Teil VII

Anhang

A

Duration und Konvexität

Sei

$$V_t(y_e) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{q}(y_e)^{(t_i - t)} \cdot z_{t_i}$$

der Wert einer Zahlungscharakteristik $(z_{t_i})_{i=1}^N$ bei einer Effektivrendite (*Yield to Maturity*) in Höhe von y_e. Der Wert nach einer Änderung der Effektivrendite um Δy_e lässt sich mittels einer Taylor-Approximation zweiter Ordnung wie folgt approximieren[1]

$$V_0(y_e + \Delta y_e) \approx V_0(y_e) + \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} \Delta y_e + \frac{1}{2} \frac{d^2 V_0(y_e)}{dy_e^2} (\Delta y_e)^2 .$$

Das entspricht approximativ einer prozentualen Wertänderung von

$$\frac{\Delta V_0(y_e + \Delta y_e)}{V_0(y_e)} \approx \frac{1}{V_0(y_e)} \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} \Delta y_e + \frac{1}{2} \frac{1}{V_0(y_e)} \frac{d^2 V_0(y_e)}{dy_e^2} (\Delta y_e)^2 . \tag{A.1}$$

Sei $(z_i)_{i=1}^N$ eine Zahlungscharakteristik mit Zahlungen, die in gleichbleibenden Abständen der Länge 1 anfallen, und sei $t_0 = 0$ der Betrachtungszeitpunkt, dann bezeichnet man die in Verbindung mit den Gewichtungsfaktoren

$$g_n := \frac{\mathrm{q}(y_e)^n \cdot z_n}{\sum_{i=1}^N \mathrm{q}(y_e)^i \cdot z_i} \tag{A.2}$$

durch

$$d := \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i \tag{A.3}$$

definierte mittlere (Rest-)Laufzeit als *Macauley Duration*. Die folgenden Eigenschaften der Macauley Duration sind unmittelbar einsichtig:

[1] Dazu entwickelt man die Taylorreihe (2.9) bis $n = 2$ und ignoriert das Restglied.

- ◇ Die Duration eines Zerobonds entspricht seiner Restlaufzeit, da nur eine Zahlung im Zeitpunkt der Fälligkeit erfolgt.
- ◇ Die Duration einer kupontragenden Anleihe ist stets kleiner als deren Restlaufzeit, solange der vorletzte Kupon noch nicht eingelöst wurde.
- ◇ Die Duration einer kupontragenden Anleihe nimmt ceteris paribus mit steigendem Kuponzinssatz ab, da sich das Gewicht der relativ frühen Zahlungen erhöht.
- ◇ Die Duration einer kupontragenden Anleihe nimmt ceteris paribus mit steigender Effektivrendite ab, da die zukünftigen Zahlungen durch die stärkere Abdiskontierung im Zeitpunkt der Berechnung relativ an Bedeutung verlieren.

Die Größe

$$\hat{d} := -\frac{1}{V_0(y_e)} \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} = \mathrm{q}(y_e) \cdot d \tag{A.4}$$

wird als *modifizierte Duration* und

$$\hat{c} := \frac{1}{V_0(y_e)} \frac{d^2 V_0(y_e)}{dy_e^2} = \mathrm{q}(y_e)^2 \left(d + \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i^2 \right) \tag{A.5}$$

als *Konvexität* bezeichnet.[2] Mit diesen Definitionen kann man die approximative relative Preisänderung (A.1) auch wie folgt darstellen:

$$\frac{\Delta V_0(y_e + \Delta y_e)}{V_0(y_e)} \approx -\hat{d} \cdot \Delta y_e + \hat{c} \cdot \frac{(\Delta y_e)^2}{2}. \tag{A.6}$$

Diese Darstellung lässt erkennen, dass die Konvexität dafür sorgt, dass sich der Wert im Falle einer um den Betrag $|\Delta y_e|$ sinkenden Effektivrendite stärker erhöht als er im Falle einer um den Betrag $|\Delta y_e|$ steigenden Effektivrendite fällt.

Beispiel A.1. Auf einem Finanzmarkt werden zwei Anleihen gehandelt, die in der Zukunft folgende Zahlungen generieren

n	1	2	3
z_n^1	0	33	0
z_n^2	10	11	12,1

Die Zinsstrukturkurve sei im Bewertungszeitpunkt $t_0 = 0$ flach bei einem Niveau von 10%, so dass man nicht zwischen den Preisen und den Werten

$$V^1(10\%) = \frac{33}{1,1^2} \approx 27,27$$
$$V^2(10\%) = \frac{10}{1,1} + \frac{11}{1,1^2} + \frac{12,1}{1,1^3} = \frac{33}{1,1^2} \approx 27,27,$$

[2] Die Größe heißt so, weil sie das Ausmaß der Krümmung der konvexen Funktion $V_0(y_e)$ beschreibt.

die sich für die beiden Anleihen bei einer Effektivrendite von $y_e = 0,1$ errechnen, differenzieren muss.
Es errechnen sich dann folgende modifizierte Durationen

$$\begin{aligned}
\hat{d}^1 &= \frac{1}{1,1} \cdot 2 = \frac{2}{1,1} \\
\hat{d}^2 &= \frac{1}{1,1}\left(1 \cdot \frac{\frac{10}{1,1}}{V^2(10\%)} + 2 \cdot \frac{\frac{11}{1,1^2}}{V^2(10\%)} + 3 \cdot \frac{\frac{12,1}{1,1^3}}{V^2(10\%)}\right) \\
&= \frac{1}{1,1}\frac{1,1^2}{33}\left(1 \cdot \frac{11}{1,1^2} + 2 \cdot \frac{11}{1,1^2} + 3 \cdot \frac{11}{1,1^2}\right) \\
&= \frac{1}{1,1}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}\right) = \frac{2}{1,1}
\end{aligned}$$

und Konvexitäten

$$\begin{aligned}
\hat{c}^1 &= \frac{1}{1,1^2}(2+2^2) = \frac{6}{1,1^2} \\
\hat{c}^2 &= \frac{1}{1,1^2}\left(2 + \frac{1+4+9}{3}\right) = \frac{1}{1,1^2}\frac{20}{3}.
\end{aligned}$$

Die beiden Kennzahlen können nun verwendet werden, um Auswirkungen einer Parallelverschiebung einer flachen Zinsstrukturkurve auf den Preis einer Anleihe abzuschätzen. Fiele beispielsweise das Zinsniveau auf 8%, so resultierten daraus die Preise

$$\begin{aligned}
V^1(8\%) &= \frac{33}{1,08^2} \approx 28,29 \\
V^2(8\%) &= \frac{10}{1,08} + \frac{11}{1,08^2} + \frac{12,1}{1,08^3} \approx 28,30.
\end{aligned}$$

Verwendet man die Approximationsformel (A.6), so erhält man die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
V^1(8\%) &\approx 27,27\left(1 - \frac{2}{1,1} \cdot (-0,02) + \frac{6}{1,1^2}\frac{0,0004}{2}\right) \\
&= 27,27 \cdot \frac{3138}{3025} \approx 28,28 \\
V^2(8\%) &\approx 27,27\left(1 - \frac{2}{1,1} \cdot (-0,02) + \frac{1}{1,1^2}\frac{20}{3}\frac{0,0004}{2}\right) \\
&= 27,27 \cdot \frac{1883}{1815} \approx 28,29,
\end{aligned}$$

die in diesem Fall für beide Wertpapiere sehr genau sind.

Die *Immunisierungseigenschaft* der Duration besagt, dass sich der Wert eines festverzinslichen Wertpapiers im Zeitpunkt d infolge einer einmaligen nicht zu großen Änderung der Effektivrendite von y_e auf $y_e + \Delta y_e$ im Zeitpunkt 0 unabhängig von

der Richtung der Veränderung nur erhöhen kann, sofern alle zukünftigen Zahlungen aus dem Wertpapier positiv sind und nicht an einem Zeitpunkt ausgezahlt werden. Dabei wird unterstellt, dass die vor dem Zeitpunkt d anfallenden Zahlungen zu der veränderten Effektivrendite $y_e + \Delta y_e$ angelegt werden.
Mathematisch kann man das wie folgt formulieren: Es existiert eine kritische Änderung $\Delta y_e^* \in \mathbb{R}$, so dass

$$V_d(y_e + \Delta y_e) > V_d(y_e) \quad \text{für alle} \, |\Delta y_e| < \Delta y_e^*$$

gilt. Das kann wie folgt bewiesen werden: In Verbindung mit

$$V_d(y_e) = (1+y_e)^d V_0(y_e)$$

erhält man für die erste Ableitung nach y_e

$$\begin{aligned} \frac{dV_d(y_e)}{dy_e} &= d(1+y_e)^{d-1} V_0(y_e) + (1+y_e)^d \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} \\ &= (1+y_e)^{d-1} \left(d \cdot V_0(y_e) + (1+y_e) \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} \right) \end{aligned} \tag{A.7}$$

und für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_d(y_e)}{dy_e^2} = & \frac{d-1}{1+y_e} \frac{dV_d(y_e)}{dy_e} \\ & + (1+y_e)^{d-1} \left(d \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} + \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} + (1+y_e) \frac{d^2 V_0(y_e)}{dy_e^2} \right). \end{aligned}$$

Einsetzen der durch (A.4) implizierten Beziehung

$$d = -\frac{1+y_e}{V_0(y_e)} \frac{dV_0(y_e)}{dy_e}$$

in (A.7) führt zu

$$\frac{dV_d(y_e)}{dy_e} = 0$$

und somit zur folgenden Vereinfachung der zweiten Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_d(y_e)}{dy_e^2} &= (1+y_e)^{d-1} \left((1+d) \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} + (1+y_e) \frac{d^2 V_0(y_e)}{dy_e^2} \right) \\ &= (1+y_e)^{d-2} \left((1+d)(1+y_e) \frac{dV_0(y_e)}{dy_e} + (1+y_e)^2 \frac{d^2 V_0(y_e)}{dy_e^2} \right). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Setzt man schließlich die durch (A.5) implizierte Beziehung

$$\frac{d^2 V_0(y_e)}{dy_e^2} = \frac{V_0(y_e)}{(1+y_e)^2} \left(d + \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i^2 \right)$$

in (A.8) ein und berücksichtigt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i^2 - d^2 &= \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i^2 - 2d^2 + d^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i^2 - 2d \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i + d^2 \sum_{i=1}^{N} g_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot (i-d)^2,\end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d^2 V_d(y_e)}{dy_e^2} &= (1+y_e)^{d-2} V_0(y_e) \left(-(1+d)\cdot d + d + \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i^2 \right) \\ &= (1+y_e)^{d-2} V_0(y_e) \left(\sum_{i=1}^{N} g_i \cdot i^2 - d^2 \right) \\ &= (1+y_e)^{d-2} V_0(y_e) \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot (i-d)^2 > 0.\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist für eine gegebene Effektivrendite konstant, so dass man

$$K := \frac{1}{2} \frac{d^2 V_d(y_e)}{dy_e^2}$$

setzen kann. Somit gilt nach dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned}V_d(y_e + \Delta y_e) - V_d(y_e) &= \frac{dV_d(y_e)}{dy_e} \Delta y_e + \frac{1}{2} \frac{d^2 V_d(y_e)}{dy_e^2} (\Delta y_e)^2 + \mathrm{o}((\Delta y_e)^2) \\ &= K \cdot (\Delta y_e)^2 + \mathrm{o}((\Delta y_e)^2)\end{aligned}$$

oder äquivalent

$$\frac{V_d(y_e + \Delta y_e) - V_d(y_e)}{(\Delta y_e)^2} = K + \frac{\mathrm{o}((\Delta y_e)^2)}{(\Delta y_e)^2}.$$

Der Ausdruck konvergiert für $\Delta y_e \to 0$ gegen die strikt positive Konstante K, d.h. es ist möglich, ein Δy_e^* zu finden, so dass die Summe auf der rechten Seite für alle $\Delta y_e < \Delta y_e^*$ positiv ist. Für diese Werte von Δy_e muss der Zähler des Bruchs auf der linken Seite strikt positiv sein, damit der Bruch insgesamt positiv ist.

Beispiel A.2 (Fortsetzung). Für das Wertpapier 1 errechnet sich für den Zeitpunkt $d = 2$ nach einer Änderung der Effektivrendite im Zeitpunkt 0 um Δy_e ein Wert von

$$V_2^1 = (1,1 + \Delta y_e)^2 \frac{33}{(1,1 + \Delta y_e)^2} = 33$$

und für das Wertpapier 2 ein Wert von

$$\begin{aligned} V_2^2 &= (1,1+\Delta y_e)^2 \left(\frac{10}{1,1+\Delta y_e} + \frac{11}{(1,1+\Delta y_e)^2} + \frac{12,1}{(1,1+\Delta y_e)^3} \right) \\ &= (1,1+\Delta y_e) \cdot 10 + 11 + (1,1+\Delta y_e)^{-1} \cdot 12,1 . \end{aligned}$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte im Zeitpunkt der Duration für verschiedene Änderungen der Effektivrendite dargestellt:

Δy_e	$-0,10$	$-0,05$	$-0,01$	0	$0,01$	$0,05$	$0,10$
$V_2^1(0,1+\Delta y_e)$	33	33	33	33	33	33	33
$V_2^2(0,1+\Delta y_e)$	33,1	33,0238	33,0009	33	33,0009	33,00217	33,0833

Die Immunisierungseigenschaft impliziert Arbitragegelegenheiten für den Fall, dass es zu Parallelverschiebungen flacher Zinsstrukturkurven kommt. Diese Annahme ist demnach nicht mit der Annahme arbitragefreier Märkte für festverzinsliche Wertpapiere vereinbar.[3] Das folgende Beispiel belegt, dass die Immunisierungseigenschaft tatsächlich mit der Parallelverschiebung einer flachen Zinsstruktur steht und fällt. Dazu wird der Fall betrachtet, dass die Zinsstruktur zunächst flach ist, es dann aber zu unterschiedlich starken Veränderungen der Kassazinssätze kommt.

Beispiel A.3 (Fortsetzung). Gegeben sei eine flache Zinsstrukturkurve bei einem Niveau von $r_e = y_e = 0,1$. Kommt es im Zeitpunkt 0 für alle Laufzeiten n zu einer affinen Verschiebung

$$\Delta r_e(0,n) = a \cdot n + b ,$$

dann ergibt sich im Zeitpunkt $d = 2$ für Wertpapier 1 ein Wert von

$$V_2^1 = (1,1+2a+b)^2 \frac{33}{(1,1+2a+b)^2} = 33$$

während sich für Wertpapier 2 ein Wert von

$$V_2^2 = (1,1+2a+b)^2 \left(\frac{10}{1,1+a+b} + \frac{11}{(1,1+2a+b)^2} + \frac{12,1}{(1,1+3a+b)^3} \right)$$

ergibt.

Betrachtet man den Spezialfall $b = -2a$, dann kommt es zu einer Drehung der Zinsstrukturkurve im Zinssatz $r_e(0,2)$. Der Aufzinsungsfaktor bleibt somit unverändert und man erhält

$$V_2^2 = \frac{1,1^2}{1,1-a} \cdot 10 + 11 + \frac{1,1^2}{(1,1+a)^3} \cdot 12,1 .$$

Die folgende Tabelle stellt einige Szenarien dar, die den Verlust der Immunisierungseigenschaft demonstrieren.[4]

[3] Man beachte die Notwendigkeit einer positiven Drift des Kassazinsraten-Prozesses (E.3) in Anhang E.

[4] In den Berechnungen zeigt sich das sogenannte Twist-Risiko, vgl. hierzu Albrecht & Maurer (2008, Kapitel 9.2.1.2).

a	$-0,05$	$-0,01$	$0,00$	$0,01$	$0,05$
$\Delta r_e(0,1)$	$0,05$	$0,01$	$0,00$	$-0,01$	$-0,05$
$\Delta r_e(0,3)$	$-0,05$	$-0,01$	$0,00$	$0,01$	$0,05$
V_2^1	$33,00$	$33,00$	$33,00$	$33,00$	$33,00$
V_2^2	$34,17$	$33,21$	$33,00$	$32,81$	$32,15$

B

Grundzüge der Erwartungsnutzentheorie

Die Erwartungsnutzentheorie ist ein axiomatisch fundiertes Konzept zur Operationalisierung der Risikoeinstellung.

B.1 Fundamentale Aspekte der Erwartungsnutzentheorie

Definition B.1 (einfache Lotterie). *Eine einfache Lotterie L führt mit einer Wahrscheinlichkeit p zu einer Zahlung z_2 und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-p$ zu einer Zahlung $z_1 < z_2$. Sie ist somit durch die Angabe $(z_1, z_2; p)$ vollständig charakterisiert.*

Im Folgenden wird unterstellt, dass jeder Entscheider in der Lage ist, zu entscheiden, ob und gegebenenfalls welche von zwei beliebigen Lotterien er der jeweils anderen vorzieht. Kernaussage der Erwartungsnutzentheorie bzw. des *Bernoulli-Prinzips* ist, dass eine (von Neumann-Morgenstern-)Nutzenfunktion EU existiert, die diese Präferenzordnung über Wahrscheinlichkeitsverteilungen repräsentiert.
Für dieses Resultat sind drei Axiome wesentlich verantwortlich, nämlich das *Dominanz*-, das *Stetigkeits*- und das *Unabhängigkeitsaxiom*. Diese werden im folgenden kurz erläutert.

Axiom B.1.1 (Dominanz) *Existieren zwei einfache Lotterien $L_1 = (z_1, z_2; p_1)$ und $L_2 = (z_1, z_2; p_2)$, dann gilt*

$$L_1 \succ L_2$$

genau dann, wenn $p_1 > p_2$ ist, d.h. die Lotterie, bei der die höhere Auszahlung mit höherer Wahrscheinlichkeit eintritt, wird der anderen Lotterie vorgezogen.

Axiom B.1.2 (Stetigkeit) *Jeder Entscheider kann jedem $z \in [z_1, z_2]$ eine eindeutige Wahrscheinlichkeit p zuordnen, so dass er die Teilnahme an der Lotterie $(z_1, z_2; p)$ und den Erhalt einer sicheren Zahlung in Höhe von z als gleichwertig ansieht. D.h.*

$$\exists p : z \sim (z_1, z_2; p) \ , \ z \in [z_1, z_2] \, .$$

Axiom B.1.3 (Unabhängigkeit) *Zahlungen werden unabhängig von dem Zustand bewertet, in dem sie anfallen. Das impliziert*

$$z \sim (z_1, z_2; p) \Leftrightarrow (z_1, z; q) \sim (z_1, (z_1, z_2; p); q) \sim (z_1, z_2; p \cdot q).$$

Es wird also vorausgesetzt, dass das Ereignis, welches über die Teilnahme bzw. Nichtteilnahme an der nachgeschalteten Lotterie $(z_1, z_2; p)$ entscheidet, keinen Einfluss auf die Bewertung von Zahlungen hat.

Unter der Annahme B.1 und den Axiomen B.1.1 bis B.1.3 lassen sich die Präferenzen eines Entscheiders mit Hilfe einer Erwartungsnutzenfunktion

$$EU(Z) := \sum_{i=1}^{2} p_i \cdot u(z_i)$$

abbilden, wobei u eine kardinale Nutzenfunktion ist. Diese sogenannte Erwartungsnutzeneigenschaft lässt sich wie folgt zeigen: Sei

$$(\underline{z}, \overline{z}; p)$$

eine *Standardlotterie*, deren Zahlungen ein Intervall definieren, in das die Zahlungen aller anderen Lotterien hineinfallen, dann

◇ garantiert das Stetigkeitsaxiom für alle $z \in [\underline{z}, \overline{z}]$ die Existenz von Wahrscheinlichkeiten $p(z)$, so dass

$$z \sim (\underline{z}, \overline{z}; p(z))$$

◇ gilt wegen des Unabhängigkeitsaxioms

$$(z_1, z_2; p) \sim ((\underline{z}, \overline{z}; p(z_1)), (\underline{z}, \overline{z}; p(z_2)); p) \sim (\underline{z}, \overline{z}; p \cdot p(z_2) + (1-p) \cdot p(z_1))$$

◇ genügt es, die Nutzenfunktion derart zu konstruieren, dass man Standardlotterien bewerten kann

$$u(z) := U(\underline{z}, \overline{z}; p(z)) = p(z) \Rightarrow \begin{cases} u(\underline{z}) = 0 \\ u(\overline{z}) = 1. \end{cases}$$

Aus

$$(z_1, z_2; p) \sim (\underline{z}, \overline{z}; p \cdot p(z_2) + (1-p) \cdot p(z_1))$$

folgt dann in Verbindung mit der Definition von $u(z)$ die Erwartungsnutzen-Eigenschaft:

$$\begin{aligned} U(z_1, z_2; p) &= U(\underline{z}, \overline{z}; p \cdot p(z_2) + (1-p) \cdot p(z_1)) \\ &= p \cdot p(z_2) + (1-p) \cdot p(z_1) \\ &= p \cdot u(z_2) + (1-p) \cdot u(z_1) \\ &= EU(Z). \end{aligned}$$

B.2 Klassifikation der Risikoeinstellung rationaler Entscheider

B.2.1 Grobklassifikation der Risikoeinstellung

Um zu prüfen, ob die Gestalt der Risikonutzenfunktion Aussagen über die Risikoeinstellung des Entscheiders zulässt, benötigt man zunächst eine zweckdienliche Definition des Begriffs „Risikoeinstellung". Eine Lösung dieses Problems liefert die so genannte *Markowitz*-Risikoprämie, die die Risikoeinstellung eines Entscheiders an dem Betrag misst, den dieser für eine Versicherung gegen dieses Risiko zu zahlen bereit ist.

Definition B.2 (*Markowitz*-Risikoprämie). *Bei gegebenem Anfangsvermögen w_0 und Endvermögen $W = w_0 + Z$ wird die Markowitz-Risikoprämie rp implizit durch die Gleichung*

$$\mathbb{E}(u(W)) = u(\mathbb{E}(W) - rp) \tag{B.1}$$

definiert.

Definition B.3 (Sicherheitsäquivalent). *Das sichere Endvermögen $\mathbb{E}(W) - rp$ wird als Sicherheitsäquivalent*

$$w := \mathbb{E}(W) - rp$$

bezeichnet, da der Entscheider ausweislich (B.1) *indifferent zwischen einem sicheren Endvermögen in Höhe von $\mathbb{E}(W) - rp$ und einem unsicheren Endvermögen in Höhe von W ist.*

Berücksichtigt man, dass die im vorangehenden Abschnitt B.1 erläuterte Konzeption einer Risikonutzenfunktion $u'(w) > 0$ impliziert, dann lässt sich die Risikoeinstellung wie folgt klassifizieren:

$$\begin{aligned}
&\text{Risikoaversion} &&: rp > 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(u(W)) < u(\mathbb{E}(W))\\
&\text{Risikoneutralität} &&: rp = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(u(W)) = u(\mathbb{E}(W))\\
&\text{Risikofreude} &&: rp < 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(u(W)) > u(\mathbb{E}(W))
\end{aligned}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit der *Jensen'schen* Ungleichung, dass der Verlauf der Risikonutzenfunktion $u(w)$ Rückschlüsse auf die Risikoeinstellung zulässt, und zwar gilt:[1]

$$\begin{aligned}
u''(w) > 0 &\Rightarrow \text{Riskofreude}\\
u''(w) = 0 &\Rightarrow \text{Riskoneutralität}\\
u''(w) < 0 &\Rightarrow \text{Riskoaversion.}
\end{aligned}$$

[1] Eine ausführlichere Erläuterung findet sich z.B. in Bamberg et al. (2008, Kapitel 4.5).

B.2.2 Feinklassifikation der Risikoeinstellung

Im Allgemeinen ist wohl davon auszugehen, dass Entscheider nicht vollständig gesättigt ($u'(w) > 0$) und risikoavers ($u''(w) < 0$) sind. Daher ist es wünschenswert, risikoaverses Verhalten noch feiner differenzieren zu können. Dies ist mit Hilfe des *Arrow/Pratt*-Maßes

$$ARA(w) := -\frac{u''(w)}{u'(w)} > 0$$

für die lokale *absolute Risikoaversion* möglich. Arrow und Pratt haben dieses Maß entwickelt, um den jeweiligen Einfluss von Risiko und Risikoeinstellung auf die Risikoprämie abschätzen zu können. Approximiert man die Nutzenfunktion zunächst um den Erwartungswert $\mathbb{E}(W)$ so erhält man

$$u(W) \approx u(\mathbb{E}[W]) + u'(\mathbb{E}[W])(W - \mathbb{E}(W)) + \frac{1}{2}u''(\mathbb{E}[W])(W - \mathbb{E}[W])^2. \quad \text{(B.2)}$$

Das impliziert bei Abbruch nach dem ersten Glied zum einen

$$u(\mathbb{E}[W] - rp) \approx u(\mathbb{E}[W]) - u'(\mathbb{E}[W]) \cdot rp. \quad \text{(B.3)}$$

und zum anderen

$$\mathbb{E}(u(W)) \approx u(\mathbb{E}[W]) + \frac{1}{2}u''(\mathbb{E}[W])\mathbb{E}\left((W - \mathbb{E}[W])^2\right). \quad \text{(B.4)}$$

Ersetzt man die linke und rechte Seite der Definitionsgleichung (B.1) durch die Approximationen (B.4) und (B.3) und löst dann nach rp auf, so erhält man die Approximation

$$rp \approx \frac{\mathbb{V}(W)}{2} \cdot ARA(\mathbb{E}[W]).$$

Mit Hilfe dieses Maßes kann man 3 Klassen von Entscheidern unterscheiden, nämlich solche, die vor der Wahl zwischen einer riskanten und einer sicheren Anlagemöglichkeit stehend mit wachsendem Anfangsvermögen w_0 mehr, gleich viel oder weniger in die riskante Anlageform investieren. Die Zuordnung erfolgt in dieser Reihenfolge, wenn die Nutzenfunktion des Entscheiders im gesamten Definitionsbereich $w \in [\underline{w}, \overline{w}]$ durch $ARA'(w) < 0$, $ARA'(w) = 0$ bzw. $ARA'(w) > 0$ charakterisiert ist.
Man kann bisweilen beobachten, dass sich die Risikoaversion mit der Höhe der Zahlungen ändert. Ein Maß, das diesem Umstand in einfacher Weise Rechnung trägt, ist das Maß der *relativen Risikoaversion*

$$RRA(w) := w \cdot ARA(w).$$

B.3 Stochastische Dominanz als zielgruppengerechtes Selektionskriterium

Aus praktischer Sicht sehr interessant erscheint auf den ersten Blick das Konzept der stochastischen Dominanz, da es einerseits aufgrund seiner engen Beziehung zum

Bernoulli-Prinzip entscheidungstheoretisch fundiert ist, andererseits aber ohne eine exakte Spezifikation der Risikonutzenfunktion auskommt. Es soll daher im Folgenden kurz skizziert werden. Den meisten Entscheidern fällt es relativ leicht, ihre Risikoeinstellung grob zu klassifizieren. Selbst eine Feinklassifikation im obigen Sinne erscheint relativ unproblematisch, weil die Einordnung an einfach formulierten Alternativen in sehr konkreten Entscheidungssituationen festgemacht werden kann. Es darf angenommen werden, dass sich die Vermutung abnehmender absoluter Risikoaversion bei den meisten Entscheidern relativ schnell erhärten lässt. Sei W_i eine reelle Zufallsvariable, die die Auswirkungen der Alternativen $i = A, B, C, \ldots$ auf das Endvermögen abbildet, und $F_{W_i}(w)$ die Verteilungsfunktion von W_i, dann wird die Gruppe der Entscheider mit abnehmender absoluter Risikoaversion durch die Klasse

$$U_{ARA} := \{u(w) : u'(w) > 0, u''(w) < 0, ARA'(w) < 0\}$$

von Risikonutzenfunktionen repräsentiert. Gesucht ist ein Selektionskriterium, welches im Idealfall den beiden folgenden Anforderungen genügt:

1. Eine Alternative wird nur dann aus der Vorauswahl ausgeschlossen, wenn sichergestellt ist, dass sie für kein Mitglied der oben definierten Klasse interessant ist. Dies ist dann der Fall, wenn es eine andere Alternative gibt, die der ausgeschlossenen Alternative von allen Mitgliedern der Zielgruppe vorgezogen wird.
2. Eine Alternative, die für kein Gruppenmitglied interessant ist, scheidet aus der Vorauswahl aus.

Anforderung 1 ist eine notwendige Voraussetzung dafür, dass das Selektionskriterium von allen Mitgliedern der Zielgruppe einmütig akzeptiert wird. Anforderung 2 gewährleistet in Verbindung mit Anforderung 1, dass das Selektionskriterium perfekt auf die Zielgruppe zugeschnitten ist.
Seien

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{u(w) : u'(w) > 0\} \\
U_2 &:= \{u(w) : u'(w) > 0, u''(w) < 0\} \\
U_3 &:= \{u(w) : u'(w) > 0, u''(w) < 0, u'''(w) > 0\}
\end{aligned}$$

drei Klassen von Entscheidern und sei $A\,\mathrm{SD_x}\,B$ mit $x = 1, 2, 3$ ein Symbol für die in Verbindung mit den folgenden Definitionen

Definition B.4 (Stochastische Dominanz vom Grade 1).

$$\begin{aligned}
A\,\mathrm{SD}_1\,B \Leftrightarrow\ & \mathrm{F}_{W_A}(w) - \mathrm{F}_{W_B}(w) \leq 0 \ \forall\, w \\
\wedge\ & \mathrm{F}_{W_A}(w) \neq \mathrm{F}_{W_B}(w)
\end{aligned}$$

Definition B.5 (Stochastische Dominanz vom Grade 2).

$$\begin{aligned}
A\,\mathrm{SD}_2\,B \Leftrightarrow\ & \int_{\underline{w}}^{w} \mathrm{F}_{W_A}(x) - \mathrm{F}_{W_B}(x)\,dx \leq 0 \ \forall\, w \\
\wedge\ & \int_{\underline{w}}^{w} \mathrm{F}_{W_A}(x)\,dx \neq \int_{\underline{w}}^{w} \mathrm{F}_{W_B}(x)\,dx
\end{aligned}$$

Definition B.6 (Stochastische Dominanz vom Grade 3).

$$A\,\mathrm{SD}_3\,B \Leftrightarrow \int\limits_{\underline{w}}^{w}\int\limits_{\underline{w}}^{y} \mathrm{F}_{W_A}(x) - \mathrm{F}_{W_B}(x)\,dx\,dy \leq 0 \;\forall\; w$$
$$\wedge \int\limits_{\underline{w}}^{w}\int\limits_{\underline{w}}^{y} \mathrm{F}_{W_A}(x)\,dx\,dy \neq \int\limits_{\underline{w}}^{w}\int\limits_{\underline{w}}^{y} \mathrm{F}_{W_B}(x)\,dx\,dy,$$

zu verstehende Aussage „Alternative A dominiert Alternative B im Sinne der stochastischen Dominanz vom Grade x", dann kann gezeigt werden,[2] dass die Korrespondenz

$$A\,\mathrm{SD}_{\mathrm{x}}\,B \Leftrightarrow \mathbb{E}[u(W_A)] > \mathbb{E}[u(W_B)] \;\forall\; u(w) \in U_x$$

gilt. Nun gelangt man unter Berücksichtigung von

$$ARA'(w) = \frac{(u''(w))^2 - u'''(w)\cdot u'(w)}{(u'(w))^2} < 0 \Rightarrow u'''(w) > 0 \;\forall\; u \text{ mit } u'(w) > 0$$

zu der Ordnung

$$U_{ARA} \subset U_3 \subset U_2 \subset U_1.$$

Es ist also nicht garantiert, dass mit Hilfe des SD_3-Kriteriums auch wirklich alle Alternativen ausgeschlossen werden, die ein Entscheider mit abnehmender absoluter Risikoaversion niemals in Betracht ziehen würde. Somit ist zwar Anforderung 1 nicht aber Anforderung 2 erfüllt. Für ein exakt auf die Zielgruppe zugeschnittenes Selektionskriterium sind die Bedingungen, die das am wenigsten restriktive Dominanzkriterium SD_3 voraussetzt, um eine Alternative als dominiert zu brandmarken, demnach immer noch zu hoch. Das schmerzt um so mehr als $A\,\mathrm{SD}_{\mathrm{x}}\,B$ für alle $x = 1,2,3$ sowohl $\mathbb{E}[W_A] \geq \mathbb{E}[W_B]$ für die jeweils erwarteten Endvermögen als auch $\underline{w}_A \geq \underline{w}_B$ für die Endvermögen im jeweils ungünstigsten Fall voraussetzt. Darin zeigt sich letztlich, dass der Verzicht auf eine exakte Spezifikation der Risikonutzenfunktion den Entscheider nicht davon entbindet, sehr genaue Vorstellungen von den Konsequenzen im Sinne von (Rand-)Verteilungen für das mit dem Ergreifen der zur Wahl stehenden Alternativen jeweils verbundene Endvermögen zu entwickeln.[3]

[2] Siehe Bawa (1975, S. 101).

[3] Dabei sollten die Möglichkeiten zur Verlagerung von Risiken mit Hilfe von Transaktionen am Kapitalmarkt sinnvollerweise von vornherein mit einbezogen werden.

C

Lognormal-Verteilung

Für die logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable $Y := \mathrm{e}^X$ mit $X \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ erhält man in Verbindung mit den Definitionen

$$x := \ln y$$
$$z := \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$

sowie den Symbolen $\mathrm{F}_Y(y)$ für den Wert der Verteilungsfunktion der Zufallsvariable Y and der Stelle y und $\phi_{0,1}(z)$ und $\Phi_{0,1}(z)$ für die Dichte- und die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung wegen der Übereinstimmung von $\mathrm{F}_Y(y)$ mit $\mathrm{F}_X(\ln y)$ die Dichtefunktion

$$\mathrm{f}_Y(y) = \mathrm{F}_X'(\ln y) \cdot \frac{dx}{dy} = \phi_{\mu_X, \sigma_X}(x) \frac{dx}{dy} = \frac{\phi_{0,1}(z)}{\sigma_X} \frac{dx}{dy}.$$

Mithin gilt

$$\mathbb{E}[1 \,|\, y > a] = \int_a^\infty \mathrm{f}_Y(y) dy = \int_{\ln a}^\infty \phi_{0,1}(z) \frac{1}{\sigma_X} dx.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von

$$dz = \frac{1}{\sigma_X} dx$$

und (Symmetrie)

$$1 - \Phi_{0,1}(z) = \Phi_{0,1}(-z)$$

schließlich

$$\mathbb{E}[1 \,|\, y > a] = \int_{\frac{\ln a - \mu_X}{\sigma_x}}^\infty \phi_{0,1}(z) dz = \Phi_{0,1}\left(\frac{\mu_X - \ln a}{\sigma_X}\right). \tag{C.1}$$

Aus

$$\mathbb{E}[Y\,|\,y>a]=\int_a^{\infty} y\,\mathrm{f}_Y(y)\,dy=\int_{\frac{\ln a-\mu_X}{\sigma_x}}^{\infty}\mathrm{e}^{\sigma_X z+\mu_X}\,\phi_{0,1}(z)\,dz \tag{C.2}$$

folgt unter Berücksichtigung von

$$\mathrm{e}^{\sigma_X\cdot z+\mu_X}\,\phi_{0,1}(z)=\mathrm{e}^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\,\phi_{0,1}(z-\sigma_X)$$

schließlich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y\,|\,y>a]&=\mathrm{e}^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\int_{\frac{\ln a-\mu_X}{\sigma_X}-\sigma_X}^{\infty}\phi_{0,1}(u)\,du\\&=\mathrm{e}^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\left(1-\Phi_{0,1}\left(\frac{\ln a-\mu_X}{\sigma_X}-\sigma_X\right)\right)\\&=\mathrm{e}^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\,\Phi_{0,1}\left(\frac{\mu_X-\ln a}{\sigma_X}+\sigma_X\right).\end{aligned}$$

Seien X_1 und X_2 gemeinsam normalverteilt und

$$\begin{aligned}Y_1&:=\mathrm{e}^{X_1}\\Y_2&:=\mathrm{e}^{X_2},\end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1^{-1}\cdot Y_2)&=\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-X_1+X_2})\\&=\mathrm{e}^{\mathbb{E}(-X_1+X_2)+\frac{1}{2}\mathbb{V}(-X_1+X_2)}\\&=\mathrm{e}^{\mathbb{E}(-X_1)+\frac{1}{2}\mathbb{V}(-X_1)}\,\mathrm{e}^{\mathbb{E}(X_2)+\frac{1}{2}\mathbb{V}(X_2)}\,\mathrm{e}^{-\mathbb{C}(X_1,X_2)}\\&=\mathbb{E}(Y_1^{-1})\cdot\mathbb{E}(Y_2)\cdot\mathrm{e}^{-\mathbb{C}(X_1,X_2)}.\end{aligned}$$

Gemeinsam normalverteilte Zufallsvariable

$$\mathbf{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\mathbf{diag}(\boldsymbol{\sigma})\,\mathfrak{R}\,\mathbf{diag}(\boldsymbol{\sigma}))$$

lassen sich durch Linearkombinationen

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}+\mathbf{diag}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{A}\mathbf{Z}$$

der voneinander unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen

$$\mathbf{Z}\sim\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{E})$$

beschreiben, falls die Bedingung

$$\mathbb{C}\left(\mathbf{AZ},(\mathbf{AZ})'\right)=\mathbf{A}\,\mathbb{C}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}'\right)\mathbf{A}'=\mathbf{AA}'\overset{!}{=}\mathfrak{R} \tag{C.3}$$

erfüllt ist. Falls es nicht möglich ist, jegliches Risiko zu eliminieren, ist die Korrelationsmatrix $\mathfrak{R}$ eine positiv definit symmetrische Matrix. In diesem Fall erfüllt die *Cholesky-Zerlegung*

$$\mathbf{A} = (a_{jk})_{j=1,k=1}^{K,K} \quad \text{mit} \quad a_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k=1 \\ \rho_{j1} & j>k=1 \\ 0 & j<k \\ \sqrt{\rho_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} \rho_{ji}^2} & j=k>1 \\ \frac{1}{\rho_{kk}} \left(\rho_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_{ji} \rho_{ki} \right) & j>k>1 \end{cases}$$

die Bedingung (C.3).[1]
Demnach besitzen die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{\mu} + \begin{pmatrix} \sigma_r (T-t) & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{W}_t^r \\ \tilde{W}_t \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\mu} + \begin{pmatrix} \sigma_r (T-t) & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sqrt{t} \end{aligned}$$

die Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_r (T-t) & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r (T-t) & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} t \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_r^2 (T-t)^2 & \rho \sigma \sigma_r (T-t) \\ \rho \sigma \sigma_r (T-t) & \sigma^2 \end{pmatrix} t \,. \end{aligned}$$

[1] Ein Vorzug der Cholesky-Zerlegung ist, dass die Dreiecksgestalt der Matrix **A** eine sehr einfache Bestimmung der Randverteilungen gestattet.

D

Ökonomische und handwerkliche Aspekte von Girsanovs Theorem

Die folgenden Erläuterungen beziehen sich auf die Ausführungen in Unterabschnitt 10.2.7. Es soll der Zusammenhang zwischen der Solvenzwahrscheinlichkeit unter dem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}_{P(t,T)}$ (im Folgenden kurz: $\mathbb{Q}$) und dem empirischen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ klargestellt werden.
Anders als das Binomialmodell, welches ohne Annahmen über subjektive Wahrscheinlichkeiten auskommt, setzt das Modell von Black Scholes und Merton auf der Modellierung eben dieser subjektiven Wahrscheinlichkeiten auf. Es geht davon aus, dass sich die Vorstellungen der Marktteilnehmer über die Kursentwicklung des Zerobonds während seiner Laufzeit durch die Funktion

$$P(t,T) = P(0,T)\mathrm{e}^{r_c t}$$

und die Vorstellungen über die Kursentwicklung des Marktpreises der Assets durch den von einer normalverteilten Brownschen Bewegung W_t getriebenen stochastischen Prozess

$$A_t = A_0 \mathrm{e}^{\mu t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t} \tag{D.1}$$

beschreiben lassen.
Die damit verbundene explizite Modellierung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten wird dem Anwender häufig nicht bewusst, weil die Bewertung von replizierbaren Derivaten nicht von den durch die $\mathbb{P}$-Brownsche-Bewegung W_t bestimmten subjektiven Wahrscheinlichkeiten sondern von den durch die $\mathbb{Q}$-Brownsche-Bewegung[1]

$$\tilde{W}_t = W_t + \pi_A(t)\sqrt{t}$$

bestimmten (Pseudo-)Wahrscheinlichkeiten abhängt. Dabei kann

$$\pi_A(t) := \frac{(\mu - r_c)t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{(\mu - r_c)}{\sigma}\sqrt{t}$$

[1] $\mathbb{Q}$-Brownsche-Bewegung bedeutet, dass $\tilde{W}_t$ eine Brownsche Bewegung unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}_{P(t,T)}$ ist.

als Marktpreis für das leistungswirtschaftliche Risiko des betrachteten Unternehmens interpretiert werden. Man beachte, dass damit angenommen wird, dass die Übernahme des Risikos um so besser entlohnt wird, je länger die Halteperiode ist.
Unter den getroffenen Annahmen geht das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ durch Multiplikation der $\mathbb{P}$-Dichte von $Y_t = P(t,T)^{-1}A_t$ mit

$$\theta_t := \mathrm{e}^{-\frac{\pi_A(t)}{\sqrt{t}}W_t - \frac{1}{2}\pi_A^2(t)}$$

hervor. In Verbindung mit der Definition (10.28) für die Distance to Default $dd(T)$ gilt somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_T > f) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\theta_T^{-1} \mid A_T > f) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{e}^{\frac{\pi_A(T)}{\sqrt{T}}W_T + \frac{1}{2}\pi_A^2(T)} \mid A_T > f) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{e}^{\frac{\pi_A(T)}{\sqrt{T}}(\tilde{W}_T - \pi_A(T)\sqrt{T}) + \frac{1}{2}\pi_A^2(T)} \mid A_T > f) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{e}^{\frac{\pi_A(T)}{\sqrt{T}}\tilde{W}_T - \frac{1}{2}\pi_A^2(T)} \mid A_T > f) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{e}^{\frac{\pi_A(T)}{\sqrt{T}}\tilde{W}_T - \frac{1}{2}\pi_A^2(T)} \mid \tilde{W}_T > -\sqrt{T}\cdot dd(T)) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi_A^2(T)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{e}^{\frac{\pi_A(T)}{\sqrt{T}}\tilde{W}_T} \mid \tilde{W}_T > -\sqrt{T}\cdot dd(T)).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (siehe Anhang C)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{e}^{\frac{\pi_A(T)}{\sqrt{T}}\tilde{W}_T} \mid \tilde{W}_T > -\sqrt{T}\cdot dd(T)) &= \int_{-dd(T)}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi_A(T)\cdot z}\,\phi_{0,1}(z)dz \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi_A^2(T)}\int_{-dd(T)}^{\infty} \phi_{0,1}(z-\pi_A(T))dz \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi_A^2(T)}\int_{-dd(T)-\pi_A(T)}^{\infty} \phi_{0,1}(u)du
\end{aligned}$$

schließlich

$$\mathbb{P}(A_T > f) = \Phi_{0,1}(dd(T) + \pi_A(T)).$$

Aus

$$\begin{aligned}
dd(T) + \pi_A(T) &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\ln A_T) - \ln f}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\mu - r_c)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\ln A_T) - \ln f}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

wird in Verbindung mit (C.1) ersichtlich, dass man diese subjektive Wahrscheinlichkeit auch direkt aus (D.1) hätte ableiten können.
Abschließend sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, komplexe Bewertungsprobleme mit Hilfe von stochastischen Differentialgleichungen (SDGs) vergleichsweise

einfach zu lösen. Wie dabei vorzugehen ist, soll im Folgenden an dem einfachen Beispiel eines im Zeitpunkt 0 abgeschlossenen Forward-Kontraktes mit Fälligkeit T auf eine dividendenlose Aktie demonstriert werden.
Wir setzen dabei voraus, dass mit der dem Forward-Kontrakt zugrunde liegenden Aktie und einem als Numéraire fungierenden Zerobond mit Fälligkeit T zwei zur Replikation geeignete Titel am Markt gehandelt werden.[2] Im ersten Schritt muss das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ bestimmt werden, unter dem der in Einheiten des Numéraires gemessene Aktienkurs $Y_t = P(t,T)^{-1} S_t$ ein Martingal ist. Sehr komfortabel lässt sich dieses Problem mit Hilfe eines mathematischen Satzes (*Itôs Lemma*) lösen, der besagt, dass eine differenzierbare Funktion $\mathrm{f}(t, X_t)$ eines stochastischen Prozesses X_t, der durch die SDG

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

beschrieben wird, seinerseits durch die SDG

$$\mathrm{df}(X_t, t) = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial X} a(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial X^2} b(t, X_t)^2 \right) dt + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial X} b(t, X_t) dW_t \tag{D.2}$$

beschrieben wird. Mit Hilfe dieses Satzes ist es weitgehend unproblematisch, die Dynamik eines bestimmten stochastischen Prozesses zu ermitteln, indem man diesen als Funktion eines anderen stochastischen Prozesses darstellt, dessen SDG bekannt ist. Im konkreten Fall

$$Y_t = Y_0 \mathrm{e}^{(\mu - r_c)t} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$$

bieten sich zwei Möglichkeiten an: Entweder fasst man den stochastischen Prozess Y_t als Funktion $\mathrm{f}(X_t) = \mathrm{e}^{X_t}$ der Brownschen Bewegung mit Drift

$$X_t = X_0 + \left(\mu - r_c - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t$$

auf, die durch die SDG

$$dX_t = \left(\mu - r_c - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t$$

beschrieben ist, und erhält durch Einsetzen von $a(t, X_t) = \mu - r_c - \frac{1}{2}\sigma^2$, $b(t, X_t) = \sigma$, $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial X_t} = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial X_t^2} = \mathrm{e}^{X_t} = Y_t$ in (D.2) die SDG

$$dY_t = (\mu - r_c) Y_t dt + \sigma Y_t dW_t, \tag{D.3}$$

oder man fasst den stochastischen Prozess Y_t als Funktion $\mathrm{f}(t, X_t) = \mathrm{e}^{\left(\mu - r_c - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma X_t}$ der Zeit t und der Brownschen Bewegung ohne Drift

$$X_t = W_t$$

[2] Vgl. Unterabschnitt 8.3.1.

auf, die durch die SDG

$$dX_t = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW_t$$

beschrieben ist. Auf diese Weise gelangt man durch Einsetzen von $a(t, X_t) = 0$, $b(t, X_t) = 1$, $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial t} = (\mu - r_c - \frac{1}{2}\sigma^2)Y_t$, $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial X_t} = \sigma Y_t$ und $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial X_t^2} = \sigma^2 Y_t$ in (D.2) ebenfalls auf die SDG (D.3). Auf beiden Wegen kommt man zu dem Ergebnis, dass der Prozess

$$Y_t = Y_0 \mathrm{e}^{(\mu - r_c)t} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$$

die SDG

$$dY_t = (\mu - r_c)Y_t dt + \sigma Y_t dW_t$$

besitzt. Ersetzt man dW_t gemäß

$$dW_t = d\tilde{W}_t - \pi(t)\sqrt{dt}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t(\mu - r_c)dt + Y_t\sigma \left(d\tilde{W}_t - \pi(t)\sqrt{dt}\right) \\ &= Y_t\left(\mu - r_c - \sigma\frac{\pi(t)}{\sqrt{dt}}\right)dt + \sigma Y_t d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Da ein stochastischer Prozess genau dann ein Martingal ist, wenn seine SDG keine Drift besitzt, muss

$$\mu - r_c - \sigma\frac{\pi(t)}{\sqrt{dt}} = 0 \Leftrightarrow \pi(t) = \frac{\mu - r_c}{\sigma}\sqrt{dt}$$

gelten.
Im zweiten Schritt bestimmt man den in Einheiten des Numéraire-Wertpapiers gemessenen Marktwert. Für $0 \leq t \leq T$ gilt:

$$\begin{aligned} \Pi_t\left(Z_T^D\right) &= P(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(P(T,T)^{-1} Z_T^D \mid \mathscr{F}_t\right) \\ &= P(t,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(Y_T - f_S(0,T) \mid \mathscr{F}_t\right) \\ &= P(t,T)\left(Y_t - f_S(0,T)\right) \\ &= S_t - P(t,T) f_S(0,T). \end{aligned} \tag{D.4}$$

Da der Forward-Kontrakt bei Abschluss in $t = 0$ definitionsgemäß einen Marktwert von Null hat, muss die Bedingung

$$\Pi_0\left(Z_T^D\right) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow f_S(0,T) = P(0,T)^{-1} S_0$$

erfüllt sein. Einsetzen von in (D.4) führt auf

$$\Pi_t\left(Z_T^D\right) = S_t - \frac{P(t,T)}{P(0,T)} S_0 .$$

Im dritten Schritt bestimmt man das Replikationsportfolio. Sei

$$PF_t = x_t^S \cdot S_t + x_t^P \cdot P(t,T)$$

der Marktpreis des aus x_t^S Stücken der Aktie und x_t^P Stücken des Zerobonds zusammengesetzten Replikationsportfolios, dann kann die Replikation nur gelingen, wenn

$$d\left(P(t,T)^{-1} PF_t\right) \stackrel{!}{=} d\left(P(t,T)^{-1} \Pi_t\right) \tag{D.5}$$

gilt. Nachdem der in Einheiten des Numéraires gemessene Marktwert im zweiten Schritt mit

$$P(t,T)^{-1} \Pi_t = Y_t - f_S(0,T)$$

ermittelt wurde, ist auch dessen Dynamik $d\left(P(t,T)^{-1}\Pi_t\right) = dY_t$ und mithin die rechte Seite von (D.5) bekannt. Für die linke Seite erhält man

$$d\left(P(t,T)^{-1} PF_t\right) = x_t^S \cdot dY_t ,$$

wenn man davon ausgeht, dass x_t^S $\mathscr{F}_t$-vorhersehbar ist, das bedeutet, dass der Prozess x_t^S nur von Information abhängt, die bereits *vor* dem Zeitpunkt t bekannt ist. Man muss sich den Übergang vom diskreten Binomialmodell zum stetigen Fall also so vorstellen, dass der Zeitpunkt t_{n-1} bis auf einen infinitesimal kleinen Abstand an den Zeitpunkt t_n heranrückt, und dass es sich bei x_t^S um den entsprechenden Grenzwert für x_{n-1}^S handelt. Im konkreten Fall lautet die Replikationsbedingung (D.5) demnach

$$x_t^S \cdot dY_t \stackrel{!}{=} dY_t \Leftrightarrow x_t^S = 1 \, \forall t : 0 \le t \le T .$$

Demnach kann der Forward durch eine einfache Buy-and-Hold-Strategie repliziert werden, was uns daran erinnert, das im vorliegenden Fall der Weg als Ziel ausgegeben war. Hat man x_t^S bestimmt, dann erhält man x_t^P aus der Gleichung

$$x_t^P = P(t,T)^{-1} PF_t - x_t^S \cdot Y_t = P(t,T)^{-1} \Pi_t - x_t^S \cdot Y_t .$$

Im konkreten Fall gilt also

$$x_t^P = Y_t - f_S(0,T) - 1 \cdot Y_t = -f_S(0,T) .$$

E

Heath Jarrow Morton Drift Condition

Wer sich für die Entwicklung von Zerobondpreisen und Terminzinssätzen unter dem empirischen Wahrscheinlichkeitsmaß interessiert, muss auf den Ansatz von Heath Jarrow und Morton zurückgreifen.[1] Da dieser die gesamte Zinsstruktur mit Hilfe einiger weniger Risikofaktoren modelliert, muss man gut aufpassen, dass die gewählte Modellierung keine Arbitragegelegenheiten impliziert, da die Preise von Zerobonds mit unterschiedlichen Restlaufzeiten in *systematisch* verschiedener Weise von diesen Risikofaktoren beeinflusst werden.[2]
Unter der konkreten Annahme (10.31)

$$f_c(t,u) = f_c(0,u) + \int_0^t \alpha_c(s,u)\,ds + \sigma_r \int_0^t \mathrm{h}(s,u)\,dW_s^r$$

sind Arbitragegelegenheiten nur dann ausgeschlossen, wenn die sogenannte *Heath Jarrow Morton Drift Condition*

$$\alpha_c(s,t) = \left(\mathrm{h}(s,t) \int_s^t \mathrm{h}(\tau,t)\,d\tau \right) \sigma_r^2$$

erfüllt ist. Das kann wie folgt mit Hilfe des Girsanov-Theorems[3] gezeigt werden: Da das gesamte Spektrum von Zerobondpreisen $P(t,S) : t < S < T$ unter dem Maß $\mathbb{Q}_T$ die Martingaleigenschaft besitzen muss, muss für alle $t < S < T$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{P(t,T)}}\left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)}\right) = \frac{P(0,S)}{P(0,T)}$$

gelten. Definitionsgemäß gilt

---

[1] Vgl. Shreve (2004, Kapitel 10.1. u. 10.3) oder Branger & Schlag (2004, Kapitel 6).

[2] Die in Anhang A behandelte Immunisierungseigenschaft der Duration ist ein Beleg dafür, dass beispielsweise die beliebte Annahme von Parallelverschiebungen einer flachen Zinsstruktur im Widerspruch zur Arbitragefreiheit des Rentenmarktes steht.

[3] Vgl. hierzu Anhang D.

$$\ln P(t,S) = -\int_t^S f_c(t,u)\,du$$

und mithin

$$d\ln P(t,S) = f_c(t,t) - \int_t^S \frac{\partial f_c(t,u)}{\partial t}du$$

und

$$d\ln P(t,S) - d\ln P(t,T) = \int_S^T \frac{\partial f_c(t,u)}{\partial t}du.$$

Hieraus erhält man in Verbindung mit

$$\frac{\partial f_c(t,u)}{\partial t} = \alpha_c(t,u)dt + \sigma_r \mathrm{h}(t,u)dW_t^r$$

$$\begin{aligned} d\ln P(t,S) - d\ln P(t,T) &= \int_S^T \alpha_c(t,u)dt\;du + \sigma_r \int_S^T \mathrm{h}(t,u)dW_t^r\,du \\ &= \int_S^T \alpha_c(t,u)du\;dt + \sigma_r \int_S^T \mathrm{h}(t,u)du\;dW_t^r. \end{aligned}$$

Sei

$$d\tilde{W}_t^r = dW_t^r + \pi(t,T)dt,$$

dann muss also

$$\int_S^T \alpha_c(t,u)du + \frac{1}{2}\sigma_r^2\left(\int_S^T \mathrm{h}(t,u)du\right)^2 - \pi(t,T)\cdot\sigma_r\int_S^T \mathrm{h}(t,u)du = 0$$

gelten. Damit diese Gleichung für alle $t < S < T$ erfüllbar ist, muss die linke Seite invariant gegenüber Veränderungen von S sein. Das erfordert

$$-\alpha_c(t,S) - \sigma_r^2\left(\int_S^T \mathrm{h}(t,u)du\right)\mathrm{h}(t,S) + \sigma_r\cdot\pi(t,T)\cdot\mathrm{h}(t,S) = 0.$$

Durch Einsetzen bestätigt man, dass das Problem in Verbindung mit der Definiton

$$\mathrm{i}(s,u) := \int_s^u \mathrm{h}(t,u)dt = \int_s^u \mathrm{e}^{-\lambda(u-t)}dt$$

einer im Intervall $(u-s,0)$ streng monoton fallenden Funktion i (i steht für *impact*) des Flüchtigkeits-Parameters λ von

$$\alpha_c(t,S) = \sigma_r^2\mathrm{h}(t,S)\int_t^S \mathrm{h}(u,S)du \tag{E.1}$$

und

$$\pi(t,T) = \sigma_r \int_t^T \mathrm{h}(t,u)du = \sigma_r \mathrm{i}(t,T) \tag{E.2}$$

gelöst wird.[4]
Einsetzen von (E.1) in (10.31) führt unter Berücksichtigung von

$$\alpha_c(s,t) = \sigma_r^2 \left(-\frac{\partial \mathrm{i}(s,t)}{\partial s}\right) \mathrm{i}(s,t)$$

auf

$$f_c(t,u) = f_c(0,u) + \frac{\sigma_r^2}{2}\left[\mathrm{i}(0,u)^2 - \mathrm{i}(t,u)^2\right] + \sigma_r \int_0^t \mathrm{h}(s,u)dW_s^r$$

und (man beachte $\mathrm{i}(t,t) = 0$)

$$r_c(t) := f_c(t,t) = f_c(0,t) + \frac{\sigma_r^2}{2}\mathrm{i}(0,t)^2 + \sigma_r \int_0^t \mathrm{h}(s,t)dW_s^r. \tag{E.3}$$

Hieraus erhält durch Substitution von dW_s^r durch $d\tilde{W}_r(t) - \pi(t,T)dt$ in Verbindung mit dem Marktpreis für das Risiko (E.2)

$$\begin{aligned} f_c(t,u) = f_c(0,u) + \frac{\sigma_r^2}{2}&\left[\mathrm{i}(0,u)^2 - \mathrm{i}(t,u)^2 - 2\int_0^t \mathrm{h}(s,u)\cdot \mathrm{i}(s,T)ds\right] \\ &+ \sigma_r \int_0^t \mathrm{h}(s,u)d\tilde{W}_s^r \end{aligned} \tag{E.4}$$

für den Fall, dass der Zerobond mit Fälligkeit T als Numéraire verwendet wird.
Im Grenzfall $\lambda = 0$, d.h. dann wenn unvorhersehbare Zinssatzänderungen stets zu einer Parallelverschiebung der gesamten Zinsstrukturkurve führen, erhält man durch Einsetzen von $\mathrm{h}(s,u) = 1$ und $\mathrm{i}(s,u) = u - s$ für alle $u \geq s$ in (E.4) die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} f_c(t,u) &= f_c(0,u) - \sigma_r^2(T-u)t + \sigma_r \int_0^t d\tilde{W}_s^r \\ &= f_c(0,u) - \sigma_r^2(T-u)t + \sigma_r \tilde{W}_t^r. \end{aligned}$$

[4] Vgl. z.B. Back (1996, S. 32) oder Björk (1997, S. 92 ff.).

F

RiskMetrics™ Cash Flow Mapping

Jede zukünftige Zahlung eines jeden festverzinslichen Wertpapiers wird nach folgendem Verfahren auf die Standard-Fälligkeiten

$$\mathscr{T}^* := \{T_1^*, \ldots, T_{14}^*\} = \left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 15, 20, 30\right\}$$

verteilt: Sei T_u der Zeitpunkt der Fälligkeit einer tatsächlich anfallenden Zahlung. In Verbindung mit den Definitionen

$$T_u^l := \begin{cases} T_1^* & T_u < T_1^* \\ \max(T_i^* \in \mathscr{T}^* \mid T_i^* \leq T_u) & T_u \geq T_1^* \end{cases}$$

für die linke benachbarte Standard-Fälligkeit und

$$T_u^r := \begin{cases} \min(T_i^* \in \mathscr{T}^* \mid T_i^* > T_u) & T_u < T_{14}^* \\ T_{14}^* & T_u \geq T_{14}^* \end{cases}$$

für die rechte benachbarte Standard-Fälligkeit lassen sich die Zerobondpreise auf der Grundlage linear interpolierter Kassazinssätze

$$\tilde{r}(0, T_u) := \begin{cases} r(0, T_1^*) & T_u < T_1^* \\ \frac{T_u^r - T_u}{T_u^r - T_u^l} \cdot r(0, T_u^l) + \frac{T_u - T_u^l}{T_u^r - T_u^l} \cdot r(0, T_u^r) & T_1^* \leq T_u < T_{14}^* \\ r(0, T_{14}^*) & T_u \geq T_{14}^* \end{cases}$$

durch

$$\widetilde{P}(0, T_u) := \mathrm{e}^{-\tilde{r}(0, T_u) \cdot T_u}$$

approximieren. Mit Hilfe von interpolierten Terminzinssätzen kann nun der Wert der Zahlung z_{T_u} in den benachbarten Standard-Fälligkeiten T_u^l und T_u^r ermittelt werden. Nimmt man die definitorische Beziehung zwischen konformem Terminzinssatz und Zerobondpreisen

$$\frac{P(0,T_1)}{P(0,T_2)} = \mathrm{e}^{f_c(0,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)}$$

für $0 \leq T_1 \leq T_2$, so errechnen sich die wertäquivalenten Zahlungen durch Abzinsen

$$\hat{z}_{T_u^l} := \frac{\widetilde{P}(0,T_u)}{P(0,T_u^l)} \cdot z_{T_u} = \mathrm{e}^{-\widetilde{f}_c(0,T_u^l,T_u)\cdot(T_u-T_u^l)} \cdot z_{T_u} \tag{F.1}$$

bzw. Aufzinsen

$$\hat{z}_{T_u^r} := \frac{\widetilde{P}(0,T_u)}{P(0,T_u^r)} \cdot z_{T_u} = \mathrm{e}^{\widetilde{f}_c(0,T_u,T_u^r)\cdot(T_u^r-T_u)} \cdot z_{T_u} \tag{F.2}$$

mit der entsprechenden konformen Terminzinsrate.
Würde man eine Zahlung z_{T_u} dementsprechend auf einen der beiden benachbarten Standardzeitpunkte auf- oder abzinsen, so könnte man den Value at Risk durch die Wahl des früheren oder späteren Nachbarzeitpunktes beeinflussen. Um dies zu verhindern, wird die Zahlung im Verhältnis

$$\eta_u := \begin{cases} 0, & T_u < T_1^* \\ \eta_u^*, & T_1^* \leq T_u < T_{14}^* \\ 1, & T_u \geq T_{14}^* \end{cases}$$

zu $1-\eta_u$ auf die beiden benachbarten Zeitpunkte aufgeteilt, wobei η_u^* durch die Bedingungen

$$\mathrm{VaR}(\eta_u^* \cdot \hat{z}_{T_u^l} \cdot P(0,T_u^l) + (1-\eta_u^*) \cdot \hat{z}_{T_u^r} \cdot P(0,T_u^r)) = \mathrm{VaR}(z_{T_u} \cdot \widetilde{P}(0,T_u)) \tag{F.3}$$

und $\eta_u^* \in [0,1]$ bestimmt ist. Dabei wird die für die Berechnung des VaR auf der rechten Seite benötigte, aber nicht bekannte Standardabweichung von $\ln P(\Delta,T_u) - \ln P(0,T_u)$ durch

$$\widetilde{\sigma}_{T_u} := \begin{cases} \sigma_{T_1^*}, & T_u < T_1^* \\ \frac{T_u^r - T_u}{T_u^r - T_u^l} \cdot \sigma_{T_u^l} + \frac{T_u - T_u^l}{T_u^r - T_u^l} \cdot \sigma_{T_u^r}, & T_1^* \leq T_u < T_{14}^* \\ \sigma_{T_{14}^*}, & T_u \geq T_{14}^* \end{cases}$$

linear interpoliert, so dass sich ein approximierter Value at Risk von

$$\widetilde{\mathrm{VaR}}(z_{T_u} \cdot \widetilde{P}(0,T_u)) = \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha) \cdot \widetilde{P}(0,T_u) \cdot z_{T_u} \cdot \widetilde{\sigma}_{T_u} \cdot \sqrt{\Delta}$$

ergibt. Die resultierende Gleichung ist unter Berücksichtigung von $\hat{z}_{T_u^l} P(0,T_u^l) = \hat{z}_{T_u^r} P(0,T_u^r) = z_{T_u} \widetilde{P}(0,T_u)$ äquivalent zu

$$\widetilde{\sigma}_{T_u} = \sqrt{(\eta_u^*)^2 \sigma_{T_u^l}^2 + 2 \cdot \eta_u^* (1-\eta_u^*) \rho_{T_u^l,T_u^r} \sigma_{T_u^l} \sigma_{T_u^r} + (1-\eta_u^*)^2 \sigma_{T_u^r}^2}\,.$$

In Verbindung mit den Definitionen

$$\alpha_u = 2\sigma_{T_u^r}\left(\rho_{T_u^l,T_u^r}\sigma_{T_u^l} - \sigma_{T_u^r}\right),$$
$$\beta_u = \sigma_{T_u^r}^2 - \widetilde{\sigma}_{T_u}^2$$

und

$$\gamma_u = \sigma_{T_u^l}^2 - 2\rho_{T_u^l,T_u^r}\sigma_{T_u^l}\sigma_{T_u^r} + \sigma_{T_u^r}^2$$

lässt sich η_u^* somit als Lösung der quadratischen Gleichung

$$(\eta_u^*)^2 + \frac{\alpha_u}{\gamma_u}\eta_u^* + \frac{\beta_u}{\gamma_u} = 0$$

ermitteln. Von den beiden Lösungen

$$\eta_u^* = -\frac{\alpha_u}{2\gamma_u} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_u}{2\gamma_u}\right)^2 - \frac{\beta_u}{\gamma_u}}$$

wird diejenige verwendet, die in das Intervall zwischen 0 und 1 fällt.

Beispiel F.1. Ein Anleger hat eine Bundesobligation im Nominalwert von 100.000 Euro in seinem Depot. Die Schuldverschreibung ist mit einem Kupon von 10% ausgestattet und am 01.07.2005 fällig. J.P. Morgan stellte am 15.06.2004 für die Berechnung des Value at Risk folgende Daten bereit:

Code	**Bedeutung**	**Faktor-Niveau**	**Faktor-VaR (%)**
EUR.R030	1M-Geldmarktsatz	$2,10\%$	$0,0005$
EUR.R360	1Y-Geldmarktsatz	$2,25\%$	$0,0500$
DEM.Z02	2Y-Kapitalmarktsatz	$2,50\%$	$0,2500$

Code	**Faktor-Korrelation**
EUR.R030.EUR.R360	$0,36$
EUR.R030.DEM.Z02	$0,09$
EUR.R360.DEM.Z02	$0,46$

Die Anleihe zahlt also nach 15 Tagen ($T_1 = \frac{1}{24}$ *Jahre*) 10.000 Euro und nach 375 Tagen ($T_2 = \frac{25}{24}$ *Jahre*) 110.000 Euro aus. Somit erhält man die Grenzen

u	T_u	T_u^l	T_u^r
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{25}{24}$	1	2

.

Mit Hilfe der linear interpolierten Kassazinssätze

$$\begin{aligned}
\tilde{r}(0,T_1) &= r(0,T_1^*) = 0,021 \\
\tilde{r}(0,T_2) &= \frac{2-\frac{25}{24}}{2-1}\cdot 0,0225 + \frac{\frac{25}{24}-1}{2-1}\cdot 0,025 \\
&= \frac{23}{24}\cdot 0,0225 + \frac{1}{24}\cdot 0,025 \\
&\approx 0,0226
\end{aligned}$$

werden die folgenden Äquivalenzen für die tatsächlichen Zahlungen $z_{\frac{1}{24}}$ und $z_{\frac{25}{24}}$ wie folgt ermittelt: Die Kuponzahlung $z_{\frac{1}{24}} = 10.000$ wird zu der gleichwertigen Zahlung

$$\hat{z}_{\frac{1}{12}} = z_{\frac{1}{24}} \cdot \frac{\tilde{P}(0, \frac{1}{24})}{P(0, \frac{1}{12})} = 10.000 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,021 \cdot \frac{1}{24}}}{\mathrm{e}^{-0,021 \cdot \frac{1}{12}}} = 10.008,75$$

transformiert und der Zahlung $z_{\frac{25}{24}} = 110.000$ entsprechen die gleichwertigen Zahlungen

$$\hat{z}_1 = z_{\frac{25}{24}} \cdot \frac{\tilde{P}(0, \frac{25}{24})}{P(0,1)} = 110.000 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,0226 \cdot \frac{25}{24}}}{\mathrm{e}^{-0,0225 \cdot 1}} = 109.885,48$$

oder

$$\hat{z}_2 = z_{\frac{25}{24}} \cdot \frac{\tilde{P}(0, \frac{25}{24})}{P(0,2)} = 110.000 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,0226 \cdot \frac{25}{24}}}{\mathrm{e}^{-0,025 \cdot 2}} 112.949,26.$$

Für $z_{\frac{25}{24}}$ muss nun bestimmt werden, zu welchen Teilen sie auf z_1 und z_2 aufgeteilt werden soll. Für die Berechnung der Quotienten

$$\frac{\alpha_u}{\gamma_u} = \frac{2 \cdot 0,25 \cdot (0,46 \cdot 0,05 - 0,25)}{0,05^2 - 2 \cdot 0,46 \cdot 0,05 \cdot 0,25 + 0,25^2} = -\frac{227}{107} \approx -2,1215$$

und

$$\frac{\beta_u}{\gamma_u} = \frac{0,25^2 - (\frac{23}{24} \cdot 0,05 + \frac{1}{24} \cdot 0,25)^2}{0,05^2 - 2 \cdot 0,46 \cdot 0,05 \cdot 0,25 + 0,25^2} = \frac{4255}{3852} \approx 1,1046$$

können die JPM-Volatilitäten herangezogen werden, da sich der Faktor $\Phi^{-1}(\alpha)$ ausweislich (13.2) herauskürzt. Für das Beispiel erhält man

$$\eta_2 = \frac{227}{214} - \frac{1}{321}\sqrt{2119} \approx 0,9173,$$

so dass die Zahlungscharakteristik der Bundesobligation nach RiskMetrics™ äquivalent zur Zahlungscharakteristik

$$\hat{z}_{T_i^*} \begin{cases} 10.008,75 \text{ falls } T_i^* = \frac{1}{12} \\ 100.802,34 \text{ falls } T_i^* = 1 \\ 9.335,91 \text{ falls } T_i^* = 2 \\ 0,00 \text{ sonst} \end{cases}$$

ist.

G

Effiziente Portfolios: Herleitungen

G.1 Ohne risikolose Anlageform

Die Lagrange-Funktion für Problem 15.3 lautet

$$\mathscr{L}(\mathbf{g},\varpi)=\tfrac{1}{2}\mathbf{g}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}+\varpi\left(1-\mathbf{g}'\mathbf{1}\right).$$

Eine Lösung $(\mathbf{g}^*_{15.3},\varpi^*_{15.3})$ muss die Bedingungen

$$\tfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathbf{g}}=\mathbf{0} \text{ und } \tfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi}=0$$

erfüllen, was genau dann der Fall ist, wenn sie das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}^*_{15.3}-\varpi^*_{15.3}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0} \tag{G.1}$$
$$1-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.3}\mathbf{1}=0 \tag{G.2}$$

löst.[1] Multiplikation der Gleichung (G.1) von links mit $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ führt auf

$$\mathbf{g}^*_{15.3}=\varpi^*_{15.3}\cdot\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}. \tag{G.3}$$

[1] Man beachte die folgenden Definitionen und Zusammenhänge

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathbf{g}}:=\begin{pmatrix}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g_1}\\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g_J}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\mathbf{g}'}{\partial\mathbf{g}}:=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial g_J}{\partial g_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_1}{\partial g_J} & \cdots & \frac{\partial g_J}{\partial g_J}\end{pmatrix}=\mathbf{E}$$

und

Einsetzen in (G.2) führt auf

$$\varpi^*_{15.3} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \tag{G.4}$$

und somit nach Rücksubstitution in (G.3) auf die Lösung

$$\mathbf{g}^*_{15.3} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}. \tag{G.5}$$

Offensichtlich besitzt Problem 15.4 im Fall $\Delta \leq 0$ die Lösung $\mathbf{g}^*_{15.4} = \mathbf{0}$. Im Fall $\Delta > 0$ findet man die Lösung mit Hilfe der Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L}(\mathbf{g},\pi,\varpi) = \tfrac{1}{2}\mathbf{g}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g} + \pi\left(-\mathbf{g}'\boldsymbol{\mu} + \Delta\right) + \varpi\left(-\mathbf{g}'\mathbf{1} + 0\right)$$

$\mathbf{g}^*_{15.4}$ ist eine Lösung von Problem 15.4, falls Lösungen $\pi^*_{15.4}$ und $\varpi^*_{15.4}$ für die Lagrange-Parameter π und ϖ existieren, so dass die Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\tfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathbf{g}} = \mathbf{0},\; \tfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\pi} \leq 0,\; \tfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\pi}\cdot\pi = 0 \text{ und } \tfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varpi} = 0$$

erfüllt werden.
Die Lösung $\left(\mathbf{g}^*_{15.4}, \pi^*_{15.4}, \varpi^*_{15.4}\right)$ wird demnach durch das System

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}^*_{15.4} - \pi^*_{15.4}\boldsymbol{\mu} - \varpi^*_{15.4}\mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{G.6}$$
$$-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4}\boldsymbol{\mu} + \Delta \leq 0 \tag{G.7}$$
$$-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4}\mathbf{1} = 0 \tag{G.8}$$
$$\pi^*_{15.4}\left(-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4}\boldsymbol{\mu} + \Delta\right) = 0 \tag{G.9}$$
$$\pi^*_{15.4} \geq 0 \tag{G.10}$$

von Gleichungen und Ungleichungen bestimmt. Im Fall $\pi^*_{15.4} > 0$ muss eine Lösung das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}^*_{15.4} - \pi^*_{15.4}\boldsymbol{\mu} - \varpi^*_{15.4}\mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{G.11}$$
$$-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4}\boldsymbol{\mu} + \Delta = 0 \tag{G.12}$$
$$-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4}\mathbf{1} = 0 \tag{G.13}$$

erfüllen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{g}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}}{\partial\mathbf{g}} &= \frac{\partial\mathbf{g}'}{\partial\mathbf{g}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g} + \mathbf{g}'\frac{\partial(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g})}{\partial\mathbf{g}} \\
&= \frac{\partial\mathbf{g}'}{\partial\mathbf{g}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g} + \frac{\partial(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g})'}{\partial\mathbf{g}}\mathbf{g} \\
&= \frac{\partial\mathbf{g}'}{\partial\mathbf{g}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g} + \frac{\partial\mathbf{g}'}{\partial\mathbf{g}}\boldsymbol{\Sigma}'\mathbf{g} \\
&= \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}'\right)\mathbf{g} \\
&= 2\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}.
\end{aligned}$$

Aus (G.11) erhält man

$$\mathbf{g}_{15.4}^{*} = \pi_{15.4}^{*} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \varpi_{15.4}^{*} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}. \tag{G.14}$$

$\pi_{15.4}^{*}$ und $\varpi_{15.4}^{*}$ lassen sich wie folgt bestimmen: Man multipliziert Gleichung (G.14) von links mit $\boldsymbol{\mu}'$ bzw. $\mathbf{1}'$ und erhält somit i.V.m. (G.12) und (G.13)

$$\begin{aligned} \pi_{15.4}^{*} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \varpi_{15.4}^{*} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} &= \Delta \\ \pi_{15.4}^{*} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \varpi_{15.4}^{*} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} &= 0. \end{aligned}$$

In Verbindung mit den Definitionen

$$\begin{aligned} a &:= \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \\ b &:= \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ c &:= \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \\ d &:= bc - a^2 \end{aligned}$$

kann man dieses Gleichungssystem auch wie folgt in Vektor-Matrix-Notation aufschreiben:

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{15.4}^{*} \\ \varpi_{15.4}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{G.15}$$

Die Lagrange-Funktion für Problem 15.2 lautet

$$\mathscr{L}(\mathbf{g}, \pi, \varpi) = \tfrac{1}{2} \mathbf{g}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{g} + \pi \left(-\mathbf{g}' \boldsymbol{\mu} + \mu^{ZV} \right) + \varpi \left(-\mathbf{g}' \mathbf{1} + 1 \right).$$

Analog zur Lösung von Problem 15.4 kommt man zu dem Ergebnis, dass eine Lösung $\left(\mathbf{g}_{15.2}^{*}, \pi_{15.2}^{*}, \varpi_{15.2}^{*}\right)$ unter der Annahme $\pi_{15.2}^{*} > 0$ die Gleichungssysteme

$$\mathbf{g}_{15.2}^{*} = \pi_{15.2}^{*} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \varpi_{15.2}^{*} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \tag{G.16}$$

und

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{15.2}^{*} \\ \varpi_{15.2}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{ZV} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{G.17}$$

erfüllen muss.
Im Folgenden wird durch Einsetzen in (G.17) gezeigt, dass

$$\begin{pmatrix} \pi_{15.2}^{*} \\ \varpi_{15.2}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{15.4}^{*} \\ \varpi_{15.4}^{*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varpi_{15.3}^{*} \end{pmatrix} \tag{G.18}$$

gilt: Aus (G.15) folgt zunächst

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & c \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \pi_{15.4}^{*} \\ \varpi_{15.4}^{*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varpi_{15.3}^{*} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot \varpi_{15.3}^{*}.$$

und hieraus unter Berücksichtigung von

$$\varDelta := \mu^{ZV} - \mu_{\mathbf{mv}} = \mu^{ZV} - \frac{a}{c}$$

und

$$\varpi^*_{15.3} = \frac{1}{c}$$

die behauptete Beziehung (G.18). Durch Einsetzen von (G.18) in (G.16) erhält man in Verbindung mit (G.3) und (G.14)

$$\mathbf{g}^*_{15.2} = \mathbf{g}^*_{15.4} + \mathbf{g}^*_{15.3}.$$

Im nächsten Schritt ist noch zu zeigen, dass

$$\mathbf{g}^*_{15.4} = \varDelta \cdot \mathbf{s}$$

gilt: Die zweite Zeile von (G.15) impliziert

$$\varpi^*_{15.4} = -\frac{a}{c} \cdot \pi^*_{15.4},$$

so dass man (G.14) in Verbindung mit der Definition (15.11) in der Form

$$\mathbf{g}^*_{15.4} = \pi^*_{15.4} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varDelta}$$

schreiben kann. Somit gilt auch

$$\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{g}^*_{15.4} = \pi^{*2}_{15.4} \boldsymbol{\varDelta}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varDelta} = \pi^*_{15.4} \boldsymbol{\varDelta}' \mathbf{g}^*_{15.4}.$$

Berücksichtigt man nun noch, dass (G.12) und (G.13)

$$(\boldsymbol{\mu} - \mu_{\mathbf{mv}} \mathbf{1})' \mathbf{g}^*_{15.4} = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{g}^*_{15.4} = \varDelta$$

implizieren, so gelangt man zu den Beziehungen

$$\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{g}^*_{15.4} = \pi^{*2}_{15.4} \boldsymbol{\varDelta}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varDelta} = \pi^*_{15.4} \varDelta,$$

die zwei wichtige Implikationen besitzen: Für die Interpretation ist von Bedeutung, dass

$$\pi^*_{15.4} = \frac{\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{g}^*_{15.4}}{\varDelta}$$

als in Risikoeinheiten gemessener Preis pro Einheit erwarteter Mehr-Rendite im Vergleich zum MVP interpretiert werden kann, und dass $\mathbf{g}^{*\prime}_{15.4} = \varDelta \cdot \mathbf{s}$ gilt, ergibt sich aus der ebenfalls implizierten Beziehung

$$\pi^*_{15.4} = \frac{\varDelta}{\boldsymbol{\varDelta}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varDelta}}.$$

G.2 Mit risikoloser Anlageform

Die Lagrange-Funktion für Problem 15.5 lautet

$$\mathscr{L}(\mathbf{g},\pi_{15.5}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{g}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g} + \pi_{15.5}\left(-\mathbf{g}'(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) + \mu - r\right).$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}_{15.5} - \pi_{15.5}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) = \mathbf{0} \tag{G.19}$$

$$-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.5}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) + \mu^{ZV} - r \leq 0 \tag{G.20}$$

$$\pi_{15.5}\left(-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.5}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) + \mu^{ZV} - r\right) = 0 \tag{G.21}$$

$$\pi_{15.5} \geq 0 \tag{G.22}$$

implizieren, dass eine Lösung $(\mathbf{g}^*_{15.5},\pi^*_{15.5})$ im Fall $\pi^*_{15.5} > 0$ durch das Gleichungssystem

$$\mathbf{g}^*_{15.5} = \pi^*_{15.5}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}). \tag{G.23}$$

und die Gleichung

$$-\mathbf{g}^{*\prime}_{15.5}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) + \mu^{ZV} - r = 0 \tag{G.24}$$

bestimmt ist.
Zerlegt man die erwarteten Überschussrenditen der einzelnen Anlageformen entsprechend

$$\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1} = (\mu_{\mathbf{mv}} - r)\mathbf{1} + \boldsymbol{\mu} - \mu_{\mathbf{mv}}\mathbf{1} = (\mu_{\mathbf{mv}} - r)\mathbf{1} + \boldsymbol{\Delta},$$

so erhält man

$$\mathbf{g}^*_{15.5} = \pi^*_{15.5}\left(\frac{\mu_{\mathbf{mv}} - r}{\varpi_{15.3}}\mathbf{g}^*_{15.3} + \frac{1}{\pi_{15.4}}\mathbf{g}^*_{15.4}\right) \tag{G.25}$$

$$= \pi^*_{15.5}\left(\frac{\mu_{\mathbf{mv}} - r}{\sigma^2_{\mathbf{mv}}}\mathbf{mv} + \frac{1}{\sigma^2_{\mathbf{s}}}\mathbf{s}\right). \tag{G.26}$$

Da **mv** und **s** unkorreliert sind, gilt einerseits

$$\sigma^2_{\mathbf{g}^*_{15.5}} = \pi^{*2}_{15.5}\left(\frac{(\mu_{\mathbf{mv}} - r)^2}{\sigma^2_{\mathbf{mv}}} + \frac{1}{\sigma^2_{\mathbf{s}}}\right). \tag{G.27}$$

Andererseits impliziert (G.23) in Verbindung mit (G.24),

$$\sigma^2_{\mathbf{g}^*_{15.5}} = \pi^{*2}_{15.5}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) = \pi^*_{15.5}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})'\mathbf{g}^*_{15.5} = \pi^*_{15.5}(\mu^{ZV} - r). \tag{G.28}$$

Setzt man die rechten Seiten der Gleichungen (G.27) und (G.28) gleich und löst nach $\pi^*_{15.5}$ auf, so erhält man im Spezialfall $\mu_{\mathbf{mv}} = r$ die Lösung

$$\pi^*_{15.5} = (\mu^{ZV} - r) \cdot \sigma^2_{\mathbf{s}}$$

für den Lagrange-Parameter und

$$\mathbf{g}^*_{15.5} = \left(\mu^{ZV} - r\right) \cdot \mathbf{s}$$

durch Einsetzen dieser Lösung in (G.26).
Im allgemeinen Fall $\mu_{\mathbf{mv}} \neq r$ erhält man in Verbindung mit der Definition

$$\phi = \frac{\frac{1}{\sigma^2_{\mathbf{s}}}}{\frac{\mu_{\mathbf{mv}} - r}{\sigma^2_{\mathbf{mv}}}}$$

die Lösung

$$\pi^*_{15.5} = \frac{\mu^{ZV} - r}{\frac{\mu_{\mathbf{mv}} - r}{\sigma^2_{\mathbf{mv}}}} \cdot \frac{1}{\mu_{\mathbf{mv}} - r + \phi}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^*_{15.5} &= \frac{\mu^{ZV} - r}{\mu_{\mathbf{mv}} + \phi - r} \cdot (\mathbf{mv} + \phi \cdot \mathbf{s}) \\ &= \frac{\mu^{ZV} - r}{\mu_{\mathbf{t}} - r} \cdot \mathbf{t}.\end{aligned}$$

G.3 Mit nicht disponiblem Vermögen

Wenn zum disponiblen Vermögen nicht disponibles Vermögen mit einer stochastische Rendite R_{J+1} und einem Wert in Höhe von $\gamma \cdot 100\%$ des disponiblen Vermögens hinzukommt, errechnet sich eine Varianz der Rendite des Gesamtvermögens in Höhe von

$$\mathbb{V}(R) = \frac{\mathbb{V}(\mathbf{g}'\mathbf{R}) + 2\gamma\mathbb{C}(\mathbf{g}'\mathbf{R}, R_{J+1}) + \gamma^2\mathbb{V}(R_{J+1})}{(1+\gamma)^2}.$$

Zu lösen ist das Problem

Problem G.1.

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{g}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g} + 2\gamma\mathbf{g}'\boldsymbol{\sigma}_{J+1}\right) \to \min_{\mathbf{g}}$$

unter der Bedingung

$$-\mathbf{g}'(\boldsymbol{\mu} - r \cdot \mathbf{1}) + (\mu^{ZV} - r) \leq 0.$$

Geht man analog zur Lösung von Problem 15.5 vor, dann gelangt man in Verbindung mit der Definition der Definition

$$\mathbf{h} := -\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{J+1}$$

zu der Einsicht, dass eine Lösung $(\mathbf{g}^*_{G.1}, \pi^*_{G.1})$ im Fall $\pi^*_{G.1} > 0$ durch das Gleichungssystem

$$\mathbf{g}^*_{G.1} = \frac{\pi^*_{G.1}}{\pi^*_{15.5}}\mathbf{g}^*_{15.5} + \gamma\,\mathbf{h} \tag{G.29}$$

und die Gleichung

$$-\mathbf{g}^{*\prime}_{G.1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) + (\mu^{ZV} - r) = 0 \tag{G.30}$$

bestimmt ist.
Einsetzen von (G.29) in (G.30) führt über

$$(\mu^{ZV} - r) - \gamma\,\mathbf{h}'(\boldsymbol{\mu} - r\cdot\mathbf{1}) = \frac{\pi^*_{G.1}}{\pi^*_{15.5}}\mathbf{g}^*_{15.5}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})$$

unter Berücksichtigung von $\mathbf{g}^{*\prime}_{15.5}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) = \mu^{ZV} - r$ auf

$$\frac{\pi^*_{G.1}}{\pi^*_{15.5}} = 1 - \gamma\,\frac{\mathbf{h}'(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})}{\mu^{ZV} - r}.$$

Abschließend soll noch gezeigt werden, dass die Existenz von nicht disponiblem Vermögen keinen Einfluss darauf hat, wie das Risiko der marktgängigen Anlageformen im Gleichgewicht entlohnt wird, wenn die Anleger effizient investieren.
Ausgangspunkt ist die notwendige Bedingung

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}^*_{G.1} = \pi^*_{G.1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) + \gamma\boldsymbol{\sigma}_{J+1},$$

die

$$\mathbf{g}'(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) = \frac{1}{\pi^*_{G.1}}\mathbf{g}'(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{g}^*_{G.1} + \gamma\,\boldsymbol{\sigma}_{J+1})$$

bzw.

$$\mu_j - r = \frac{1}{\pi^*_{G.1}}\left(\sigma_{j,\mathbf{g}^*_{G.1}} + \gamma\,\sigma_{j,J+1}\right)$$

einschließt, wobei sich die untere der beiden Gleichungen aus der oberen ergibt, wenn man davon ausgeht, dass das Portfolio $\mathbf{g}$ ausschließlich aus der Anlageform mit dem Zählindex j besteht.
Einsetzen von

$$\sigma_{j,\mathbf{g}^*_{G.1}} = \frac{\pi^*_{G.1}}{\pi^*_{15.5}}\sigma_{j,\mathbf{g}^*_{15.5}} + \gamma\,\sigma_{j,\mathbf{h}}$$

führt auf

$$\mu_j - r = \frac{1}{\pi^*_{15.5}} \sigma_{j,\mathbf{g}^*_{15.5}} + \frac{\gamma}{\pi^*_{G.1}} (\sigma_{j,\mathbf{h}} + \sigma_{j,J+1}) .$$

Hieraus erhält man in Verbindung mit der Interpretation von $\pi^*_{15.5}$ als dem in Risikoeinheiten gemessenen Schattenpreis pro Einheit erwarteter Überschussrendite bzw.

$$\frac{1}{\pi^*_{15.5}} = \frac{\mu^{ZV} - r}{\sigma^2_{\mathbf{g}^*_{15.5}}}$$

die Beziehung

$$\mu_j - r = \beta_{j,\mathbf{g}^*_{15.5}} (\mu^{ZV} - r) + \frac{\gamma}{\pi^*_{G.1}} (\sigma_{j,\mathbf{h}} + \sigma_{j,J+1}) .$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass der Ausdruck $\sigma_{j,\mathbf{h}} + \sigma_{j,J+1}$ dank der Tatsache, dass es sich bei **h** um das Hedgeportfolio für das nicht diversifizierbare Risiko $J+1$ handelt, den Wert Null annimmt: Sei $\mathbf{e}_j$ die j-te Spalte der $(J \times J)$ Einheitsmatrix $\mathbf{E}_J$, dann gilt für den Spaltenvektor $\boldsymbol{\sigma}_j$ der Kovarianzen der Rendite der Anlagemöglichkeit j mit den Renditen sämtlicher im effizienten Portfolio befindlichen Anlagemöglichkeiten definitionsgemäß

$$\boldsymbol{\sigma}'_j = \mathbf{e}'_j \boldsymbol{\Sigma}$$

und mithin

$$\sigma_{j,\mathbf{h}} = -\boldsymbol{\sigma}'_j \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{J+1} = -\mathbf{e}'_j \boldsymbol{\sigma}_{J+1} = -\sigma_{j,J+1}$$

und somit

$$\mu_j - r = \beta_{j,\mathbf{g}^*_{15.5}} (\mu^{ZV} - r) .$$

H

Objektive Wertgrenzen: Herleitungen

Im Folgenden wird mit Hilfe der linearen Programmierung gezeigt, dass es sich beim Portfolio $\mathbf{x}_l$ um das *teuerste* Portfolio handelt, *welches* von der Zahlungscharakteristik $\mathbf{z}$ *dominiert wird*: Normiert man den Preis des Index S_0 auf eins und rechnet in Einheiten des Geldmarktzertifikates, dann ergibt die Zielfunktion

$$z_P := x_l^B + x_l^S \cdot B_0^{-1} \cdot 1 \rightarrow \max_{x_l^B, x_l^S \in \mathbb{R}} !$$

in Verbindung mit den Bedingungen für eine schwache Dominanz der Zahlungscharakteristik $\mathbf{z}$

$$\begin{aligned}
x_l^B + x_l^S \cdot u \cdot B_1^{-1} &\leq z^{wu} \cdot B_1^{-1} \\
x_l^B + x_l^S \cdot u \cdot B_1^{-1} &\leq z^{lu} \cdot B_1^{-1} \\
x_l^B + x_l^S \cdot d \cdot B_1^{-1} &\leq z^{wd} \cdot B_1^{-1} \\
x_l^B + x_l^S \cdot d \cdot B_1^{-1} &\leq z^{ld} \cdot B_1^{-1}
\end{aligned}$$

ein entsprechendes (primales) lineares Programm. Die Dualitätstheorie besagt, dass dieses Programm genau dann eine Lösung besitzt, falls das (duale) Programm

$$z_D := B_1^{-1} \cdot \left[z^{wu} \cdot d_1 + z^{lu} \cdot d_2 + z^{wd} \cdot d_3 + z^{ld} \cdot d_4 \right] \rightarrow \min_{d_1, \ldots, d_4 \geq 0} !$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned}
d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= 1 \\
B_1^{-1} \cdot [u \cdot (d_1 + d_2) + d \cdot (d_3 + d_4)] &= B_0^{-1}
\end{aligned}$$

eine Lösung besitzt.
Die zweite Bedingung impliziert in Verbindung mit der Arbitragefreiheit des Marktes

$$\begin{aligned}
d_1 + d_2 &= \hat{\pi}_0 \\
d_3 + d_4 &= 1 - \hat{\pi}_0 \,,
\end{aligned}$$

so dass man die Zielfunktion des Duals auch in der Form

$$B_1^{-1} \cdot \left[(z^{wu} - z^{lu}) \cdot d_1 + z^{lu} \cdot \hat{\pi}_0 + (z^{wd} - z^{ld}) \cdot d_3 + z^{ld} \cdot (1 - \hat{\pi}_0) \right] \to \min_{d_1, d_3 \geq 0}!$$

schreiben kann. Hieraus kann man unmittelbar ablesen, dass unter der Annahme (21.1) $d_1 = d_3 = 0$ optimal ist. Da das Primal den gleichen optimalen Zielfunktionswert hat wie das Dual, gilt somit

$$z_P^* = z_D^* = B_1^{-1} \cdot \left[z^{lu} \cdot \hat{\pi}_0 + z^{ld} \cdot (1 - \hat{\pi}_0) \right] = B_0^{-1} \cdot \mathbf{p}' \mathbf{x}_l \,.$$

Damit ist gezeigt, dass $\mathbf{x}_l$ tatsächlich das teuerste dominierte Portfolio ist, wenn man berücksichtigt, dass das Programm in Einheiten des Geldmarktzertifikates rechnet. Analog lässt sich zeigen, dass es sich bei $\mathbf{x}_w$ um das *billigste* Portfolio handelt, *welches* die Zahlungscharakteristik $\mathbf{z}$ *dominiert*.
Abschließend soll noch gezeigt werden, dass die Strategie (21.6) selbstfinanzierend ist. Sei $\Pi_{p,n}$ der Marktwert für den Projekttyp $p \in \mathscr{P}$ im Zeitpunkt n, dann gilt

$$\begin{aligned}
B_n^{-1} \Pi_{p,n}(\omega^n) &= B_n^{-1} \mathbf{x}_{p,n}(\omega^n)' \mathbf{p}_n(\omega^n) \\
&= B_n^{-1} \prod_{i=n+1}^{N-1} \frac{1+p_i}{1+f_i} \left(\frac{g_n^{pu} - g_n^{pd}}{u_n - d_n} + \frac{1}{1+f_n} \left(1 + \frac{-g_n^{pu} d_n + g_n^{pd} u_n}{u_n - d_n} \right) \right) Z_n^p(\omega^n) \\
&= \frac{1}{B_n(1+f_n)} \prod_{i=n+1}^{N-1} \frac{1+p_i}{1+f_i} \left((1+g_n^{pu}) \cdot \hat{\pi}_n + (1+g_n^{pd}) \cdot (1-\hat{\pi}_n) \right) \; Z_n^p(\omega^n)
\end{aligned}$$

und somit wegen (vgl. (21.4) und (21.5))

$$\Pi_{p,n+1}(\omega^n, \omega) = Z_n^p(\omega^n) \cdot (1 + g_n^{p\omega}) \prod_{i=n+1}^{N-1} \frac{1+p_i}{1+f_i}$$

auch

$$B_n^{-1} \Pi_{p,n}(\omega^n) = \hat{\pi}_n \cdot B_{n+1}^{-1} \cdot \Pi_{p,n+1}(\omega^n, u) + (1 - \hat{\pi}_n) \cdot B_{n+1}^{-1} \cdot \Pi_{p,n+1}(\omega^n, d).$$

Damit ist gezeigt, dass die in Einheiten des Geldmarktzertifikates gemessenen Grenzen Martingale sind, woraus folgt, dass die zugrunde liegenden Replikationsstrategien selbstfinanzierend sind.[1]

[1] Vgl. hierzu Harrison & Kreps (1979).

Literaturverzeichnis

Admati, A. R., Pfleiderer, P. & Zechner, J. (1994), Large shareholder activism, risk sharing, and the financial market equilibrium, *Journal of Political Economy*, Seiten 1097–1130.

Albrecht, P. & Maurer, R. (2008), *Investment- und Risikomanagement*, Stuttgart, 3. Auflage.

Arrow, K. (1964), The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing, *Review of Economic Studies*, Seiten 91–96.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. & Heath, D. (1999), Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, Seiten 203–228.

Back, K. (1996), Yield curve models: A mathematical review., in: I. Nelkin, Herausgeber, *Option embedded bonds: Price analysis, credit risk and investment strategies*, Seiten 3–36, Irwin.

Bailey, R. (2005), *The economics of financial markets*, Cambridge.

Bamberg, G., Coenenberg, A. & Krapp, M. (2008), *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*, München, 14. Auflage.

Banz, R. W. (1997), Editorial: Zero correlation between theory and practice in financial economics?, *Finanzmarkt und Portfolio Management*, Seiten 383–391.

Bawa, V. (1975), Optimal rules for ordering uncertain prospects, *Journal of Financial Economics*, Seiten 95–121.

Bazaraa, M., Sherali, H. & Shetty, C. (1993), *Nonlinear programming: Theory and algorithms*, New York, 2. Auflage.

Beike, R. & Schlütz, J. (2005), *Finanznachrichten lesen, verstehen, nutzen: Ein Wegweiser durch Kursnotierungen und Marktberichte*, 4. Auflage.

Berk, J. & DeMarzo, P. (2007), *Corporate finance*, Boston.

Björk, T. (1997), Interest rate theory, in: W. Runggaldier, Herausgeber, *Financial Mathematics: Bressanone, 1996*, Lecture Notes in Mathematics, Seiten 53–119, Berlin.

Black, F. (1976), The pricing of commodity contracts, *Journal of Financial Economics*, Seiten 167–179.

Black, F. & Scholes, M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Seiten 637–654.

Bodie, Z., Kane, A. & Marcus, A. (2008), *Essentials of investments*, New York, 7. Auflage.

Brandner, J. & Lewis, T. (1986), Oligopoly and financial structure: The limited liability effect, *American Economic Review*, Seiten 956–970.

Branger, N. & Schlag, C. (2004), *Zinsderivate*, Berlin.

Braun, T. (1998), *Liquidität und Konkurrenz*, Heidelberg.

——— (2007), Corporate Governance, in: D. Bartmann et al., Herausgeber, *Knapps Enzyklopädisches Lexikon des Geld-, Bank- und Börsenwesens*, Artikel Nr. 1961, Aktualisierung 2007.

Brennan, M. J. & Kraus, A. (1987), Efficient financing under asymmetric information, *Journal of Finance*, Seiten 1225–1243.

Brito, N. (1977), Marketability restrictions and the valuation of capital assets under uncertainty, *Journal of Finance*, Seiten 1109–1023.

Bulow, J. & Shoven, J. (1978), The bankruptcy decision, *Bell Journal of Economics*, Seiten 437–456.

Chemmanur, T. & Fulghieri, P. (1994), Reputation, renegotiation, and the choice between bank loans and publicly traded debt, *Review of Financial Studies*, Seiten 475–506.

Cooney, J. & Kalay, A. (1993), Positive information from equity issue announcements, *Journal of Financial Economics*, Seiten 149–172.

Cox, J., Ingersoll, J. & Ross, S. (1981), The relation between forward prices and futures prices, *Journal of Financial Economics*, Seiten 321–346.

Cox, J., Ross, S. & Rubinstein, M. (1979), Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics*, Seiten 229–263.

DeAngelo, H. (1981), Competition and unanimity, *American Economic Review*, Seiten 18–27.

Dewatripont, M., Jewitt, I. & Tirole, J. (1999), The economics of career concerns. Part II: Application to missions and accountability of government agencies, *Review of Economic Studies*, Seiten 199–217.

Diamond, D. (1989), Reputation aquisition in debt markets, *Journal of Political Economy*, Seiten 828–862.

Dixit, A., Pindyck, R. & Sodal, S. (1999), A markup interpretation of optimal investment rules, *Economic Journal*, Seiten 179–189.

Drukarczyk, J. (1987), *Unternehmen und Insolvenz: Zur effizienten Gestaltung des Kreditsicherungs- und Insolvenzrechts*, Wiesbaden.

Freixas, X. & Rochet, J.-C. (1997), *Microeconomics of banking*, Cambridge, Mass.

Frohn, J. (1995), *Grundausbildung in Ökonometrie*, Berlin, 2. Auflage.

Gertner, R. & Scharfstein, D. (1991), A Theory of workouts and the effects of reorganization law, *Journal of Finance*, Seiten 1189–1222.

Gordon, M. J. (1962), *The investment, financing and valuation of the coporation*, Homewood, Ill.

Grenadier, S. & Weiss, A. (1997), Investment in techological innovations: An option pricing approach, *Journal of Financial Economics*, Seiten 397–416.

Grossman, S. & Hart, O. (1980), Takeover bids, the free-rider problem, and the theory of the corporation, *Bell Journal of Economics*, Seiten 42–64.

Hafner, R. & Wallmeier, M. (2008), Optimal investments in volatility, *Financial Markets and Portfolio Management*, Seiten 147–167.

Harris, M. & Raviv, A. (1991), The theory of capital structure, *Journal of Finance*, Seiten 297–355.

Harrison, J. & Kreps, D. (1979), Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory*, Seiten 381–408.

Heath, D., Jarrow, R. & Morton, A. (1992), Bond Pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica*, Seiten 77–105.

Hecker, R. & Wenger, E. (1995), Der Schutz von Minderheiten im Vertragskonzern - Ein Betriebsunfall des Aktienrechts, *Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft*, Seiten 321–341.

Hellwig, M. (2000), On the economics and politics of corporate finance, in: X. Vives, Herausgeber, *Corporate finance - Theoretical and empirical perspectives*, Seiten 95–134, Cambridge.

Ho, T. & Lee, S.-B. (1986), Term structure movement and pricing interest rate contingent claims, *Journal of Finance*, Seiten 1011–1029.

Holmström, B. & Tirole, J. (1993), Market liquidity and performance monitoring, *Journal of Political Economy*, Seiten 678–709.

Huang, C.-F. & Litzenberger, R. (1988), *Foundations of financial economics*, New York.

Hull, J. (2008), *Options, futures and other derivatives*, Upper Saddle River, NJ, 7. Auflage.

Jamshidian, F. (1989), An exact bond option formula, *Journal of Finance*, Seiten 205–209.

Jarrow, R., Lando, D. & Turnbull, S. (1997), A Markov model for the term structure of credit risk spreads, *Review of Financial Studies*, Seiten 481–523.

Jarrow, R. & Turnbull, S. (1995), Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, Seiten 53–85.

Jensen, M. (1986), Agency costs of free cash flow, corporate finance, and takeovers, *American Economic Association Papers and Proceedings*, Seiten 323–329.

Jensen, M. & Meckling, W. (1976), Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs and ownership structure, *Journal of Financial Economics*, Seiten 305–360.

Jorion, P. (2007), *Value at risk*, New York, 3. Auflage.

Kistner, K.-P. (2003), *Optimierungsmethoden: Einführung in die Unternehmensforschung für Wirtschaftswissenschaftler*, Heidelberg, 3. Auflage.

Kloock, J. (1981), Mehrperiodige Investititionsrechnungen auf der Basis kalkulatorischer und handelsrechtlicher Erfolgsrechnungen, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, Seiten 873–890.

Krahnen, J. (1993), Finanzwirtschaftslehre zwischen Markt und Institution, *Die Betriebswirtschaft*, Seiten 793–805.

Kürsten, W. (2003), Synergetische Merger, Co-Insurance und Shareholder Value, *Die Betriebswirtschaft*, Seiten 239–256.

Lintner, J. (1965), The valuation of risk assets and the selection of risky investment in stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, Seiten 13–37.

Lücke, W. (1955), Investitionsrechnung auf der Grundlage von Ausgaben oder Kosten, *Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung*, Seiten 310 – 324.

Maksimovic, V. (1988), Capital structure in repeated oligopolies, *Rand Journal of Economics*, Seiten 389–497.

Maksimovic, V. & Titman, S. (1991), Financial policy and reputation for product quality, *Review of Financial Studies*, Seiten 175–200.

Manne, H. (1965), Mergers and the market for corporate control, *Journal of Political Economy*, Seiten 110–120.

Markowitz, H. (1952), Portfolio selection, *Journal of Finance*, Seiten 77–91.

Mas-Colell, A., Whinston, M. & Green, J. (1995), *Microeconomic theory*, New York.

Mayers, D. (1972), Nonmarketable assets and capital market equilibrium under uncertainty, in: M. Jensen, Herausgeber, *Studies in the theory of capital markets*, Seiten 223–248, New York.

——— (1998), Why firms issue convertible bonds: The matching of financial and real investment options, *Journal of Financial Economics*, Seiten 83–102.

McDonald, R. & Siegel, D. (1986), The value of waiting to invest, *Quarterly Journal of Economics*, Seiten 707–727.

Merton, R. (1972), An analytic derivation of the efficient portfolio frontier, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Seiten 1851–1872.

——— (1973), Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Seiten 141–183.

——— (1974), On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, Seiten 449–470.

Miller, M. & Culp, C. (1995), Risk management lessons from Metallgesellschaft, *Journal of Applied Corporate Finance*, Seiten 62–76.

Modigliani, F. & Miller, M. (1958), The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment, *American Economic Review*, Seiten 261–297.

Mossin, J. (1966), Equilibrium in a capital asset market, *Econometrica*, Seiten 768–783.

Myers, S. (1977), Determinants of corporate borrowing, *Journal of Financial Economics*, Seiten 147–175.

Myers, S. & Majluf, N. (1984), Corporate financing and investment decisions when firms have information that investors do not have, *Journal of Financial Economics*, Seiten 187–221.

Nelson, C. & Siegel, A. (1987), Parsimonious modeling of yield curves, *Journal of Business*, Seiten 473–489.

Neus, W. (2007), *Einführung in die Beriebswirtschaftslehre aus institutionenökonomischer Sicht*, Tübingen, 5. Auflage.

Pfaff, D. & Stefani, U. (2003), Wertorientierte Unternehmensführung, Residualgewinne und Anreizprobleme, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, Seiten 51 – 76.

Reiß, A. (1998), Investment in innovations and competition: An option pricing approach, *Quarterly Review of Economics and Finance*, Seiten 635–650.

Rock, K. (1986), Why new issues are underpriced, *Journal of Financial Economics*, Seiten 187–212.

Ross, S., Westerfield, R. & Jordan, B. (2008), *Corporate finance fundamentals*, New York, 8. Auflage.

Rothschild, M. & Stiglitz, J. (1970), Increasing risk: I. A definition, *Journal of Economic Theory*, Seiten 225–243.

Sandmann, K. (2001), *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*, Berlin, 2. Auflage.

Schäfer, H. (2002), *Unternehmensfinanzen - Grundzüge in Theorie und Management*, Heidelberg, 2. Auflage.

Schenk, G. (1997), *Konzernbildung, Interessenkonflikte und ökonomische Effizienz*, Frankfurt am Main.

Schönbucher, P. (2003), *Credit derivatives pricing models*, Chichester.

Schneider, D. (1992), *Investition, Finanzierung und Besteuerung*, Wiesbaden, 7. Auflage.

Sharpe, W. (1964), Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, Seiten 425–442.

Shleifer, A. & Vishny, R. (1986), Large shareholders and corporate control, *Journal of Political Economy*, Seiten 461–488.

——— (1997), A survey of corporate governance, *Journal of Finance*, Seiten 737–783.

Shreve, S. (2004), *Stochastic calculus for finance II - Continuous-time models*, New York.

Smith, C. & Warner, J. (1979), On financial contracting. An analysis of bond covenants, *Journal of Financial Economics*, Seiten 115–161.

Stoll, H. (1969), The relationship between put and call option prices, *Journal of Finance*, Seiten 801–824.

Svensson, L. (1994), Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, NBER Working Paper Series, 4871.

Szczesny, A. (2007), *Optionsscheine, Zertifikate und strukturierte Produkte*, HSBC Trinkaus & Burkhardt AG, 8. Auflage.

Thakor (1989), Strategic issues in financial contracting: An overview, *Financial Management*, Seiten 39–58.

Tirole, J. (1988), *The theory of industrial organization*, Cambridge.

——— (2006), *The theory of corporate finance*, Princeton.

Titman, S. (1984), The effect of capital structure on a firm's liquidation decision, *Journal of Financial Economics*, Seiten 135–149.

Titman, S. & Martin, J. (2008), *Valuation: The art and science of corporate investment decisions*, Boston.

Trautmann, S. (2007), *Investitionen*, Berlin, 2. Auflage.

Wagner, E. (1987), Ausschüttungszwang und Kapitalentzugsrechte als Instrumente marktgerechter Unternehmenskontrolle?, in: D. Schneider, Herausgeber, *Kapitalmarkt und Finanzierung*, Seiten 409–425, Berlin.

Wenger, E. (1987), Managementanreize und Kapitalallokation, in: E. Boettcher, Herausgeber, *Jahrbuch für Neue Politische Ökonomie*, Seiten 217–240, Tübingen.

Wilhelm, J. (1983a), *Finanztitelmärkte und Unternehmensfinanzierung*, Berlin.

——— (1983b), Marktwertmaximierung - Ein didaktisch einfacher Zugang zu einem Grundlagenproblem der Investitions- und Finanzierungstheorie, *Zeitschrift für Betriebswirtschaftslehre*, Seiten 516–534.

——— (1991), Spurensuche: Neoklassische Elemente in der „neuen" Finanzierungstheorie, in: D. Ordelheide et al., Herausgeber, *Betriebswirtschaftslehre und Ökonomische Theorie*, Seiten 173–196, Tagungsband der 51. Wissenschaftlichen Jahrestagung des Verbands der Hochschullehrer für Betriebswirtschaft e.V. 1990 in Frankfurt am Main.

Wilhelm, J. & Brüning, L. (1992), Die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze: Theoretisches Konstrukt und empirische Evaluierung - Untersuchung mit Daten des Kapitalmarktes der Bundesrepublik Deutschland, *Kredit und Kapital*, Seiten 259–294.

Wilson, B., Michaels, J., Driscoll, P. & Grass, R. (1996), Algebra, in: D. Zwillinger, Herausgeber, *Standard mathematical tables and formulae*, Kapitel 2, Boca Raton, 30. Auflage.

Wöster, C. (2004), *Die Bewertung von Convertible und Exchangeable Bonds bei stochastischer Zinsentwicklung*, Wiesbaden.

Sachverzeichnis

Absonderung von Sicherheiten, 220
Accrual Accounting, 26
Adressen-Ausfall-Risiko, 64
Anleihe
  Kupon-, 36
  Nullkupon-, 36
Anschaffungsauszahlung, 5
Apathie
  rationale, 226
Arbitrage, 37
  -freiheit, 37
  Ausgleichs-, 37
  Differenz-, 37
Arrow-Debreu-Preise, 77
Ausübungspreis einer Option, 70

Backwardation, 69
Barwert, 8
  nachschüssige Rente, 10
Basis
  -preis einer Option, 70
  -risiko, 69
  -titel, 60
  -wertpapiere, 36
  eines Finanzmarktes, 36
  eines Terminkontraktes, 68
Benchmarking, 233
Bernoulli-Prinzip, 249
Beta, 151
Bootstrapping, 39
Brownsche Bewegung, 96, 259
Buy-and-Hold, 49, 263

Call, 70
Cap, 74
Capital Budgeting, 7
Caplet, 74
Cash
  Accounting, 25
  Bond, 65
Cash Flow, 25
  Mapping, 128, 269
Cheapest to Deliver, 51
Cholesky-Zerlegung, 257
Close Out, 64
Collar, 75
Commodity, 68
Contango, 70
Convenience Yield, 70
Cost of Carry, 61
Counterparty Risk, 64
Credit Spread, 105

Day-Count-Conventions, 46
Debt-Equity-Swap, 203
Derivat, 59
Differentialoperator, 119
Distance to Default, 108
Diversifikation, 135
  naive, 139
Dominanz, 4
Duration
  Immunisierungseigenschaft, 243
  Macauley, 122, 241
  modifizierte, 242

Economic Value Added, 26
Effektivrendite, 48

Effizienz, 4
  μ-σ, 135
Entscheidungsneutralität
  von Steuern, 25
Erwartungswert
  iterierter, 90

Finanzierung
  durch Abschreibungen und Rückstellungen, 185
  externe, 185
  interne, 185
Finanzparte, 194
Floor, 74
Forward
  Price, 60
  Rate
    compounded, 52
    simply compounded, 51

Gegenwartswert, 8
Geldmarktzertifikate, 65
Gewinn
  ökonomischer, 26
  Residual-, 26
Gradient, 119

Heath Jarrow Morton Drift Condition, 265
Hedge, 59
  rolling, 68

innerer Wert, 72
Insolvenz
  -masse, 220
  -ordnung, 206
  -plan, 207
Internal Rate of Return, *siehe* interner Zinsfuß
interner Zinsfuß, 47
Irrelevanz der Kapitalstruktur, 191
Itôs Lemma, 261

Jacobi-Matrix, 119
Junk Bond, 107

Kapitalkostensatz
  bei Sicherheit, 6
  bei Mischfinanzierung, 194
Kapitalmarktgerade, 150
Kapitalwertkriterium, 8
Konfidenzniveau, 126
Konversionsfaktor, 50
Konvexität, 242
Kuponeffekt, 49

Law of one Price, 37
Leerverkauf, 35
Lognormal-Verteilung, 97, 255
Lücke-Theorem, 26

Margin
  Additional, 65
  Variation, 64
Margining
  Risk Based, 64
Markt
  atomistischer, 35
  vollkommener, 34
  vollständiger, 35
Martingal, 90
Moral Hazard, 188
Mutual Fund Theorem, *siehe* Two Fund Theorem

Nennwert, 36
Nominalwert, 36
Normalverteilung
  logarithmische, *siehe* Lognormal-Verteilung
Numéraire, 78

Option
  amerikanische, 70, 72
  europäische, 70
  Exchange, 102
  Outperformance, 102
Over the Counter (OTC), 64

Pari-Notiz, 40
Present Value, 8
Pseudo-Wahrscheinlichkeit, 80
Put-Call-Duality, 75
Put-Call-Parity, 72

Raider, 234
Recovery Rate, 107
Rente
  nachschüssige, 10
Residualanspruch, 186
Risiko

-faktor, 119
-maß, 125
systematisches, 152
unsystematisches, 152
risikoneutrale Bewertung, 81
RiskMetrics™, 127

Sharpe-Ratio, 150
short gehen, 35
Sicherheitsäquivalent, 229
Spanning, 42
Spinn-Off, 215
Spot Rate
compounded, 48
simply compounded, 47
Spread, 67
Stakeholder, 226
Steuerparadoxon, 26
Stillhalter, 70
Strike Rate, 74
Swap
Payer, 57
Rate, 57
Receiver, 57
Swaption, 75
synthetische Lagerhaltung, 69

Tangential-Portfolio, 146
Taylorreihe, 11
Termin
-geschäft
unbedingtes, 59
-preis, 60
-zinssatz
effektiver, 52
nominaler, 51
Tobin-Separation, 147
Tragfähigkeitsprinzip, 27
Two Fund Theorem, 137

Value at Risk (VaR), 125
Varianz-Kovarianz-Matrix, 136
Verifizierbarkeit, 221
Volatility Smile, 104
Volatilität
historische, 105
implizite, 104

WACC, 194
Wertpapierkenngerade, 152
Wertpapierleihe, 35

Yield to Maturity, 48

Zahlungs
-charakteristik, 3
-reihe, 3
Zeitpräferenz, 5
Zeitwertverlust, 102
Zerobond, 36
synthetischer, 37
Zinseszinseffekt, 46
Zinssatz, 45
expliziter, 45
impliziter, 47
Kassa-
effektiver, 48
nominaler, 47
Zustandspreise, *siehe* Arrow-Debreu-Preise