APPENDICE I

Calcul d'un déterminant

Soit dans $\mathbb{R}^p$ une base orthonormée dans laquelle on distingue les q premiers vecteurs des $p-q$ suivants : $V_1, \ldots, V_q, W_{q+1}, \ldots, W_p$, $(0 < q < p)$. La $i^{\text{ème}}$ composante de V_α ou de W_β est notée $V_{\alpha i}$ ou $W_{\beta i}$.

Soit le système linéaire de p équations pour les p inconnues $x_1, \ldots, x_p$:

$$(1) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \, c_i \, V_{\alpha i} = \lambda_\alpha & \alpha = 1, \ldots, q \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \, \frac{1}{c_i} \, W_{\beta i} = \mu_\beta & \beta = q+1, \ldots, p. \end{cases}$$

Notations

$(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ désigne une combinaison sans répétition de r nombres pris parmi $1, 2, \ldots, p$.

$D_{j_1 j_2 \ldots j_r}(U_1, \ldots, U_r)$ est le déterminant d'ordre r extrait du tableau des composantes de $U_1, \ldots, U_r$, les composantes indexées par $j_1, j_2, \ldots, j_r$ étant seules conservées.

Théorème. Le déterminant Δ du système (1) est tel que :

$$(2) \quad \Delta^2 = \left\{ \sum_{(j_1, \ldots, j_q)} (c_{j_1} \cdots c_{j_q})^2 \left[D_{j_1 \ldots j_q}(V_1, \ldots, V_q) \right]^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{(j_1, \ldots, j_{p-q})} (c_{j_1} \cdots c_{j_{p-q}})^{-2} \left[D_{j_1, \ldots, j_{p-q}}(W_{q+1}, \ldots, W_p) \right]^2 \right\}$$

les sommations sont étendues à toutes les combinaisons $(j_1, \ldots, j_q)$ et $(j_1, \ldots, j_{p-q})$.

Lemme. Soient $U_1, \ldots, U_r$, r vecteurs de $\mathbb{R}^p$ $(r \leqslant p)$. Le déterminant D d'ordre r dont l'élément de la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne est

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{p} d_i \, U_{\alpha i} U_{\beta i} \text{ vaut : } D = \sum_{(j_1, \ldots, j_r)} d_{j_1} \cdots d_{j_r} \left[D_{j_1 \ldots j_r}(U_1, \ldots, U_r) \right]^2$$

En effet on peut décomposer chaque colonne de D en p colonnes et écrire :

$$D = \sum_{((j_1, j_2, \dots, j_r))} \begin{vmatrix} U_{1j_1} U_{1j_1} d_{j_1} & U_{2j_2} U_{1j_2} d_{j_2} & \dots & U_{rj_r} U_{1j_r} d_{j_r} \\ U_{1j_1} U_{2j_1} d_{j_1} & U_{2j_2} U_{2j_2} d_{j_2} & \dots & U_{rj_r} U_{2j_r} d_{j_r} \\ \dots & & & \\ U_{1j_1} U_{rj_1} d_{j_1} & U_{2j_2} U_{rj_2} d_{j_2} & \dots & U_{rj_r} U_{rj_r} d_{j_r} \end{vmatrix}$$

La sommation est étendue à tous les arrangements avec répétition de r nombres $j_1, j_2, \dots, j_r$ pris parmi $1, 2, \dots, p$. On peut réduire de manière évidente cette sommation à tous les arrangements sans répétition de r nombres $j_1, j_2, \dots, j_r$ pris parmi $1, 2, \dots, p$. D'où :

$$D = \sum_{\substack{((j_1, j_2, \dots, j_r)) \\ \text{arrangement} \\ \text{sans répétition}}} (d_{j_1} d_{j_2} \dots d_{j_r})(U_{1j_1} U_{2j_2} \dots U_{rj_r}) D_{j_1 j_2 \dots j_r}(U_1, U_2, \dots, U_r)$$

soit

$$D = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_r)} (d_{j_1} d_{j_2} \dots d_{j_r}) \sum_{\substack{((h_1, h_2, \dots, h_r)) \\ \text{permutation} \\ \text{des r nombres} \\ j_1, j_2, \dots, j_r}} (U_{1h_1} U_{2h_2} \dots U_{rh_r}) D_{h_1 h_2 \dots h_r}(U_1, U_2, \dots, U_r).$$

Mais $D_{h_1 h_2 \dots h_r}(U_1, U_2, \dots, U_r) = \epsilon^{h_1 h_2 \dots h_r}_{j_1 j_2 \dots j_r} D_{j_1 j_2 \dots j_r}(U_1, U_2, \dots, U_r)$ avec $\epsilon^{h_1 h_2 \dots h_r}_{j_1 j_2 \dots j_r}$ égal à $+1$ ou à -1 suivant que la permutation $h_1, h_2 \dots h_r$ a la même signature que $j_1 j_2 \dots j_r$ ou est de signature contraire. D'où :

$$D = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_r)} (d_{j_1} d_{j_2} \dots d_{j_r}) D_{j_1 j_2 \dots j_r}(U_1, U_2, \dots, U_r).$$
$$\left(\sum_{\substack{((h_1, h_2, \dots, h_r)) \\ \text{permutation} \\ \text{des r nombres} \\ j_1, j_2, \dots, j_r}} \epsilon^{h_1 h_2 \dots h_r}_{j_1 j_2 \dots j_r} U_{1h_1} U_{2h_2} \dots U_{rh_r} \right).$$

On reconnaît dans la parenthèse la décomposition du déterminant d'ordre r $D_{j_1 j_2 \dots j_r}(U_1, U_2, \dots, U_r)$. La formule (3) est donc établie.

<u>Démonstration du théorème</u>. On appelle $\mathbb{Z}$ la matrice du système (1) et on considère la matrice transposée $\mathbb{Z}^T$:

$$\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} c_1 V_{11} & c_2 V_{12} & \dots & c_p V_{1p} \\ - - - & - - - & & \\ c_1 V_{q1} & c_2 V_{q2} & \dots & c_p V_{qp} \\ \frac{1}{c_1} W_{q+1\,1} & \frac{1}{c_2} W_{q+1\,2} & \dots & \frac{1}{c_p} W_{q+1\;p} \\ - - - & - - - & & \\ \frac{1}{c_1} W_{p1} & \frac{1}{c_2} W_{p\,2} & \dots & \frac{1}{c_p} W_{p\,p} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}^T = \begin{pmatrix} c_1 V_{11} & \dots & c_1 V_{p1} & \frac{1}{c_1} W_{p+1\,1} & \dots & \frac{1}{c_1} W_{p1} \\ c_2 V_{12} & \dots & c_2 V_{q2} & \frac{1}{c_2} W_{q+1\,2} & \dots & \frac{1}{c_2} W_{p2} \\ c_3 V_{13} & \dots & c_3 V_{q3} & \frac{1}{c_3} W_{q+1\,3} & \dots & \frac{1}{c_3} W_{p3} \\ - - & - & - - - & & & \\ c_p V_{1p} & & c_p V_{q\,p} & \frac{1}{c_p} W_{q+1} & \dots & \frac{1}{c_p} W_{p\;p} \end{pmatrix}$$

On calcule le produit $\mathbb{Z}\,\mathbb{Z}^T$; cette matrice produit à la forme

$$\mathbb{Z}\,\mathbb{Z}^T = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_q & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_{p-q} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{Z}_q$ et $\mathbb{Z}_{p-q}$ sont des matrices d'ordre q et p - q, symétriques, dont les éléments de la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne sont respectivement

$$\sum_i c_i^2 \; V_{\alpha i} V_{\beta i} \qquad \text{et} \qquad \sum_i \frac{1}{c_i^2} W_{\alpha i} \; W_{\beta i} \, .$$

Les déterminants de ces matrices sont donnés dans le lemme. Comme

$$\text{dét}(\mathbb{Z}\,\mathbb{Z}^T) = (\text{dét}\,\mathbb{Z}_q)(\text{dét}\,\mathbb{Z}_{p-q})$$

la formule (2) est établie.

APPENDICE II

Sur la résolution d'un système de p équations à p inconnues

Théorème 1.

Soient $A_1, \dots, A_q, B_{q+1}, \dots, B_p$ p vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^p$ tels que les sous espaces engendrés par $A_1, \dots, A_q$ d'une part et $B_{q+1}, \dots, B_p$ d'autre part soient orthogonaux, les ièmes composantes de A_α et B_β étant notées a_i^α et b_i^β. On considère le système de p équations pour les p inconnues $x_1, \dots, x_p$ suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} a_1^1 \; x_1 + a_2^1 \; x_2 + \dots + a_p^1 \; x_p = c_1 \\ - - - - - - \\ a_1^q \; x_1 + a_2^q \; x_2 + \dots + a_p^q \; x_p = c_q \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} b_1^{q+1} \operatorname{Log} x_1 + b_2^{q+1} \operatorname{Log} x_2 + \dots + b_p^{q+1} \operatorname{Log} x_p = d_{q+1} \\ - - - - - - - \\ b_1^p \operatorname{Log} x_1 + b_2^p \operatorname{Log} x_2 + \dots + b_p^p \operatorname{Log} x_p = d_p \end{cases}$$

Si le système (1) des q premières équations admet une solution strictement positive (c'est à dire $x_i > 0$ pour $i = 1,\dots,p$) alors le système complet (1)(2) admet une solution et une seule strictement positive.

De plus cette solution est une fonction continue et indéfiniment dérivable des paramètres $c_1, \dots, c_q, d_{q+1}, \dots, d_p$.

Les cas $q = 0$ et $q = p$ sont triviaux; on suppose désormais $0 < q < p$

$\mathbb{R}_+^p$ désigne le domaine $x_i \geqslant 0$ pour $i = 1, 2, \dots, p$.

1 - Etude des variétés linéaires affines qui rencontrent $\mathbb{R}_+^p$.

Proposition 1. Un hyperplan H d'équation

$$H \equiv a_1 x_1 + \dots + a_p x_p - c = 0$$

rencontre $\mathbb{R}_+^p$ si, ou bien, les $a_1, \dots, a_p$ ne sont pas tous de même signe, ou bien, si les $a_1, \dots, a_p$ sont tous de même signe (au sens large), alors c a ce signe.

Dans ce dernier cas, si $c = 0$ l'hyperplan H ne contient que des points de la frontière de $\mathbb{R}_+^p$.

a) Supposons les $a_1, \ldots, a_p$ non tous de même signe. Il existe deux coefficients l'un strictement positif, l'autre strictement négatif, par exemple $a_1 > 0$ et $a_2 < 0$. Soient $x_3, \ldots, x_p$ positifs, il est toujours possible de choisir x_2 positif tel que $c - (a_3x_3 + \ldots + a_px_p) - a_2x_2$ soit positif. Ensuite il existe x_1 positif tel que $a_1x_1 = c - (a_3x_3 + \ldots + a_p x_p) - a_2x_2$. Dans ce cas H rencontre donc $\mathbb{R}_+^p$.

b) Supposons les $a_1, \ldots, a_p$ tous positifs ou nuls mais non tous nuls. Quand $(x_1, \ldots, x_p)$ décrit $\mathbb{R}_+^p$, $a_1x_1 + \ldots + a_px_p$ demeure positif et prend toute valeur entre 0 et $+\infty$. Donc :

si $c < 0$ il n'y a aucun point de H dans $\mathbb{R}_+^p$

si $c = 0$ il n'y a que des points frontières de $\mathbb{R}_+^p$ dans H c'est à dire des points tels que certains x_i soient nuls.

si $c > 0$ H contient des points intérieurs à $\mathbb{R}_+^p$ c'est à dire des points tels que tous les x_i soient strictement positifs.

Proposition 2. Soient r hyperplans $H_1, \ldots, H_r$ $(r \leqslant p)$ et soit Γ la variété linéaire affine de dimension $p - r$ définie par $\Gamma = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_r$.

Si Γ rencontre $\mathbb{R}_+^p$ alors tout hyperplan H du faisceau défini par les hyperplans $H_1, \ldots, H_r$, $H = k_1H_1 + \ldots + k_rH_r$, rencontre $\mathbb{R}_+^p$.

Cette proposition est évidente car tout hyperplan H du faisceau contient Γ.

On pose $H_i = a_1^i x_1 + \ldots + a_p^i x_p - c_i$, $i = 1, \ldots, r$ et on suppose les r vecteurs $A_i = (a_1^i, \ldots, a_p^i)$, $i = 1, \ldots, r$, linéairement indépendants. L'équation de l'hyperplan H est :

$$(k_1 a_1^1 + \ldots + k_r a_1^r)\, x_1 + \ldots + (k_1 a_p^1 + \ldots + k_p a_p^r) x_p - (k_1 c_1 + \ldots + k_r c_r) = 0 .$$

Utilisant la proposition 1 on a le résultat suivant :

Corollaire : si la variété linéaire affine Γ rencontre $\mathbb{R}_+^p$ et s'il existe r nombres tels que les p combinaisons :

$(k_1 a_1^1 + \dots + k_r a_1^r)$, ... , $(k_1 a_p^1 + \dots + k_r a_p^r)$ soient de même signe au sens large, alors $(k_1 c_1 + \dots + k_r c_r)$ a ce signe. Si de plus Γ contient des points intérieurs à $\mathbb{R}_+^p$ alors $k_1 c_1 + \dots + k_r c_r$ a ce signe strictement (car les p combinaisons définies ci-dessus ne sont pas toutes nulles).

Proposition 3. Si la variété $\Gamma = H_1 \cap \dots \cap H_r$ rencontre $\mathbb{R}_+^p$, toute sur-variété obtenue en prenant l'intersection d'un certain nombre des hyperplans $H_1, \dots, H_r$ contient Γ et par suite rencontre $\mathbb{R}_+^p$.
Cette proposition est évidente mais utile dans la suite.

2 - Transformation du problème.

Le système (2) de $p-q$ équations pour les p inconnues $\operatorname{Log} x_i$ est de rang $p-q$. $\operatorname{Log} \lambda_i$, $i = 1, \dots, r$ en étant une solution particulière, la solution générale de (2) s'écrit :

$$\operatorname{Log} x_i = \mu_1 a_i^1 + \dots + \mu_q a_i^q + \operatorname{Log} \lambda_i$$

car A_α est orthogonal à B_β pour tout $\alpha = 1, 2, \dots, q$ et tout $\beta = q+1, \dots, p$.

Les μ_i, $i = 1, \dots, q$ sont des paramètres variant de $-\infty$ à $+\infty$.

$$x_i = \lambda_i \, e^{\mu_1 a_i^1 + \dots + \mu_q a_i^q} .$$

Posons $\xi_j = e^{\mu_j}$, $j = 1, \dots, q$, $\xi_j \in]0, \infty[$, d'où :

$$x_i = \lambda_i \, \xi_1^{a_i^1} \xi_2^{a_i^2} \dots \xi_q^{a_i^q} \qquad i = 1, 2, \dots, p.$$

Démontrer le théorème 1 revient à démontrer le théorème 2 ou le théorème 3 suivants.

Théorème 2

Soient $A_1, \dots, A_q$, $(0 < q < p)$ q vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^p$, A_α ayant pour composantes a_i^α, $i = 1, \dots, p$. Soit la variété linéaire affine Γ de dimension $p-q$ définie par $\Gamma = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_q$:

$$\Gamma \begin{cases} H_1 \equiv a_1^1 x_1 + \dots + a_p^1 x_p - c_1 = 0 \\ - - - - - - - \\ H_q \equiv a_1^q x_1 + \dots + a_p^q x_p - c_q = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathcal{T}$ la variété de dimension q définie paramètriquement par les équations :

$$x_1 = \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q}, \dots , x_p = \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} ,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des nombres strictement positifs et où les paramètres $\xi_1, \dots, \xi_q$ varient de 0 à $+\infty$.

Alors si Γ rencontre l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$, Γ et $\mathcal{T}$ ont un point d'intersection à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ et un seul.

De plus les coordonnées de ce point d'intersection sont des fonctions continues et indéfiniment dérivables des paramètres $c_1, \dots, c_q$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Théorème 3

Si Γ rencontre l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont strictement positifs, le système de q équations à q inconnues $\xi_1, \dots, \xi_q$ positives :

$$(3) \quad \begin{cases} a_1^1 \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^1 \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_1 = 0 \\ - - - - - - - - \\ a_1 \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^q \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_q = 0 \end{cases}$$

a une solution et une seule. De plus cette solution est fonction continue et indéfiniment dérivable des paramètres $c_1, \dots, c_q$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

On peut toujours supposer que chaque vecteur A_α, $\alpha = 1, \dots, q$ a au moins une composante strictement positive quitte à changer A_α en $-A_\alpha$ et c_α en $-c_\alpha$.

3 - Démonstration de l'unicité.

Supposons qu'il existe deux solutions $\xi_1, \dots, \xi_q$ et $\xi_1', \dots, \xi_q'$ du système (3). Comme tous les ξ sont positifs, il existe q nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ tels que

$$\xi_1' = \xi_1 e^{\alpha_1}, \dots , \xi_q' = \xi_q e^{\alpha_q}$$

On a donc simultanément

$$\begin{cases} a_1^i \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^i \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_i = 0 \\ a_1^i \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} e^{\alpha_1 a_1^1 + \dots + \alpha_q a_1^q} + \dots + a_p^i \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} e^{\alpha_1 a_p^1 + \dots + \alpha_q a_p^q} - c_i = 0 \\ i = 1, 2, \dots , q. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} a_1^i \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} (e^{\alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_q a_1^q} - 1) + \ldots + a_p^i \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} (e^{\alpha_1 a_p^1 + \ldots + \alpha_q a_p^q} - 1) = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, q \ . \end{cases}$$

On multiplie la $i^{\text{ème}}$ équation obtenue par α_i et on somme pour $i = 1, \ldots, q$:

$$\lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} (\alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_q a_1^q)(e^{\alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_q a_1^q} - 1) + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} (\alpha_1 a_p^1 + \ldots + \alpha_q a_p^q)(e^{\alpha_1 a_p^1 + \ldots + \alpha_q a_p^q} - 1) = 0$$

or $x(e^x - 1)$ est positif ou nul pour tout x, la nullité n'ayant lieu que pour $x = 0$. Par ailleurs les coefficients $\lambda_i \xi_1^{a_i^1} \ldots \xi_q^{a_i^q}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ sont strictement positifs. La somme ci-dessus ne peut donc être nulle que si chacun de ses termes est nul, d'où :

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_q a_1^q = 0 \\ \alpha_1 a_p^1 + \ldots + \alpha_q a_p^q = 0 \ . \end{cases}$$

Les vecteurs $A_1, \ldots, A_q$ sont linéairement indépendants donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0$. D'où $\xi_i = \xi'_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, et l'unicité est démontrée.

4 - Démonstration de l'existence

On procède par récurrence sur la dimension q de $\mathcal{C}$. Dans le cas $q = 1$ le théorème 2 prend la forme particulière suivante

Proposition 4

Supposons que l'hyperplan H d'équation

$$H \equiv a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p - c = 0$$

rencontre l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équations paramètriques en fonction du paramètre ξ positif :

$$x_1 = \lambda_1 \xi^{a_1}, \ \ldots \ , x_p = \lambda_p \xi^{a_p}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des nombres strictement positifs.

Alors H et $\mathcal{T}$ se coupent en un point qui appartient à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$, puisque $\mathcal{T}$ y est toute entière. Ce point est unique. Ses coordonnées sont des fonctions continues et indéfiniment dérivables des paramètres c, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

L'unicité de la solution est acquise d'après le paragraphe précédent et la régularité de cette solution par rapport aux paramètres c, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sera démontrée dans le paragraphe 5 suivant.

Pour l'existence il suffit de démontrer que l'équation

$$H(\xi) \equiv a_1 \lambda_1 \xi^{a_1} + \ldots + a_p \lambda_p \xi^{a_p} - c = 0$$

possède au moins une racine en ξ positive. La fonction $H(\xi)$ étant continue sur $]0, \infty[$, il suffit de démontrer que $\lim\limits_{\xi \to 0^+} H(\xi)$ et $\lim\limits_{\xi \to +\infty} H(\xi)$ sont de signes contraires.

Si tous les a_j sont positifs ou nuls alors c est strictement positif d'après la proposition 1 et l'hypothèse formulée dans la proposition 4. Pour $a_j = 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j} = 0$ et pour $a_j > 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j}$ tend vers 0 quand ξ tend vers 0, et tend vers $+\infty$ quand ξ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{\xi \to 0^+} H(\xi) = -c < 0 \quad , \qquad \lim_{\xi \to +\infty} H(\xi) = +\infty \ .$$

Si les a_j ne sont pas tous de même signe, il existe des coefficients a_j positifs et d'autres négatifs. Pour $a_j = 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j}$ est nul; pour $a_j > 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j}$ tend vers 0 quand ξ tend vers 0 et tend vers $+\infty$ quand ξ tend vers $+\infty$; pour $a_j < 0$, $\lambda_j a_j \xi^{a_j}$ tend vers $-\infty$ quand ξ tend vers 0 et tend vers 0 quand ξ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{\xi \to 0^+} H(\xi) = -\infty \qquad \lim_{\xi \to +\infty} H(\xi) = +\infty \ .$$

La proposition est par suite démontrée.

Supposons le théorème 2 ou 3 établi jusqu'à la dimension q. Il s'agit de démontrer que le système Γ :

$$\Gamma' \begin{cases} H_1(\xi_1, \dots, \xi_q) \equiv a_1^1\lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^1\lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_1 = 0 \\ H_2(\xi_1, \dots, \xi_q) \equiv a_1^2\lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^2\lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_2 = 0 \\ - - - - - - \\ H_q(\xi_1, \dots, \xi_q) \equiv a_1^q\lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \dots \xi_q^{a_1^q} + \dots + a_p^q\lambda_p \xi_1^{a_p^1} \dots \xi_q^{a_p^q} - c_q = 0 \end{cases}$$

possède au moins une solution.

Supposons $\xi_1 \in]0, \infty[$ fixé arbitrairement et considérons le système Γ' constitué par les équations $H_2, \dots, H_q$.
La variété linéaire $\Gamma' = H_2 \cap \dots \cap H_q$ est une sur-variété de Γ de dimension $p - q + 1$, et qui rencontre $\mathbb{R}_+^p$ d'après la proposition 3. Considérons alors la variété $\mathcal{T}'(\xi_1)$ de dimension $q - 1$ dont les équations paramétriques en fonction de $\xi_2, \dots, \xi_q$ s'écrivent :

$$x_1 = (\lambda_1 \xi_1^{a_1^1})\, \xi_2^{a_1^2} \dots \xi_q^{a_1^q}, \dots, x_p = (\lambda_p \xi_1^{a_p^1})\, \xi_2^{a_p^2} \dots \xi_q^{a_p^q} .$$

Les coefficients $\lambda_1' \equiv \lambda_1 \xi_1^{a_1^1}, \dots, \lambda_p' = \lambda_p \xi_1^{a_p^1}$ sont strictement positifs. D'après l'hypothèse de récurrence, Γ' et $\mathcal{T}'(\xi_1)$ ont un point commun et un seul dans l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ et ceci pour toute valeur de ξ_1. Autrement dit le système Γ' pour ξ_1 fixé a une solution unique en $\xi_2, \dots, \xi_q$. D'après l'hypothèse de récurrence cette solution est une fonction continue et indéfiniment dérivable de $\lambda_1', \dots, \lambda_p'$ donc de ξ_1.

Lorsqu'on remplace dans $H_1(\xi_1, \dots, \xi_q)$ $\xi_2, \dots, \xi_q$ par les fonctions de ξ_1 définies précédemment, H_1 devient une fonction de ξ_1 seul, définie et continue pour $\xi_1 \in]0, \infty[$. Pour démontrer l'existence d'une solution du système Γ il reste à présent à démontrer pour l'équation $H_1(\xi_1) = 0$ l'existence d'une solution sur la demi-droite $\xi_1 > 0$. Il suffit pour cela de prouver que $\lim_{\xi_1 \to 0^+} H_1(\xi_1)$ et $\lim_{\xi_1 \to +\infty} H_1(\xi_1)$ sont de signes contraires.

Lorsque $\xi_1 \longrightarrow 0^+$ ou $\xi_1 \longrightarrow +\infty$ chacune des fonctions $\xi_2(\xi_1), \dots, \xi_q(\xi_1)$ définies par le système Γ' est de l'ordre d'une puissance, positive, négative ou nulle, de ξ_1. Autrement dit pour $\xi_1 \longrightarrow 0^+$ ou $\xi_1 \longrightarrow +\infty$ on a

$$\xi_2 \sim K_2\, \xi_1^{\alpha_2}, \dots ; \xi_q \sim K_q\, \xi_1^{\alpha_q}$$

les facteurs $K_2, \dots, K_q$ n'étant pas les mêmes pour les deux limites mais étant strictement positifs dans les deux cas.

On considère la fonction $S(\xi_1)$ suivante :

$$S(\xi_1) = H_1(\xi_1) + \alpha_2 H_2(\xi_1) + \ldots + \alpha_q H_q(\xi_1)$$

où $H_i(\xi_1)$, $i = 1,\ldots, q$ est la valeur de $H_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ quand on remplace $\xi_2, \ldots, \xi_q$ par la solution de Γ'.

En fait $H_i(\xi_1) \equiv 0$ pour $i = 2,\ldots,q$ et $S(\xi_1)$ est identique à $H_1(\xi_1)$.

$$S(\xi_1) = \lambda_1 (a_1^1 + \alpha_2 a_1^2 + \ldots + \alpha_q a_1^q)\, \xi_1^{a_1^1} \xi_2^{a_1^2} \ldots \xi_q^{a_1^q} + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_p (a_p^1 + \alpha_2 a_p^2 + \ldots + \alpha_q a_p^q)\, \xi_1^{a_p^1} \xi_2^{a_p^2} \ldots \xi_q^{a_p^q}$$

$$- (c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q).$$

Comme la variété linéaire Γ rencontre l'intérieur de $\mathbb{R}_+^p$ on a : ou bien les combinaisons $(a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q)$ $j = 1, 2, \ldots, p$, (qui ne peuvent être toutes nulles) ne sont pas toutes de même signe, ou bien elles sont toutes de même signe auquel cas $c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q$ a ce signe strictement d'après le corollaire de la proposition 2.

<u>1^er cas</u> $\xi_1 \longrightarrow 0^+$. Pour $a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q \neq 0$

$$\lambda_j (a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q)\, \xi_1^{a_j^1} \xi_2^{a_j^2} \ldots \xi_q^{a_j^q} \sim \lambda_j K_2^{a_j^2} \ldots K_q^{a_j^q} (a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q)$$
$$\xi_1^{a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q}.$$

Ce terme tend donc vers 0 ou $-\infty$ suivant que $a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q$ est positif ou négatif.

Si les combinaisons $a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q$, $j = 1, 2, \ldots, p$ sont toutes positives ou nulles $S(\xi_1)$ tend vers $-(c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q) < 0$; si elles sont toutes négatives ou nulles $S(\xi_1)$ tend vers $-\infty$; et si les combinaisons ne sont pas toutes de même signe $S(\xi_1)$ tend vers $-\infty$.

<u>2^ème cas</u> $\xi_1 \longrightarrow +\infty$. On raisonne de même. Si les combinaisons $a_j^1 + \alpha_2 a_j^2 + \ldots + \alpha_q a_j^q$, $j = 1, 2, \ldots, p$ sont toutes positives ou nulles $S(\xi_1)$ tend vers $+\infty$; si elles sont toutes négatives ou nulles $S(\xi_1)$ tend vers $-(c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_q c_q) > 0$; et si elles ne sont pas toutes de même signe $S(\xi_1)$ tend vers $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{\xi_1 \to 0^+} H_1(\xi_1) < 0$ et $\lim\limits_{\xi_1 \to +\infty} H_1(\xi_1) > 0$. La démonstration est achevée.

5 - Régularité de la solution du système Γ par rapport aux paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $c_1, \ldots, c_q$.

Considérons le système (3) et notons par $H_1, \ldots, H_q$ les premiers membres des équations.

Proposition 5. En tout point $\xi_1, \ldots, \xi_q$ ($\xi_j > 0$ pour $j = 1, \ldots, q$) on a

$$\frac{D(H_1, \ldots, H_q)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_q)} \neq 0$$

On a $$\frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} = a_1^i a_1^j \lambda_1 \frac{\xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q}}{\xi_j} + \ldots + a_p^i a_p^j \lambda_p \frac{\xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q}}{\xi_j}$$

$$\xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} = a_1^i a_1^j \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} + \ldots + a_p^i a_p^j \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q}$$

or :

$$\xi_1 \ldots \xi_q \frac{D(H_1, \ldots, H_q)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_q)} = \xi_1 \ldots \xi_q \ \text{dét}\left(\frac{\partial H_i}{\partial \xi_j}\right) = \text{dét}\left(\xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j}\right).$$

Comme les ξ_j sont strictement positifs il est équivalent de démontrer que ce dernier déterminant est non nul.

Or la matrice $\left\| \xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} \right\|$ est symétrique et la forme quadratique associée s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} u_i u_j$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \left\{ \lambda_1 \xi_1^{a_1^1} \ldots \xi_q^{a_1^q} a_1^i a_1^j u_i u_j + \ldots + \lambda_p \xi_1^{a_p^1} \ldots \xi_q^{a_p^q} a_p^i a_p^j u_i u_j \right\}$$

Mais $$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} a_1^i a_1^j u_i u_j = \left(\sum_{i=1}^{q} a_1^i u_i\right)^2 \geqslant 0 .$$

Les p quantités $\sum_{i=1}^{q} a_1^i u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{q} a_p^i u_i$ ne peuvent être toutes nulles que pour $u_1 = \ldots = u_p = 0$ car les vecteurs $A_1, \ldots, A_q$ sont linéairement indépendants.

Comme par ailleurs on a $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, p$, et $\xi_i > 0$, $i = 1, \ldots, q$, il en résulte que la matrice $\left\| \xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j} \right\|$ est symétrique définie positive. Donc dét $\left(\xi_j \frac{\partial H_i}{\partial \xi_j}\right) \neq 0$.

Conséquence. Il résulte des théorèmes sur les fonctions implicites [13] que la solution $\xi_1, \ldots, \xi_q$ du système (3) est une fonction continue et indéfiniment dérivable des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $c_1, \ldots, c_q$.

APPENDICE III

Sur la résolution du système d'équations

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_q, \xi) = F_i(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_q^o, \xi) \qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

$x_1, x_2, \ldots, x_q$ sont les inconnues, ξ est un paramètre.

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions de variables réelles à valeurs réelles.

Théorème 1.

Soit un système de q équations dépendant de n paramètres $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ où les inconnues sont $X = (x_1, \ldots, x_q)$:

(1) $$f_i(X, Z) = 0 \qquad i = 1, \ldots, q$$

tel que $f_i(0, Z) = 0$. Les $f_i(X,Z)$ sont indéfiniment dérivables au voisinage du point $(0, Z_0)$. Soient les jacobiens :

$$\mathcal{J} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_q)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_q)} \quad , \quad \mathcal{J}_1 = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{q-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{q-1})}$$

On note par Δ_i^j le cofacteur de f_{i,x_j} dans le déterminant $\mathcal{J}$. Si

$\mathcal{J}(0, Z_0) = 0$

$\mathcal{J}(0, Z) \neq 0$ pour tout Z voisin de Z_0 et $Z \neq Z_0$

$\mathcal{J}_1(0, Z_0) \neq 0$

$\Delta_q^k \, \Delta_q^l \, \Delta_i^q \, f_{i,x_k x_l} \neq 0$ au point $X = 0$, $Z = Z_0$ (on utilise la convention de l'indice muet).

Alors il existe une et une seule solution de (1) non identiquement nulle, fonction de Z, s'annulant pour $Z = Z_0$ et indéfiniment dérivable par rapport à Z dans un voisinage de Z_0 : $x_i = X_i(Z)$, $X_i(Z_0) = 0$.

Dans le cas $q = 1$ on a une seule équation : $f(x,Z) = 0$. La fonction $f(x,Z)$ vérifie $f(0,Z) = 0$ avec tout Z_o, $f'_x(0,Z_o) = 0$, $f'_x(0,Z) \neq 0$ pour tout Z voisin de Z_o et $Z \neq Z_o$, et $f''_{x^2}(0,Z_o) \neq 0$. On peut écrire $f(x,Z) = x\,h(x,Z)$ et on vérifie que $h'_x(0,Z_o) \neq 0$. Le théorème s'en déduit.

Les $q-1$ premières équations pour les $q-1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}$ dépendent de $n+1$ paramètres (x_q, Z). Comme $f_i(0, Z_0) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, q-1$ et comme $\mathcal{J}_1(0, Z_0) \neq 0$ l'application des théorèmes sur les fonctions implicites [13] permet d'affirmer que ce système de $q-1$ équations admet une solution et une seule définie et indéfiniment dérivable dans un voisinage de $x_q = 0$ et $Z = Z_0$. Cette solution

(2) $$x_j = h_j(x_q, Z) \qquad j = 1, 2, \ldots, q-1$$

est telle que $0 = h_j(0, Z_0)$.

$h_j(0, Z)$ est nulle pour tout Z voisin de Z_0. En effet par définition des $h_j(x_q, Z)$ on a $f_j(h_1(0, Z), h_2(0, Z), \ldots, h_{q-1}(0, Z), 0, Z) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$. Mais on a aussi par hypothèse $f_j(0, Z) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$. La solution des $q-1$ équations envisagées ci-dessus est unique donc $h_j(0, Z) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$.

Portons les expressions (2) dans la $q^{\text{ième}}$ équation du système (1) :

(3) $$f_q(h_1(x_q, Z), \ldots, h_{q-1}(x_q, Z), x_q, Z) = 0 .$$

Cette équation admet $x_q = 0$ comme solution puisque $h_j(0, Z) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$ et $f_q(0, Z) = 0$. Mais la solution de (3) qui nous intéresse est la solution $x_q \neq 0$ voisine de 0 dont nous allons démontrer l'existence.

Appelons $F(x_q, Z)$ le premier membre de (3). $F(x_q, Z)$ est indéfiniment dérivable par rapport à x_q et à Z dans un voisinage de $x_q = 0$, $Z = Z_0$. Calculons $F_{,x_q}$ et $F_{,x_q x_q}$. La convention de l'indice muet est employée uniquement lorsque les indices varient de 1 à q

$$F_{,x_q} = \sum_{k=1}^{q-1} f_{q,x_k} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} + f_{q,x_q} \quad .$$

Les $\dfrac{\partial h_k}{\partial x_q}$ se calculent en dérivant par rapport à x_q les $q-1$ premières équations du système (1) lorsqu'on y remplace x_j par $h_j(x_q, Z)$ pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$:

$$\sum_{k=1}^{q-1} f_{i,x_k} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} + f_{i,x_q} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, q-1.$$

(4) d'où $$\frac{\partial h_k}{\partial x_q} = \Delta_q^k \, (\Delta_q^q)^{-1} \quad .$$

(5) Donc $$F_{,x_q} = \mathcal{J}\,\mathcal{J}_1^{-1}$$

Pour des raisons de continuité $\mathcal{J}_1$ est non nul dans un voisinage de $x_q = 0$, $Z = Z_0$. De même :

$$F_{,x_q x_q} = \sum_{k=1}^{q-1}\sum_{l=1}^{q-1} f_{q,x_k x_l}\frac{\partial h_k}{\partial x_q}\frac{\partial h_l}{\partial x_q} + \sum_{k=1}^{q-1} f_{q,x_k}\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2} + 2\sum_{k=1}^{q-1} f_{q,x_k x_q}\frac{\partial h_k}{\partial x_q} + f_{q,x_q x_q}$$

on utilise (4)

(6) $$F_{,x_q x_q} = (\Delta_q^q\,\Delta_q^q)^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{q-1} f_{q,x_k}\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}\Delta_q^q\,\Delta_q^q + \Delta_q^k\,\Delta_q^l\,f_{q,x_k x_l}\right\}.$$

Pour avoir les $\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}$ on dérive deux fois les $q-1$ premières équations de (1) :

$$\sum_{k=1}^{q-1} f_{i,x_k}\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2} + \sum_{k=1}^{q-1}\sum_{l=1}^{q-1} f_{i,x_k x_l}\frac{\partial h_k}{\partial x_q}\frac{\partial h_l}{\partial x_q} + 2\sum_{k=1}^{q-1} f_{i,x_k x_q}\frac{\partial h_k}{\partial x_q} + f_{i,x_q x_q} = 0$$

d'où

(7) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} f_{i,x_k}\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}\,\Delta_q^q\,\Delta_q^q + \Delta_q^k\,\Delta_q^l\,f_{i,x_k x_l} = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, q-1 \end{array}\right.$$

Les $q-1$ équations (7) donnent les $\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}$, $k = 1, 2, \ldots, q-1$. En portant ces valeurs dans (6) on trouve $F_{,x_q x_q}$. Mais on peut dire aussi que (6) et (7) constituent un système de q équations pour les $q-1$ inconnues $\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_q^2}$; $F_{,x_q x_q}$ est alors donné par la condition de compatibilité suivante :

$$\begin{vmatrix} f_{1,x_1} & f_{1,x_2} & \cdots & \Delta_q^k\,\Delta_q^l\,f_{1,x_k x_l} \\ - - - & - - - & - - - & \\ f_{q-1,x_1} & f_{q-1,x_2} & \cdots & \Delta_q^k\,\Delta_q^l\,f_{q-1,x_k x_l} \\ f_{q,x_1} & f_{q,x_2} & \cdots & \Delta_q^k\,\Delta_q^l\,f_{q,x_k x_l} - \Delta_q^q\,\Delta_q^q\,F_{,x_q x_q} \end{vmatrix} = 0 .$$

En développant par rapport à la dernière colonne il vient :

(8) $$F_{,x_q x_q} = (\Delta_q^q)^{-3}\,\Delta_i^q\,\Delta_q^k\,\Delta_q^l\,f_{i,x_k x_l}$$

Revenons à la résolution de l'équation (3). Pour $x_q = 0$ et $Z = Z_0$ on a $h_j(0, Z_0) = 0$ $j = 1, 2, \dots, q-1$ et d'après les hypothèses :

$$F(0, Z_0) = 0 \;, \qquad F_{,x_q}(0, Z_0) = 0 \;, \qquad F_{,x_q x_q}(0, Z_0) \neq 0 \;.$$

Nous avons utilisé les formules (5) et (8). $x_q = 0$ est une solution "double" mais non "triple" de $F(x_q, Z_0) = 0$. On peut écrire :

$$(9) \qquad F(x_q, Z_0) = \frac{1}{2} x_q^2 \left\{ F_{,x_q x_q}(0, Z_0) + \frac{x_q}{3} F_{,x_q x_q x_q}(\theta x_q, Z_0) \right\}, \; \theta \in]0, 1[\;.$$

Soit la fonction $G(x_q, Z)$ définie par $G(0, Z) = F_{,x_q}(0, Z)$ et $G(x_q, Z) = \dfrac{F(x_q, Z)}{x_q}$ pour $x_q \neq 0$. $G(x_q, Z)$ est définie et indéfiniment dérivable dans un voisinage de $x_q = 0$, $Z = Z_0$. On a $G(0, Z_0) = 0$ et $G_{,x_q}(0, Z_0) \neq 0$ d'après (9); l'équation $G(x_q, Z) = 0$ admet une solution et une seule définie et indéfiniment dérivable dans un voisinage de $Z = Z_0$. Cette solution $x_q = X_q(Z)$ est telle que $0 = X_q(Z_0)$.

En portant $x_q = X_q(Z)$ dans les expressions (2) on obtient une solution du système (1) :

$$(10) \qquad \begin{cases} x_j = X_j(Z) & 0 = X_j(Z_0) \\ j = 1, 2, \dots, q \end{cases}$$

Cette solution (10) n'est pas identiquement nulle au voisinage de $Z = Z_0$. En effet supposons $x_q = X_q(Z) = 0$ pour tout Z, alors $G(X_q(Z), Z) = 0 = G(0, Z)$ pour tout Z. Mais $G(0, Z) = F_{,x_q}(0, Z)$ est non nul pour Z voisin de Z_0 et $Z \neq Z_0$ d'après (5) et les hypothèses.

<u>Théorème 2</u>

Soit pour les inconnues $X = (x_1, \dots, x_q)$ un système de q équations dépendant de $q+1$ paramètres $Z = (z_1, \dots, z_q)$ et ξ de la forme

$$(11) \qquad \mathbf{F}_i(x_1, \dots, x_q, \xi) = F_i(z_1, \dots, z_q, \xi) \qquad i = 1, 2, \dots, q \;.$$

On suppose les fonctions F_i indéfiniment dérivables dans un voisinage de $X^0 = (x_1^0, \dots, x_q^0)$ et de ξ^0; on introduit les jacobiens

$$\mathcal{J} = \frac{D(F_1, \dots, F_q)}{D(x_1, \dots, x_q)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{J}_1 = \frac{D(F_1, \dots, F_{q-1})}{D(x_1, \dots, x_{q-1})}$$

Δ_i^j note le cofacteur de F_{i,x_j} dans le déterminant $\mathcal{J}$. On suppose :

$\mathcal{J}\,(X^o, \xi_o) = 0$

$\mathcal{J}\,(Z, \xi) \neq 0$ pour tout (Z, ξ) voisin de (X^o, ξ_o) et $(Z, \xi) \neq (X^o, \xi_o)$

$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi}(X^o, \xi_o) \neq 0$

$\mathcal{J}_1(X^o, \xi_o) \neq 0$

$\Delta_q^k\, \Delta_q^l\, \Delta_i^q\, F_{i\,,\,x_k\,x_l} \neq 0$ au point (X^o, ξ_o) (avec la convention de l'indice muet.

Alors pour (Z, ξ) voisin de (X^o, ξ_o) il existe une solution et une seule X de (11) non identique à Z, fonction de Z et de ξ, égale à X^o pour $(Z, \xi) = (X^o, \xi_o)$ et indéfiniment dérivable par rapport aux variables Z et ξ. Cette solution s'écrit $x_i = X_i(z_1, \dots, z_q, \xi)$, $i = 1, \dots, q$.

En appelant K le jacobien des q fonctions X_i par rapport aux q variables z_i on a

$$\lim_{\xi \to \xi_o} K(X^o, \xi) = -1 .$$

<u>Démonstration</u>

1 - Existence et unité de la solution.

On pose $x_i = y_i + z_i$ et $f_i\,(y_1, \dots, y_q, Z, \xi)$ $= F_i(y_1 + z_1, \dots, y_q + z_q, \xi) - F_i(z_1, \dots, z_q, \xi)$. Au voisinage du point $(Z, \xi) = (X^o, \xi_o)$ on peut appliquer le théorème 1 au système des q équations $f_i(y_1, \dots, y_q, \xi) = 0$ pour les q inconnues $y_1, \dots y_q$.

Pour ce système il existe donc une solution et une seule non identiquement nulle, indéfiniment dérivable par rapport à Z et ξ au voisinage de (X^o, ξ_o); cette solution $y_i = Y_i(z_1, \dots, z_q, \xi)$ est telle que $0 = Y_i(x_1^o, \dots, x_q^o, \xi_o)$. L'existence et l'unicité de la solution du système (11) comme décrite dans le théorème 2 en résultent en faisant le changement de notation.

Remplaçons dans (11) x_i par la solution trouvée ci-dessus $X_i(z_1, \dots, z_q, \xi)$ pour $i = 1, 2, \dots, q$, et différencions les relations obtenues par rapport à z_j :

$$F_{i\,,\,x_k}\,(X, \xi)\,\frac{\partial X_k(Z, \xi)}{\partial z_j} - F_{i,x_j}\,(Z, \xi) = 0$$

Faisons $Z = X^o$

$$F_{i\,,\,x_k}\,(X, \xi)\,\frac{\partial X_k(X^o, \xi)}{\partial z_j} - F_{i,x_j}\,(X^o, \xi) = 0$$

où X est mis pour $(X_1(X^o, \xi), \ldots, X_q(X^o, \xi))$. Au premier membre on reconnaît le produit de deux matrices d'où :

$$\frac{1}{K(X^o,\xi)} = \frac{\text{dét}\,|F_{i,x_j}(X,\xi)|}{\text{dét}\,|F_{i,x_j}(X^o,\xi)|}$$

On doit chercher la limite de K quand ξ tend vers ξ_0, et dans ce but on va faire un développement limité au voisinage de ξ_0.

On pose : $\xi - \xi_0 = \epsilon$

$$\alpha_j = \left[\frac{\partial X_j(X^o,\xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi = \xi_0}$$

$$\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\ \text{dét}\,|F_{i,x_k}(X^o,\xi)|\right]_{\xi = \xi_0}$$, α est non nul par hypothèse

D'où :

$$X_j(X^o,\xi) = x_j^o + \alpha_j\,\epsilon + o(\epsilon^2)$$

$$\text{dét}\,|F_{i,x_k}(X^o,\xi)| = 0 + \alpha\,\epsilon + o(\epsilon^2)$$

$$\text{dét}\,|F_{i,x_k}(X,\xi)| = 0 + \left\{\alpha + \alpha_j\left[\frac{\partial}{\partial X_j}\ \text{dét}\,|F_{i,x_k}(X,\xi)|\right]_{\substack{X = X^o \\ \xi = \xi^o}}\right\}\epsilon + o(\epsilon^2).$$

On utilise systèmatiquement la convention de l'indice muet.

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\ \text{dét}\,|F_{i,x_k}(X,\xi)| = F_{i,x_k x_j}(X,\xi).\Delta_i^k(X,\xi)$$

(12) $$\frac{1}{K(X^o,\xi)} = 1 + \frac{\alpha_j}{\alpha}\,F_{i,x_k x_j}(X^o,\xi_0)\,.\,\Delta_i^k(X^o,\xi_0) + o(\epsilon)\,.$$

Calcul des α_j en fonction de α.

On considère les q équations (11) définissant $X_j(X^o,\xi)$ $j = 1, 2,\ldots, q$:

(13) $$F_i(X,\xi) - F_i(X^o,\xi) = 0 \qquad i = 1, 2,\ldots, q\,.$$

Au voisinage de $\xi = \xi_0$ écrivons les développements limités à l'ordre 2 pour chacune de ces équations. Lorsque les arguments dans une fonction sont X^o, ξ_0, ceux-ci sont omis.

$$F_i(X^o, \xi) = F_i + \varepsilon \frac{\partial F_i}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi^2} + 0(\varepsilon^3)$$

$$F_i(X, \xi) = F_i + [X_j(X^o,\xi) - x_j^o]F_{i,x_j} + \varepsilon \frac{\partial F_i}{\partial \xi}$$
$$+ \frac{1}{2}\Big\{[X_j(X^o,\xi) - x_j^o][X_l(X^o,\xi) - x_l^o]F_{i,x_j x_l} + 2[X_j(X^o,\xi) - x_j^o]\ \varepsilon \frac{\partial F_{i,x_j}}{\partial \xi}$$
$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi^2}\Big\} + 0(\varepsilon^3)\,.$$

On pose $\beta_j = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_j}{\partial \xi^2}$ si bien que $X_j(X^o,\xi) = x_j^o + \alpha_j\varepsilon + \beta_j\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)$

Les q équations (13) donnent :

$$\begin{cases} (\alpha_j\ F_{i,x_j})\varepsilon + \Big\{\beta_j F_{i,x_j} + \alpha_j \frac{\partial F_{i,x_j}}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\alpha_j\ \alpha_l\ F_{i,x_j x_l}\Big\}\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) = 0 \\ i = 1, 2,\ldots, q \end{cases}$$

On déduit :

$$(14) \qquad \alpha_j\ F_{i,x_j} = 0 \qquad\qquad i = 1, 2,\ldots, q\,.$$

$$(15) \qquad \beta_j\ F_{i,x_j} = -\alpha_j \frac{\partial F_{i,x_j}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha_j\ \alpha_l\ F_{i,x_j x_l} \qquad i = 1, 2,\ldots, q\,.$$

Le système (14) qui est un système linéaire de q équations pour les q inconnues α_j ne détermine pas de manière unique les α_j car dét$\left|F_{i,x_j}\right|_q = 0$ par hypothèse. Ce système (14) est de rang $q-1$ car $\mathcal{J}_1 = \overset{q}{\Delta}_q \neq 0$ par hypothèse. Le système (15) est un système linéaire de q équations pour les q inconnues β_j de rang $q-1$; il n'a de solution que si une certaine condition de compatibilité est satisfaite.

Les équations (14) auxquelles on adjoint cette condition de compatibilité permettent de calculer les α_j . La condition de compatibilité pour (15) s'écrit, car $\overset{q}{\Delta}_q \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} F_{1,x_1} & \cdots & F_{1,x_{q-1}} & -\alpha_j \frac{\partial F_{1,x_j}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha_j\ \alpha_l\ F_{1,x_j x_l} \\ - - - & - - - & - - - & - - - - - - \\ F_{q-1,x_1} & \cdots & F_{q-1,x_{q-1}} & -\alpha_j \frac{\partial F_{q-1,x_j}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha_j\ \alpha_l\ F_{q-1,x_j x_l} \\ F_{q,x_1} & \cdots & F_{q,x_{q-1}} & -\alpha_j \frac{\partial F_{q,x_j}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\alpha_j\ \alpha_l\ F_{q,x_j x_l} \end{vmatrix} = 0$$

Soit :

(16) $$\alpha_j \frac{\partial F_{i,x_j}}{\partial \xi} \Delta_i^q + \frac{1}{2}\alpha_j \alpha_l F_{i,x_j x_l} \Delta_i^q = 0 .$$

Par ailleurs le système (14) permet d'exprimer tous les α_j en fonction de α_q :

(17) $$\alpha_j = \alpha_q \Delta_q^j (\Delta_q^q)^{-1} \qquad j = 1,2,\dots,q .$$

(18) $$\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \text{dét}\left|F_{i,x_j} (X^o,\xi)\right| \right]_{\xi = \xi_o} = \Delta_i^j \frac{\partial F_{i,x_j}}{\partial \xi}$$

(19) $$\Delta_q^q \Delta_i^j = \Delta_q^j \Delta_i^q .$$

On sait que $F_{l,x_j} \Delta_i^j = 0$ pour tout i et tout l ; ce résultat est classique pour $l \neq i$ et il est obtenu en développant $\text{dét}\left|F_{l,x_j}\right| = 0$ pour $l = i$. La résolution du système d'équations $F_{l,x_j} \Delta_i^j = 0$, $l = 1, 2, \dots q$ pour les q inconnus Δ_i^j , $j = 1, 2, \dots, q$ conduit à (19)

On porte (17),(18),(19) dans (16) d'où :

$$\alpha_q \alpha + \frac{1}{2} \alpha_q^2 (\Delta_q^q)^{-2} \Delta_q^j \Delta_q^l \Delta_i^q F_{i,x_j x_l} = 0 .$$

On élimine la solution $\alpha_q = 0$ qui donne $\alpha_j = 0$ pour tout j (ceci correspond à la solution triviale $X = X^o$ de (13)). Donc :

$$\alpha_q = -2\alpha \Delta_q^q \Delta_q^q \left\{\Delta_q^j \Delta_q^l \Delta_i^q F_{i,x_j x_l}\right\}^{-1}$$

La quantité dans le crochet est différente de 0 par hypothèse. En définitive d'après (17)

(20) $$\begin{cases} \alpha_j = -2\alpha \Delta_q^j \Delta_q^q \left\{\Delta_q^j \Delta_q^l \Delta_i^q F_{i,x_j x_l}\right\}^{-1} \\ j = 1, 2, \dots, q . \end{cases}$$

On porte (20) dans (12)

$$\frac{1}{K(X^o,\xi)} = 1 - \frac{2\alpha}{\alpha} \frac{\Delta_q^j \Delta_i^k \Delta_q^q F_{i,x_k x_j}}{\Delta_q^j \Delta_q^l \Delta_i^q F_{i,x_j x_l}} + o(\varepsilon) .$$

En utilisant à nouveau (19) on peut écrire $\frac{1}{K(X^o,\xi)} = 1 - 2 + o(\varepsilon)$

(21) $$\lim_{\xi \to \xi_o} K(X^o,\xi) = -1 .$$

Remarque

Les notations et les hypothèses sont celles du théorème 2. Considérons pour les q inconnus $(x_1, \dots, x_q)$ le système des q équations:

(22) $$\begin{cases} F_i(x_1, \dots, x_q, \xi) = F_i(x_1^o, \dots x_q^o, \xi) \\ i = 1, 2, \dots, q . \end{cases}$$

Posons $x_i = y_i + x_i^o$ et considérons le système d'équations transformées pour les variables $y_1, \dots, y_q$. Au voisinage du point $\xi = \xi_o$ on peut appliquer le théorème 1. Donc pour le système (22) il existe une solution et une seule $(x_1 = X_1^*(\xi), \dots, x_q = X_q^*(\xi))$ non identique à $(x_1^o, \dots x_q^o)$, égale à $(x_1^o, \dots, x_q^o)$ pour $\xi = \xi_o$ et indéfiniment dérivable au voisinage de $\xi = \xi_o$.

Considérons la solution $(X_1 = X_1(X^o, \xi), \dots, X_q = X_q(X^o, \xi))$ mise en évidence dans le théorème 2. Cette solution n'est pas identique à $(x_1^o, \dots, x_q^o)$ car les α_j, $j = 1, \dots, q$, donnés par les formules (20) ne sont pas tous nuls.

A cause de l'unicité, pour le système (22), de la solution qui nous intéresse, on peut affirmer que :

$$X_1^*(\xi) = X_1(X^o, \xi), \dots, X_q^*(\xi) = X_q(X^o, \xi) .$$

BIBLIOGRAPHIE

1 - BIRD, G.A. Shock-Wave Structure in a Rigid Sphere Gas. Rarefied Gas Dynamics edited by J.H. de Leeuw. Vol I, Academic Press, New York, 1965.

2 - BROADWELL, J.E. Shock Structure in a simple discrete velocity gas. The Physics of Fluids, 7, 1964, n° 8, p. 1243.

3.- BROADWELL, J.E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method. Journal of Fluid Mechanics, 19, 1964, n° 3, p. 401.

4 - CABANNES, H. Théorie des ondes de choc. Handbuch der Physik edited by S. Flügge, Band IX, Springer Verlag, 1960.

5 - CABANNES, H. Magnetodynamique des Fluides. C.D.U. Paris, 1969.

6 - CARLEMAN, T. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. Uppsala, 1957 (Publications Scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler).

7 - CERCIGNANI, C. Mathematical Methods in Kinetic Theory. Plenum Press, New York, 1969.

8 - CHAHINE, M.T. and NARASIMHA, R. Exact Numerical Solution of the complete BGK Equation for Strong Shock Waves. Rarefied Gas Dynamics edited by J.H. de Leeuw. Vol I, Academic Press, New York, 1965.

9 - CHAPMAN, S. and COWLING, T.G. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. University Press, Cambridge, 1960.

10 - COURANT, R. and HILBERT, D. Methods of Mathematical Physics, Vol II, J. Wiley and Sons, New York, 1962.

11 - DELCROIX, J.L. Physique des Plasmas, I. Dunod, Paris, 1963.

12 - ELLIS, R.S. and PINSKY M.A. Limit theorems for model Boltzmann equations with several conserved quantities. Indiana University Mathematics Journal, 23, 1973, n° 4 p. 287.

13 - DIEUDONNE, J. Eléments d'Analyse. Vol 1, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

14 - GATIGNOL, R. Etude de la structure d'une onde de choc pour un gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 261, 1965, p. 2841.

15 - GATIGNOL, R. Etude d'un gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 263, série A, 1966, p. 332.

16 - GATIGNOL, R. Théorème H pour un gaz modérément dense à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 268, série A, 1969, p. 513.

17 - GATIGNOL, R. Théorie cinétique d'un gaz à répartition discrète de vitesses. Zeitschrift für Flugwissenschaften, 18, 1970, Heft 2/3, p.93.

18 - GATIGNOL, R. Sur le système des équations d'Euler des gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 274, Série A, 1972, p. 1429.

19 - GATIGNOL, R. Les ondes de choc dans les gaz à répartition discrète de vitesses. C.R. Acad. Sci. Paris, 274, Série A, 1972, p. 1473.

20 - GERMAIN, P. Théorie Générale des Milieux Continus. Cours 1963-1964. Institut Henri-Poincaré, Paris.

21 - GODUNOV, S.K. et SULTANGAZIN, U.M. Sur des modèles discrets de l'équation de Boltzmann (en russe), Uspehi Mathematic Nauk, 26, 1971, n° 3, p. 3.
On discrete models of the kinetic Boltzmann equation. Russian Mathematical surveys, 26, 1971, n° 3, p. 1.

22 - GRAD, H. Asymptotic Theory of the Boltzmann Equation. Physics of Fluids, 6, n° 2, 1963, p. 147.

23 - GRAD, H. Principles of the Kinetic Theory of Gases. Handbuch der Physik edited by S. Flügge, Band XII, Springer-Verlag, Berlin, 1958.

24 - GROSS, E.P. Recent Investigations of the Boltzmann Equation. Rarefied Gas dynamics, edited by F.M. Devienne, Pergamon Press, New York, 1960.

25 - GUIRAUD, J.P. Kinetic Theory and Rarefied Gas Dynamics. Rarefied Gas Dynamics, edited by C.L. Brundin, Academic Press, New York, 1967.

26 - GUIRAUD, J.P. Gas Dynamics from the point of wiew of kinetic theory, Communication to XIII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics Moscow, U.S.S.R., August 1972.

27 - HARDY, I. et POMEAU, Y. Thermodynamics and Hydrodynamics for a modeled Fluid. Journal of Mathematical Physics, 13, 1972, n° 7, p. 1042.

28 - HARRIS, S. Approach to equilibrium in a moderately dense discrete velocity gas. The Physics of Fluids, 9, 1966, n° 7, p. 1328.

29 - HARRIS, S. Proof for a discrete velocity gas that successive derivatives for Boltzmann's H function alternate in sign. Journal of Mathematical Physics, 8, 1967, n° 12, p. 2407.

30 - HARRIS, S. Structure of the H Function for a Hard-Sphere Gas. The Journal of Chemical Physics, 48, 1968, n° 8, p. 3723.

31 - HEITLER, W. Le Principe du Bilan détaillé. Annales de l'Institut Henri Poincaré Paris, 15, 1956, p.67.

32 - HOLWAY, L.H. Kinetic theory of Shock Structure using an Ellipsoïdal Distribution function. Rarefied Gas Dynamics edited by J.H. de Leeuw. Vol I, Academic Press, New York, 1965.

33 - JANCEL, R. Les fondements de la Mécanique Statistique classique et quantique. Gauthier-Villars, Paris, 1963.

34 - JANCEL, R. et KAHAN, Th. Electrodynamique des Plasmas fondée sur la Mécanique Statistique, Tome I. Dunod, Paris, 1963.

35 - KAC, M. Probability and related topics in physical Sciences. American Mathematical Society, 1957.

36 - KOGAN, M.N. Rarefied Gas Dynamics. Plenum Press, New York, 1969.

37 - KROOK, M. Astrophysical Journal, 122, 1955, p. 488

38 - LAX, P.D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Communications on Pure and Applied Mathematics, 10, 1957, p. 537.

39 - MAXWELL, J.C. Scientific Papers II, Cambridge University Press, Cambridge, 1890.

40 - SCHULTZ - GRUNOW, F. and FROHN, A. Density Distribution in Shock Waves Travelling in a Rarefied Monoatomic Gases. Rarefied Gas Dynamics edited by J.H. de Leeuw, Vol I, Academic Press, New York, 1965.

41 - SENGERS, J.V. Triple Collision Contribution to the Transport Coefficients of a Rigid sphere Gas. The Physics of Fluids, 9, 1966, n° 7, p. 1333.

42 - SMOLDEREN, J. Structure des chocs et théorie cinétique des gas. Chocs et Ondes de choc, Tome I, sous la direction de A.L. Jaumotte. Masson et Cie, Paris, 1971.

43 - WHITHAM, G.B. Some Comments on Wave Propagation and Shock Wave Structure with application to magnetohydrodynamics. Communications on Pure and Applied Mathematics, 12, 1959, p. 113.