

# A

---

## Einführung in Mathematica

### A.1 Erste Schritte

**Mathematica** ist ein umfassendes Programmpaket, das sowohl symbolisch als auch numerisch rechnen kann. Im einfachsten Fall kann es wie ein Taschenrechner verwendet werden. Geben wir zum Beispiel  $3+5$  ein und drücken danach die ENTER-Taste beim Ziffernblock (oder alternativ auch SHIFT+RETURN):

```
In[1]:= 3 + 5  
Out[1]= 8
```

Ein Strichpunkt am Ende einer Anweisung unterdrückt die Ausgabe. Sie können mehrere Anweisungen auf einmal eingeben, indem Sie diese durch Strichpunkte trennen:

```
In[2]:= x = 5; 3 * x  
Out[2]= 15
```

Das Multiplikationszeichen  $*$  muss nicht geschrieben werden, ein Leerzeichen genügt. Vergessen Sie aber auf dieses Leerzeichen nicht – das kann nämlich einen großen Unterschied machen, wie das folgende Beispiel zeigt:

```
In[3]:= xy + x y  
Out[3]= xy + 5y
```

$xy$  ohne Leerzeichen wird also als Variable mit zwei Zeichen aufgefasst. Auch Groß-/Kleinschreibung wird von **Mathematica** unterschieden:

```
In[4]:= X + x  
Out[4]= 5 + X
```

Sie haben bereits gesehen, dass jede Eingabe und jede Ausgabe mit einer Nummer versehen werden. Sie können auf den jeweiligen Ausdruck jederzeit zurückgreifen:

```
In[5]:= Out[1]/2  
Out[5]= 4
```

Die *unmittelbar vorhergehende* Ausgabe erhalten Sie mit einem Prozentzeichen:

In[6]:= % + 3

Out[6]= 7

Momentan ist  $x$  mit dem Wert 5 belegt:

In[7]:=  $1/(1 - x) + 1/(1 + x)$

Out[7]=  $-\frac{1}{12}$

Mit **Clear** können Sie diese Belegung löschen:

In[8]:= **Clear**[ $x$ ]

Nun ist  $x$  wieder unbestimmt:

In[9]:=  $1/(1 - x) + 1/(1 + x)$

Out[9]=  $\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}$

Zur Vereinfachung eines Ausdrucks können Sie den Befehl **Simplify** verwenden. Vereinfachen wir beispielsweise die letzte Ausgabe:

In[10]:= **Simplify**[%]

Out[10]=  $-\frac{2}{-1 + x^2}$

Vielleicht ist Ihnen aufgefallen, dass **Mathematica** Ausdrücke in einer gut lesbaren Form ausgibt, also beispielsweise eine Potenz in der Form  $x^2$  anstelle von  $x^2$ . Auch wir können Brüche, Potenzen usw. entweder mit den üblichen Symbolen  $/$ ,  $^$  usw. eingeben, oder wir können die entsprechenden Symbole mit der Maus aus einer Palette auswählen. So kann etwa der Bruch

In[11]:=  $(x + 1)/x^2$ ;

mit der Maus über die Palette **BasicInput** (zu finden im Menüpunkt **File** -> **Palettes**) auch in der Form

In[12]:=  $\frac{x + 1}{x^2}$ ;

eingegeben werden. Der Strichpunkt am Ende der Eingabe bewirkt, dass die Ausgabe unterdrückt wird (der Ausdruck wird aber natürlich ausgewertet und auf das Ergebnis kann mit **%** oder **Out[]** zugegriffen werden).

Hilfe zu **Mathematica**-Befehlen finden Sie im Menü unter **Help**-> **Help Browser** oder mit dem Befehl **?Befehl**, z.B:

In[13]:= **?Sin**

Out[13]= **Sin**[ $z$ ] gives the sine of  $z$ . More...

**Übung:** Versuchen Sie, die Bezeichnung für die Zahl  $\pi$  in **Mathematica** herauszufinden.

## A.2 Funktionen

**Mathematica** kennt eine Vielzahl von mathematischen Funktionen. Diese Funktionen beginnen immer mit einem *Großbuchstaben*. Die Argumente werden in *eckigen* Klammern angegeben. Einige der eingebauten Funktionen sind:

<code>Sqrt[x]</code>	Wurzelfunktion $\sqrt{x}$
<code>Exp[x]</code>	Exponentialfunktion $e^x$
<code>Log[x]</code>	(Natürlicher) Logarithmus $\ln(x)$
<code>Log[a,x]</code>	Logarithmus $\log_a(x)$
<code>Sin[x]</code> , <code>Cos[x]</code>	Sinus- und Kosinusfunktion
<code>Abs[x]</code>	Absolutbetrag $ x $

Zum Beispiel können wir die Wurzel aus 4 berechnen:

```
In[14] := Sqrt[4]
Out[14] = 2
```

Wenn wir aber etwa `Sin[1]` eingeben, so erhalten wir:

```
In[15] := Sin[1]
Out[15] = Sin[1]
```

Das ist vermutlich nicht das Ergebnis, das Sie erwartet haben! **Mathematica** wertet den Ausdruck hier *symbolisch* (und nicht numerisch) aus. Und da es für `Sin[1]` symbolisch keinen einfacheren Wert gibt, wird er unverändert ausgegeben (so, wie man ja auch  $\pi$  schreibt anstelle von 3.141...). Wir weisen **Mathematica** an *numerisch* zu rechnen, indem wir das Argument mit einem Komma versehen (in **Mathematica** wird das Komma als Punkt eingegeben):

```
In[16] := Sin[1.]
Out[16] = 0.841471
```

Eine zweite Möglichkeit ist die Verwendung des Befehls `N[ ]`. Lassen wir uns zum Beispiel damit einen numerischen Wert für  $\pi$  ausgeben:

```
In[17] := N[Pi]
Out[17] = 3.14159
```

oder für die Eulersche Zahl:

```
In[18] := N[E]
Out[18] = 2.71828
```

Natürlich können wir auch eigene Funktionen definieren:

```
In[19] := f[x_] := x^2 + Sin[x] + a
```

Der Unterstrich in `x_` teilt **Mathematica** mit, dass `x` in diesem Ausdruck die unabhängige Variable ist. Die Verwendung von `:=` weist **Mathematica** an, die rechte Seite *jedes Mal neu auszuwerten*, wenn `f` aufgerufen wird. Daher haben wir hier auch kein `Out[...]` bekommen. Nun kann die neue Funktion `f` wie jede eingebaute

Funktion verwendet werden (solange, bis Sie Mathematica beenden):

```
In[20] := f[2]
Out[20] = 4 + a + Sin[2]
In[21] := f[x]
Out[21] = a + x2 + Sin[x]
In[22] := x = 3; f[x]
Out[22] = 9 + a + Sin[3]
```

Achtung: Man kann Funktionen auch nur mit einem = anstelle eines := definieren. Dann wird die rechte Seite *zuerst* ausgewertet (mit allen aktuellen Belegungen, ergibt also hier z. B. mit  $x=3$  den Wert  $a + 9 + \text{Sin}[3]$ ). Dieser Wert wird dann (ein für alle Mal) als Funktionswert zugewiesen:

```
In[23] := g[x_] = x2 + Sin[x] + a
Out[23] = 9 + a + Sin[3]
```

$g$  ist damit eine *konstante* Funktion, d.h., wir erhalten immer denselben Funktionswert, unabhängig vom Argument:

```
In[24] := g[2]
Out[24] = 9 + a + Sin[3]
```

Zusammenfassend gibt es also zwei Möglichkeiten: Funktionen von vornherein mit := definieren oder vor der Definition mit = sicherstellen, dass die unabhängige Variable nicht mit einem Wert belegt ist, also

```
In[25] := Clear[x]; g[x_] = x2 + Sin[x] + a
Out[25] = a + x2 + Sin[x]
```

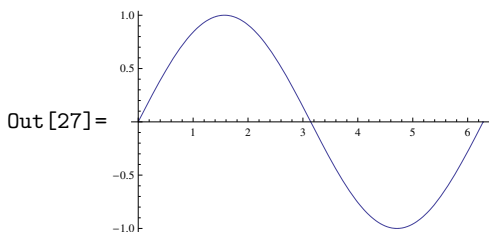
```
In[26] := g[2]
Out[26] = 4 + a + Sin[2]
```

Mit Plot können Funktionen leicht gezeichnet werden:

`Plot[f[x], {x, xmin, xmax}]` zeichnet  $f$  als Funktion von  $x$  im Intervall von  $x_{\min}$  bis  $x_{\max}$

Zeichnen wir zum Beispiel die Funktion  $\text{Sin}[x]$  im Intervall von 0 bis  $2\pi$ :

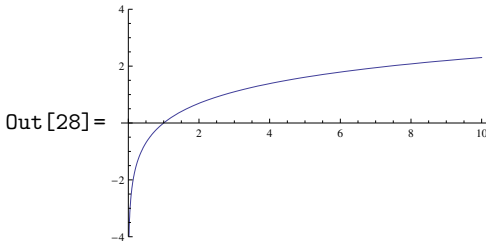
```
In[27] := Plot[Sin[x], {x, 0, 2\pi}]
```



Meist ist der von Mathematica dargestellte Ausschnitt der  $y$ -Achse passend. Man kann ihn aber auch selbst mit `PlotRange` festlegen. Wählen wir zum Beispiel für

Log[x] das  $y$ -Intervall von  $-4$  bis  $4$ :

```
In[28] := Plot[Log[x], {x, 0, 10}, PlotRange -> {-4, 4}]
```



Mathematica enthält neben den eingebauten Funktionen auch eine Reihe von Standard-Zusatzpaketen (Algebra, Graphik, diskrete und numerische Mathematik, Zahlentheorie, Statistik, ...), die viele zusätzliche Funktionen bereithalten. Bei Bedarf wird das entsprechende Zusatzpaket geladen:

```
<<dir' initialisiert alle Pakete aus dem Verzeichnis dir
<<dir'package' liest das Paket package aus dem genannten Verzeichnis ein
```

Alternativ können Pakete auch mit `Needs["dir'"]` bzw. `Needs["dir'package'"]` geladen werden. (Achtung auf die Verwendung der richtigen Anführungszeichen!)

**Übung:** Zeichnen Sie die Funktion  $y = \frac{1}{x-1}$  im  $x$ -Intervall von  $0$  bis  $2$  und im  $y$ -Intervall von  $-20$  bis  $20$ .

## A.3 Gleichungen

Eine Gleichung wird in Mathematica mit einem doppelten Gleichheitszeichen eingegeben

```
In[29] := Sin[x]^2 + Cos[x]^2 == 1
```

```
Out[29] = Sin[x]^2 + Cos[x]^2 == 1
```

Mit `Simplify` kann man versuchen die Gleichheit zu überprüfen:

```
In[30] := Simplify[%]
```

```
Out[30] = True
```

Unsere Gleichung ist also richtig (`True` bzw. `False` sind die englischen Wörter für wahr bzw. falsch).

Die quadratische Gleichung

```
In[31] := gleichung = (x^2 - 2x - 4 == 0);
```

kann mit dem Befehl `Solve` gelöst werden:

```
In[32] := loesung = Solve[gleichung, x]
```

```
Out[32] = {{x -> 1 - Sqrt[5]}, {x -> 1 + Sqrt[5]}}
```

Mathematica liefert dabei die Lösung in Form von so genannten **Ersetzungsregeln**  $x \rightarrow \text{wert}$ . Der Vorteil dabei ist, dass dadurch  $x$  nicht automatisch mit `wert` belegt

wird, man aber trotzdem leicht mit der Lösung weiterrechnen kann. Zum Beispiel können wir die beiden Lösungen in unsere Gleichung einsetzen und mit `Simplify` die Probe machen:

```
In[33]:= Simplify[x2 - 2x - 4 /. loesung]
Out[33]= {0, 0}
```

Mit dem **Ersetzungsoperator** `/.` wird durch `ausdruck /. x -> wert` überall in `ausdruck` die Variable `x` durch `wert` ersetzt.

Falls es, wie in unserem Fall, mehrere Lösungen gibt, so kann man auf eine einzelne Lösung mit dem Befehl

```
In[34]:= loesung[[1]]
Out[34]= {x -> 1 - sqrt(5)}
```

zugreifen. Allgemein wird in *Mathematica* ein Ausdruck der Form

```
In[35]:= {a, b, c, d, e};
```

als **Liste** bezeichnet. Man kann auf den  $n$ -ten Teil einer Liste `list` mit `list[[n]]` zugreifen:

```
In[36]:= %[[3]]
Out[36]= c
```

Zusammenfassend gilt:

<code>Solve[a == b, x]</code>	löst die Gleichung <code>a==b</code> mit <code>x</code> als Unbekannte
<code>ausdruck /. loesung</code>	setzt <code>loesung</code> in <code>ausdruck</code> ein
<code>loesung[[n]]</code>	gibt den $n$ -ten Eintrag der Liste <code>loesung</code> aus

*Mathematica* kann natürlich auch Systeme aus mehreren Gleichungen mit einer oder mehreren Variablen lösen, wie zum Beispiel:

```
In[37]:= Solve[{x + y == a, x - y == 0}, {x, y}]
Out[37]= {{x -> a/2, y -> a/2}}
```

**Übung:** Lösen Sie die quadratische Gleichung  $x^2 - x - 12 = 0$ .

## A.4 Programme

*Mathematica* ist nicht nur ein Mathematikprogramm, sondern auch eine vollwertige Programmiersprache. Insbesondere stehen die üblichen Kontrollstrukturen und Schleifen zur Verfügung:

<code>If[test, befehl1, befehl2]</code>	Ist <code>test</code> wahr, so wird <code>befehl1</code> ausgewertet, ansonsten <code>befehl2</code> ( <code>befehl2</code> ist optional)
<code>Do[befehl, {j, jmin, jmax, dj}]</code>	führt <code>befehl</code> mit <code>j=jmin, jmin+dj, ..., jmax</code> aus
<code>For[start, test, inkrement, befehl]</code>	führt einmal <code>start</code> und dann solange <code>befehl</code> und <code>inkrement</code> aus, bis <code>test</code> falsch ist
<code>While[test, befehl]</code>	führt <code>befehl</code> aus, solange <code>test</code> wahr ist

(Das Inkrement `dj` in der Do-Schleife ist optional mit Defaultwert `dj=1`). Beispiel: Der Befehl `PrimeQ` überprüft, ob eine Zahl nur durch sich selbst oder eins teilbar, also eine Primzahl (siehe Abschnitt 2.6) ist:

```
In[38]:=PrimeQ[7]
```

```
Out[38]=True
```

Mit diesem Befehl und einer Do-Schleife können wir eine Liste von Primzahlen kleiner gleich einer vorgegebenen Zahl erzeugen. Lassen wir uns zum Beispiel alle Primzahlen kleiner gleich 10 ausgeben:

```
In[39]:=Do[
    If[PrimeQ[n],Print[n]],
    {n,1,10}];
```

```
2
3
5
7
```

Mit dem Befehl `Module` können mehrere Befehle übersichtlich zusammengefasst werden:

<code>Module[{var1=wert1, ...}, befehle]</code>	führt die <code>befehle</code> mit lokalen Werten für die aufgelisteten Variablen aus
---	---

Die einzelnen Befehle werden durch Strichpunkte getrennt. Das Ergebnis des letzten Befehls wird als Ergebnis des Blocks zurückgegeben.

Zum Beispiel können wir eine Funktion definieren, die die erste Primzahl ausgibt, die größer oder gleich einer vorgegebene Zahl ist:

```
In[40]:=FindPrime[n_]:=Module[{p=n},
    While[!PrimeQ[p],p++];
    p]
```

Dabei wird zuerst `p` mit `n` initialisiert. Dann wird `p` solange um eins erhöht (`p++` ist äquivalent zu `p=p+1`), wie der Primzahltest fehlschlägt (das Rufzeichen negiert den Test: aus wahr wird falsch und aus falsch wahr; hier wird also `p` um 1 erhöht, solange

PrimeQ[p] falsch ist). Am Ende wird der gefundene Wert von  $p$  ausgegeben.

```
In[41] := FindPrime[1000]
```

```
Out[41] = 1009
```

**Übung:** Verbessern Sie `FindPrime`, indem Sie berücksichtigen, dass Primzahlen (mit der Ausnahme von 2) immer ungerade sind (mit `EvenQ[n]` bzw. `OddQ[n]` können Sie testen, ob eine Zahl gerade oder ungerade ist).



# B

---

## Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben

### B.1 Logik und Mengen

- Die Wahrheitstabelle ergibt, dass nur  $B$  als Mörder in Frage kommt. Logisch gleichwertig ist die Formel  $(V \wedge S) \vee (N \wedge F)$  (Das sieht man durch Vergleich der Wahrheitstabellen für alle 16 Kombinationen der Eingangsvariablen  $S, F, V, N$ ).
- a)  $A \cup U$    b)  $K \setminus (A \cup U) = \bar{A} \cap \bar{U}$    c)  $K \setminus (A \cup U \cup G) = \bar{A} \cap \bar{U} \cap \bar{G}$    d)  $A \cap \bar{U}$
- a)  $A \cap B$    b)  $B$
- a)  $b$    b) 1   c)  $\bar{b}$
- Verneinung beider Seiten der DNF und Anwendung der de Morgan'schen Regeln liefert die KNF für die Verneinung von  $f$  und damit auch für  $f$  (da  $f$  für eine beliebige Funktion steht). Man erhält die KNF auch, wenn man das Dualitätsprinzip auf die DNF anwendet und dabei alle Nullen (auch im Funktionsargument!) durch Einsen ersetzt und umgekehrt.
- $c_1 = a + \bar{b}$ ,  $c_2 = \bar{a} \cdot \bar{b}$ ,  $c_3 = 1$ ,  $c_4 = a$ ,  $c_5 = \bar{b}$ ,  $c_6 = \bar{a} + b$  und  $c_7 = a + \bar{b}$
- if  $(t, a, b) = t \cdot a + \bar{t} \cdot b$
- Die Regeln können leicht durch eine Wahrheitstabelle mit den drei Zeilen  $a < b$ ,  $a = b$  und  $a > b$  und den Spalten  $a \vee b$ ,  $\overline{a \vee b}$  usw. nachgewiesen werden.

### B.2 Zahlenmengen und Zahlensysteme

- a) ja   b) ja
- Tipp: Gehen Sie analog wie für  $\sqrt{2}$  vor.
- 
- 
- 
- 
- a)  $(51.25)_{10}$    b)  $(101100111.\overline{0011})_2$    c)  $(21422)_8$    d)  $(43981)_{10}$
- exakt:  $x = 2d = 205117922$ ,  $y = 2c = 83739041$   
abgerundet:  $x = d = 102558961$  und  $y = c = 41869520.5$   
aufgerundet:  $ad - bc = 0$ , also keine Lösung

### B.3 Elementare Begriffe der Zahlentheorie

1. –
2. –
3.  $x = 1, y = 2$ .
4. Ja.
5. Nein, denn das Assoziativgesetz gilt nicht.
6.  $x = 12$  und  $y = 8$ .
7. 3
8. Bei der Wahl  $m_1 = 97, m_2 = 98$  und  $m_3 = 99$  folgen für  $203 + 125$  bzw.  $203 \cdot 125$  die Darstellungen  $(37, 34, 31)$  bzw.  $(58, 91, 31)$ .
9. –
10. –
11. Durch Probieren:  $x = 3$  und  $x = 7$ .
12. 52, 9, 17, 52

### B.4 Polynomringe und endliche Körper

1.  $7x^5 + 4x^3 + x^2 + 2 = (\frac{7}{3}x^2 - \frac{2}{9})(3x^3 + 2x) + (x^2 + \frac{4}{9}x + 2)$
2.  $x^2 + 2x - 3$
3. a) nicht kongruent      b) kongruent
4. Der Rest ist in beiden Fällen  $x^2 + 1$ .
5. kein Körper
6.  $x^4 + x^2 + 1$
7.  $2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2$
8.  $x^3 + x + 1$  und  $x^3 + x^2 + 1$  sind irreduzibel. Die übrigen sechs Polynome sind reduzibel. Tipp: Die Nullstellen eines reduziblen Polynoms helfen bei der Suche nach den irreduziblen Faktoren.
9.  $m(x) = x^3 + x + 1$  oder  $m(x) = x^3 + x^2 + 1$
10. irreduzibel
11. a) 1101      b) 1111

### B.5 Relationen und Funktionen

1.

	reflexiv	symm.	antisymm.	asymmetrisch	transitiv
$<$	nein	nein	ja	ja	ja
$>$	nein	nein	ja	ja	ja
$\leq$	ja	nein	ja	nein	ja
$\geq$	ja	nein	ja	nein	ja
$=$	ja	ja	ja	nein	ja
$\neq$	nein	ja	nein	nein	nein

2. –

3. nein

4. nein;  $y = \sqrt{4 - x^2}$  und  $y = -\sqrt{4 - x^2}$

5. streng monoton fallend für  $(-\infty, 0]$  und streng monoton wachsend für  $[0, \infty)$ ; beschränkt
6.  $[0, \infty)$  oder  $(-\infty, 0]$
7. –
8. –

## B.6 Folgen und Reihen

1. a)  $\infty$       b)  $-\infty$       c)  $\frac{4}{7}$
2. a)  $\infty$       b)  $-\infty$       c) 0
3.  $K_{n+1} = K_n + K_{n-1}$ ; divergent
4. Für negativen Startwert  $a_1$  konvergiert die Folge gegen  $-\sqrt{x}$ .
5. Verwenden Sie den gleichen Trick wie für die Teilsummen der geometrischen Reihe.
6.  $\frac{1423}{330}$
7. a) konvergent      b) konvergent für alle  $x \in \mathbb{R}$
8. 1

## B.7 Kombinatorik

1. a) 308915776      b) 165765600      c) 712882560      d) 685464000
2. a) 1024      b) 120      c) 56      d) 1013
3. 34650
4. 126
5. a)  $2^{2^n}$     b)  $3^{2^n}$
6. –
7. a) Anzahl der Host-IDs:  
 Klasse A:  $2^{24} - 2 = 16\,777\,214$     Klasse B:  $2^{16} - 2 = 65\,534$     Klasse C:  $2^8 - 2 = 254$   
 b) Anzahl der Net-IDs:  
 Klasse A:  $2^7 = 128$     Klasse B:  $2^{14} = 16\,384$     Klasse C:  $2^{21} = 2\,097\,152$   
 c) Anzahl der IP-Adressen:  $2^7 \cdot (2^{24} - 2) + 2^{14} \cdot (2^{16} - 2) + 2^{21} \cdot (2^8 - 2) = 3\,753\,869\,056$
8.  $25 \cdot 23 \cdots 3 \cdot 1$  Möglichkeiten. Faktor ca.  $5.1 \cdot 10^{13}$ .

## B.8 Rekursionen und Wachstum von Algorithmen

1.  $a_n = (-2) \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$
2.  $a_n = 3^n(1 + n)$
3.  $a_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
4. a) ja      b) nein      c) nein      d) ja
5.  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
6. a)  $a_n = -2^n + 3n + 2$       b)  $a_n = 3n + 2$
7.  $a_n = 2^n + 5n 2^n + 3^{n+2}$
8. –

9. Tipp: Da die homogene Rekursion konstante Koeffizienten hat, ist mit  $s_n$  auch die verschobene Folge  $s_{n-k}$  eine Lösung.
10. a)  $b = 1$       b)  $b = 2$       c)  $b = 2$       d)  $b = 1$
11. richtig

## B.9 Vektorräume

- $(x_C, y_C) = (3, 2) + n \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$
- linear unabhängig, daher Basis; Koordinaten  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = -2$ ,  $k_3 = 3$
- Aus  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U_1 \cap U_2$  folgt sofort  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U_1 \cap U_2$  und  $k\mathbf{a} \in U_1 \cap U_2$ . Für  $U_1 = \text{LH}\{(1, 0)\}$  und  $U_2 = \text{LH}\{(0, 1)\}$  gilt  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U_1 \cup U_2$ .
- ja
- $(a_1, a_2) = k_1(2, 1) + k_2(3, 5)$  für  $k_1 = \frac{1}{7}(5a_1 - 3a_2)$  und  $k_2 = -\frac{1}{7}(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2)$ .
- a) Teilraum; eine Basis ist zum Beispiel  $(0, 1)$   
b) Teilraum; eine Basis ist zum Beispiel  $(1, -1)$
- a)  $\dim(U) = 2$       b)  $\mathbf{a} \notin U$       c)  $\mathbf{b} \in U$
- $C$  ist ein Teilraum, da  $C$  abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation mit einem Skalar ist. Die Dimension von  $C$  ist 2, eine Basis ist zum Beispiel  $(0, 0, 1, 1)$  und  $(0, 1, 0, 1)$ .
- Basis;  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$
- ja
- $\dim(U) = 1$
- 

## B.10 Matrizen und Lineare Abbildungen

- Tipp: Verwenden Sie Rechenregeln, um den Aufwand zu verkleinern.
- $x = -3, y = 2$  bzw.  $x = 7, y = -2$
- a) ja      b) ja
- $(y_1, y_2)$  ist gleich  $(3800, 1200)$ ,  $(3660, 1340)$  bzw.  $(3562, 1438)$  nach einem, zwei bzw. drei Jahren. Die Verteilung konvergiert gegen die fixe Verteilung  $(3333, 1667)$  (gerundet).
- Das Endergebnis hängt von der Reihenfolge der linearen Abbildungen ab, denn  $AB \neq BA$ .
- Drehmatrix um den Winkel  $\alpha + \beta$
- $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  mit  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ .
- 
- 

## B.11 Lineare Gleichungen

- $x = -2, y = 3, z = 4, t = 5$
- $x = 2 + 3t, y = 4 - 5t, z = 3, t$  beliebig

3. nicht lösbar
4. –
5.  $x_1 = t, x_2 = 1 + t, x_3 = t$  mit  $t = 0, 1$
6.  $\dim(\text{Kern}(A)) = 1$
7.  $\dim(\text{Bild}(A)) = 2$
8.  $\det(A) = 30$
9.  $-7$
10.  $\lambda \notin \{0, \pm\sqrt{2}\}$
11. a)  $\mathbf{x} = (5.50374, 3.17215, 4.71797)$       b)  $\mathbf{x} = (12.7895, 5.22699, 13.6938)$

## B.12 Lineare Optimierung

1. Minimale Kosten (740 000 €) ergeben sich bei Montage von 100 PKWs und 200 LKWs in Österreich und 400 PKWs in Deutschland.
2. Beim Kauf von 4 Flugzeugen vom Typ A und von 1 Flugzeug vom Typ B wird die Anzahl der gleichzeitig transportierbaren Pakete maximiert (1600 Pakete).
3. Der zulässige Bereich ist zwar unbeschränkt, der Simplex-Algorithmus liefert aber trotzdem den billigsten Mix 1 kg SG und 1 kg TH (zum Preis von 0.7 €). Einen teuersten Mix gibt es nicht (warum?).
4. Minimale Kosten von 47 000 € ergeben sich bei Transport von 40 t von  $L_1$  nach  $P_1$ , 30 t von  $L_1$  nach  $P_2$ , 0 t von  $L_2$  nach  $P_1$  und 30 t von  $L_2$  nach  $P_2$ .

## B.13 Skalarprodukt und Orthogonalität

1.  $\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{17}{25}(4, 3), \mathbf{a}_{\perp} = \frac{1}{25}(-18, 24)$
2.  $\frac{6}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) = 0$
3.  $\frac{1}{\sqrt{305}}(15x - 4y + 8z) = \pm\frac{1}{2}$
4. –
5. ja
6. a) nein    b) nein    c) ja
7. –
8. –
9.  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$
10.  $\mathbf{x} = (2t + 2, -t), t \in \mathbb{R}$
11. Der Fehler ist  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ .
12. –

## B.14 Eigenwerte und Eigenvektoren

1. –
2. Die Eigenwerte sind konjugiert komplex  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$  und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren lauten  $\mathbf{u}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm i, 1)$ .
3.  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

4. Tipp: Schreiben Sie die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms an (Lösung einer quadratischen Gleichung).
5.  $A^8 = \begin{pmatrix} 128 & -128 \\ -128 & 128 \end{pmatrix}$
6. Normalform:  $6y_1^2 + y_2^2 = 1$ . Tipp: Stellen Sie die Kurve in der Form  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  dar und wählen Sie  $A$  so, dass sie symmetrisch wird.
7. Normalform:  $4y_1^2 - 6y_2^2 = 1$
8. Die Eigenwerte sind 3, 2, 0 und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ ,  $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$ .
9. –
10. –

## B.15 Grundlagen der Graphentheorie

1.  $G$  und  $S$  sind äquivalent
2.  $K_n$  enthält  $\binom{n}{2}$  Kanten
3. a) kein Eulerzug möglich      b) Eulerzug möglich
4. Tipp: Starten Sie im ersten und enden Sie im zweiten ungeraden Knoten.
5. –
6. –
7. Hinweis: In einem beliebigen Graphen hat jede Fläche mindestens 3 Kanten und jede Kante gehört zu 2 Flächen.

## B.16 Bäume und kürzeste Wege

1. –
2. minimale Miete: 21
3. Der Dijkstra-Algorithmus mit Start in  $z$  liefert den aufspannenden Baum mit den Kanten  $ze, zf, fd, dc, db, ba, bs$ .
4. a) 5! mögliche Routen  
b) Start des NN-Verfahrens in  $a$  ergibt die Rundreise  $a, c, d, b, e, f, a$  mit Weglänge 88. Start des NN-Verfahrens in  $d$  ergibt die Rundreise  $d, b, e, f, c, a, d$  mit Weglänge 87. Das Optimum ist übrigens  $a, b, e, f, d, c, a$  mit Weglänge 80 (mit *Mathematica* berechnet).
5. Start des NN-Verfahrens in  $F$  ergibt die Rundreise  $F, B, K, D, W, A, F$  mit Weglänge 658. Start des NN-Verfahrens in  $K$  ergibt die Rundreise  $K, B, D, W, A, F, K$  mit Weglänge 702.
6. a) Start des DNN-Verfahrens in  $F$  ergibt dieselbe Rundreise wie das NN-Verfahren bei Start in  $F$ .  
b) Start des DNN-Verfahrens in  $K$  ergibt die Rundreise  $F, W, D, K, B, A, F$ ; Weglänge: 689.  
(Das Optimum ist  $F, B, K, A, D, W, F$  mit Weglänge 617.)
7. 1) minimaler aufspannender Baum:  $BK, DW, DK, AK, BF$ ;  
2) Euler-Zug (z. B.):  $F, B, K, D, W, D, K, A, K, B, F$ ;  
3) Hamilton-Kreis (Start der Konstruktion bei  $F$  im obigen Euler-Kreis):  $F, B,$

$K, D, W, A, F$  (gleicher Hamilton-Kreis wie mit NN bzw. DNN mit Start der Konstruktion in  $F$ ).

## B.17 Flüsse in Netzwerken und Matchings

1. –
2. Es ergibt sich ein maximaler Gesamtfluss 16. Die Kapazitäten entlang der Kanten  $qa, ac, bc$  könnten auf 8, 3 bzw. 1 verringert werden.
3. 200 mal; der Algorithmus trifft diese Wahl nicht (warum?).
4. a) Ford-Fulkerson liefert den maximalen Gesamtfluss 11, bei dem beide zu  $s$  führenden Kanten voll ausgelastet sind. Also kann die Nachfrage gedeckt werden.  
b) Ford-Fulkerson liefert nun den maximalen Gesamtfluss 12. Die Kanten zu  $s$  sind nicht voll ausgelastet, daher kann die Nachfrage nicht mehr gedeckt werden.
5. –
6. maximales Matching:  $\{CA, BN, EL, HZ, OD, PG\}$  (Anfangsbuchstaben stehen für Professoren bzw. Vorlesungstitel)
7. –

---

# Literatur

## Mathematische Vorkenntnisse

1. A. Adams et al., *Mathematik zum Studieneinstieg*, 4. Auflage, Springer, Berlin, 2002.
2. K. Fritzsche, *Mathematik für Einsteiger*, 2. Auflage, Spektrum, Heidelberg, 2001.
3. A. Kemnitz, *Mathematik zum Studienbeginn*, 5. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2002.
4. W. Purkert, *Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, 4. Auflage, Teubner, Stuttgart, 2001.
5. W. Timischl und G. Kaiser, *Ingenieur-Mathematik I-IV*, E. Dorner, Wien, 1997–2001.

## Mathematik für Informatiker

6. M. Brill, *Mathematik für Informatiker*, 2. Auflage, Carl Hanser, München, 2005.
7. W. Dörfler und W. Peschek, *Einführung in die Mathematik für Informatiker*, Carl Hanser, München, 1988.
8. D. Hachenberger, *Mathematik für Informatiker*, München, Pearson, 2005.
9. P. Hartmann, *Mathematik für Informatiker*, 3. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2004.

## Mathematik für Technik oder Wirtschaft

10. T. Ellinger et al., *Operations Research*, 6. Auflage, Springer, Berlin, 2003.
11. E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 8. Auflage, John Wiley, New York, 1999.
12. P. Stingl, *Mathematik für Fachhochschulen: Technik und Informatik*, 7. Auflage, Carl Hanser, München, 2003.
13. P. Stingl, *Operations Research*, Fachbuchverlag Leipzig, München, 2003.
14. K. Sydsæter und P. Hammond, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Pearson, München, 2004.
15. J. Tietze, *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*, 10. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2002.

## Diskrete Mathematik und Lineare Algebra – einführend

16. A. Beutelspacher und M.-A. Zschiegner, *Diskrete Mathematik für Einsteiger*, Vieweg, Braunschweig, 2002.



17. R. Garnier und J. Taylor, *Discrete Mathematics for New Technology*, IOP Publishing, Bristol, 1992.
18. K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Applications*, 4th edition, McGraw-Hill, Boston, 1999.
19. G. Strang, *Lineare Algebra*, Springer, Berlin, 2003.
20. P. Tittmann, *Graphentheorie*, Fachbuchverlag Leipzig, München, 2003.

### Diskrete Mathematik und Lineare Algebra – weiterführend

21. M. Aigner, *Diskrete Mathematik*, 4. Auflage Vieweg, Braunschweig, 2001.
22. R. Diestel, *Graph Theory*, 2nd edition, Springer, New York, 2000.
23. R.L. Graham, D. Knuth und O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 11th printing, Addison Wesley, 2002.
24. J.L. Gross und J. Yellen, *Handbook of Graph Theory*, CRC Press, 2003.
25. J.L. Gross und J. Yellen, *Graph Theory and its Applications*, CRC Press, 1998.
26. T. Ihringer, *Diskrete Mathematik*, Teubner, Stuttgart, 1994.
27. K. Jänich, *Lineare Algebra*, 8. Auflage, Springer, Berlin, 2000.
28. A. Steger, *Diskrete Strukturen 1*, Springer, Berlin, 2001.

### Kryptographie und Codierungstheorie

29. J. Buchmann, *Einführung in die Kryptographie*, Springer, Berlin, 1999.
30. G.A. Jones und J.M. Jones, *Information and Coding Theory*, Springer, London, 2000.
31. S. Roman, *Introduction to Coding and Information Theory*, Springer, New York, 1997.
32. B. Schneier, *Angewandte Kryptographie*, Addison-Wesley, München, 1996.
33. A.S. Tanenbaum, *Computernetzwerke*, 4. Auflage, Pearson, München, 2003.

### Mathematica

34. R.E. Maeder, *Computer Science with Mathematica*, Cambridge UP, Cambridge, 2000.
35. S. Wolfram, *The Mathematica Book*, 5th edition, Wolfram Media, 2003.

### Populärwissenschaftliches

36. E. Behrends, M. Aigner (Eds.), *Alles Mathematik – von Pythagoras zum CD-Player*, 2. Auflage, Vieweg, 2002.
37. D. Guedj, *Das Theorem des Papageis*, Bastei Lübbe, Bergisch Gladbach, 1999.
38. D. Harel, *Das Affenpuzzle und weitere bad news aus der Computerwelt*, Springer, Berlin, 2002.
39. D. Kehlmann, *Die Vermessung der Welt*, Rowohlt, 2005.
40. S. Singh, *Fermats letzter Satz*, Carl Hanser, München, 1998.
41. S. Singh, *Geheime Botschaften*, Carl Hanser, München, 1999.

### Ressourcen im Internet

42. F. Embacher und P. Oberhuemer, mathe online, <http://www.mathe-online.at/>
43. E.W. Weisstein et al., *MathWorld – A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/>
44. Wikipedia Mathematik, <http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik>

---

## Verzeichnis der Symbole

$\forall$	... All-Quantor, 5
$\exists$	... Existenz-Quantor, 5
$\wedge$	... logisches UND, 2
$\vee$	... logisches ODER, 3
xor	... logisches eXklusives ODER, 3
$ A $	... Mächtigkeit einer Menge, 11
$A \cap B$	... Durchschnitt von Mengen, 12
$A \cup B$	... Vereinigung von Mengen, 12
$A \setminus B$	... Differenz von Mengen, 13
$\bar{A}$	... Komplement einer Menge, 13
$A \times B$	... kartesisches Produkt, 14
$\emptyset$	... leere Menge, 11
$\in$	... Element von, 10
$\subseteq$	... Teilmenge, 11
$ x $	... Absolutbetrag, 39
$f \circ g$	... Hintereinanderausführung, 156
$(a, b)$	... offenes Intervall, 39
$(a, b]$	... halboffenes Intervall, 39
$[a, b)$	... halboffenes Intervall, 39
$[a, b]$	... abgeschlossenes Intervall, 39
$n!$	... Fakultät, 46
$\binom{n}{k}$	... Binomialkoeffizient, 206
$A^{-1}$	... inverse Matrix, 283
$A^T$	... transponierte Matrix, 278
$A^*$	... adjungierte Matrix, 279
$\ \mathbf{a}\ $	... Norm (Länge), 256
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$	... Skalarprodukt, 355
$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$	... orthogonale Vektoren, 358
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	... Kreuzprodukt, 363
$\mathbf{a}_{\parallel}$	... orthogonale Projektion, 358
$\mathbf{a}_{\perp}$	... orthogonales Komplement, 358
$\bar{z}$	... zu $z$ konjugiert komplexe Zahl, 43

- $\arccos$  ... Arcuskosinus, 163  
 $\arcsin$  ... Arcussinus, 163  
Bild ... Bild einer Matrix, 321  
 $\mathbb{C}$  ... Menge der komplexen Zahlen, 41  
 $C(n, k)$  ... Anzahl von Kombinationen, 205  
 $\cos$  ... Kosinus, 163  
 $\cosh(x)$  =  $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  Kosinus hyperbolicus  
 $\cot(x)$  =  $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  Kotangens  
 $\det$  ... Determinante, 326  
 $\text{diag}$  ... Diagonalmatrix, 280  
 $\text{div}$  ... ganzzahliger Anteil der Division, 57  
 $e$  ... Euler'sche Zahl, 183  
 $\exp(x)$  =  $e^x$  Exponentialfunktion, 161  
 $\text{ggT}$  ... größter gemeinsamer Teiler, 57  
 $i$  =  $\sqrt{-1}$  imaginäre Einheit, 41  
 $\text{Im}$  ... Imaginärteil, 42  
 $\inf$  ... Infimum, 40  
 $\mathbb{I}_n$  ... Einheitsmatrix, 280  
 $\mathbb{K}$  ... Körper, 87  
 $\mathbb{K}[x]$  ... Polynomring über  $\mathbb{K}$ , 88  
Kern ... Kern einer Matrix, 323  
 $\lim$  ... Grenzwert, 176  
 $\text{LH}\{\dots\}$  ... lineare Hülle, 263  
 $\log_a$  ... Logarithmus zur Basis  $a$ , 161  
 $\ln$  =  $\log_e$  natürlicher Logarithmus, 161  
 $\max$  ... Maximum, 41  
 $\min$  ... Minimum, 41  
 $\text{mod}$  ... Rest modulo, 57, 73  
 $\mathbb{N}$  =  $\{1, 2, \dots\}$  natürliche Zahlen, 33  
 $\mathbb{N}_0$  =  $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$   
 $o(f)$  ... Landausymbol, 236  
 $O(f)$  ... Landausymbol, 236  
 $\prod$  ... Produktzeichen, 46  
 $P(n, k)$  ... Anzahl von Permutationen, 204  
 $\varphi(n)$  ... Euler'sche  $\varphi$ -Funktion, 102  
 $\mathbb{R}$  ... Menge der reellen Zahlen, 37  
rang ... Rang einer Matrix, 316, 320  
Re ... Realteil, 42  
sign ... Vorzeichenfunktion, 155  
sin ... Sinus, 163  
 $\sinh(x)$  =  $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  Sinus hyperbolicus  
 $\sum$  ... Summenzeichen, 44  
sup ... Supremum, 392  
 $\tan(x)$  =  $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  Tangens  
tr ... Spur einer Matrix, 321  
 $\mathbb{Z}$  =  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  ganze Zahlen, 34  
 $\mathbb{Z}_m$  =  $\mathbb{Z} \bmod m$ , 79  
 $\mathbb{Z}_m^*$  =  $\{n \in \mathbb{Z}_m \mid \text{ggT}(n, m) = 1\}$ , 85  
 $\mathbb{Z}_p[x]_{m(x)}$  ... Restklassenring, 122

---

# Index

- Abbildung, 15, *siehe* Funktion
  - affine, 291
  - lineare, 288
- abelsche Gruppe, 86
- abgeschlossen, 264
- abhängige Variable, 154
- Absolutbetrag, 39, 43
- Absorptionsgesetze, 16
- Abstand, 39
  - Ebene vom Ursprung, 363
  - Gerade vom Ursprung, 360
  - Punkte im  $\mathbb{R}^n$ , 254
- abzählbar, 145
- additives Inverses, 80
- adjazent, 413
- Adjazenzmatrix, 417
  - gerichteter Graph, 418
- äquivalent
  - Aussagen, 8
  - Graphen, 414
- Äquivalenz, 9
- Äquivalenzklasse, 144
- Äquivalenzrelation, 142
- AES, 130
- Algebra, 89
- algebraische Geometrie, 89
- algebraische Vielfachheit, 391
- Algorithmus
  - Breadth-First, 422
  - Depth-First, 423
  - Dijkstra, 449
  - Euklid, 93
  - Fleury, 425
  - Ford-Fulkerson, 467
  - Gauß, 311
  - Huffman, 442
  - Kruskal, 446
  - Prim, 448
  - RSA, 98
  - Suchbaum-, 440
- All-Aussage, 5
- All-Quantor, 5
- alternierender Weg, 474
- Analysis, 89
- Anfangsbedingung, 217
- Angebot-Nachfrage-Problem, 471
- Arcusfunktionen, 164
- Asmuth-Bloom Schema, 106
- Assoziativgesetz, 13, 16, 86
- Attraktor, 223
- aufspannen, 264
- aufspannender Baum, 439
- Aussage, 1
- Aussageform, 4
- Austauschschritt, 346
- Authentifizierung, 100
- Basis, 260
  - Koordinaten bezüglich einer, 260
- Baum, 437
  - aufspannender, 439
  - binärer, 440
  - minimaler aufspannender, 446
- Baumdiagramm, 200
- beschränkt
  - Folge, 175
  - Funktion, 162
  - Menge, 40, 339
- bestimmt divergent, 180
- Betrag, 39
- Beweis, 9
  - indirekter, 10

- vollständige Induktion, 47
- Widerspruchs-, 10
- bijektiv, 153
- Bijunktion, 7
- Bild, 152
  - lineare Abbildung, 321
  - Matrix, 321
- Bildmenge, 152
- binäre Variable, 15
- Binärsystem, 49
- Binärzahl, 50
- binärer Baum, 440
- Binomialkoeffizient, 206
- Binomischer Lehrsatz, 206
- bipartiter Graph, 471
- Blatt, 440
- Boole'sche Algebra, 17
- Boole, George, 17
- Breadth-First-Algorithmus, 422
- Breitensuche, 422
  
- Caesar-Verschlüsselung, 81
- Cauchy-Produkt, 186
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 360
- Chaos, 224
- charakteristische Gleichung, 230
- charakteristisches Polynom, 389
- Chinesischer Restsatz, 102
- Codewort, 296
- Cramer'sche Regel, 328
- CRC, 126
  
- De Morgan'sche Regeln, 13, 16
- De Morgan, Augustus, 14
- Defekt, 325
- Definitionsbereich, 152
- Depth-First-Algorithmus, 423
- DES, 130
- Determinante, 326
- Dezimalsystem, 48
- Dezimalzahl, 48
- Diagonalelemente, 276
- Diagonalmatrix, 280
- Differentialgeometrie, 89
- Differenz von Mengen, 13
- Differenzgleichung, *siehe* Rekursion
- digitale Authentifizierung, 100
- digitale Signatur, 100
- digitaler Fingerabdruck, 79
- Digraph, 416
- Dimension
  - Matrix, 275
  - Vektorraum, 261
- diophantische Gleichung, 93
- disjunkt, 12
- Disjunktion, 3
- diskrete Kosinustransformation, 375
- diskrete Mathematik, 89
- Distributivgesetz, 13, 16, 87
- divergent
  - Folge, 178
  - Reihe, 185
- Division mit Rest, 57
- Drehmatrix, 295
- Dreiecksmatrix, 279
- Dreiecksungleichung, 39, 43, 256
- Dualitätsprinzip, 16, 17
- Dualsystem, 49
- Dualzahl, 50
- Durchschnitt von Mengen, 12
- dynamisches System, 221
  
- EAN, 91
- Ecke, 412
- Eckpunkt, 338
- EFM, 219
- Eigenraum, 392
- Eigenvektor, 388
- Eigenwert, 388
- Einheitsmatrix, 280
- Einheitsvektor, 254
- Einskomplement, 80
- Einwegfunktion, 97
- EKONS, 91
- elementare Spaltenumformungen, 312
- elementare Zeilenumformungen, 312
- elementfremd, 12
- ENIGMA, 214
- Entscheidungsprobleme, 445
- Entwicklungskoeffizienten, 260
- erweiternder Weg, 475
- Euklid, 36, 56
- Euklid'scher Algorithmus, 93
  - erweiterter, 94
  - für Polynome, 119
  - für Polynome, erweiterter, 120
- Euler'sche  $\varphi$ -Funktion, 102
- Euler'sche Zahl, 37, 183
- Euler-Graph, 425
- Euler-Mascheroni Konstante, 186
- Euler-Zug, 424
- Existenz-Aussage, 5
- Existenz-Quantor, 5

- Exponent, 35, 52
- Exponentialfunktion, 161
- Fakultät, 46
- Fast Fourier Transformation, 241
- Fehler
  - absoluter, 53
  - relativer, 53
- Festkommadarstellung, 51
- Fibonacci-Folge, 196, 246
- Fixpunkt, 227
  - Iteration, 222
- Flip-Flop, 23
- Fluss
  - Gesamt-, 464
  - maximaler, 466
  - zulässiger, 464
- Folge, 173
  - alternierende, 174
  - beschränkte, 175
  - bestimmt divergente, 180
  - divergente, 178
  - Grenzwert, 176
  - konvergente, 176
  - monotone, 175
  - rekursiv definierte, 174
- Formel von Euler, 434
- Fundamentalsatz der Algebra, 129
- Funktion, 15, 151
  - beschränkte, 162
  - bijektive, 153
  - injektive, 153
  - monotone, 159
  - surjektive, 153
- Funktionalanalysis, 89
- Funktionswert, 154
- Fuzzy-Logik, 30
- Galois-Körper, 129
- ganze Zahlen, 34
- Gauß'sche Zahlenebene, 42
- Gauß-Algorithmus, 311
- Geburtstagsparadoxon, 78
- GENAU-DANN-Verknüpfung, 7
- Generatormatrix, 296
- Generatorpolynom, 126
- geometrische Reihe, 187
- geometrische Vielfachheit, 392
- geordnetes Paar, 14
- gewichteter Graph, 443
- gleichstufige Stimmung, 56
- Gleichungssystem
  - homogenes, 309
  - inhomogenes, 309
  - lineares, 309
- Gleitkommadarstellung, 52
  - normalisierte, 52
- Gödel, Kurt, 1
- Google, 397
- Grad
  - Knoten, 413
  - Polynom, 115, 155
- Graph, 412
  - Abbildung, 153
  - bipartiter, 471
  - gerichteter, 416
  - gewichteter, 443
  - planarer, 413
  - vollständiger, 443
  - zusammenhängender, 422
- Greedy-Algorithmus, 447
- Grenzwert
  - Folge, 176
  - Reihe, 184
- Groß-O, 236
- Gruppe, 86
- Halbordnung, 146
- Hamilton-Kreis, 426
- harmonische Zahlen, 185
- Hashfunktion, 76
  - Einweg, 79
- Hashverfahren, 76
- Hashwert, 77
- Hauptachsentransformation, 400
- Hauptdiagonale, 276
- Heron'sche Folge, 183
- Heuristik, 444
  - DNN, 459
  - MST, 459
  - NN, 459
- Hexadezimalsystem, 50
- hinreichend, 8
- Hintereinanderausführung, 156
- homogene Koordinaten, 291
- Householdertransformation, 383
- Hülle
  - reflexive, 147
  - symmetrische, 147
  - transitive, 147
- Huffman-Algorithmus, 442
- Hybridverfahren, 100
- Hyperebene, 364

- Ideal, 89
- Identitätsrelation, 141
- imaginäre Einheit, 41
- Imaginärteil, 42
- Implikation, 8
- Induktionsprinzip, 47
- Infix-Notation, 442
- Inflation, 234
- injektiv, 153
- Inklusions-Exklusions-Prinzip, 202
- inneres Produkt, 355
- Input-Output-Analyse, 319
- Intervall, 39
- Intervallarithmetik, 55
- inverse Funktion, 157
- inverse Matrix, 284
- inverses Element, 86
- Involution, 158
- inzident, 413
- Inzidenzmatrix, 418
  - gerichteter Graph, 306, 434
  - ungerichteter Graph, 433
- IP-Adressen, 214
- irrationale Zahlen, 37
- irreduzibel, 127
- ISBN, 76, 91
- isomorph, 414
- Iteration, 217
  
- Jordan'sche Normalform, 394
- JPEG-Verfahren, 376
  
- Kante, 412
  - Mehrfachkante, 413
- Kantenzug, 420
- Kapazität, 463
- Kardinalzahl, 145
- kartesches Produkt, 14
- Kegelschnitt, 401
- Kern, 323
- Kirchhoff'sche Regeln, 317
- Kirchhoff'sches Gesetz, 464
- Klavierbau, 56
- Klein-O, 236
- Knoten, 412
  - gepaarter, 472
  - isolierter, 413
- Knuth, Donald, 236
- Koeffizient
  - Polynom, 115
- Koeffizientenmatrix, 282, 310
- Königsberger Brückenproblem, 424
  
- Körper, 87
- Kollision, 77
- Kombination, 205
- kommutative Gruppe, 86
- Kommutativgesetz, 12, 16, 86
- Komplement
  - Menge, 13
  - orthogonales, 359
- komplexe Zahlen, 41
- Komplexitätsklasse, 445
- Komplexitätstheorie, 235
- Komponente, 422
- kongruent, 73
  - Polynom, 121
- konjugiert komplex, 43
- Konjunktion, 2
- Kontrollbit, 296
- Kontrollmatrix, 296
- Kontrollpolynom, 126
- konvergent
  - Folge, 176
  - Reihe, 184
- Koordinaten, 249, 260
- Kosinus, 163
- Kredit, 233
- Kreis, 420
- Kreiszahl, 38
- Kreuzprodukt, 363
- Kronecker Delta, 280
  
- Länge
  - Kantenzug, 420
  - Vektor, 256
  - Wurzelbaum, 440
- Landau, Edmund, 236
- Landausymbol, 236
- Laplace'scher Entwicklungssatz, 326
- LCD-Anzeige, 23
- Leontjef-Inverse, 319
- Leontjef-Matrix, 320
- LIFO, 443
- linear
  - abhängig, 258
  - unabhängig, 258
- lineare Abbildung, 288
- lineare Algebra, 89
- lineare Hülle, 263
- lineare Klassifikation, 366
- lineares Optimierungsproblem, 340
- Linearfaktor, 119
- Linearkombination, 257

- LISP, 442
- Logarithmusfunktion, 161
- Logikfunktion, 18
- logischer Schluss, 8
- logistisches Wachstumsmodell, 221
  
- Mächtigkeit, 11, 145
- Majorantenkriterium, 189
- Mantisse, 52
- Markov-Matrix, 396
- Markov-Prozess, 305, 396
- Maschinengenauigkeit, 53
- Matched-Filter, 365
- Matching, 472
  - maximales, 473
- Matrix, 275
  - ähnlich, 388
  - Addition, 277
  - adjungierte, 279
  - diagonalisierbare, 393
  - invertierbare, 284
  - Koeffizienten, 275
  - komplementäre, 328
  - Multiplikation, 280
  - Multiplikation mit einem Skalar, 277
  - orthogonale, 374
  - quadratische, 276
  - reguläre, 284
  - singuläre, 284
  - symmetrische, 279
  - transponierte, 278
  - tridiagonale, 403
- Matrixmultiplikation, 280
- Matrixnorm, 277
- maximales Matching, 473
- Maximum, 41
- Maxterm, 19
- MD5, 79
- Menge, 10
  - beschränkte, 40, 339
  - Element, 10
  - leere, 11
  - unendliche, 11
- minimaler aufspannender Baum, 446
- Minimum, 41
- Minterm, 18
- Modul, 57, 73
- monoton
  - Folge, 175
  - Funktion, 159
- Multigraph, 413
- multiplikatives Inverses, 82
- n-Tupel, 14
- Nachbar, 413
- Nachbarschaftsliste, 419
- Nachfolger, 439
- NAND-Verknüpfung, 18
- natürliche Zahlen, 33
- Negation, 2
- negativ definit, 402
- Netzwerk, 463
- neuronales Netz, 366
- neutrales Element, 86
- NOR-Verknüpfung, 18
- Norm, 256
- Normalform
  - disjunktive, 19, 22
  - Ebene, 363
  - Ellipse, 401
  - Gerade, 361
  - Hyperebene, 364
  - konjunktive, 19
  - lineares Optimierungsproblem, 345
- Normalvektor
  - Ebene, 363
  - Gerade, 361
- normierter Raum, 256
- normiertes Polynom, 115
- notwendig, 8
- NP-vollständig, 445
- Nullfolge, 177
- Nullmatrix, 276
- Nullstelle, 155
- Nullvektor, 250, 255
  
- O-Notation, 236
- ODER-Verknüpfung, 3
- Ohm'sches Gesetz, 318
- Oktalsystem, 50
- Oktave, 56
- optimale Lösung, 340
- optimaler Punkt, 340
- Ordnung, 145
  - partielle, 146
  - strikte, 146
  - totale, 146
- orthogonal
  - Matrix, 374
  - Projektion, 359
  - Vektoren, 358
- Orthonormalbasis, 369
- Orthonormalsystem, 369



- Ortsvektor, 251
- PageRank, 400
- parallel, 358
- Parallogrammgleichung, 383
- Paritätskontrollcode, 126
- Partition, 144
- Pascal'sches Dreieck, 207
- Permutation, 203
- Pivotelement, 346
- Pivotspalte, 345
- Pivotzeile, 346
- Polynom, 115, 155
- Polynomdivision, 117
- Polynomring, 89, 116
- positiv definit, 402
- Postfix-Notation, 443
- Potenz, 35
- Potenzfunktion, 160
- Potenzmenge, 11
- Potenzreihe, 190
- Prädikatenlogik, 4
- Präfix-Notation, 442
- Primfaktor, 56
- Primzahl, 55
- private key, 97
- Produktregel, 200, 201
- Projektion, 359
- Projektor, 377
- Prüfziffer, 76, 89
- Pseudozufallszahlen, 195
- public key, 97
- Public Key Verschlüsselung, 97
  
- QR-Zerlegung, 379
- quadratisch Ergänzen, 155
- quadratische Form, 401
- Quelle, 463
- Quint, 56
- Quotientenkriterium, 189
  
- Rang
  - Gleichungssystem, 316
  - Matrix, 320
- rationale Funktion, 155
- rationale Zahlen, 34
- Ray-Tracing, 366
- Realteil, 42
- reduzibel, 127
- Reed-Solomon-Code, 130
- reelle Zahlen, 37
- Reihe, 184
  - absolut konvergente, 185
  - divergente, 185
  - geometrische, 187
  - harmonische, 185
  - konvergente, 184
  - Teilsumme, 184
- Rekursion, 217
  - Anfangsbedingung, 217
  - autonome, 217
  - homogene, 224
  - Lösung, 217
  - lineare, 224
  - Ordnung, 217
- Relation, 139
  - $n$ -stellige, 148
  - antisymmetrische, 141
  - asymmetrische, 141
  - binäre, 148
  - Identität, 141
  - inverse, 140
  - leere, 140
  - rechtseindeutige, 153
  - reflexive, 141
  - symmetrische, 141
  - transitive, 141
  - Verkettung, 140
- relationale Algebra, 149
- relationales Datenmodell, 148
- Rente, 233
- Rest modulo  $m$ , 57
- Restklasse, 74
  - Polynom, 121
- Restklassenring, 123
- RGB-Farbmodell, 286
- Rijndael, 130
- Ring, 88
- ROT13, 82
- Router, 451
- RPN, 443
- RSA-Algorithmus, 98
- Rückwärtskante, 465
- Rundung, 53
- Rundungsfehler, 53
- Russell'sches Paradoxon, 10
- Russell, Bertrand, 10
  
- Satz, 6
  - Chinesischer Restsatz, 102
  - Euler, 102
  - Fermat, 101
  - Pythagoras, 36

- Schaltkreis, 21
- Schaltvariable, 15
- Schlüssel
  - öffentlicher, 97
  - privater, 97
- Schlinge, 413
- Schlupfvariable, 342
- Schranke, 40, 162
- seed, 195
- selbstinvers, 158
- Senke, 463
- SHA, 79
- Simplex-Algorithmus, 345
- Simplextableau, 345
- Singulärwerte, 409
- Sinus, 163
- Skalar, 249, 255
- Skalarprodukt, 355
- spaltenorthogonal, 377
- Spaltenvektor, 276
- Sparkassenformel, 233
- Spatprodukt, 383
- Spiegelung, 292
- Spur, 392
- SQL, 149
- Standardbasis, 260
- Stirling, James, 240
- Stirling-Formel, 240
- stochastische Matrix, 396
- Streckung, 292
- Subjunktion, 7
- Summenregel, 199
- Superpositionsprinzip, 229
- Supremum, 40
- surjektiv, 153
- symmetrische Gruppe, 205
  
- teilbar, 55
- Teiler, 55
  - größter gemeinsamer, 57
  - größter gemeinsamer, Polynom, 119
  - Polynom, 118
- teilerfremd, 57
  - Polynom, 119
- Teilfolge, 176
- Teilgraph, 412
- Teilmenge, 11
- Teilraum, 264
- Theorem, 6
- Tiefensuche, 423
- Traveling Salesman Problem, 443
  
- triviale Lösung, 258, 311
- TSP, *siehe* Traveling Salesman Problem
- Tupel, 14
- Turingmaschine, 445
  
- Umkehrfunktion, 157
- unabhängige Variable, 154
- UND-Verknüpfung, 2
- ungerichteter Weg, 465
- Ungleichung
  - lineare, 337
  - System linearer, 338
- Unterbaum, 440
- Untergruppe, 86
- Untervektorraum, 264
- Urbildmenge, 152
  
- Vandermonde'sche Identität, 207
- Variation, 203
- Vektor, 249, 255
  - Betrag, 254
  - Länge, 254, 256
  - Multiplikation mit einem Skalar, 250
  - Summe, 250
- Vektorraum, 255
  - Basis, 260
  - Dimension, 261
  - komplexer, 255
  - normierter, 256
  - reeller, 255
  - unendlichdimensionaler, 261
- Verbesserungsweg, 475
- Vereinigung von Mengen, 12
- Verkettung, 140, 156
- Verneinung, 2
- Verschlüsselung
  - asymmetrische, 97
  - symmetrische, 97
- Verteilte Geheimnisse, 105
- Volldisjunktion, 19
- Vollkonjunktion, 18
- vollständige Induktion, 47
- vollständiger Graph, 433, 443
- Vorgänger, 439
- Vorwärtskante, 465
  
- Wahrheitstabelle, 3
- Wald, 437
- Weg, 420
  - kürzester, 448
- WENN-DANN-Verknüpfung, 7
- Wertebereich, 152

- Wiederholungscode, [127](#)
- Winkel
  - Ebene und Gerade, [364](#)
  - Ebenen, [364](#)
  - Geraden, [364](#)
- Wochentagsformel, [75](#)
- Wurzelbaum, [439](#)
- Wurzelfunktion, [38](#)
- XOR-Verknüpfung, [3](#)
- YIQ-Farbmodell, [286](#)
- YUV-Farbmodell, [287](#)
- Zeilenstufenform, [315](#)
  - reduzierte, [315](#)
- Zeilenvektor, [276](#)
- Zielfunktion, [340](#)
- Zinsrechnung, [233](#)
- Zinssatz
  - ISMA Methode, [234](#)
  - US Methode, [234](#)
- Zufallszahlen, [195](#)
- zulässiger Bereich, [338](#)
- zulässiger Punkt, [338](#)
- zunehmender Weg, [465](#)
- Zusammenhangskomponente, [422](#)
- Zweikomplement, [80](#)
- zyklischer Code, [126](#)