

Leseempfehlungen

Es wäre eine Mamutaufgabe eine erschöpfende Bibliografie zu den Themen “Projektive Geometrie” und “Wie rechne ich mit geometrischen Objekten” anzugeben. Eine Auflistung aller relevanten Titel, die in den letzten 200 Jahren entstanden sind, würden sicher bereits ein mehrhundertseitiges Buch füllen. Wie der Titel schon verrät, wollen wir in diesem Kapitel lediglich ein wenig weiterführende Literatur angeben. Sie soll dem Leser eine Vertiefung bzw. einen Einstieg in vertiefende Themen ermöglichen. Dabei unterteilen wir diese Liste in Literatur für den Hauptteil des Buchs und Literatur für die Exkursionen zu den Kapiteln.

Leseempfehlungen für den Hauptteil

Grundlagen. Die wichtigste Grundlage dieses Buches ist ein solides Wissen über *Lineare Algebra*, wenn möglich bereits mit Querbezügen zu deren geometrischer Anwendung. Dazu gehören z.B. Vektorräume, lineare Gleichungssysteme und Determinanten. Zwei Bücher seien hier als Einstieg empfohlen. Das erste [Fis] als Grundwissen, das zweite [Koe] für zahlreiche Verbindungen zur Geometrie.

[Fis] FISCHER, G., *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*, 16. überarb. und erw. Auflage, Vieweg, 2008.

[Koe] KÖCHER, M., *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, 4. Aufl. 1997, Springer, Nachdruck 2002.

Projektive Geometrie. Das wohl wichtigste geometrische Gebiet, das in diesem Buch behandelt wird, ist die *projektive Geometrie*. Hier seien nur einige der “Klassiker” [Bla, Cox1, Cox2] aufgeführt, sowie das gerade im Entstehen befindliche Buch [Ri], welches viele der hier behandelten Themen noch einmal vertiefend aufgreift und ausbaut.

[Bla] BLASCHKE, W., *Projektive Geometrie*, 2. Aufl., Wolfenbüttler Verl. Anst, 1948.

[Cox1] COXETER, H. & BURAU, W., *Reelle projektive Geometrie der Ebene*, Oldenbourg, 1955.

[Cox2] COXETER, H., *Projective Geometry*, 2. Aufl. 1974, Springer, Nachdruck 1994.

[Ri] RICHTER-GEBERT, J., *Hands on Projective Geometry*, in Bearbeitung.

Weiterführende geometrische und algebraische Themen. Die folgende Liste sei den Lesern empfohlen, die sich in spezielle und speziell schöne Themen an der Schnittstelle von Geometrie und Algebra einarbeiten möchten. Das erste [CoxGrei] ist eine gelungene und elegante Fundgrube geometrischer Zusammenhänge und deren algebraischer Behandlung. Das zweite [Har] zeichnet sehr fundiert den klassischen geometrischen Aufbau beginnend bei Euklid bis hin zu nicht-euklidischer Geometrie nach. Das Buch [Mar] geht insbesondere auf die algebraische Mächtigkeit geometrischer Konstruktionswerkzeuge (vom Lineal, über Zirkel bis hin zu Origami) ein. Und [Bot] gibt diverse Schlaglichter auf elementargeometrische Themen.

- [CoxGrei] COXETER, H. & GREITZER, S., *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1975.
- [Har] HARTSHORNE, R., *Euclid and beyond*, Springer, 2005.
- [Mar] MARTIN, G.E., *Geometric Constructions*, Springer, 1997.
- [Bot] BOTEMA, O., *Topics in Elementary Geometry*, Springer, 2008

Andere Geometrien. Im Verlauf dieses Buches haben wir diverse alternative Herangehensweisen an Geometrie und damit insbesondere auch verschiedene “Geometrien” aufgezeigt. Die folgenden Bücher geben eine gute Einführung in verschiedene alternative Betrachtungsweisen von Geometrie. Der Klassiker von Felix Klein [Klei1] ist wohl eine der ersten Monographien, in denen der Aufbau sowohl euklidischer als auch nicht-euklidischer Geometrie aus der projektiven Geometrie zusammenhängend geschildert wird. Dabei wird die Konsistenz von nicht-euklidischer Geometrie deutlich. Eine moderne Darstellung nicht-euklidischer Geometrie aus projektivem Blickwinkel findet man in [Gre]. Dabei wird u.a. auf die historische Entwicklung und den philosophischen Einfluss der Thematik eingegangen. Die Bücher [Ben] und [Cec] geben eine Einführung in die in den Kapiteln 10 und 11 vorgestellte Lie’schen Kreisgeometrie. Eine hervorragende (wenngleich auch sehr abstrakte) Einführung in die algebraischen, geometrischen und gruppentheoretischen Aspekte von Quaternionen und Oktonionen findet man in [ConSmi]. Ein viel pragmatischerer Zugang zu Quaternionen ist in [Kui] zu finden. In unserer Herangehensweise an projektive Geometrie haben wir immer ausnahmslos alle nicht von Null verschiedenen Vielfachen eines Vektors miteinander identifiziert. Auch hier gibt es eine alternative Betrachtungsweise – man identifiziert nur *positive* skalare Vielfache eines Vektors. Dies führt zu so genannter *orientierter projektiver Geometrie*. Eine sehr gut lesbare Einführung in diese reizvolle Struktur, die viele Möglichkeiten öffnet, findet man in [Stol].

- [Klei1] KLEIN, F., *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*, Originalausgabe 1928, Nachdruck Chelsea Publishing, 1963.
- [Gre] GREENBERG, M., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, W. H. Freeman, 1993.
- [Ben] BENZ, W., *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer, 1973.
- [Cec] CECIL, T., *Lie Sphere Geometry: With Applications to Submanifolds*, Springer, 2007.
- [ConSmi] CONWAY, J. & SMITH, D., *On Quaternions and Octonions*, Peters, 2003.
- [Kui] KUIPERS, J., *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality*, University Presses of CA, 2002
- [Stol] STOLFI, J., *Oriented Projective Geometry: A Framework for Geometric Computations*, Academic Press, 1991.

Historisches. Viele der hier vorgestellten Ansätze und Verfahren haben ihre Wurzeln in den Arbeiten der großen Geometer des 19. Jahrhunderts. Um ein tieferes Verständnis der betrachteten Strukturen zu erhalten, ist es sehr instruktiv diese Ideengeschichte nachzuvollziehen. Quasi aus erster Hand berichtet Felix Klein in [Klei2] über diese Entwicklungen, zu

denen er selbst auch maßgeblich beigetragen hat. Mit etwas mehr historischen Abstand gibt das sehr spannende Buch von Yaglom [Yag] eine Übersicht ausgehend von Lösungsverfahren für kubische Gleichungen bis hin zur Entwicklung moderner algebraischer Betrachtungsweisen (angereichert mit vielen persönlichen Lebensbildern der beteiligten Mathematiker).

[Klei2] KLEIN, F., *Vorlesung über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer, 1925, Nachdruck.

[Yag] YAGLOM, I.M., *Felix Klein and Sophus Lie – The Evolution of Symmetry in the 19th Century*, Birkhäuser, 1987.

Software. Die Erstellung vieler der in diesem Buch gezeigten Abbildungen war nur unter Zuhilfenahme geeigneter Software möglich. Praktisch alle der hier gezeigten Abbildungen entstanden mit dem von J. R.-G. und U. Kortenkamp entwickelten Geometriesoftware Cinderella [Cin]. In verschiedenen Fällen wurden die mit Cinderella erstellten Daten mit anderen Programmen nachbearbeitet, bzw. visualisiert. Cinderella ermöglicht es einerseits in einem projektiven Kontext bewegbare geometrische Skizzen zu erstellen, andererseits ermöglicht eine mathematiknahe Skriptsprache das einfache und gezielte programmatische Erzeugen mathematischer Skizzen. Die dreidimensionalen Bilder in den Exkursen von Kapitel 1 und 12 wurden zur Erstellung zunächst mit jReality [jReal] (dies kann man als Plugin in Cinderella verwenden) gerendert und interaktiv so lange modifiziert bis der gewünschte Eindruck entstand und danach mit der frei verfügbaren Raytracing Software Povray [Pov] ausgegeben. Um den graphischen Stil, der im endgültigen Bild zusehen ist, zu erreichen, wurden diese Bilder dann noch mit der Software beFunky [beFun] nachbearbeitet.

Abschließend sei hier noch auf die Internetsammlung *Mathe Vital* verwiesen. Dort gibt es eine große Sammlung interaktiver Materialien, die in direktem Zusammenhang mit den hier dargelegten Themen stehen.

[Cin] RICHTER-GEBERT, J. & KORTENKAMP, U., *Cinderella: Die interaktive Geometrie-Software*, Springer. www.cinderella.de

[jReal] GUNN, C., HOFFMANN, T., SCHMIES, M. & WEISSMANN, S., *jReality*, www.jreality.de.

[beFun] *beFunky*, www.befunky.com.

[Pov] *Povray*, www.povray.org.

[MV] RICHTER-GEBERT, ET. AL., *Mathe Vital*, www.mathe-vital.de.

Leseempfehlung für den Exkurs des ...

... 1. Kapitels: Raumformen

[Stil] STILLWELL, J., *Geometry of Surfaces*, Springer, 1995.

... 2. Kapitels: Projektive Entzerrung

[RK2] KORTENKAMP, U. & RICHTER-GEBERT, J., *Cinderella.2 – Geometrie und Physik im Dialog*, Computeralgebra-Rundbrief, Sonderheft zum Jahr der Mathematik, 12-14, (2008).

... 3. Kapitels: Symmetrien der Pappos Konfiguration

[Co4] COXETER, H., *The Beauty of Geometry: Twelve Essays*, Dover Publ Inc, 106-149, 1999.

... **4. Kapitels: Projektive Skalen in freier Wildbahn**

- [Dul] DUELL, J., *Art Stories with Julie Duell – 23. Trouble with perspective in drawing? This may help*, <http://artintegrity.wordpress.com/2008/05/26/24-trouble-with-perspective-in-drawing-this-may-help/>

... **5. Kapitels: Wo stand der Fotograf**

- [Tri] TRIPP, C., *Where Is the Camera? The Use of a Theorem in Projective Geometry to Find from a Photograph the Location of the Camera*, *The Mathematical Gazette*, 71-455, 8-14, (1987).

... **6. Kapitels: Die Ästhetik von Möbius-Transformationen**

- [MSW] MUMFORD, D., SERIES, C. & WRIGHT, D., *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002.
- [Ri2] RICHTER-GEBERT, J., *Aschenputtel und die Perlen*, DMV Mitteilungen, 12-1, 21-29, (2004).

... **7. Kapitels: Pseudo-Euklidische Geometrie**

- [MSW] LIEBSCHER, D., *Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrie der Ebene*, Teubner, 1999.

... **8. Kapitels: Roboter**

- [Whi] WHITE, N., *Grassmann-Cayley Algebra and Robotics*, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 11, 91-107, (1994).

... **9. Kapitels: Computergestütztes Beweisen**

- [Ri3] RICHTER-GEBERT, J., *Mechanical theorem proving in projective geometry*, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 13, 139-172, (1995).
- [Ri4] RICHTER-GEBERT, J., *Meditations on Ceva's Theorem*, *The Coxeter Legacy: Reflections and Projections* (Eds. Davis, C. & Ellers, E., American Mathematical Society, Fields Institute), 227-254, (2006).

... **10. Kapitels: Apollonius und Zahlentheorie**

- [GL1] GRAHAM, R., LAGARIAS, J., MALLOWS, C., WILKS, A. & YAN, C., *Apollonian Circle Packings: Number Theory*, *Journal of Number Theory*, 100-1, 1-45, (2003).
- [ErL] ERIKSSON, N. & LAGARIAS, J., *Apollonian circle packings: Number theory II. Spherical and hyperbolic packings*, *Ramanujan Journal*, 14-3, 437-469, (2007).
- [GL2] GRAHAM, R., LAGARIAS, J., MALLOWS, C., WILKS, A. & YAN, C., *Apollonian Circle Packings: Geometry and Group Theory I. The Apollonian Group*, *Discrete and Computational Geometry*, 34, 547-585, (2005).
- [GL3] GRAHAM, R., LAGARIAS, J., MALLOWS, C., WILKS, A. & YAN, C., *Apollonian Circle Packings: Geometry and Group Theory II. Super-Apollonian Group and Integral Packings*, *Discrete and Computational Geometry*, 35, 1-36, (2006).
- [GL4] GRAHAM, R., LAGARIAS, J., MALLOWS, C., WILKS, A. & YAN, C., *Apollonian Circle Packings: Geometry and Group Theory III. Higher Dimensions*, *Discrete and Computational Geometry*, 35, 37-72, (2006).

... **11. Kapitels: Der "andere" Schnittwinkel**

- [CoxGrei] COXETER, H. & GREITZER, S., *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 124-126, 1975.

... 12. Kapitels: Oktaven und haarige Bälle

[Bea] BAEZ, J., *The octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society, 39, 145-205, (2002).

[Co4] COXETER, H., *The Beauty of Geometry: Twelve Essays*, Dover Publ Inc, 21-39, 1999.

Bildnachweis

Die Abbildung sämtlicher nicht selbst erstellter Bildmaterialien erfolgte mit freundlicher Genehmigung der jeweiligen Urheber. Wir bedanken uns hierfür ganz herzlich. Hier folgt eine Liste der verwendeten Bildmaterialien unter Angabe der Quellen.

Abbildung 2.2

Autor Rich Niewiroski Jr.

Quelle <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GoldenGateBridge-001.jpg>

Abbildung 4.9

Autor Julie Duell

Quelle <http://artintegrity.wordpress.com/2008/05/26/24-trouble-with-perspective-in-drawing-this-may-help/>

Abbildung 4.10

Autor Klaus Bostelmann

Quelle <http://www.bostelmann-dresden.de/fotos.htm>

Abbildung 5.6

Autor Günther Schwarz

Quelle <http://www.gschwarz.de/fotos.htm>

Abbildung 5.6

Autor *GoogleMaps*TM

Quelle <http://maps.google.de/>

Abbildung 6.14

Autoren *D. Mumford, C. Series, D. Wright.*

Entnommen (und leicht überarbeitet) aus MUMFORD, D., SERIES, C. & WRIGHT, D., *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002. mit freundlicher Genehmigung des Verlages.

Abbildung 8.1

Autor American Robot Corporation

Quelle http://www.americanrobot.com/products_robots.html

Abbildung 12.3

Autor NASA

Quelle <http://bilddb.rb.kp.dlr.de/deutsch/Bild.asp?qryIDbilder=110>

Index

- $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, 78, 91, 177, 181
- \mathbb{F}_2 , 24, 207
- $O(3)$, 194
- $O(3, 1)$, 179
- $O(3, 2)$, 177
- $O(n)$, 177
- \mathbb{R}^2 , 1
- \mathbb{R}^3 , 113
- $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$, 39
- $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, 6, 15, 91
- $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$, 113–128
- $\mathbb{R}\mathbb{P}^d$, 128–129
- S^1 , 40, 208
- S^2 , 10, 13, 79, 195
- S^3 , 208
- S^7 , 208
- $SU(2)$, 195
- 1-Sphäre, 195
- 2-Sphäre, 13, 79, 203

- Abstand, 51, 71, 162
- Addition, 74
- Algebra, 205
- Apollonische Kreispackung, 168
- Apollonius Berührungskreis, 167, 168
- Äquivalenzklassen, 3, 5, 20, 29, 35, 92

- Basisaustauschsatz, 135
- Berührung, 152, 158
- Beweisen
 - computergestütztes, 145
- Bienenwabe, 87
- Bott, Raoul, 208
- Brennpunkt, 105

- Café Glyptothek, 53
- Cayley, Arthur, 205

- charakteristisches Polynom, 197
 - degeneriert, 7, 130
 - Dehomogenisierung, 3
 - Descartes, René, 168
 - Determinante, 7, 30, 43, 58, 82, 96, 116, 130, 133
 - Determinantenentwicklung, 141
 - Determinantenpolynom, 82, 138
 - Differentialgeometrie, 210
 - Dimension, 35, 78, 113
 - Divisionsalgebra, 205
 - Doppelverhältnis, 41–50, 61, 68, 78, 82, 96
 - von Geraden, 44
 - Drehachse, 197, 201
 - Drehung, 193, 200, 203
 - Drehwinkel, 202
 - Dreieck, 143
 - Dreiecksungleichung, 100
 - Dresden, 54
 - Dualität, 29–32, 44, 64, 124
 - Dualitätsoperator, 124

- Ebene
 - endliche projektive, 206
 - euklidische, 1, 19
 - im \mathbb{R}^3 , 113
 - im $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$, 115
 - projektive, 6, 15
- Eigenvektoren, 197
- Eigenwerte, 197
- Einheit
 - imaginäre, 72
 - oktavische, 205
 - quaternionische, 199
- Einheitskreis, 40
- Einheitskugel, 184, 195

- Einheitssphäre, 195
- Ellipse, 63
- Entfernung, 85
- Entzerrung, projektive, 24
- euklidische Ebene, 1, 19, 91
- euklidische Geometrie, 91–106
- exotische Sphäre, 210
- Exponentialfunktion, 74

- Fano Ebene, 206
- Farey-Reihe, 169
- Fasskreisbogen, Satz vom, 77
- Feder, 26
- Ferngerade, 5, 8, 63, 127
- Fernpunkt, 4, 8
 - im \mathbb{CP}^1 , 80
 - im \mathbb{R}^3 , 113
 - im \mathbb{RP}^1 , 40
 - in Lie-Geometrie, 161
- Fixpunkt, 86, 197
- Fluchtpunkt, 54
- Ford Kreise, 169
- Fotograph, 68
- Fraktal, 87
- Freiheitsgrade, 129, 176
- Fundamentalsatz der Algebra, 72
- Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, 24

- Geometrie
 - euklidische, 91–106
 - pseudo-euklidische, 106
- Gerade
 - im \mathbb{RP}^1 , 134
 - im \mathbb{RP}^2 , 4, 29
 - im \mathbb{RP}^3 , 118, 134
 - in Lie-Geometrie, 160
 - projektive
 - komplexe, 78
 - reele, 35–52
 - unendlich ferne, 5
- Gleichung
 - kubische, 71
 - lineare, 4
 - quadratische, 59, 71, 83, 168
- Gleichungssystem
 - lineares, 1, 23, 36, 115
- Gleitspiegelung, 19
- Golden Gate Bridge, 24
- GoogleMaps, 68
- Grassmann-Plücker-Relation, 48, 100, 141
- Graves, John T., 205
- Großkreis, 10
- Gruppe, 87

- haarig
 - Kugel, 208
 - Torus, 208
- Hairy Ball Theorem, 208
- Hamilton, Sir William Rowan, 199, 205
- harmonische
 - Lage, 47
 - Punkte, 47
- hermitesch, 180
- homogene Koordinaten, 1–6, 20, 36, 206
- Homogenisierung, 3
- Hopf Faserungen, 210
- Hurwitz, Adolf, 205
- Hyperbel, 63, 108
- Hypothese, 146

- imaginäre Einheit, 72
- imaginären Kreispunkte, 82
- Indra's Pearls, 87
- Invariante, 41, 83, 138, 176
- Inzidenz, 5, 10, 29, 67, 121, 162
- Inzidenzrelation, 5
- isotrope Richtungen, 107
- Iteration, 87
- Iteriertes Funktionensystem, 88
- I und J, 80–85, 92, 107

- Join, 7, 29, 49, 166
 - im \mathbb{RP}^3 , 120
 - im \mathbb{RP}^d , 128

- Kegelschnitt, 57–67, 82, 105
 - degenerierter, 58, 62
 - durch fünf Punkte, 59
 - Form eines, 62
- Kervaire, Michel, 208
- Klein'sche Flasche, 14
- Klein, Felix, 97
- Kollinearität, 22, 30, 67, 76
- Kombinatorik, 206
- Konjugation, 75
- Konklusion, 147
- Konkurrenz, 30, 67
- Kontakt
 - orientierter, 152, 158
- Kosinussatz, 155
- Kozirkularität, 82
- Krümmung, 168
- Kreis, 72, 80, 104, 108
 - durch drei Punkte, 166
 - in Lie-Geometrie, 160
 - orientierter, 155
- Kreisgeometrie, 151
- Kreisgleichung, 73, 152
- Kreiskette, 188

- Kreismittelpunkt, 104, 108
- Kreispackung
 - Apollonische, 168
- Kreisscheibe, 12
- Kreisspiegelung, 183
- Kreuzprodukt, 7, 116
 - verallgemeinertes, 117
- Kugel, 10, 13, 79, 184
 - haarige, 208

- Längen, 98
- Laguerre, Edmond, 97
- Lichtgeschwindigkeit, 110, 179
- Lie-Koordinaten, 152, 159
- Lie-Quadrik, 152, 160, 175
- Lie-Transformation, 175, 187
- Linearkombination, 36, 59
- Lorentz-Koordinaten, 180, 181
- Lorentz-Quadrik, 180
- Lorentz-Transformation, 179

- Möbius-Transformation, 41, 80, 86, 177, 187
- Möbiusband, 13
- München, 53, 68
- Masse, 26
- Matrix, 19, 57
 - diagonale, 63
 - hermitesche, 180, 196
 - orthogonale, 194
 - spurfreie, 196
 - symmetrische, 58
 - unitäre, 194
- Matrizengruppen, 175
- Matrizenmultiplikation, 20, 29
- Meet, 29, 49, 166
 - im \mathbb{RP}^3 , 120
 - im \mathbb{RP}^d , 128
- Metrik, 71
- Milnor, John, 208
- Monopterus, 68
- Multiplikation, 74

- nicht-Orientierbarkeit, 11
- Nullniveau, 58
- Nullstelle, 59

- Oktaven, 204–210
- Oktonionen, 204, 205
- Olympiastadion, 27
- optische Täuschung, 53
- Orientierbarkeit, 11
- orientierte Kontakt, 152, 158
- Orientierung, 143, 155
- orientierungserhaltend, 93
- Orthogonalität, 83, 108

- Panoramafoto, 68
- Pappos, 31, 32
- Parabel, 26, 63
- Parallele, 9, 127, 164, 166
- Perspektive, 21, 53
- Plücker-Koordinaten, 119, 130, 134
- Plücker-Quadrik, 132, 191
- Plückers μ , 59
- Polarität, 64
- Polarkoordinaten, 74
- Polynom
 - charakteristisches, 197
- Polynomgleichungen, 72
- Prallele, 113
- Projektion
 - stereographische, 79, 184, 195
- projektiv invariante Eigenschaft, 138
- projektive Ebene, 6
- projektive Skalen, 51, 54
- projektive Transformationen, 21
- pseudo-euklidische Geometrie, 106
- Punkt
 - e harmonische, 47
 - auf Lie-Quadrik, 160
 - im \mathbb{RP}^2 , 2, 29
 - im \mathbb{RP}^3 , 115
 - in Lie-Geometrie, 160
 - unendlich fern, 4
- Punktefolgen
 - äquidistante, 50
 - projektive, 51
- Punktkonfigurationen, 135

- quadratische Form, 57, 175
- Quadratsumme, 204
- Quadratzahlen, 204
- quadrilateral Set, 98
- Quaternionen, 199–203
- Quotientenstruktur, 3, 5, 29

- Rand, 12
- Raum
 - projektiver, 113
- Raumformen, 12–15
- Relativitätstheorie, 110, 178
- Residenzschloss Dresden, 54
- Roboter, 129
- Rodrigues, Benjamin Olinde, 199
- Rotation, 19, 193, 200, 203

- Säulengang, 53

- Satz
 vom Fasskreisbogen, 77
 von Desargues, 145
 von Descartes, 168
 von Laguerre, 97
 von Miguel, 101
 von Pappos, 31, 32, 140
 von Pascal, 147
 von Ptolemy, 100
 von Pythagoras, 101
 von Thales, 77, 101, 109
- Schnitt
 zweier Geraden, 7
 zweier Kreise, 166
- Schnittpunkt, 7, 29, 73, 166
- Schnittwinkel, 154, 179, 187
- Senkrecht stehen, 71
- Sierpinski Dreieck, 87
- Skalarprodukt, 5
- Skalen
 projektive, 51, 54
- Soddy Konfiguration, 168
- Sonderfälle, 6, 74
- Sphäre, 13
 exotische, 210
 parallelisierbare, 208
- Sphären, 208
- Spiegelung, 19, 103
- Spinor, 210
- Steiner, 188
- Steiner Kette, 188
- stereographische Projektion, 79, 184, 195
- Symmetrie, 32
- Tangente, 64, 155
 an Kreis, 166
- Tangentialität, 162
- Tangentialkreis, 166
- Tangentialraum, 208
- Topologie, 12, 40, 203, 208
- Torus, 14, 32
 haariger, 208
- Transformation
 Ähnlichkeits-, 92
 affine, 20
 euklidische, 19
 gebrochen-lineare, 41
 im \mathbb{RP}^2 , 19–24
 Lie, 175, 187
 Lorentz, 179
 loxodromische, 87
 Möbius, 41, 80, 86, 177, 187
 projektive, 137
 im \mathbb{CP}^1 , 79, 86
 im \mathbb{RP}^1 , 38, 40
 im \mathbb{RP}^2 , 21
 von Kegelschnitt, 62
 punkterhaltende, 179, 187
- Translation, 19
- Untervektorraum, 2, 9
- Vektorbündel, 210
- Vektorfeld, 208
- Verbindungsgerade, 7, 29, 166
- Verzerrung, projektive, 21
- Volumen, 143
- Winkel, 71, 77, 95, 110, 154, 162
- Winkelgleichheit, 97
- Zahlen
 ganze, 51
 komplexe, 63, 71
- Zahlenebene, 185
 komplexe, 75
- Zahlenstrahl, 40
- Zahlentheorie, 204
- Zentralprojektion, 38
- Zylinder, 12