obtient alors la proposition suivante étendant la proposition $A.10$ aux effets d'interactions :

Proposition A.12. *Considérons un plan d'expérience factoriel complet à m facteurs de matrice D écrite selon l'ordre de Yates. Soit une interaction à k facteurs et A l'ensemble des k indices intervenant dans cette interaction. La colonne associée à cette interaction dans la matrice X du modèle est aussi le* **caractère** *du groupe* $(\{-1, 1\}^m, \odot)$ *donné par :*

$$\bigotimes_{k=1}^{m} \chi_{\mathbb{I}_A(k)}$$

Tout ceci permet alors d'énoncer le résultat principal suivant :

Proposition A.13. *Considérons un plan d'expérience factoriel complet à m facteurs et soit X la matrice du modèle contenant toutes les interactions possibles. On peut alors affirmer que :*

1) *le carré de la norme de toute colonne est égale à* 2^m,

2) *deux colonnes distinctes de X sont toujours* **orthogonales**.

Démonstration. Les résultats énoncés ici sont la conséquence directe des relations d'orthogonalité des caractères énoncées à la proposition $A.5$. En effet, il suffit de remarquer que si X est la matrice du modèle contenant toutes les interactions possibles (d'ordre 2, 3 ... m) alors elle est constituée par les colonnes suivantes :

1) $\displaystyle\bigotimes_{k=1}^{m} \chi_0 = \mathbb{I}_{2^m}$ associée à l'effet moyen général β_0,

2) $\displaystyle\bigotimes_{k=1}^{m} \chi_{\delta_{ik}}$ associées aux m effets linéaires β_i,

3) $\displaystyle\bigotimes_{k=1}^{m} \chi_{\mathbb{I}_A(k)}$ associées à toutes les interactions possibles β_{ij}, β_{ijk}, *etc...*

On obtient donc ainsi 2^m vecteurs distincts et chacun d'eux est un caractère du groupe $(\{-1,1\}^m, \odot)$. Ce groupe ayant pour cardinal 2^m il s'agit donc de tous les caractères de ce groupe et la proposition $A.13$ découle alors directement des relations d'orthogonalité des caractères (proposition $A.5$) ■

Application 1

Autre démonstration de la proposition 3.7 :

" *Tout plan factoriel complet est un plan d'expérience usuel pour un modèle d'ordre un, vérifiant de plus* $s_2 = 2^m$".

On peut dire que :

1) la colonne associée à l'effet linéaire β_i $(i = 1, ..., m)$ est orthogonale à la colonne associée à β_0 donc $[i] = 0$,

2) les colonnes associées aux effets linéaires β_i et β_j $(i, j = 1, ..., m$ avec $i \neq j)$ sont orthogonales donc $[ij] = 0$,

3) la colonne associée à l'effet linéaire β_i $(i = 1, ..., m)$ a une norme carrée égale à 2^m donc $n\left[i^2\right] = 2^m$.

Tout plan factoriel complet est donc bien un plan d'expérience usuel pour un modèle d'ordre un (rajouter d'éventuelles réplications centrales ne change en rien les résultats précédents).

Application 2

Autre démonstration de la proposition 3.10 :

"*Les colonnes de D, matrice d'un plan factoriel complet, sont des contrastes non-unitaires de* $\{-1,1\}^{2^m}$ *et le produit d'Hadamard de k colonnes distinctes de D est aussi un contraste non-unitaire de* $\{-1,1\}^{2^m}$".

On peut dire que :

1) la colonne associée à l'effet linéaire β_i $(i = 1, ..., m)$ est orthogonale à la colonne associée à β_0 donc $[i] = 0$. En d'autres termes, la colonne associée à β_i est bien un contraste non-unitaire de $\{-1,1\}^{2^m}$.

2) considérons la colonne de X obtenue en réalisant le produit d'Hadamard de k colonnes distinctes de D. Cette colonne est donc associée à une interaction d'ordre k et la proposition $A.13$ assure qu'elle est en particulier orthogonale à la colonne associée à β_0, il s'agit donc bien d'un contraste non-unitaire de $\{-1,1\}^{2^m}$.

Application 3

Autre démonstration de la proposition 4.4 :

" *Tout plan factoriel complet est un plan d'expérience usuel pour un modèle à effets d'interactions d'ordre deux, vérifiant de plus* $s_2 = 2^m$ *et* $s_{22} = 2^m$".

On peut dire que :

1) concernant les moments impairs, on a l'orthogonalité entre les couples de colonnes associés aux effets suivants $(i, j, k, l = 1, ..., m$ avec $i < j < k < l)$:

$$\begin{array}{ll} \beta_i \text{ et } \beta_0 \text{ donc } [i] = 0, & \beta_{ij} \text{ et } \beta_k \text{ donc } [ijk] = 0, \\ \beta_{ij} \text{ et } \beta_0 \text{ donc } [ij] = 0, & \beta_{ij} \text{ et } \beta_{ik} \text{ donc } \left[i^2jk\right] = 0, \\ \beta_{ij} \text{ et } \beta_i \text{ donc } \left[i^2j\right] = 0, & \beta_{ij} \text{ et } \beta_{kl} \text{ donc } [ijkl] = 0. \end{array}$$

Ceci montre bien que tous les moments impairs sont nuls jusqu'à l'ordre 4.

2) la colonne associée à l'effet linéaire β_i $(i = 1, ..., m)$ ainsi que la colonne associée à l'effet d'interaction β_{ij} $(i, j = 1, ..., m$ avec $i < j)$ ont une norme carrée égale à 2^m donc :

$$n\left[i^2\right] = 2^m \text{ et } n\left[i^2j^2\right] = 2^m.$$

Tout plan factoriel complet est donc bien un plan d'expérience usuel pour un modèle à effets d'interactions d'ordre deux (rajouter d'éventuelles réplications centrales ne change en rien les résultats précédents).

A.2.2 Cas des fractions régulières

Le paragraphe précédent a montré tout l'intérêt de la théorie de représentation linéaire des groupes finis afin de formaliser la construction ainsi que les principales propriétés des plans factoriels complets. Etendons maintenant ceci aux fractions régulières de plans factoriels. Commençons tout d'abord par donner la définition algébrique des fractions régulières.

Définition A.14. *Soit un plan factoriel complet à m facteurs identifié au groupe abélien $G = \{-1, 1\}^m$ muni du produit d'Hadamard. On appelle* **fraction régulière** *(principale) tout plan d'expérience associé à un* **sous-groupe** *S de G.*

Illustrons ceci par un exemple pour $m = 3$ facteurs. Le tableau ci-dessous est la table des caractères du groupe $G = \{-1, 1\}^3$ c'est-à-dire la matrice du modèle contenant toutes les interactions (on note, pour des raisons de place, χ_{ijk} au lieu de $\chi_i \otimes \chi_j \otimes \chi_k$). Chaque élément du groupe G est identifié aux trois valeurs (en gras dans le tableau) prises par χ_{100}, χ_{010} et χ_{001} (*i.e.* à ses coordonnées dans le plan d'expérience d'après la proposition $A.10$).

Elément	χ_{000}	χ_{100}	χ_{010}	χ_{001}	χ_{110}	χ_{101}	χ_{011}	χ_{111}
$(-1,-1,-1)$	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
$(1,-1,-1)$	1	**1**	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	-1	-1	1	1
$(-1,1,-1)$	1	$-\mathbf{1}$	**1**	$-\mathbf{1}$	-1	1	-1	1
$(1,1,-1)$	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
$(-1,-1,1)$	1	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	**1**	1	-1	-1	1
$(1,-1,1)$	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
$(-1,1,1)$	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
$(1,1,1)$	1	**1**	**1**	**1**	1	1	1	1

Considérons alors non plus le groupe G mais le sous-groupe S constitué des éléments suivants :

$$S = \{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)\}.$$

La fraction régulière du plan factoriel complet associée à S est alors obtenue en ne conservant que les expériences (*i.e.* les lignes du tableau) associées aux éléments de S. Les expériences retenues figurent dans la table en caractères de grande taille. En désignant par G^* le dual du groupe G (voir la proposition A.8) on définit maintenant l'orthogonal du groupe S dans G^* par (voir Lang [62]) :

Définition A.15. *Soit un sous-groupe S de $G = \{-1,1\}^m$. On appelle* **orthogonal** *de S (dans G^*) l'ensemble, noté $S^\perp$, des caractères χ de G^* tels que $\chi(g) = 1$ pour tout $g \in S$. Donc :*

$$S^\perp = \{\chi \in G^* \ / \ g \in S \Longrightarrow \chi(g) = 1\}.$$

Les éléments de $S^\perp$ sont appelés **contrastes de définition** *de la fraction régulière utilisée.*

On a les propriétés suivantes (voir Lang [62]) :

Proposition A.16. *Soit S un sous-groupe de $G = \{-1,1\}^m$ et $S^\perp$ l'orthogonal de S dans G^*. Alors, $S^\perp$ est un* **sous-groupe** *de G^* et le nombre d'éléments de $S^\perp$ vérifie :*

$$\mathrm{card}\left(S^\perp\right) = \frac{\mathrm{card}\,(G)}{\mathrm{card}\,(S)}.$$

Remarque. La notion de contraste de définition présentée en A.15 est bien identique à celle introduite au chapitre 3 (définition 3.12). En effet, le groupe $S^\perp$ ou le groupe des contrastes de définition $\mathcal{G}$ sont **identiques** (seules les notations diffèrent). Pour l'exemple présenté ici on a :

$$S^\perp = \{\chi_{000}, \chi_{111}\} \text{ et } \mathcal{G} = \{\mathbb{I}, \mathtt{123}\}.$$

La colonne associée à $\chi_{000} = \chi_0 \otimes \chi_0 \otimes \chi_0$ correspond bien à l'effet moyen général du modèle et la colonne associée à $\chi_{111} = \chi_1 \otimes \chi_1 \otimes \chi_1$ correspond à l'interaction **123** entre les trois facteurs étudiés.

La proposition A.16 permet de démontrer le résultat suivant (relation 1 de la proposition 3.15) :

Proposition A.17. *Soit un plan d'expérience factoriel complet à m facteurs et une fraction régulière obtenue à l'aide de q générateurs. Une telle fraction régulière est constituée par 2^{m-q}* **expériences**.

Démonstration. Le plan factoriel complet peut être identifié au groupe $G = \{-1, 1\}^m$ ayant pour cardinal 2^m. De même, il a été prouvé (voir la proposition 3.13) que si une fraction régulière est définie par q générateurs alors le groupe $\mathcal{G}$ des contrastes de définition (ou de manière identique le groupe $S^{\perp}$) est un groupe fini de cardinal 2^q. Le résultat est alors immédiat d'après la proposition A.16 puisque :

$$\text{card}\,(S) = \frac{\text{card}\,(G)}{\text{card}\,(S^{\perp})} = 2^{m-q} \qquad \blacksquare$$

On a maintenant le résultat principal suivant permettant d'étendre la proposition A.13 au cas des fractions régulières :

Proposition A.18. *Considérons une fraction régulière de plan d'expérience factoriel à m facteurs et désignons par X la matrice du modèle contenant toutes les interactions possibles. On peut alors affirmer que :*

1) *le carré de la norme de toute colonne est égale à 2^{m-q},*

2) *deux colonnes distinctes de X sont soit* **orthogonales** *soit* **colinéaires**.

Démonstration. La proposition énoncée en 1 découle immédiatement de la proposition A.17 disant que la matrice X a 2^{m-q} lignes. Concernant la proposition énoncée en 2, considérons au préalable la matrice carrée, élément de $\mathcal{M}\,(2^m, 2^m)$, du modèle contenant tous les effets d'interactions du plan factoriel complet.

Il convient de distinguer, dans un premier temps, la sous-matrice X du modèle obtenue avec la fraction régulière considérée. Cette matrice, élément de $\mathcal{M}\,(2^{m-q}, 2^m)$, est obtenue en supprimant 2^q lignes de la matrice complète. Puisque la fraction régulière est identifiable à un groupe abélien fini S, d'ordre 2^{m-q}, on peut aussi considérer ensuite la table $\widetilde{X}$ des 2^{m-q} caractères des représentations irréductibles non-isomorphes de ce groupe. Cette matrice $\widetilde{X}$, élément de $\mathcal{M}\,(2^{m-q}, 2^{m-q})$, est obtenue en supprimant 2^q colonnes de X.

On peut ainsi démontrer la relation 2 puisque pour deux colonnes distinctes de X deux situations peuvent alors se présenter :

1) soit les deux colonnes considérées correspondent à deux représentations irréductibles non-isomorphes de S (*i.e.* les deux colonnes appartiennent à $\widetilde{X}$) et sont donc orthogonales (voir la proposition $A.5$),

2) soit les deux colonnes considérées correspondent à deux représentations irréductibles isomorphes de S et sont colinéaires ■

Remarque 1. Puisque seuls les plans factoriels à deux niveaux sont considérés dans cette section on peut donc affiner la relation 2 en disant que deux colonnes colinéaires sont alors obligatoirement égales ou opposées. Deux colonnes colinéaires sont de plus obligatoirement égales si l'on utilise une fraction principale.

Remarque 2. Rappelons que pour déterminer tous les couples de colonnes de X colinéaires il suffit de construire la **table des confusions d'effets** telle qu'elle a été présentée au paragraphe 3.4.3. Pour l'exemple précédent où $\mathcal{G} = \{\mathbb{I}, \mathtt{123}\}$ il y a donc colinéarité des couples de colonnes suivants :

$$\{\mathbb{I}, \mathtt{123}\} \;,\; \{\mathtt{1}, \mathtt{23}\} \;,\; \{\mathtt{2}, \mathtt{13}\} \;,\; \{\mathtt{3}, \mathtt{12}\}\,.$$

Application

Démontrons la fin de la proposition 3.15 dont l'énoncé est :

"*si D est la matrice d'une fraction régulière alors les colonnes de D sont des contrastes de $\{-1,1\}^{2^{m-q}}$ et le produit d'Hadamard de k colonnes distinctes de D $(2 \leq k \leq m)$ est aussi un contraste de $\{-1,1\}^{2^{m-q}}$*".

On sait que :

1) la colonne associée à l'effet linéaire β_i $(i = 1, ..., m)$ est soit orthogonale soit colinéaire à la colonne associée à β_0. En d'autres termes, la colonne associée à β_i est donc bien un contraste de l'ensemble $\{-1,1\}^{2^m}$ (non-unitaire uniquement dans le cas où l'on a l'orthogonalité),

2) considérons la colonne de X obtenue en réalisant le produit d'Hadamard de k colonnes distinctes de D. Cette colonne est donc associée à une interaction d'ordre k et la proposition $A.18$ nous dit qu'elle est en particulier soit orthogonale soit colinéaire à la colonne associée à β_0. Il s'agit donc bien d'un contraste de $\{-1,1\}^{2^m}$ (une nouvelle fois non-unitaire uniquement en cas d'orthogonalité).

A.3 Généralisation

Généralisons ici les résultats de la section $A.2$ au cas où plus de deux niveaux interviennent pour chacun des facteurs. Ceci est donc en rapport avec le chapitre 8 lorsque m facteurs qualitatifs à h modalités sont considérés (on dit alors que le plan d'expérience est symétrique car le nombre le modalités est identique pour tous les facteurs).

A.3.1 Cas des plans factoriels complets

Il a été montré au paragraphe 8.2.1 du chapitre 8 qu'un plan d'expérience pour facteurs qualitatifs peut facilement être décrit à l'aide du codage naturel. Dans le cas où chaque facteur est à h modalités il s'agit donc de coder chacune des modalités par un élément de l'ensemble $\{0, 1, ..., h-1\}$. Il en résulte que, comme cela a déjà été énoncé dans un cas plus général à la définition 8.7, tout plan d'expérience factoriel complet à m facteurs est constitué par l'ensemble des points de l'ensemble $\{0, 1, ..., h-1\}^m$. Remarquons que $\{0, 1, ..., h-1\}$ peut être considéré comme l'ensemble des restes de la division euclidienne par h. Muni classiquement de l'addition modulo h on obtient alors le groupe $(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}, +)$. Lorsque m facteurs sont considérés on peut donc réaliser l'identification suivante :

Proposition A.19. *Tout plan factoriel complet pour m facteurs qualitatifs à h modalités peut être identifié au groupe abélien $((\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^m, +)$.*

Remarque. Ceci est bien une généralisation de la définition A.9 relative aux plans factoriels complets à 2 niveaux puisque (pour un seul facteur) les groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ ou $(\{-1, 1\}, \times)$ peuvent être mis en bijection à l'aide de l'isomorphisme élémentaire suivant :

$$\phi : (\{-1, 1\}, \times) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \text{ tel que } \phi(-1) = 1 \text{ et } \phi(1) = 0.$$

Déterminons maintenant les caractères du groupe $((\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^m, +)$. Comme il s'agit d'un groupe produit il suffit donc de connaître uniquement les caractères du groupe $(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}, +)$ obtenu lorsque $m = 1$. Il s'agit d'un groupe abélien d'ordre h qui peut aussi être vu de manière équivalente comme le groupe cyclique C_h des racines complexes de l'unité ou encore, géométriquement, comme le groupe des rotations d'angles multiples de $(2\pi/h)$ autour d'un axe donné. On sait alors (voir Serre [90] ainsi que la section A.1) qu'il existe h caractères et ces caractères sont obtenus à partir du vecteur contenant toutes les racines h-ièmes de l'unité. L'exemple suivant détaille les caractères dans le cas où $h = 3$. En notant $\omega = e^{i(2\pi/3)}$ une des racines troisième complexe de l'unité les trois caractères du groupe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ sont :

élémt. du groupe	caractère χ_0	caractère χ_1	caractère χ_2
0	ω^0	ω^0	ω^0
1	ω^0	ω^1	ω^2
2	ω^0	ω^2	ω^1

Remarquons que l'on a aussi plus simplement (avec les notations symboliques des puissances par rapport au produit d'Hadamard) :

$$\chi_0 = \mathbb{I}_3 = \chi_1^0 \text{ et } \chi_2 = \chi_1 \odot \chi_1 = \chi_1^2.$$

Ce résultat est généralisable à toute valeur de h : à partir du vecteur χ_1 on obtient tous les autres caractères en élevant ce vecteur à toutes les puissances comprises entre 0 et $(h-1)$. Utilisons maintenant ces caractères afin de retrouver la matrice du plan factoriel complet pour $m=2$ facteurs à $h=3$ modalités. Considérons la matrice $D_{\mathbb{C}}$ dont les deux colonnes sont constituées respectivement par les caractères $\chi_1 \otimes \chi_0$ et $\chi_0 \otimes \chi_1$ du groupe $\left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, +\right)$. Il vient alors (avec parallèlement la matrice D ci-dessous du plan en codage naturel) :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } D_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^1 & \omega^0 \\ \omega^2 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 \\ \omega^1 & \omega^1 \\ \omega^2 & \omega^1 \\ \omega^0 & \omega^2 \\ \omega^1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix}.$$

On constate donc que les matrices D et $D_{\mathbb{C}}$ sont **identiques** à l'isomorphisme suivant près (pour tout k de $\{0, 1, ..., h-1\}$) :

$$\varphi : (C_h, \times) \to \left(\frac{\mathbb{Z}}{h\mathbb{Z}}, +\right) \text{ tel que } \varphi\left(e^{i\left(k\frac{2\pi}{h}\right)}\right) = \varphi\left(\omega^k\right) = k.$$

On qualifie dans la suite $D_{\mathbb{C}}$ de **matrice complexe** du plan. On généralise alors sans difficulté ce type de construction dans le cas où m facteurs à h modalités sont considérés et il vient (en désignant toujours par δ_{ij} le symbole de Kronecker) :

Proposition A.20. *Soit un plan d'expérience factoriel complet pour m facteurs à h modalités. Désignons par $D_{\mathbb{C}}$ la matrice complexe de ce plan écrite selon l'ordre de Yates et considérons les caractères χ_0 et χ_1 du groupe $(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}, +)$ tels que $\chi_0 = \mathbb{I}_h$ et $\chi_1 = {}^t\left(\omega^0, \omega^1, ..., \omega^{h-1}\right)$ avec $\omega = e^{i(2\pi/h)}$. La colonne de $D_{\mathbb{C}}$ associée aux modalités du facteur i est alors aussi le* **caractère** *du groupe $\left((\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^m, +\right)$ donné par :*

$$\bigotimes_{k=1}^{m} \chi_{\delta_{ik}}$$

Prouvons maintenant qu'un tel plan d'expérience est toujours orthogonal. On sait que l'orthogonalité dans le cas de facteurs qualitatifs se traduit facilement par le biais des matrices d'incidences $N_{ij} = {}^tX_iX_j$. C'est pourquoi on cherche dans un premier temps à établir le lien mathématique existant entre la matrice complexe du plan et les diverses matrices X_i des indicatrices des modalités des facteurs. Considérons pour cela la matrice complexe du modèle additif $X_{\mathbb{C}}$ définie naturellement par $X_{\mathbb{C}} = [\mathbb{I}_n \mid D_{\mathbb{C}}]$ ainsi que la matrice F telle que (avec toujours $\omega = e^{i(2\pi/h)}$) :

$$F = F_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \dots & \omega^{h-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \dots & \omega^{2(h-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{h-1} & \omega^{2(h-1)} \dots & \omega^{(h-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Une telle matrice est classique, elle est souvent qualifiée de **matrice de Fourier** d'ordre h. Les colonnes de F forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^h$ pour le produit scalaire de la proposition $A.5$ (car elles sont constituées par tous les caractères du groupe $(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}, +)$ et ces caractères sont orthogonaux d'après les propositions $A.5$ et $A.8$). La matrice F est donc orthogonale dans le sens où $F^*F = hI_h$ avec F^* matrice adjointe de F. Introduisons maintenant les matrices complexes G_i définies par la relation :

$$\forall\ i = 1, ..., m\ ,\ G_i = X_i F$$

avec X_i matrice des indicatrices des modalités du facteur i. En illustrant ceci à l'aide de l'exemple précédent pour $m = 2$ facteurs à $h = 3$ niveaux il vient :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \text{ et } F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}.$$

Les matrices G_1 et G_2 sont donc données ici par :

$$G_1 = X_1F = \begin{bmatrix} 1 & \omega^{\mathbf{0}} & \omega^0 \\ 1 & \omega^{\mathbf{1}} & \omega^2 \\ 1 & \omega^{\mathbf{2}} & \omega^1 \\ 1 & \omega^{\mathbf{0}} & \omega^0 \\ 1 & \omega^{\mathbf{1}} & \omega^2 \\ 1 & \omega^{\mathbf{2}} & \omega^1 \\ 1 & \omega^{\mathbf{0}} & \omega^0 \\ 1 & \omega^{\mathbf{1}} & \omega^2 \\ 1 & \omega^{\mathbf{2}} & \omega^1 \end{bmatrix} \text{ et } G_2 = X_2F = \begin{bmatrix} 1 & \omega^{\mathbf{0}} & \omega^0 \\ 1 & \omega^{\mathbf{0}} & \omega^0 \\ 1 & \omega^{\mathbf{0}} & \omega^0 \\ 1 & \omega^{\mathbf{1}} & \omega^2 \\ 1 & \omega^{\mathbf{1}} & \omega^2 \\ 1 & \omega^{\mathbf{1}} & \omega^2 \\ 1 & \omega^{\mathbf{2}} & \omega^1 \\ 1 & \omega^{\mathbf{2}} & \omega^1 \\ 1 & \omega^{\mathbf{2}} & \omega^1 \end{bmatrix}.$$

On constate donc que (par exemple) la matrice G_1 permet de retrouver la colonne (en caractères gras) relative aux diverses modalités, sous forme complexe, du facteur 1. Les deux autres colonnes de G_1 sont engendrées par cette même colonne puisque, en la désignant par $\mathtt{1}$, il s'agit de $\mathtt{1}^0 = \mathbb{I}$ et $\mathtt{1}^2 = \mathtt{1} \odot \mathtt{1}$. Ce résultat concernant la forme des matrices G_i est généralisable sans difficulté car il est dû au fait que, par définition, la matrice de Fourier F est elle-même engendrée par les puissances successives d'une même colonne. On obtient donc le résultat général suivant :

Proposition A.21. *Soit un plan d'expérience pour m facteurs qualitatifs à h modalités. Désignons par $X_i \in \mathcal{M}(n,h)$ la matrice des modalités du facteur i, par $F \in \mathcal{M}(h,h)$ la matrice de Fourier d'ordre h et indroduisons les matrices $G_i \in \mathcal{M}(n,h)$ par la relation suivante :*

$$\forall\ i = 1, ..., m\ ,\ G_i = X_i F.$$

En désignant par $\mathtt{i}$ la colonne de la matrice complexe $D_{\mathbb{C}}$ relative au facteur i on a alors (avec $\mathtt{i}^2 = \mathtt{i} \odot \mathtt{i}$, $\mathtt{i}^3 = \mathtt{i} \odot \mathtt{i} \odot \mathtt{i}$, etc ...) :

$$G_i = \left[\mathbb{I}_n \mid \mathtt{i} \mid \mathtt{i}^2 \mid ... \mid \mathtt{i}^{h-1} \right].$$

Remarquons que puisque la matrice de Fourier F est orthogonale il en résulte qu'elle est toujours inversible avec de plus $F^{-1} = (1/h)\,F^*$. On en déduit donc que :

$$\forall\ i = 1, ..., m\ ,\ G_i = X_i F\ \Leftrightarrow\ \forall\ i = 1, ..., m\ ,\ X_i = \frac{1}{h} G_i F^*.$$

Le résultat suivant est alors immédiat :

Proposition A.22. *Soit un plan d'expérience pour m facteurs qualitatifs à h modalités. La* **matrice d'incidence** *associée aux facteurs i et j $(i,j = 1, ..., m$ avec $i \neq j)$ est donnée par :*

$$N_{ij} = {}^t X_i X_j = \frac{1}{h^2} \left(G_i F^* \right)^* \left(G_j F^* \right) = \frac{1}{h^2} F \left(G_i^* G_j \right) F^*.$$

Application

Autre démonstration, dans le **cas particulier** où $h_1 = ... = h_m = h$, du résultat suivant du paragraphe 8.3.2 :

"tout plan factoriel complet pour m facteurs qualitatifs à $h_1, ..., h_m$ modalités est un plan d'expérience orthogonal tel que :

$$\forall\ i,j = 1, ..., m \text{ avec } i \neq j\ ,\ \lambda_{ij} = \frac{n}{h_i h_j} \text{ où } \ n = \prod_{k=1}^{m} h_k\text{''}.$$

Pour deux facteurs i et j tels que $i \neq j$ considérons la matrice d'incidence N_{ij}. D'après la proposition $A.22$ on a :

$$N_{ij} = \frac{1}{h^2} F \left(G_i^* G_j \right) F^*$$

avec $G_i = \left[\mathbb{I}_n \mid \mathtt{i} \mid \mathtt{i}^2 \mid ... \mid \mathtt{i}^{h-1}\right]$ et $G_j = \left[\mathbb{I}_n \mid \mathtt{j} \mid \mathtt{j}^2 \mid ... \mid \mathtt{j}^{h-1}\right]$. Ces deux matrices sont donc constituées par un total de $2h$ vecteurs colonne qui sont tous des caractères du groupe $\left((\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^m, +\right)$. Les propositions $A.5$ et $A.8$ permettent d'affirmer que ces différents caractères sont orthogonaux entre eux et il vient donc (avec le produit scalaire de la proposition $A.5$) :

$$\forall\ k,l = 0,...,h-1 \text{ avec } (k,l) \neq (0,0)\ ,\ \left(\mathtt{i}^k \mid \mathtt{j}^l\right) = 0.$$

Pour le cas particulier où $(k,l) = (0,0)$ le même caractère est alors sélectionné dans les deux matrices et donc :

$$\left(\mathtt{i}^0 \mid \mathtt{j}^0\right) = (\mathbb{I}_n \mid \mathbb{I}_n) = 1.$$

Tous ces résultats d'orthogonalité se traduisent matriciellement par :

$$G_i^* G_j = \left[\begin{array}{c|ccc} n & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right].$$

Il en résulte que la matrice d'incidence des facteurs i et j est donc (d'après la forme générale de F donnée précédemment) :

$$N_{ij} = \frac{1}{h^2} F\left(G_i^* G_j\right) F^* = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} n & \ldots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \ldots & n \end{bmatrix} = \frac{n}{h^2} J_h.$$

Le résultat est ainsi bien démontré dans le cas où tous les facteurs sont à h modalités puisque :

$$n = h^m \text{ donc } \lambda_{ij} = \frac{n}{h^2} = h^{m-2}.$$

Remarquons que ce dernier résultat est indépendant du choix de i et j, le plan d'expérience obtenu dans ce cas est donc **uniformément orthogonal**.

A.3.2 Cas des fractions régulières

Utilisons une nouvelle fois la théorie de représentation linéaire des groupes finis afin d'étendre les propriétés vues précedemment aux fractions régulières de plans factoriels. L'interprétation algébrique des fractions régulières est tout d'abord donnée ci-dessous :

Définition A.23. *Soit un plan factoriel complet à m facteurs qualitatifs à h modalités identifié au groupe abélien $G = \left((\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})^m, +\right)$. On appelle alors* **fraction régulière** *(principale) tout plan d'expérience associé à un* **sous-groupe** *S de G.*

Illustrons ceci par un exemple pour $m = 2$ facteurs qualitatifs à $h = 3$ modalités. Le tableau ci-dessous est la table des caractères du groupe $G = \left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, +\right)$ en notant, pour des raisons de place, χ_{ij} au lieu de $\chi_i \otimes \chi_j$. Pour simplifier la lecture on note de même simplement i au lieu de la forme complexe ω^i où $\omega = e^{i(2\pi/3)}$ (on utilise donc le codage naturel des modalités des facteurs). Chaque élément du groupe G est identifié aux deux valeurs (en gras dans le tableau) prises par χ_{10} et χ_{01} (*i.e.* à ses coordonnées en codage naturel dans le plan d'expérience d'après la proposition $A.20$). Pour rendre la lecture de ce tableau plus aisée il a été aussi rajouté en première ligne une interprétation plus intuitive de chacun des résultats à partir des colonnes 1 et 2 associées respectivement aux premier et deuxième facteur dans la matrice du plan d'expérience factoriel complet puisque (voir le paragraphe $A.3.1$) :

$$\chi_0 = \mathbb{I}_3 = \chi_1^0 \text{ et } \chi_2 = \chi_1 \odot \chi_1 = \chi_1^2.$$

Les caractères du groupe $\left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, +\right)$ sont alors donnés par :

	$\mathbb{I}$	1	2	12	1^2	2^2	$1^2 2$	12^2	$1^2 2^2$
Elément	χ_{00}	χ_{10}	χ_{01}	χ_{11}	χ_{20}	χ_{02}	χ_{12}	χ_{21}	χ_{22}
$(0,0)$	0	**0**	**0**	0	0	0	0	0	0
$(1,0)$	0	**1**	**0**	1	2	0	2	1	2
$(2,0)$	0	**2**	**0**	2	1	0	1	2	1
$(0,1)$	0	**0**	**1**	1	0	2	1	2	2
$(1,1)$	0	**1**	**1**	2	2	2	0	0	1
$(2,1)$	0	**2**	**1**	0	1	2	2	1	0
$(0,2)$	0	**0**	**2**	2	0	1	2	1	1
$(1,2)$	0	**1**	**2**	0	2	1	1	2	0
$(2,2)$	0	**2**	**2**	1	1	1	0	0	2

Considérons alors non plus le groupe G mais le sous-groupe S constitué des éléments suivants :

$$S = \{(0,0), (2,1), (1,2)\}.$$

La fraction régulière du plan factoriel complet associée à S est alors obtenue en ne conservant que les expériences (*i.e.* les lignes du tableau) associées aux éléments de S. Les expériences retenues figurent dans la table en caractères de grande taille. On définit ensuite, tout comme au paragraphe $A.2.2$ où seulement deux niveaux intervenaient, l'orthogonal du groupe S dans G^* par :

$$S^\perp = \{\chi \in G^* \ / \ g \in S \Longrightarrow \chi(g) = 0\}.$$

Remarquons alors que les notions d'orthogonal du groupe S ou bien de groupe des générateurs de la fraction régulière (voir le paragraphe 8.4.3) sont encore **identiques** (seules les notations diffèrent). Il vient pour l'exemple présenté ici :

$$S^{\perp} = \{\chi_{00}, \chi_{11}, \chi_{22}\} \text{ et } \mathcal{G} = \left\{\mathbb{I}, 12, 1^2 2^2\right\}.$$

Ceci permet alors de démontrer le résultat suivant (énoncé à la proposition 8.12 du chapitre 8) :

Proposition A.24. *Soit m facteurs qualitatifs à h modalités avec h nombre premier. Le nombre d'expériences de toute fraction régulière obtenue à l'aide de q générateurs est alors :*

$$n = h^{m-q}.$$

Démonstration. Pour tout groupe fini G il est encore possible d'utiliser le résultat présenté à la proposition $A.16$ disant (voir Lang [62]) que l'orthogonal $S^{\perp}$ de tout sous-groupe S est lui-même un sous-groupe dont le nombre d'éléments est donné par :

$$\text{card}\left(S^{\perp}\right) = \frac{\text{card}\,(G)}{\text{card}\,(S)}.$$

Or on sait que $\text{card}\,(G) = h^m$ (nombre d'expériences du plan factoriel complet) et $S^{\perp}$ et $\mathcal{G}$ sont isomorphes donc (voir la proposition 8.10) $\text{card}\left(S^{\perp}\right) = h^q$. On en déduit immédiatement que :

$$\text{card}\,(S) = \frac{\text{card}\,(G)}{\text{card}\,(S^{\perp})} = h^{m-q} \qquad \blacksquare$$

Démontrons maintenant le résultat suivant, primordial afin de pouvoir faire le lien entre fractions régulières et notion d'orthogonalité :

Proposition A.25. *Soit m facteurs qualitatifs à h modalités avec h nombre premier. Soit T la table des caractères du groupe G associé au plan factoriel complet et X la restriction de cette table correspondant à une fraction régulière. Deux colonnes distinctes de X sont alors toujours soit* **orthogonales** *soit* **colinéaires**.

Démonstration. La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la propostion $A.18$ énoncée dans le cas particulier où $G = \{-1, 1\}^m$. On sait en effet que la matrice T, élément de $\mathcal{M}\,(h^m, h^m)$, est constituée de colonnes orthogonales puisque G est un groupe abélien d'ordre h^m. On a déjà vu que considérer une fraction régulière définie par q générateurs équivaut donc à ne garder que la matrice $X \in \mathcal{M}\,(h^{m-q}, h^m)$ obtenue en supprimant h^q lignes de T. Enfin la fraction régulière étant associée à un groupe abélien fini S d'ordre h^{m-q} on peut aussi considérer la sous-matrice $\widetilde{X} \in \mathcal{M}\,(h^{m-q}, h^{m-q})$ de X constituée par tous les caractères des représentations irréductibles de ce sous-groupe. La matrice $\widetilde{X}$ est donc obtenue en supprimant h^q colonnes de X et ses colonnes sont orthogonales. On peut ainsi démontrer la proposition $A.25$ puisque si l'on considère deux colonnes distinctes de X alors deux situations peuvent se présenter :

1) soit les deux colonnes considérées correspondent à deux représentations irréductibles non-isomorphes de S (*i.e.* les deux colonnes appartiennent à $\widetilde{X}$) et sont donc orthogonales (voir la proposition $A.5$),

2) soit les deux colonnes considérées correspondent à deux représentations irréductibles isomorphes de S et sont alors colinéaires ■

Ceci permet maintenant de démontrer le résultat principal suivant (proposition 8.13 du chapitre 8) :

Proposition A.26. *Soit m facteurs qualitatifs à h modalités avec h nombre premier. Toute fraction régulière de plan factoriel complet de résolution égale à III (ou plus) est un plan d'expérience* **orthogonal**.

Démonstration. Justifions tout d'abord que l'utilisation d'une fraction régulière de résolution inférieure à III est toujours incompatible avec la propriété d'orthogonalité du plan d'expérience.

1) Considérons une fraction régulière de résolution I. Il existe donc au moins un mot de longueur égale à 1 dans le groupe $\mathcal{G}$. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'il s'agit de $\mathtt{1}^{\alpha_1}$. Le nombre de modalités h étant premier on est alors assuré que les éléments $\mathtt{1}, \mathtt{1}^2, \ldots, \mathtt{1}^{h-1}$ sont aussi dans le groupe $\mathcal{G}$. Il vient donc en particulier : $\mathbb{I} = \mathtt{1}$. Cette relation est incompatible avec la propriété d'orthogonalité puisqu'elle impose d'utiliser toujours la même modalité pour le facteur 1 tout au long des expériences (ce qui est en contradiction avec la propriété 2 de la proposition 8.4).

2) Considérons maintenant une fraction régulière de résolution II. Il existe donc au moins un mot de longueur égale à 2 dans le groupe $\mathcal{G}$. Supposons, toujours sans perte de généralité, qu'il s'agit de $\mathtt{1}^{\alpha_1}\mathtt{2}^{\alpha_2}$. On peut alors affirmer que :

$$\mathbb{I} = \mathtt{1}^{\alpha_1}\mathtt{2}^{\alpha_2} \Leftrightarrow \mathtt{1}^{h-\alpha_1} = \mathtt{2}^{\alpha_2}.$$

Ceci montre donc qu'il existe forcément un lien entre les modalités des facteurs 1 et 2 apparaissant dans le plan d'expérience. Ceci est une nouvelle fois incompatible avec la propriété d'orthogonalité qui impose à chaque couple de modalités d'apparaître un même nombre de fois λ_{12} (on peut remarquer, par exemple, que $0 \leq \alpha_2 < h$ donc la modalité 0 du facteur 1 et la modalité 1 du facteur 2 ne peuvent pas apparaître simultanément).

Justifions maintenant que le plan d'expérience considéré est bien orthogonal dès lors que l'on utilise une fraction régulière de résolution égale à III (ou plus). Pour deux facteurs i et j distincts considérons leur matrice d'incidence N_{ij}. D'après la proposition $A.22$ il vient :

$$N_{ij} = \frac{1}{h^2} F \left(G_i^* G_j \right) F^*$$

avec $G_i = \left[\mathbb{I}_n \mid \mathtt{i} \mid \mathtt{i}^2 \mid ... \mid \mathtt{i}^{h-1}\right]$ et $G_j = \left[\mathbb{I}_n \mid \mathtt{j} \mid \mathtt{j}^2 \mid ... \mid \mathtt{j}^{h-1}\right]$ où $\mathtt{i}$ et $\mathtt{j}$ désignent respectivement les colonnes relatives aux facteurs i et j de la matrice complexe associée à la fraction régulière. D'après la proposition $A.25$ on sait que lorsqu'une fraction régulière est utilisée alors tout couple de colonnes choisi parmi la totalité des $2h$ colonnes de G_i et G_j correspond soit à deux colonnes orthogonales (selon le produit scalaire de la proposition $A.5$) soit à deux colonnes colinéaires. Tout élément de la matrice $G_i^* G_j$ est alors un produit scalaire ayant une des formes présentées ci-dessous.

1) Produit scalaire de la forme $(\mathbb{I}_n, \mathbb{I}_n)$. On a alors :

$$(\mathbb{I}_n \mid \mathbb{I}_n) = \left(\mathtt{i}^0 \mid \mathtt{j}^0\right) = 1.$$

2) Produits scalaires de la forme $\left(\mathtt{i}^k \mid \mathbb{I}_n\right)$ avec $k = 1, ..., h-1$. D'après les résultats précédents ce produit scalaire est non-nul si et seulement si les colonnes $\mathtt{i}^k$ et $\mathbb{I}_n$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists\ \alpha_i \in \{1, ..., h-1\} \text{ multiple de } k \text{ tel que } \mathbb{I}_n = \mathtt{i}^{\alpha_1}.$$

Cette relation ne peut être vérifiée ici puisque la fraction régulière n'est pas de résolution égale à I. On en déduit que les colonnes $\mathtt{i}^k$ et $\mathbb{I}_n$ sont forcément orthogonales et donc :

$$\forall\ k \in \{1, ..., h-1\}\ ,\ \left(\mathtt{i}^k \mid \mathbb{I}_n\right) = 0.$$

3) Produits scalaires de la forme $\left(\mathtt{i}^k \mid \mathtt{j}^l\right)$ avec $k, l = 1, ..., h-1$. D'après les résultats précédents ce produit scalaire est non-nul si et seulement si les colonnes $\mathtt{i}^k$ et $\mathtt{j}^l$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists\ \alpha_i \in \{1, ..., h-1\} \text{ multiple de } k \text{ tel que } \mathtt{i}^{\alpha_1} = \mathtt{j}^l.$$

Cette relation ne peut être vérifiée ici puisque $\mathtt{i}^{\alpha_1} = \mathtt{j}^l$ équivaut à $\mathbb{I}_n = \mathtt{i}^{h-\alpha_1}\mathtt{j}^l$ mais la fraction régulière utilisée n'est pas de résolution égale à II. On en déduit alors que les colonnes $\mathtt{i}^k$ et $\mathtt{j}^l$ sont forcément orthogonales et donc :

$$\forall\ k, l \in \{1, ..., h-1\}\ ,\ \left(\mathtt{i}^k \mid \mathtt{j}^l\right) = 0.$$

Tous ces résultats d'orthogonalité se traduisent donc matriciellement (tout comme pour les plans factoriels complets) par :

$$G_i^* G_j = \left[\begin{array}{c|ccc} n & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right].$$

Il en résulte que la matrice d'incidence des facteurs i et j est alors donnée par (d'après la forme générale de F donnée au paragraphe $A.3.1$) :

$$N_{ij} = \frac{1}{h^2} F \left(G_i^* G_j \right) F^* = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} n \dots n \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ n \dots n \end{bmatrix} = \frac{n}{h^2} J_h.$$

Le plan d'expérience utilisé est donc bien orthogonal (et même uniformément orthogonal ici) ■

B

Plans d'expérience classiques

Cette annexe présente brièvement les différents plans d'expérience les plus courants introduits dans cet ouvrage. Pour chacun d'eux les points suivants sont détaillés :

1) présentation succinte du plan (et lien vers la section du livre associée),
2) rappel du ou des modèles statistiques ajustables,
3) principales propriétés du plan d'expérience,
4) présentation d'un exemple simple.

B.1 Plans factoriels complets

Objectif. Utiliser une configuration simple en positionnant, pour m facteurs, les expériences au niveau de tous les sommets de l'hypercube $[-1, 1]^m$ (le nombre d'expériences est donc $n = 2^m$). Voir la section 3.3 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le modèle d'ordre un, le modèle à effets d'interactions classique (interactions d'ordre 2), le modèle à effets d'interactions d'ordre quelconque.

Propriétés. Plans à deux niveaux, plans usuels, plans isovariants (si le modèle d'ordre un est utilisé), plans saturés (si le modèle à interactions d'ordre m est utilisé), plans universellement optimaux.

Exemple. Pour $m = 2$ facteurs il s'agit de réaliser les expériences suivantes aux sommets du carré unité :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

B.2 Fractions régulières de plans complets

Objectif. Réduire la taille des plans factoriels en ne conservant qu'une fraction des sommets de l'hypercube $[-1,1]^m$ (c'est à dire la moitié, le quart, le huitième, *etc* ...). Voir la section 3.4 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le modèle d'ordre un si la fraction régulière est de résolution au moins égale à III, le modèle à effets d'interactions classique (ordre 2) si la fraction régulière est de résolution au moins égale à V (dans le cas général le modèle à effets d'interactions d'ordre λ si la fraction régulière est de résolution au moins égale à $2\lambda + 1$).

Propriétés. Plans à deux niveaux, plans usuels, plans isovariants (si le modèle d'ordre un est utilisé), plans parfois saturés (pour $m = 3$ ou $m = 7$ facteurs par exemple dans le cas du modèle d'ordre un), plans universellement optimaux.

Exemple. Pour $m = 3$ facteurs la fraction régulière, de résolution III, définie par :

$$\mathbb{I} = 123$$

est constituée des $n = 4$ expériences présentées ci-dessous (on ne conserve que celles telles que $x_1x_2x_3 = +1$) :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

B.3 Plans simplexes

Objectif. Obtenir des configurations saturées pour le modèle d'ordre un (donc en $n = m + 1$ expériences lorsque m facteurs interviennent). Voir la section 3.5 pour une présentation détaillée.

Modèle ajustable. Le modèle d'ordre un.

Propriétés. Plans usuels, plans isovariants, plans toujours saturés, plans universellement optimaux.

Exemple. Pour $m = 4$ facteurs on peut, par exemple, utiliser le plan simplexe cyclique de matrice présentée ci-dessous :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0.309 & 0.691 & 1.309 & -1.309 \\ 0.691 & 1.309 & -1.309 & 0.309 \\ 1.309 & -1.309 & 0.309 & 0.691 \\ -1.309 & 0.309 & 0.691 & 1.309 \end{bmatrix}.$$

B.4 Plans de Plackett et Burman

Objectif. Obtenir des configurations saturées pour le modèle d'ordre un (donc en $n = m + 1$ expériences lorsque m facteurs interviennent) avec des niveaux ne prenant que les valeurs codées ± 1. Ces configurations n'existent que pour un nombre de facteurs tel que $m = 3 \bmod 4$. Voir la section 3.6 pour une présentation détaillée.

Modèle ajustable. Le modèle d'ordre un.

Propriétés. Plans à deux niveaux, plans usuels, plans isovariants, plans toujours saturés, plans universellement optimaux.

Exemple. Pour $m = 7$ facteurs on peut, par exemple, utiliser le plan de Plackett et Burman de matrice présentée ci-dessous :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

B.5 Plans composites centrés

Objectif. Compléter les plans d'expérience factoriels (complets ou fractionaires de résolution V) de manière à pouvoir ajuster un modèle pour surface de réponse. Ceci est possible de manière économique par ajout (dans le cas de m facteurs) de $2m$ points situés sur les axes du repère à une distance commune α du centre du domaine. Voir la section 5.3 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le modèle d'ordre deux, le modèle à effets de blocs

Propriétés. Plans usuels, plans isovariants (pour un choix adapté de α), plans équiradiaux (pour un choix adapté de α), plans à trois niveaux (pour un choix adapté de α), plans bloqués orthogonalement (pour un choix adapté de α), plans A, D ou E-optimaux (pour un choix adapté de α).

Exemple. Pour $m = 2$ facteurs le plan composite centré (sans expérience au centre du domaine) est défini par la matrice présentée ci-dessous :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

B.6 Plans de Box et Behnken

Objectif. Proposer des plans d'expérience pour surfaces de réponse n'utilisant que 3 niveaux par facteur et découlant de la structure des $BIBD$. Voir la section 5.4 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le modèle d'ordre deux, le modèle à effets de blocs.

Propriétés. Plans à trois niveaux, plans équiradiaux, plans parfois usuels, plans parfois isovariants, plans parfois bloqués orthogonalement.

Exemple. Pour $m = 3$ facteurs le plan de Box et Behnken (sans expérience au centre du domaine) est défini par la matrice présentée ci-dessous :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

B.7 Plans simplexes augmentés

Objectif. Rajouter des points à un plan simplexe de manière à pouvoir ajuster un modèle d'ordre deux. Les nouveaux points sont obtenus en réalisant la somme de tous les couples de points du simplexe initial, à un coefficient multiplicatif α près. Voir la section 5.5 pour une présentation détaillée.

Modèle ajustable. Le modèle d'ordre deux.

Propriétés. Plans saturés, plans équiradiaux (pour un choix adapté de α).

Exemple. Pour $m = 3$ facteurs et un plan simplexe initial qui est aussi un plan de Plackett et Burman on obtient (avec la valeur $\alpha = -1/2$ préconisée par Morris [66]) le plan simplexe augmenté défini par la matrice présentée ci-dessous :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

B.8 Plans hybrides

Objectif. Obtenir des plans d'expérience de petite taille pour l'ajustement d'un modèle d'ordre deux. Dans le cas de m facteurs ces plans (proposés par Roquemore [81]) sont construits à partir d'un plan composite centré pour $(m-1)$ facteurs (et complétés de manière adéquate). Voir la section 5.6 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le modèle d'ordre deux, le modèle à effets de blocs.

Propriétés. Plans parfois usuels, plans parfois isovariants, plans parfois saturés, plans bloqués orthogonalement.

Exemple. Pour $m = 3$ facteurs le plan Hybride de type $311A$ est défini par la matrice présentée ci-dessous :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

B.9 Réseaux de Scheffé

Objectif. Proposer des plans d'expérience pour des situations de mélanges. Les réseaux de Scheffé sont de type $\{m, q\}$ où m est le nombre de composants et q l'ordre du réseau. Il contiennent toutes les expériences dont les coordonnées barycentriques sont des multiples de $1/q$. Voir la section 7.4 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le réseau de Scheffé de type $\{m, q\}$ permet d'ajuster le modèle pour mélanges d'ordre q.

Propriétés. Plans saturés pour le modèle d'ordre q pour mélanges.

Exemple. Pour $m = 3$ composants et $q = 3$ le réseau de Scheffé de type $\{3, 3\}$ est défini par la matrice présentée ci-dessous :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

B.10 Réseaux de Scheffé centrés

Objectif. Proposer des plans d'expérience pour des situations de mélanges. Les réseaux de Scheffé centrés sont de type $\{m, q\}_C$ où m est le nombre de composants et q l'ordre du réseau. Il contiennent tous les corps purs, tous les mélanges binaires équilibrés, *etc*... jusqu'à tous les mélanges équilibrés à q composants. Voir la section 7.5 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le réseau de Scheffé de type $\{m, q\}_C$ permet d'ajuster le modèle synergique pour mélanges d'ordre q.

Propriétés. Plans saturés pour le modèle synergique d'ordre q pour mélanges, plans séquentiels ($\{m, 1\}_C \subset \{m, 2\}_C \subset ... \subset \{m, m\}_C$).

Exemple. Pour $m = 3$ composants et $q = 3$ le réseau de Scheffé centré de type $\{3, 3\}$ est défini par la matrice présentée ci-dessous :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

B.11 Plans factoriels complets pour facteurs qualitatifs

Objectif. Utiliser une configuration simple en réalisant, pour m facteurs à $h_1, ..., h_m$ modalités, toutes les expériences possibles (le nombre d'expériences est donc $n = h_1 h_2 ... h_m$). Voir la section 8.3 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le modèle additif, le modèle à effets d'interactions.

Propriété. Plans orthogonaux.

Exemple. Pour $m = 2$ facteurs à $h_1 = 2$ et $h_2 = 3$ modalités ce plan est défini par la matrice présentée ci-dessous (en repérant les modalités en codage naturel) :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

B.12 Fractions régulières de plans complets pour facteurs qualitatifs

Objectif. Réduire la taille des plans factoriels en ne conservant qu'une fraction des expériences du plan factoriel complet. Voir la section 8.4 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le modèle additif si la fraction régulière est de résolution au moins égale à III, le modèle à effets d'interactions si la fraction régulière est de résolution au moins égale à V.

Propriétés. Plans orthogonaux, plans parfois saturés.

Exemple. Pour $m = 3$ facteurs ayant tous $h = 3$ modalités la fraction régulière, de résolution III, définie par :

$$\mathbb{I} = 12^2 3$$

est constituée des $n = 9$ expériences présentées ci-dessous (on ne conserve donc que celles telles que $x_1 + 2x_2 + x_3 \equiv 0\,[3]$) :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

B.13 Plans en carrés latins

Objectif. Etant donnés 3 facteurs qualitifs ayant tous h modalités les plans en carré latin ont pour objectif de proposer une configuration efficace constituées de h^2 expériences (les plans en carré gréco-latins généralisent ceci au cas de 4 facteurs et les hyper-gréco-latins au cas de 5 facteurs). Voir la section 8.6 pour une présentation détaillée.

Modèle ajustable. Le modèle additif.

Propriété. Plans orthogonaux.

Exemple. Pour $m = 3$ facteurs ayant tous $h = 4$ modalités le carré latin suivant peut être utilisé :

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

Le plan d'expérience qui en découle est de matrice présentée ci-dessous en repérant les modalités en codage naturel (voir la section 8.6 pour la correspondance entre le carré latin et la matrice D) :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

B.14 Tables de Taguchi

Objectif. Proposer des plans d'expériences (construits par diverses méthodes) pour la plupart des situations faisant intervenir des facteurs qualitatifs. Voir la section 8.7.1 pour une présentation détaillée.

Modèles ajustables. Le modèle additif, le modèle à effets d'interactions.

Propriétés. Plans parfois orthogonaux, plans parfois saturés.

Exemple. La table de Taguchi $L_{12}2^3 3^1$ permet d'étudier trois facteurs à 2 modalités ainsi qu'un facteur à 3 modalités (pour le modèle additif) à l'aide de 12 expériences. Le plan d'expérience proposé est orthogonal, il est défini par la matrice présentée ci-dessous (avec les modalités en codage naturel) :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

B.15 Plans en blocs complets

Objectif. Utiliser une configuration simple dans le cas où h traitements peuvent être répartis en b blocs. Chaque bloc contient alors la totalité des traitements possibles (pour donc $n = bk$ expériences). Voir la section 9.3 pour une présentation détaillée.

Modèle ajustable. Le modèle à effets de blocs pour facteurs qualitatifs.

Propriétés. Plans en blocs de même taille, plans équirépliqués, plans universellement optimaux.

Exemple. Pour $h = 3$ traitements à analyser en $b = 2$ blocs on peut considérer le plan d'expérience en blocs complets suivant (en repérant les traitements en codage naturel) :

0	1	2	Bloc 1
0	1	2	Bloc 2

B.16 Plans en blocs incomplets équilibrés

Objectif. Proposer des plans d'expérience de plus petite taille que les plans en blocs complets, ne contenant pas cette fois tous les traitements dans chaque bloc. Voir la section 9.4 pour une présentation détaillée.

Modèle ajustable. Le modèle à effets de blocs pour facteurs qualitatifs.

Propriétés. Plans en blocs de même taille, plans équirépliqués, plans universellement optimaux.

Exemple. Pour $h = 3$ traitements à analyser en $b = 3$ blocs on peut considérer le plan d'expérience en blocs incomplets (BIBD) suivant (en repérant les traitements en codage naturel) :

0	1		Bloc 1
	1	2	Bloc 2
0		2	Bloc 3

B.17 Plans en blocs partiellement équilibrés

Objectif. Proposer une classe de plans d'expérience généralisant celle des plans en blocs incomplets équilibrés. Voir la section 9.5 pour une présentation détaillée.

Modèle ajustable. Le modèle à effets de blocs pour facteurs qualitatifs.

Propriétés. Plans en blocs de même taille, plans équirépliqués.

Exemple. Pour $h = 4$ traitements à analyser en $b = 4$ blocs on peut considérer le plan d'expérience en blocs incomplets partiellement équilibré (GDD) suivant (en repérant les traitements en codage naturel) :

0		2		`Bloc 1`
0			3	`Bloc 2`
	1	2		`Bloc 3`
	1		3	`Bloc 4`

Notons qu'il est impossible dans ce cas de construire un plan en blocs complets équilibrés (BIBD).

C

Notations utilisées

Voici un résumé des principales notations utilisées dans cet ouvrage. Dans quelques rares cas une même notation est utilisée pour désigner deux notions différentes (rencontrées dans des chapitres différents afin d'éviter tout risque de confusion). Les deux définitions sont alors regroupées sous une même accolade.

$1, ..., n$ - la notation $i = 1, ..., n$ est utilisé pour traduire que $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

$\mathbb{I}_n$ - indicatrice d'ordre n (vecteur dont les n composantes valent 1).

b $\begin{cases} \text{nombre de blocs } (\in \mathbb{N}^*), \\ \text{vecteur des paramètres inconnus d'un modèle pour mélanges } (\in \mathbb{R}^p). \end{cases}$

B - matrice ($\in \mathcal{M}(n, b)$) des indicatrices des blocs.

β - vecteur des paramètres inconnus d'un modèle polynomial ($\in \mathbb{R}^p$).

β_0 - effet moyen général.

β_L - vecteur des effets linéaires ($\in \mathbb{R}^m$) à composantes β_i.

β_I - vecteurs des effets d'interactions ($\in \mathbb{R}^{m(m-1)/2}$) à composantes β_{ij}.

β_Q - vecteur des effets quadratiques ($\in \mathbb{R}^m$) à composantes β_{ii}.

β_T - vecteur des effets des traitements ($\in \mathbb{R}^h$).

$\beta_i^{[j]}$ - effet de la modalité j du i-ème facteur qualitatif.

$C_\mathcal{D}$ - matrice d'information du plan d'expérience $\mathcal{D}$.

c_i - nombre de répétitions de la i-ème expérience.

$\mathcal{D}$ - plan d'expérience utilisé.

D - matrice ($\in \mathcal{M}(n, m)$) du plan d'expérience.

D_I - matrice ($\in \mathcal{M}(n, m(m-1)/2)$) des effets d'interactions.

D_Q - matrice $\mathcal{M}(n, m)$ des effets quadratiques.

ε - vecteur des résidus ($\in \mathbb{R}^n$).
γ - vecteur des effetx des blocs ($\in \mathbb{R}^b$).
h - nombre de traitements.
h_i - nombre de modalités du i-ème facteur qualitatif.
J_n - matrice ($\in \mathcal{M}(n,n)$) formée de 1 (donc $J_n = \mathbb{I}_n{}^t\mathbb{I}_n$).
K - matrice diagonale telle que $K = \mathrm{diag}\,(k_1, ..., k_b)$.
k_l - taille (nombre d'expériences) du bloc l $(1 \leq l \leq b)$.
λ_{ij} - nombre d'occurences des modalités des facteurs i et j.
m - nombre de facteurs.
$\mathcal{M}(a,b)$ - ensemble des matrices ayant a lignes et b colonnes.
M - matrice des moments ($\in \mathcal{M}(p,p)$) du plan d'expérience.
MSE - moyenne des carrés due à l'erreur.
$MSLOF$ - moyenne des carrés due au manque d'ajustement.
$MSPE$ - moyenne des carrés due à l'erreur pure.
MSR - moyenne des carrés due à la régression.
μ_l - valeur de $\left[i^2\right]_l$ pour tout plan en blocs usuel.
n - nombre d'expériences.
n^* - nombre d'expériences distinctes $(n^* \leq n)$
n_0 - nombre d'expériences au centre du domaine.
N_{ij} - matrice d'incidence des facteurs qualitatifs i et j.
p - nombre de paramètres inconnus du modèle utilisé.
p^* - nombre total de paramètres du modèle utilisé $(p \leq p^*)$.
q $\left\{\begin{array}{l}\text{nombre de générateurs d'une fraction régulière,}\\ \text{ordre d'un réseau de Scheffé ou d'un réseau centré de Scheffé.}\end{array}\right.$
R - matrice diagonale telle que $R = \mathrm{diag}\,(r_1, ..., r_h)$.
R^2 - coefficient de corrélation linéaire multiple.
r_i - nombre d'occurrences de chacunes des modalités du facteur i.
s_2 - valeur de $n\left[i^2\right]$ pour tout plan usuel.
s_{22} - valeur de $n\left[i^2j^2\right]$ pour tout plan usuel.
s_4 - valeur de $n\left[i^4\right]$ pour tout plan usuel.
SSE - somme des carrés due à l'erreur.
$SSLOF$ - somme des carrés due au manque d'ajustement.
$SSPE$ - somme des carrés due à l'erreur pure.
SSR - somme des carrés due à la régression.
SST - somme totale des carrés centrés.

τ - vecteur ${}^t\left({}^t\beta_L \mid {}^t\beta_Q \mid {}^t\beta_I\right)$.

U_r - sphère centrée (en l'origine) de rayon r.

W - matrice $\left[\, D \middle| D_Q \middle| D_I \,\right]$

X - matrice ($\in \mathcal{M}\,(n,p)$) du modèle.

X_i - matrice ($\in \mathcal{M}\,(n,q_i)$) des indicatrices des modalités du facteur i.

Y - vecteur des observations (dont les n composant sont les Y_i).

$\overline{Y}$ - moyenne des observations.

$\overline{Y}_i$ - moyenne des c_i répétitions $Y_i^{(1)}...Y_i^{(r_i)}$.

$\overline{Y}_i^{[j]}$ - moyenne des réponses avec la modalité j du facteur qualitatif i.

$\overline{Y}_{Bl}$ - moyenne des observations du bloc l $(1 \leq l \leq b)$.

Bibliographie

1. Azaïs J.M. et Bardet J.M. (2006), *Le modèle linéaire par l'exemple.* Sciences Sup, Dunod.
2. Babouin P. (1958), Application d'un plan factoriel à la détermination des conditions optimum de coulée d'un polymère synthétique. *Revue de Statistique Appliquée*, tome 6, No. 3, 17-22.
3. Benoist D., Tourbier Y. et Germain-Tourbier S. (1994), *Plans d'expériences : construction et analyse.* Technique et Documentation, Lavoisier.
4. Bondar J. V. (1983), Universal optimality of experimental designs: definition and a criterion. *Canadian Journal of Statistics*, 11, 325-331.
5. Borkowski J. J. (1995), Spherical prediction-variance properties of central composite and box-behnken designs. *Technometrics,* 37, 4, 399-410.
6. Bose R. C. (1947), Mathematical theory of symmetric factorial design. *Sankhya*, 8, 107-166.
7. Bose R. C. (1939), On the construction of balanced incomplete block designs. *Annals of Eugenics*, 9, 353-399.
8. Bose R.C. et Bush K. A. (1952), Orthogonal arrays of strengh two and three. *Annals of Mathematic Statistics,* 23, 508-524.
9. Box G. E. P. (1952), Multi-factor designs of first order. *Biometrika* 39, 49-57.
10. Box G. E. P. et Benhken D. W. (1960), Some new three levels designs for the study of quantitative variables. *Technometrics,* 2, No. 4, 455-475.
11. Box G. E. P. et Benhken D. W. (1960), Simplex-sum designs; a class of second order rotatable designs derivable from those of first order. *Annals of Mathematical Statistics*, 31, 838-864.
12. Box G. E. P. et Draper N. R. (1987), *Empirical Model-Building and Response Surfaces.* New York, John Wiley.

13. Box G. E. P. et Hunter J. S. (1961), The 2^{k-p} fractionnal factorial designs, Part *I*. *Technometrics,* 3, 311-351.

14. Box G. E. P. et Hunter J. S. (1961), The 2^{k-p} fractionnal factorial designs, Part *II*. *Technometrics,* 3, 449-458.

15. Box G. E. P. et Hunter J. S. (1957), Multi-factor experimental designs for exploring responses surfaces. *Annals of Mathematical Statistics*, 28, 195-241.

16. Box G. E. P. et Wilson K. B. (1951), On the experimental attainment of optimum conditions. *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, 13, 1-45.

17. Calais J. (1984), *Eléments de théorie des groupes.* Presses Universitaires de France.

18. Ciarlet P. G. (1990), *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Masson.

19. Collombier D. (1996), *Plans d'experience factoriels.* Mathématiques et Applications, volume 21, Springer.

20. Comtet L. (1970), *Analyse combinatoire (tome premier).* Presses Universitaires de France, Collection Sup.

21. Cornell J. A. (1975), Some comments on designs for Cox's mixture polynomial. *Technometrics*, 17, 25-35.

22. Cornell J. A. (1990), *Experiments with mixtures designs, models and analysis of mixture data.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

23. Cottrell M. et Coursol J. (1989), *La planification des expériences : théorie et exemples.* Collection "Economie et Statistiques Avancées". Economica.

24. Cox D. R. (1992), *Planning of experiments.* Wiley-Interscience (reprint edition).

25. Cox D. R. et Reid N. (2000), *The theory of the design of experiment.* Monographs on Statistics and Applied Probability 86. Chapman et Hall / CRC.

26. Crosier R. B. (1996), Symmetric orientation for simplex designs. *Journal of Quality Technology*, 28, No. 2, 148-152.

27. Dagnelie P. (2003), *Principes d'expérimentation, planification des expériences et analyse de leurs résultats.* Presses agronomiques de Gembloux.

28. Davis P. J. (1979), *Circulant Matrices.* Pure & Applied Mathematics, Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts.

29. Dodge Y. (1985), *Analysis of experiments with missing data.* John Wiley & Sons.

30. Dossou-Gbete S. et Tinsson W. (2006), A note on experimental designs for generalized linear model. *SORT,* Volume 29, Number 2, 249-268.

31. Draper N. R. (1982), Center points in second-order response surface designs. *Technometrics*, 24, No. 2, 127-133.

32. Draper R., Gaffke N. et Pukelsheim F. (1993), Rotatability of variance surfaces and moment matrices. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 36, 347-356.

33. Draper N. R. et Lin K. J. (1990), Capacity considerations for two-level fractional factorial designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 24, 25-35.

34. Draper N. R. et Lin K. J. (1990), Small response-surface designs. *Technometrics*, 32, No. 2, 187-194.

35. Druilhet P. (2004), Conditions for optimality in experimental designs. *Linear Algebra and its Applications,* 388, 147-157.

36. Druilhet P. (1995). *Optimalité des plans d'expériences équilibrés pour les voisinages.* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.

37. Dugue D. (1964), Un mélange d'algèbre et de statistique : le plan d'expériences. *Revue de Statistique Appliquée*, 12, No. 1, 7-15.

38. El Mossadeq A., Kobilinsky A. et Collombier D. (1985), Construction d'orthogonaux dans les groupes abéliens finis et confusion d'effets dans les plans factoriels. *Linear Algebra and its Applications*, 70, 303-320.

39. Federer W. T. et King F. (2007). *Variations on split plot ans split block experiment designs.* Wiley-Interscience.

40. Federov V. V. (1972). *Theory of optimal experiments.* Academic Press Inc. (London) LTD.

41. Fisher R. A. (1935). *The design of experiments.* Edinburgh: Olivier and Boyd (later editions: 1937, 1942, 1947, 1949, 1951, 1960 and 1966).

42. Gardiner D. A., Grandage A. H. E. et Hader R. J. (1959), Third order rotatable designs for exploring response surfaces. *Annals of Mathematical Statistics,* Vol 30, 1082-1096.

43. Gauchy J.P. (1997), Rédaction des chapitres 7, 8 et 9 de l'ouvrage : *Plans d'expériences : applications à l'entreprise.* Editions Technip (Droesbeke J. J., Fine J. et Saporta G. éditeurs).

44. Giovannitti-Jensen A. et Myers R.H. (1989), Graphical assessment of the prediction capability of response surface designs. *Technometrics*, Vol. 31, No. 2, 159-171.

45. Goupy J. (1999), *Plans d'Expériences pour Surfaces de Réponse.* Dunod, collection Technique et Ingénierie, série Génie Industriel.

46. Goupy J. (2005), *Pratiquer les plans d'expériences.* Dunod / L'Usine Nouvelle, collection Technique et Ingénierie.

47. Hall M. (1959), *The Theory of Groups.* Macmillan, New-York.

48. Hartley H. O. (1959), Smallest composite designs for quadratic response surface. *Biometrics*, 15, 611-624.

49. Hedayat A. et Afsarinejad K. (1975). Repeated measurements designs. *A Survey of Statistical Design and linear Model*, 229-242, Amsterdam, North Holland.

50. Hedayat A. et Afsarinejad K. (1978). Repeated measurements designs. *Annals of Statistics*, 6, 619-628.

51. Hedayat A., Sloane N. et Stufken J. (1999), *Orthogonal arrays: theory and applications.* Springer-Verlag, New-York.

52. John P. W. M. (1980), *Incomplete block designs.* Lecture Notes in Statistics, Volume 1, Marcel Dekker.

53. Jourdan A. (2000). *Analyse statistique et échantillonnage d'expériences simulées.* Thèse de doctorat. Université de Pau et des Pays de l'Adour.

54. Khuri A. I. (1994), Effect of blocking on the estimation of a response surface. *Journal of Applied Statistics*; 21; 305-316.

55. Khuri A. I. (1992), Response surface models with random block effects. *Technometrics*, 34, No 1, 26-37.

56. Khuri A.I. et Cornell J. A. (1996), *Response Surfaces : designs and analyses.* Statistics: textbooks and monographs, Volume 152, Marcel Dekker.

57. Kiefer J. (1975), Construction and optimality of generalized Youden designs. *A Survey of Statistical Design and Linear Models (J.N. Srivastava ed.)*, North-Holland, Amsterdam, 333-353.

58. Kiefer J. (1959), Optimum experimental designs (with discussion). *J. Roy. Statis. Soc.*, B21, 272-319.

59. Kobilinsky A. (1985), Coufounding in relation to duality of finite abelian group. *Linear Algebra and its Applications*, 70, 321-347.

60. Kobilinsky A. et Monod H. (1991), Experimental designs generated by group morphisms: an introduction. *Scandinavian Jouranl of Statistics*, 18, 119-134.

61. Lambrakis D. P. (1968), Experiments with mixtures: a generalisation of the simplex-lattice design. *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, 123-136.

62. Lang S. (1965), *Algebra.* Addison-Wesley.

63. Marshall A. W. et Olkin I. (1979), *Inequalities : Theory of Majorization and its Applications.* Mathematics in Science and Engineering. Academic Press.

64. Mee R. W. (2002), Three-level Simplex Designs and their use in sequential experimentations. *Journal of Quality Technology*, 43, No. 2.

65. Mitchell T. J. (1974), An algorithm for the construction of D-optimal experimental designs. *Technometrics*, Vol. 16, No. 2.

66. Morris M. D. (2000), A class of three-level experimental designs for response surface modelling. *Technometrics*, 42, No. 2, 111-121.

67. Nigam A. K. (1970), Block designs for mixture experiments. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 41, 1861-1869.

68. Parker E. T. (1959), Orthogonal Latin Squares. *Proceeding Nat. Acad. Sci. USA*, Vol. 45, 859-862.

69. Park S. H. et Jang D. H. (1999), Measures for evaluating the effect of blocking in response surface designs. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 28(7), 1599-1616.

70. Petersen R. G. (1985), *Design and analysis of experiments.* Statsitics: textbooks and monographs. Marcel Dekker.

71. Phan-Tan-Luu R. et Mathieu D. (1997), Rédaction des chapitres 5, 6 et 9 de l'ouvrage : *Plans d'expériences : applications à l'entreprise.* Editions Technip (Droesbeke J. J., Fine J. et Saporta G. éditeurs).

72. Pillet M. (1997), *Les plans d'expériences par la méthode Taguchi.* Les éditions d'organisation.

73. Plackett R.L. et Burman J.P. (1946), The Design of Optimum Multifactorial Experiments. *Biometrika*, 33, 305-325.

74. Preece D.A. (1990), R.A. Fisher and experimental design: a review. *Biometrics*, 46, 925-935.

75. Pukelsheim F. (1993), *Optimal Design of Experiments.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics Section.

76. Queysanne M. (1964), *Algèbre, premier cycle scientifique et préparation aux grandes écoles.* Armand Colin, collection U.

77. Raktoe B.L., Hedayat A. et Federer W.T. (1981), *Factorial Designs.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statsitics.

78. Rao C.R. et Mitra S.K. (1971), *Generalized Inverse of Matrices and its Applications.* John Wiley, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

79. Rauch G. (2000), *Les groupes finis et leurs représentations.* Mathématiques 2ème cycle. Ellipses.

80. Raviart P.A. et Thomas J.M. (1988), *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson.

81. Roquemore K. G. (1976), Hybrid designs for quadratic response surfaces. *Technometrics*, 18, No. 4, 419-423.

82. Sado G. et Sado M.C. (1991), *Les plans d'expériences : de l'expérimentation à l'assurance qualité.* AFNOR Technique.

83. Saporta G. (1990), *Probabilités, Analyse des données et Statistique.* Editions Technip.

84. Saporta G., Droesbeke J. J. et Fine J. (1997), *Plans d'expériences : applications à l'entreprise.* Editions Technip.

85. Scheffé H. (1958), Experiments with mixtures. *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, 20, No. 2, 344-360.

86. Scheffé H. (1963), Simplex centroid design for experiments with mixtures. *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, 25, No. 2, 235-263.

87. Scheffé H. (1959), *The analysis of variance.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

88. Searle S. R. (1971), *Linear Models.* John Wiley & Sons, New York.

89. Searle S. R., Casella G. et McCulloch C. E. (1992), *Variance Components.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

90. Serre J. P. (1967), *Représentations Linéaires des Groupes Finis.* Hermann, Collection Méthodes.

91. Shah K.R. et Sinha B.K. (1989), *Theory of optimal designs.* Lecture Notes #54, Springer-Verlag, New-York.

92. Souvay P. (2002), *Plans d'expériences : Méthode Taguchi.* Collection "A Savoir", AFNOR.

93. Spendley W., Hext G. R. et Himsworth F. R. (1962), Sequential application of simplex sum designs in optimisation and evolutionary operation. *Technometrics*, 4, 441-461.

94. Srivastava J. N. et Siddiqui M.M. (1987), When A- and D-optimality conflict. *Commun. Stat. Theory Methods,* 16, 1675-1682.

95. Srivastava J. N. et Throop D. (1990), Orthogonal arrays obtainable as solutions to linear equations over finite fields. *Linear Algebra Appl.*, 127, 283-300.

96. Taguchi G. et Konishi S. (1987). *Orthogonal arrays and linear graphs.* American Supplier Institute Press.

97. Tinsson W. (2000), Analyse des plans composites centrés de petite taille construits avec des fractions régulières de résolution III*. *Publication interne de l'université de Pau et des pays de l'Adour*, 2000/29.

98. Tinsson W. (2007), A note on small size augmented pair designs. *Sankhya*, Vol. 69, Issue 1.

99. Tinsson W. (1998), *Plans d'Expérience à Facteurs Quantitatifs et Effets de Blocs Aléatoires.* Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

100. Tinsson W. (2004), Prediction of the mean response for the fixed block effecfs model using a usual design. *Publication interne de l'université de Pau et des pays de l'Adour*, 2004.

101. Tipett L. H. C. (1934), Applications of Statistical Methods to the Control of Quality in Industrial Production. *Manchester Statistical Society.*

102. Vartak M. N. (1955), On the application of Kronecker product of matrices to statistical designs. *Ann. Math. Statist.*, 26, 420-438.

103. Vining G. G. (1993), A computer program for generating variance dispersion graphs. *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, No. 1, 45-58.

104. Wang J. C. et Wu C. F. J. (1989), An approach to the construction of asymetrical orthogonal arrays. *IIQP Research Report*, RR-89-01.

105. Wynn H. P. (1970), The sequential generation of D-optimum experimental designs. *Ann. Math. Stat.*, 41, 1655-1664.

106. Wynn H. P. (1972), Results in the theory and construction of D-optimum experimental designs. *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, 34, 133-147.

107. Yates F. (1939), The Recovery of Inter-Block Information in Varietal Trials Arranged in Three Dimensional Lattices. *Annals of Eugenics*, 9, 136-156.

108. Yates F. (1940), The Recovery of Inter-Block Information in Balanced Incomplete Block Designs. *Annals of Eugenics*, 10, 317-325.

Index

Déjà parus dans la même collection

1. T. Cazenave, A. Haraux : Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires. 1990
2. P. Joly : Mise en œuvre de la méthode des éléments finis. 1990

3/4. E. Godlewski, P.-A. Raviart : Hyperbolic systems of conservation laws. 1991

5/6. Ph. Destuynder : Modélisation mécanique des milieux continus. 1991

7. J. C. Nedelec : Notions sur les techniques d'éléments finis. 1992
8. G. Robin : Algorithmique et cryptographie. 1992
9. D. Lamberton, B. Lapeyre : Introduction au calcul stochastique appliqué. 1992
10. C. Bernardi, Y. Maday : Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques. 1992
11. V. Genon-Catalot, D. Picard : Eléments de statistique asymptotique. 1993
12. P. Dehornoy : Complexité et décidabilité. 1993
13. O. Kavian : Introduction à la théorie des points critiques. 1994
14. A. Bossavit : Électromagnétisme, en vue de la modélisation. 1994
15. R. Kh. Zeytounian : Modélisation asymptotique en mécanique des fluides Newtoniens. 1994
16. D. Bouche, F. Molinet : Méthodes asymptotiques en électromagnétisme. 1994
17. G. Barles : Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. 1994
18. Q. S. Nguyen : Stabilité des structures élastiques. 1995
19. F. Robert : Les systèmes dynamiques discrets. 1995
20. O. Papini, J. Wolfmann : Algèbre discrète et codes correcteurs. 1995
21. D. Collombier : Plans d'expérience factoriels. 1996
22. G. Gagneux, M. Madaune-Tort : Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière. 1996
23. M. Duflo : Algorithmes stochastiques. 1996
24. P. Destuynder, M. Salaun : Mathematical Analysis of Thin Plate Models. 1996
25. P. Rougee : Mécanique des grandes transformations. 1997
26. L. Hörmander : Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations. 1997
27. J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizábal : Optimisation numérique. 1997
28. C. Cocozza-Thivent : Processus stochastiques et fiabilité des systèmes. 1997
29. B. Lapeyre, É. Pardoux, R. Sentis : Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion. 1998
30. P. Sagaut : Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible. 1998
31. E. Rio : Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants. 1999
32. J. Moreau, P.-A. Doudin, P. Cazes (Eds.) : L'analyse des correspondances et les techniques connexes. 1999
33. B. Chalmond : Eléments de modélisation pour l'analyse d'images. 1999
34. J. Istas : Introduction aux modélisations mathématiques pour les sciences du vivant. 2000
35. P. Robert : Réseaux et files d'attente : méthodes probabilistes. 2000
36. A. Ern, J.-L. Guermond : Eléments finis : théorie, applications, mise en œuvre. 2001
37. S. Sorin : A First Course on Zero-Sum Repeated Games. 2002

38. J. F. Maurras : Programmation linéaire, complexité. 2002
39. B. Ycart : Modèles et algorithmes Markoviens. 2002
40. B. Bonnard, M. Chyba : Singular Trajectories and their Role in Control Theory. 2003
41. A. Tsybakov : Introdution à l'estimation non-paramétrique. 2003
42. J. Abdeljaoued, H. Lombardi : Méthodes matricielles – Introduction à la complexité algébrique. 2004
43. U. Boscain, B. Piccoli : Optimal Syntheses for Control Systems on 2-D Manifolds. 2004
44. L. Younes : Invariance, déformations et reconnaissance de formes. 2004
45. C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti : Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques. 2004
46. J.-P. Françoise : Oscillations en biologie : Analyse qualitative et modèles. 2005
47. C. Le Bris : Systèmes multi-échelles : Modélisation et simulation. 2005
48. A. Henrot, M. Pierre : Variation et optimisation de formes : Une analyse géometric. 2005
49. B. Bidégaray-Fesquet : Hiérarchie de modèles en optique quantique : De Maxwell-Bloch à Schrödinger non-linéaire. 2005
50. R. Dáger, E. Zuazua : Wave Propagation, Observation and Control in $1-d$ Flexible Multi-Structures. 2005
51. B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat : Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux. 2005
52. F. Boyer, P. Fabrie : Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles. 2005
53. E. Cancès, C. L. Bris, Y. Maday : Méthodes mathématiques en chimie quantique. Une introduction. 2006
54. J-P. Dedieu : Points fixes, zeros et la methode de Newton. 2006
55. P. Lopez, A. S. Nouri : Théorie élémentaire et pratique de la commande par les régimes glissants. 2006
56. J. Cousteix, J. Mauss : Analyse asympotitque et couche limite. 2006
57. J.-F. Delmas, B. Jourdain : Modèles aléatoires. 2006
58. G. Allaire : Conception optimale de structures. 2007
59. M. Elkadi, B. Mourrain : Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux. 2007
60. N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet : Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages. 2007
61. H. Pham : Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance. 2007
62. H. Ammari : An Introduction to Mathematics of Emerging Biomedical Imaging. 2008
63. C. Gaetan, X. Guyon : Modélisation et statistique spatiales. 2008
64. Rakotoson, J.-M. : Réarrangement Relatif. 2008
65. M. Choulli : Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques. 2009
66. W. Liu : Elementary Feedback Stabilization of the Linear Reaction-Convection-Diffusion Equation and the Wave Equation. 2010
67. W. Tinsson : Plans d'expérience: constructions et analyses statistiques. 2010