

Anhang 1. Der topologische Gehalt des Maxwellschen Satzes über die Multipol-Darstellung sphärischer Funktionen

Hier führen wir den Beweis des Maxwellschen Satzes über die Multipol-Darstellung sphärischer Funktionen. Insbesondere wird bewiesen, daß die Funktionen, die eine solche Darstellung zulassen, einen Vektorraum bilden. Das ist gerade die Behauptung, die wir noch nicht bewiesen haben (Vorlesung 11).

Zugleich werden wir eine Reihe interessanter topologischer und algebraischer Folgerung aus dem Maxwellschen Satz herleiten (der offenbar erstmals von Sylvester in der wenig bekannten Arbeit [7] bewiesen wurde, die daneben sowohl das grundlegende ideologische Prinzip des Bourbakischen Programms, als auch eine Warnung vor der Gefahr mißbräuchlicher Formalisierung der Mathematik enthält).

Wir erinnern an die Aussage des Satzes.

Satz 1. *Die Einschränkung der n -fachen Ableitung der Funktion $1/r$ in Richtung von n konstanten (also Shift-invarianten) Vektorfeldern im \mathbb{R}^3 auf die Sphäre ist eine Kugelfunktion vom Grad n . Jede von Null verschiedene Kugelfunktion vom Grad n kann auf diese Weise unter Verwendung eines geeigneten Satzes von n nicht verschwindenden Vektorfeldern konstruiert werden. Durch die gegebene Funktion sind diese Felder eindeutig festgelegt (bis auf multiplikative Konstanten und die Reihenfolge).*

Die Kugelfunktionen vom Grad n bilden einen Vektorraum der Dimension $2n + 1$.

Die Menge der Funktionen, die durch die im Satz beschriebene Multipolkonstruktion erhalten werden, sieht a priori ziemlich nichtlinear aus. Aus dem Satz folgt, daß das Bild der entsprechenden multilinearen Abbildung ein Vektorraum ist. Die Eindeutigkeitsbehauptung des Satzes läßt sich in rein topologischen Begriffen umformulieren.

Satz 2. *Der Konfigurationsraum von n (eventuell zusammenfallenden) ununterscheidbaren Punkten auf der reellen projektiven Ebene (also die symmetrische Potenz $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$) ist diffeomorph zum reellen projektiven Raum der Dimension $2n$:*

$$\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^{2n} .$$

Symmetrische Potenzen von nicht orientierten Flächen wurden (unabhängig von Maxwell) von J. Dupont und G. Lusztig [4] ausgerechnet.

Bemerkung. Satz 2 ist dem projektiven Satz von Vieta

$$\text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^n$$

verwandt und ist in gewissem Sinne seine quaternionische Variante.

Betrachtet man die Riemannsche Sphäre $\mathbb{C}P^1$ als zweiblättrige Überdeckung des reellen projektiven Raums, erhalten wir als Folgerung eine algebraische Abbildung $r : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$ der Vielfachheit 2^n , die den klassischen Satz

$$\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4$$

auf höhere Dimensionen verallgemeinert.

§ 1. Grundlegende Räume und Gruppen

Wir betrachten den n -dimensionalen arithmetischen quaternionalen Raum $\mathbb{H}^n = \bigoplus \mathbb{H}_p^1$ mit seiner üblichen i -komplexen Struktur ($i(ae + bi + cj + dk) = ai - be + ck - dj$). Multiplikation von links mit j operiert auf \mathbb{H}_p^1 unter Bewahrung der komplexen Geraden. Sie bildet jede Gerade auf eine dazu Hermitesch-orthogonale Gerade ab und operiert auf $\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{H}_p^1 \setminus 0)/\mathbb{C}^*$ als fixpunktfreie antiholomorphe Involution σ_p .

Wir betrachten die Coxeter-Gruppe $B(n)$, die auf dem Produkt $(\mathbb{C}P^1)^n$ durch Permutation von Faktoren und Abbildungen σ_p auf einigen der Faktoren operiert.

Satz 3. *Der Orbitraum der Operation von $B(n)$ auf $(\mathbb{C}P^1)^n$ ist ein $2n$ -dimensionaler reeller projektiver Raum:*

$$(\mathbb{C}P^1)^n/B(n) \approx \mathbb{R}P^{2n}.$$

Der Orbitraum der Permutationsgruppe $S(n)$ ist gemäß dem Satz von Vieta der komplexe projektive Raum

$$(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) = \text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n.$$

Somit haben wir eine natürliche Abbildung $r : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$ (die einen Orbit ξ der Untergruppe $S(n)$ auf denjenigen Orbit $r(\xi)$ der Gruppe $B(n)$ abbildet, der ξ enthält).

Die Gruppe $B(n)$ enthält ebenso die interessante Untergruppe $\mathbb{Z}_2 \times S(n)$ (von einfachen Permutationen und solchen Permutationen, die begleitet sind von Involutionen σ_p auf *jedem* Faktor). Ein Produkt von Involutionen σ_p operiert auf $(\mathbb{C}P^1)^n/S(n)$ als Involution $\sigma \in \mathbb{Z}_2$.

Die Gruppeneinbettungen $S(n) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times S(n) \rightarrow B(n)$ generieren Abbildungen der Orbiträume

$$(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{C}P^1)^n/(S(n) \times \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{C}P^1)^n/B(n)$$

der entsprechenden Vielfachheiten 2 und 2^{n-1} .

Die Involution $\sigma : (\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \rightarrow (\mathbb{C}P^1)^n/S(n)$ permutiert die Urbilder $\alpha^{-1}(\cdot)$.

Satz 4. Für geradzahlige n operiert die Involution σ auf $(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \approx \mathbb{C}P^n$ wie die komplexe Konjugation conj .

Somit haben wir für gerade n die reelle algebraische Abbildung

$$\mathbb{C}P^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}P^n/\text{conj} \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}P^{2n}$$

der entsprechenden Vielfachheiten 2 und 2^{n-1} .

Bemerkung. Für $n = 2$ ist der zweite Raum glatt (vgl. etwa [1] und [2]; sicherlich war das aber schon vor der Veröffentlichung in [2] bekannt),

$$\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4 .$$

In diesem Fall hat β die Vielfachheit 2.

Eine Involution, die zwei Urbilder vertauscht, operiert auf S^4 als Antipodeninvolution.

Ich habe S. Donaldson für diese Feststellung zu danken, die beweist, daß der (seltsame) Maxwellsche Satz im gewissen Sinne eine höherdimensionale Verallgemeinerung des (nicht weniger seltsamen) Satzes $\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4$ darstellt.

Weiter unten werden wir zeigen, daß der Maxwellsche Satz eine explizite Formel für den Diffeomorphismus $\mathbb{C}P^2/\text{conj} \rightarrow S^4$ liefert.

Bemerkung. In den meisten Fällen, wenn wir behaupten, daß zwei Mannigfaltigkeiten „kongruieren“, werden wir nur einen reellen algebraischen Homöomorphismus zwischen diesen Mannigfaltigkeiten angeben. Die pedantische Überprüfung, ob diese Homöomorphismen geglättet werden können, überlassen wir manchmal dem Leser (vgl. aber auch § 4).

§ 2. Einige Sätze aus der reellen algebraischen Geometrie

Wir betrachten ein reelles homogenes Polynom f vom Grad n in drei Variablen (x, y, z) . Der Satz von Maxwell hat folgende seltsame algebraische Konsequenz.

Satz 5. *Jedes reelle homogene Polynom f vom Grad n läßt sich eindeutig als Summe zweier solche Polynome schreiben, wobei eins dieser Polynome ein Produkt von n linearen Faktoren ist und das andere durch $x^2 + y^2 + z^2$ teilbar ist.*

Insbesondere definiert jede reelle algebraische Kurve vom Grad n in der metrischen projektiven Ebene n reelle „Hauptachsen“, die invariant von der Kurve abhängen.

BEWEIS. Die reelle Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ definiert in $\mathbb{C}P^2$ eine reelle Kurve S ohne reelle Punkte. Diese sogenannte imaginäre Kreislinie ist rational und topologisch äquivalent zu einer Sphäre. Die komplexe Konjugation bildet S in sich ab und operiert auf S als fixpunktfreie antiholomorphe Involution (es handelt sich um die gewöhnliche Antipodeninvolution von S^2).

Die Gleichung $f = 0$ definiert in $\mathbb{C}P^2$ eine reelle algebraische Kurve K vom Grad n . Die komplexe Konjugation $\text{conj} : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ bildet K in sich ab und permutiert die $2n$ Schnittpunkte von K und S .

Jedes Paar konjugierter Schnittpunkte definiert eine Verbindungsgerade (die Punkte sind verschieden, da conj keine Fixpunkte auf S^2 hat). Diese Gerade ist reell (da conj zwei Punkte auf dieser Geraden vertauscht) und wird durch eine Gleichung $ax + by + cz = 0$ mit reellen Koeffizienten beschrieben.

Wir betrachten das Produkt g von n solchen linearen Funktionen und zeigen, daß f entlang S proportional zu g ist.

Das homogene Polynom f verschwindet in den $2n$ gemeinsamen Punkten von K und S . Die Kurve S ist rational. Wir wählen einen reellen Parameter t (zum Beispiel $x = 2t$, $y = t^2 - 1$, $z = i(t^2 + 1)$). Durch Wahl geeigneter Koordinaten können wir ausschließen, daß $t = \infty$ einer der Schnittpunkte von S und K ist. Die Polynome $f(x(t), y(t), z(t))$ und $g(x(t), y(t), z(t))$ vom Grad $2n$ haben $2n$ gemeinsame Nullstellen, wobei $g \neq 0$. Also gilt entlang von S die Gleichheit $f = cg$ mit $c = \text{const}$.

Somit verschwindet das homogene Polynom $f - cg$ auf S , hat also die Gestalt $(x^2 + y^2 + z^2)h(x, y, z)$ mit irgendeinem reellen homogenen Polynom h vom Grad $n - 2$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Bemerkung. Die Eindeutigkeit der Zerlegung $f = cg + (x^2 + y^2 + z^2)h$ kann man unabhängig vom Existenzbeweis zeigen. Wir nehmen an, daß eine zweite Zerlegung $f = c'g' + (x^2 + y^2 + z^2)h$ gegeben ist. Dann ist $c'g' - cg = (x^2 + y^2 + z^2)h''$, wobei g und g' jeweils Produkte von n linearen Faktoren sind. Auf einer Geraden l sei $g = 0$. Auf dieser Geraden hat das Polynom $c'g'$ einerseits n reelle Nullstellen und ist andererseits gleich der rechten Seite der letzten Formel, die nicht mehr als $n - 2$ reelle Nullstellen besitzt. Also sind $c'g' \equiv 0$ und $h'' = 0$ auf l . Folglich sind alle drei Polynome durch die Gleichung von l teilbar, und die Eindeutigkeit folgt durch Induktion über n . (Für $n = 1$ ist alles klar, da $cg = c'g'$ aus $h'' = 0$ folgt.)

Wir betrachten den projektiven Raum $\mathbb{R}P^N$ der reellen algebraischen Kurven vom Grad n (wobei $N = n(n + 3)/2$).

Die reellen algebraischen Kurven, die aus n reellen Geraden bestehen, bilden in diesem projektiven Raum eine geschlossene reelle algebraische Mannigfaltigkeit T der Dimension $2n$ (das Bild von $(\mathbb{R}P^2)^n$ unter einer multilinearen Abbildung). Die Kurven, die S enthalten, bilden den projektiven Unterraum $P = \mathbb{R}P^M$, $M = (n - 2)(n + 1)/2$. Mit diesen Bezeichnungen bekommt Satz 5 die folgende Gestalt.

Satz 6. *Die Mannigfaltigkeiten T und P in $\mathbb{R}P^N$ sind verkettet mit Verkettungskoeffizienten 1 in folgendem Sinne. Durch jeden Punkt aus $\mathbb{R}P^N$ der nicht zur Vereinigung von T und P gehört, verläuft eine eindeutige reelle projektive Gerade, die T mit P verbindet. Diese Gerade schneidet T (genauso wie P) in genau einem Punkt.*

Nun können wir leicht Satz 2 beweisen.

BEWEIS VON SATZ 2. Wir betrachten einen Raum H der Dimension $M + 1$, der den M -dimensionalen projektiven Raum P enthält. Jeder solche Raum schneidet T . Wählen wir nämlich einen Punkt O in H , der weder zu P noch zu T gehört, so liegt die Gerade, die O mit T und P verbindet, in H und schneidet T .

Der Schnittpunkt ist eindeutig, denn andernfalls gäbe es in H einen Punkt O , durch den zwei T und P verbindende Geraden verliefen.

Somit haben wir einen Homöomorphismus zwischen $T \approx \text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ und der Mannigfaltigkeit der $M + 1$ dimensionalen Räume, die P enthalten konstruiert. Die letztere Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{R}P^{N-M-1}$, was (zumindest auf der topologischen Ebene) Satz 2 beweist, da $N - M - 1 = 2n$. \square

§ 3. Von der algebraischen Geometrie zu den Kugelfunktionen

Die Ableitungen harmonischer Funktionen entlang konstanten Vektorfeldern sind offensichtlich harmonische Funktionen. Somit sind alle wiederholten Ableitungen der Funktion $1/r$ außerhalb von 0 harmonisch. Die folgenden Lemmata wurden in Vorlesung 11 bewiesen.

Lemma 1. *Die n -te Ableitung der Funktion $1/r$ entlang von n konstanten Vektorfeldern hat die Gestalt P/r^{2n+1} , wobei P ein homogenes Polynom vom Grad n ist.*

Lemma 2. *Das homogene Polynom aus Lemma 1 ist eine harmonische Funktion.*

Dieses Lemma folgt aus dem klassischen Satz über die Inversion, an den ich hier erinnern möchte. Die harmonische Funktion P/r^{2n+1} ist homogen vom Grad $-(n + 1)$. Auf der Einheitskugel stimmt sie mit P überein. Daraus

folgt, daß auch die Fortsetzung dieser Funktion von der Einheitskugel als homogene Funktion vom Grad n auf den ganzen Raum harmonisch ist. Diese Fortsetzung ist genau P .

Zum Beweis des Satzes über die Inversion betrachten wir den sphärischen Laplaceoperator $\tilde{\Delta}$, also den Operator div grad auf der Einheitskugel. Wir setzen diesen auf die homogenen Funktionen vom Grad k auf $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ fort und zwar so, daß jede homogene Funktion F vom Grad k auf eine homogene Funktion $\tilde{\Delta}F$ desselben Grades abgebildet wird.

Gemäß Vorlesung 11 gilt für jede homogene Funktion F vom Grad k

$$\tilde{\Delta}F = r^2 \Delta F - \Lambda F, \quad \text{wobei } \Lambda = k^2 + k(m-2).$$

Aus dieser Formel folgt

- (i) Die Einschränkung einer harmonischen homogenen Funktion vom Grad k auf die Einheitskugel im \mathbb{R}^m ist eine Eigenfunktion des sphärischen Laplaceoperators zum Eigenwert $-\Lambda$.
- (ii) Setzt man eine Eigenfunktion des sphärischen Laplaceoperators zum Eigenwert $-\Lambda$ von der Kugel auf $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ so fort, daß die Fortsetzung homogen vom Grad k ist, dann ist die Fortsetzung harmonisch.
- (iii) Zu jedem Homogenitätsgrad k im \mathbb{R}^m gibt es einen dualen Grad $k' = 2 - m - k$ dergestalt, daß eine homogene harmonische Funktion vom Grad k harmonisch bleibt, wenn wir sie auf die Kugel einschränken und dann als homogene Funktion des dualen Grades fortsetzen. Für $m = 3$ ist die Dualitätsbedingung $k + k' = -1$.

Insbesondere hat die Funktion P/r^{2n+1} aus Lemma 1 den Grad $k = -(1+n)$, und wegen $m = 3$ ist der duale Grad $k' = n$, woraus Lemma 2 folgt.

Lemma 3. *Jede Kugelfunktion vom Grad n auf S^2 läßt sich darstellen als $f(X, Y, Z)(1/r)$, wobei f ein homogenes Polynom vom Grad n ist und $X = \partial/\partial x$, $Y = \partial/\partial y$, $Z = \partial/\partial z$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.*

BEWEIS. Die harmonischen homogenen Polynome vom Grad n bilden einen Vektorraum. Dieser enthält (nach den Lemmata 1 und 2) den Unterraum der harmonischen Polynome, deren Einschränkungen in der Form darstellbar sind, wie sie im zu beweisenden Lemma angegeben ist. Dieser Raum ist offensichtlich invariant unter Drehungen. Aber die Darstellung von $SO(3)$ im Raum der sphärischen Funktionen ist nicht reduzibel (jede Funktion läßt sich als Linearkombinationen von Drehungen des n -ten Legendre-Polynoms darstellen).

Folglich stimmt der so definierte Unterraum mit dem ganzen Raum der Kugelfunktionen vom Grad n überein. \square

Lemma 4. *Jede Kugelfunktion vom Grad n läßt sich als $f_T(X, Y, Z)(1/r)$ darstellen, wobei $f_T = \prod_{i=1}^n (\alpha_i X + \beta_i Y + \gamma_i Z)$ das Produkt von n reellen linearen Faktoren ist.*

BEWEIS. Gemäß Satz 5 existiert eine Zerlegung $f(x, y, z) = f_T(x, y, z) + g(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)$. Wenden wir diese Zerlegung auf die Darstellung aus Lemma 3 an, so erhalten wir

$$f(X, Y, Z)(1/r) = f_T(X, Y, Z)(1/r) + 0,$$

da $X^2 + Y^2 + Z^2 = \Delta$ und $\Delta(1/r) = 0$. Somit besitzt jede sphärische Funktion die Multipoldarstellung aus Satz 1. \square

Lemma 5. *Die Multipoldarstellung ist eindeutig (d.h. das Polynom f_T ist eindeutig durch die Kugelfunktion definiert).*

BEWEIS. Es seien f_T und f'_T solche vollständig zerlegbare Polynome, daß

$$f_T(X, Y, Z)(1/r) = f'_T(X, Y, Z)(1/r).$$

Gemäß Lemma 1 (durch n -fache Anwendung) gilt

$$\begin{aligned} f_T(X, Y, Z)(1/r) &= (cf_T(x, y, z) + r^2g)r^{-(2n+1)}, \quad c \neq 0, \\ f'_T(X, Y, Z)(1/r) &= (c'f'_T(x, y, z) + r^2g')r^{-(2n+1)}, \quad c' \neq 0. \end{aligned}$$

Folglich ist $f_T(x, y, z) - f'_T(x, y, z) = r^2h(x, y, z)$. Nach Satz 5 ist dies nur dann möglich, wenn $f_T = f'_T$. Damit ist Satz 1 bewiesen. \square

§ 4. Explizite Formeln

Die quaternionale Multiplikation mit j von links bildet einen Vektor $(z, w) = zj + we$ aus $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{H}^1$ auf $(\bar{w}, -\bar{z})$ ab. Dieser Vektor ist Hermitesch-orthogonal zum ursprünglichen Vektor.

Somit haben wir eine explizite Formel $t \mapsto -1/\bar{t}$ für eine fixpunktfreie antiholomorphe Involution $\mathbb{C}P^1$.

Paare von Hermitesch-orthogonalen Geraden in \mathbb{C}^2 können wir zur Parametrisierung der Punkte in $\mathbb{R}P^2$ verwenden. So werden wir Satz 3 aus Satz 2 ableiten. Des Weiteren werden wir explizite Formeln für den Diffeomorphismus

$$\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^{2n}$$

aus Satz 2 gewinnen, indem wir als Koordinaten auf $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ jeweils n Paare von Hermitesch-orthogonalen Geraden im \mathbb{C}^2 verwenden.

Zunächst betrachten wir den Fall $n = 1$.

Jedem Paar (z, w) und $(\bar{w}, -\bar{z})$ Hermitesch-orthogonaler Vektoren des \mathbb{C}^2 ordnen wir die quadratische Form

$$f = (zx + wy)(\bar{w}x - \bar{z}y) = f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2$$

im Dualraum zu, die durch das Produkt der zu diesen Vektoren gehörigen Linearformen gegeben ist. Hierbei sind (x, y) die Koordinaten in der dualen Ebene \mathbb{C}^2 . Die Koeffizienten der quadratischen Form f haben also die Gestalt

$$f_0 = z\bar{w}, \quad f_1 = w\bar{w} - z\bar{z}, \quad f_2 = -\bar{z}w.$$

Wir bemerken, daß der Koeffizient f_1 reell ist, während $f_2 = -\bar{f}_0$. Wir verwenden f_0 und f_1 als Koordinaten im Raum \mathbb{R}^3 der Formen f .

Wird der ursprüngliche Vektor (z, w) mit einer komplexen Zahl multipliziert, so wird der konstruierte Koordinatenvektor mit dem Betragsquadrat dieser Zahl multipliziert. Somit haben wir die Abbildung

$$F : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+,$$

die die komplexen Geraden im \mathbb{C}^2 auf reelle Halbgeraden im \mathbb{R}^3 abbildet.

Der gewählte Punkt (z, w) der komplexen Geraden wird durch die Abbildung (f_0, f_1) auf einen wohldefinierten Punkt des Strahls abgebildet. Für die Wahl $z = t, w = 1$ erhalten wir beispielsweise $f_0 = t, f_1 = 1 - t\bar{t}$.

Ist der ursprüngliche Punkt auf der Geraden normiert durch die Bedingung $|z|^2 + |w|^2 = 1$, liegt sein Bild auf dem Ellipsoid $|2f_0|^2 + |f_1|^2 = 1$ (das wir genauso als Sphäre bezeichnen können, wenn wir die Koordinaten $2f_0$ und f_1 verwenden).

Somit wird die Riemannsche Sphäre $\mathbb{C}P^1 = S^3/S^1$ durch den Diffeomorphismus $(2f_0, f_1)$ auf die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 mit den Koordinaten $2f_0$ und f_1 abgebildet. Betrachten wir $t = z/w$ als Koordinate in $\mathbb{C}P^1$, so erhalten wir eine Abbildung der t -Ebene auf die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 , die identisch mit der stereographischen Projektion ist. Die Formeln, die wir weiter unten angeben werden, sind in diesem Sinne höherdimensionale Verallgemeinerungen der stereographischen Projektion.

Ersetzen wir die ursprüngliche im $\mathbb{C}P^2$ durch die dazu Hermitesch-orthogonale Gerade, so ändert sich das Vorzeichen der Abbildung F . Substituiert man nämlich \bar{w} für z und $-\bar{z}$ für w , so ändert sich das Vorzeichen sowohl vor f_0 als auch vor f_1 . Also bildet f die Involution $j : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ (die jede Gerade auf ihr Hermitesch-orthogonales Komplement abbildet) auf die Antipodeninvolution der Sphäre S^2 im \mathbb{R}^3 ab.

Nun wenden wir eine analoge Konstruktion auf die n -te symmetrische Potenz des Raums $\mathbb{R}P^2$ an. Wir beginnen mit der n -ten symmetrischen Potenz von $\mathbb{C}P^1$. Nach Definition ist ein Punkt der komplexen Mannigfaltigkeit

$$\text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^n$$

gegeben durch eine (ungeordnete) Menge von n Geraden im \mathbb{C}^2 .

Indem wir n Vektoren $(z_k, w_k) \neq 0$ auswählen und das Produkt der entsprechenden Linearformen des Dualraums bilden, erhalten wir die binäre n -Form

$$H(x, y) = \prod_{k=1}^n (z_k x + w_k y) = h_0 x^n + \dots + h_n y^n .$$

Die Koeffizienten dieser Form sind die (homogenen) Koordinaten in $\mathbb{C}P^n = \text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1)$ (die eine glatte homogene Struktur auf diesem Raum definieren).

Ist $w_k \neq 0$, so kann man $w_k = 1$ setzen. Als affine Koordinaten erhalten wir die elementarsymmetrischen Funktionen in den Variablen z_k

$$h_0 = \sigma_n(z) , \dots , h_{n-1} = \sigma_1(z) , (h_n = 1) .$$

Im Weiteren werden wir die σ_k als lokale Koordinaten in $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ verwenden.

Wir beginnen mit n Paaren Hermitesch-orthogonaler Geraden im \mathbb{C}^2 . Wir wählen jeweils einen Vertreter jedes Paares, wobei wir beachten, daß keine der ausgewählten Geraden mit irgendeiner der nicht ausgewählten Geraden zusammenfällt (im gegebenen Punkt und folglich auch in einer gewissen Umgebung, wo unser Koordinatensystem gültig ist). Falls einige Paare doppelt auftreten, genügt es immer dieselbe Gerade auszuwählen, um die genannte Bedingung zu erfüllen.

Mit $(z_k, 1)$ ($k = 1, \dots, n$) bezeichnen wir die Vektoren, die die ausgewählten Geraden definieren. Auf der reellen Mannigfaltigkeit $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ verwenden wir als lokale Koordinaten (die Real- und Imaginärteile) der n komplexen Zahlen

$$\sigma_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \sigma_n(z_1, \dots, z_n) .$$

Die orthogonalen Geraden sind durch Vektoren $(1, -\bar{z}_k)$ gegeben. Wir definieren die symmetrisierte $2n$ -Form

$$f = \prod_{k=1}^n (z_k x + y) \prod_{k=1}^n (x - \bar{z}_k y) = f_0 x^{2n} + \dots + f_{2n} y^{2n} .$$

Weiter unten werden wir sehen, daß die Koeffizienten f_k Polynome in σ und $\bar{\sigma}$ sind.

Satz 7. Die Abbildung $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, die den Punkt $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ nach (f_0, \dots, f_{2n}) abbildet, definiert (lokal) einen Diffeomorphismus der Mannigfaltigkeit $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ in den Raum $\mathbb{R}P^{2n}$ der Halbgeraden im \mathbb{R}^{2n+1} . In Koordinatenschreibweise ist die Abbildung F durch folgende explizite Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} f_0 &= \sigma_n , \\ f_1 &= \sigma_{n-1} - \sigma_n \bar{\sigma}_1 , \\ f_2 &= \sigma_{n-2} - \sigma_{n-1} \bar{\sigma}_1 + \sigma_{n-2} \bar{\sigma}_2 , \\ &\vdots \\ f_n &= 1 - \sigma_1 \bar{\sigma}_1 + \sigma_2 \bar{\sigma}_2 - \dots + (-1)^n \sigma_n \bar{\sigma}_n . \end{aligned}$$

BEWEIS. Man sieht leicht, daß

$$\prod_{k=1}^n (z_k x + y) = \sigma_n x^n + \sigma_{n-1} x^{n-1} y + \dots + y^n ,$$

$$\prod_{k=1}^n (x - \bar{z}_k y) = x^n - \bar{\sigma}_1 x^{n-1} y + \bar{\sigma}_2 x^{n-2} y^2 + \dots + (-1)^n \bar{\sigma}_n y^n .$$

Durch Multiplikation dieser beiden Polynome erhalten wir (nach F. Aicardi) die oben angegebenen Formeln für die Koeffizienten des Produkts.

Außerdem ergibt sich, daß $f_{2n-k} = (-1)^{n-k} \bar{f}_k$, insbesondere ist der mittlere Koeffizient f_n reell.

Es bleibt nachzuweisen, daß im betrachteten Gebiet die Jacobideterminante nicht verschwindet. Das läßt sich ohne Rechnungen zeigen. Die zu untersuchende Jacobimatrix hat die Dimension $2n + 1$. Eine ihrer Spalten ist der Vektor

$$\Phi = (f_0, \bar{f}_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_{n-1}, \bar{f}_{n-1}, f_n) .$$

Die übrigen $2n$ Spalten sind seine Ableitungen

$$(\partial\Phi/\partial\sigma_1, \partial\Phi/\partial\bar{\sigma}_1, \dots, \partial\Phi/\partial\sigma_n, \partial\Phi/\partial\bar{\sigma}_n) .$$

Wir stellen diese nichtholomorphe Jacobideterminante als den Wert einer holomorphen Jacobideterminanten $\mathcal{T}(\sigma, \tau)$ im Punkt $\tau = \bar{\sigma}$ dar. Letztere konstruieren wir folgendermaßen:

Wir betrachten das Produkt

$$\prod_{k=1}^n (z_k x + y) \prod_{k=1}^n (x - w_k y) = F_0 x^{2n} + \dots + F_{2n} y^{2n} .$$

Die Koeffizienten F_k sind Polynome in $\sigma_1(z), \dots, \sigma_n(z)$ und es ist $\tau_1 = \sigma_1(w), \dots, \tau_n = \sigma_n(w)$. Mit $\Psi = (F_0, \dots, F_{2n})$ bezeichnen wir die entsprechende vektorwertige Funktion in den Variablen σ und τ und betrachten die Determinante der Matrix

$$(\Psi, \partial\Psi/\partial\sigma_1, \partial\Psi/\partial\tau_1, \dots, \partial\Psi/\partial\sigma_n, \partial\Psi/\partial\tau_n) .$$

Diese Determinante $\mathcal{T}(\sigma, \tau)$ ist im Punkt $\sigma(z)$, $\tau = \sigma(\bar{z})$ verschieden von Null. Aus unserer Bedingung an die Auswahl der Geraden folgt nämlich, daß kein z_k mit einem der $-1/\bar{z}_l$ zusammenfällt. Somit bilden $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ und (τ_1, \dots, τ_n) in einer geeigneten Umgebung des betrachteten Punktes $(\sigma, \tau = \bar{\sigma})$ ein lokales holomorphes Koordinatensystem von $\mathbb{C}P^{2n} = \text{Sym}^{2n}(\mathbb{C}P^1)$. Das heißt, die Determinante $\mathcal{T}(\sigma, \tau)$ ist in diesem Punkt verschieden von Null. Aber die Determinante, für die wir zeigen wollen, daß sie verschieden von Null ist, ist gleich $\mathcal{T}(\sigma, \bar{\sigma})$, da $f_{2n-k} = (-1)^{n-k} \bar{f}_k$. Also haben wir bewiesen, daß die Abbildung $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. \square

Aus § 2 wissen wir bereits, daß diese Abbildung ein Homöomorphismus ist. Damit haben wir nun Satz 1 vollständig bewiesen.

§ 5. Der Satz von Maxwell und $\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4$

Die expliziten Formeln aus § 5 erlauben auch die Konstruktion eines Diffeomorphismus der Sphäre S^{2n} auf einen unten zu definierenden Orbitraum.

Wir beginnen mit der komplexen Mannigfaltigkeit $(\mathbb{C}P^1)^n$ der geordneten n -Tupel von n Geraden im Raum \mathbb{C}^2 . Auf dieser Mannigfaltigkeit betrachten wir folgende glatte (nicht holomorphe) Operation der Coxeter-Gruppe $D(n)$. Ein Element von $D(n)$ operiert, indem es die Faktoren permutiert und eine gerade Anzahl von Geraden auf ihr Hermitesch-orthogonales Komplement abbildet.

Satz 8. *Es gilt $(\mathbb{C}P^1)^n/D(n) \approx S^{2n}$ und der entsprechende Diffeomorphismus ist lokal durch die Formeln aus Satz 7 gegeben.*

BEWEIS. Permutationen ändern nicht die binäre $2n$ -Form f . Die Ersetzung einer Geraden durch ihr Komplement ändert das Vorzeichen beim zugehörigen Faktor $(z_k x + y)(x - \bar{z}_k y)$. Folglich ändert eine gerade Anzahl solcher Ersetzungen nicht das Vorzeichen bei f (während eine ungerade Anzahl das Vorzeichen ändert). □

Interessanterweise kann man die so bewiesene Beziehung $(\mathbb{C}P^1)^n/D(n) \approx S^{2n}$ als eine informelle Fortsetzung des Satzes von Chevalley auffassen: Der Orbitraum der Operation einer reellen $(2n - 1)$ -dimensionalen Gruppe auf \mathbb{C}^{2n} (die man als die Verallgemeinerung der Coxeter-Gruppe verstehen muß) ist der glatte reelle Raum \mathbb{R}^{2n+1} .

Beispiel. Für $n = 2$ erhalten wir

$$(\mathbb{C}P^1)^2/D(2) \approx S^4,$$

wobei die Gruppe $D(2)$, bestehend aus 4 Elementen, auf den Geradenpaaren des \mathbb{C}^2 durch Permutationen und (eventuell) Ersetzung beider Geraden durch ihre Hermitesch-orthogonalen Komplemente operiert.

Aber $(\mathbb{C}P^1)^2/S(2) \approx \text{Sym}^2(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^2$. Folglich ist $(\mathbb{C}P^1)^2/D(2) = \mathbb{C}P^2/(j)$, wobei (j) die Ersetzung beider Geraden durch ihre Komplemente ist.

Wir betrachten die komplexe Mannigfaltigkeit $\text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n$ der ungeordneten Mengen von n -Tupel von n Geraden im Raum \mathbb{C}^2 . Die Operation j auf $\mathbb{C}P^n$, die jede Gerade durch ihr Hermitesch-orthogonales Komplement ersetzt, ist eine (antiholomorphe) Involution.

Satz 9. *Für gerade n ist die Involution $j : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ gleich der komplexen Konjugation (in gewissen Koordinaten).*

BEWEIS. Die Koeffizienten der Form

$$H_{z,w}(x, y) = \prod_{k=1}^n (z_k x + w_k y) = \sum_{k=0}^n h_k x^{n-k} y^k$$

sind die natürlichen (homogenen) Koordinaten in $\mathbb{C}P^n = \text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1)$. Wir beschreiben die Operation von j auf den Koeffizienten h_k .

Auf dem Dualraum bewirkt die Operation

$$\bar{w}_k x - \bar{z}_k y = \overline{z_k(-\bar{y}) + w_k(\bar{x})}.$$

Also ist die transformierte Form durch die Formel

$$H_{\bar{w},-\bar{z}}(x, y) = \overline{H_{z,w}(-\bar{y}, \bar{x})}$$

gegeben. Bezüglich der Koeffizienten erhalten wir folgenden Ausdruck für die transformierte Form

$$\overline{\sum_{k=0}^n h_k (-\bar{y})^{n-k} (\bar{x})^k} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \bar{h}_k x^k y^{n-k}.$$

Die Operation j auf den Koeffizienten der Form H ist also gegeben durch $(jh)_k = (-1)^k \bar{h}_{n-k}$. Da n gerade ist, folgt genauso $(jh)_{n-k} = (-1)^k \bar{h}_k$. Die gesuchten Koordinaten sind $h_k + h_{n-k}$ und $i(h_k - h_{n-k})$ für gerade k und $i(h_k + h_{n-k})$ und $h_k - h_{n-k}$ für ungerade k (natürlich betrachten wir nie $h_{n/2} - h_{n/2}$).

Für $n = 2$ führen unsere Ergebnisse zu der Formel des klassischen Diffeomorphismus $\mathbb{C}P^2 / \text{conj} \approx S^4$. Der „Maxwell'sche Satz“

$$(\mathbb{C}P^1)^n / D(n) \approx S^{2n}$$

erweitert diesen Diffeomorphismus auf höhere Dimensionen. □

§ 6. Die Geschichte des Satzes von Maxwell

Maxwell's eigene Version dieses Satzes findet man in seinem Hauptwerk *Electricity and Magnetism*, Band 1, Kapitel IX, Abschnitte 129–133 (Seiten 222–233 in [5]).

Sylvester kritisierte seine Abhandlung in [7] mit den Worten: „Ich bin etwas erstaunt, daß dieser bedeutende Autor nicht bemerkt haben sollte, daß immer genau ein *reelles* System von Polen existiert, daß der gegebenen harmonischen Schwingung entspricht [...]“

Bei aller Hochachtung vor Professor Maxwell's großartigen Fähigkeiten muß ich eingestehen, daß mir die Herleitung rein analytischer Eigenschaften der Kugelfunktionen aus dem „Greenschen Satz“ und dem „Prinzip der potentiellen Energie“, wie er es getan hat, als eine Vorgehensweise erscheint, die nicht im Einklang mit vernünftigen Methoden ist, von der gleichen Art und

genauso überzeugend [...], als ob man die Regel zum Ziehen der Quadratwurzel aus dem Archimedischen Gesetz der Schwimmkörper herleiten wollte.“

Sylvester schlug seinen eigenen Zugang vor, der offenbar äquivalent zu dem oben angeführten Satz 5 ist:

„Die von Professor Maxwell entdeckte oder entwickelte Polmethode zur Darstellung der Kugelfunktionen beläuft sich auf nicht mehr und nicht weniger als auf die Wahl einer geeigneten kanonischen Form einer ternären Quantik, unter der Voraussetzung, daß die Quadratsumme der Variablen (hier Differentialoperatoren) gleich Null ist.“

Dennoch hat sich Sylvester nicht darum bemüht, diese Frage im Detail auszuarbeiten („da ich zeitlich sehr unter Druck bin und binnen 24 Stunden mit dem Dampfschiff zurück nach Baltimore fahre“). Die Beweisdetails erschienen in [6] und später in [3].

Sylvester erwähnte die Verbindung seiner Theorie von den Integralen über die Ableitungen sphärischer Harmoniken mit dem Satz von Ivory über die Anziehung einer Ellipse und schlug einige Verallgemeinerungen dieser Ideen vor.

Es scheint so, daß weder die algebraischen noch die philosophischen Ideen dieser Sylvesterschen *Note* von der mathematischen Gemeinschaft verstanden oder weiterentwickelt wurden. Die Seiten, die diese Note enthalten, waren in den Kopien seiner *Collected Papers* in der Bibliothek der Pariser École Normale Supérieure nicht einmal aufgeschnitten.

Die Note enthält folgenden (antibourbakischen) Absatz:

„Es ist in keiner Weise ungewöhnlich für die mathematische Forschung [...], daß ein Teil in einem gewissen Sinne mehr ist als das ganze; die Grundlage für dieses erstaunliche intellektuelle Phänomen besteht darin, daß, zu mathematischen Zwecken, alle Größen und Zusammenhänge (so lehrt uns die Erfahrung) im Zustand stetiger Veränderung, vergleichbar dem Strömen eines Flusses, betrachtet werden sollen.“

Diese allgemeine Philosophie läßt ihn zu dem Schluß kommen, daß „[...] eine allgemeine Aussage leichter zu zeigen sein muß als jeder ihrer Spezialfälle“.

Daraus, wie Sylvester zu der letzten Folgerung gekommen ist, können wir schließen, daß dieses wichtige Sylvestersche Prinzip (das von Bourbaki fast hundert Jahre später übernommen wurde) nicht die Notwendigkeit einer unglücklichen Versteinerung der Mathematik in sich birgt.

Literatur

1. V. I. Arnold. *A branched covering of $CP^2 \rightarrow S^4$, hyperbolicity and projectivity topology.* Sib. Math. J. 29 (5), 717–726, 1988.
2. V. I. Arnold. *Distribution of ovals of the real plane of algebraic curves, of involutions of four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integer-valued quadratic forms.* Funct. Anal. Appl. 5:169–176, 1971.
3. R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der Mathematischen Physik I., 4. Aufl.* Springer-Verlag, 1993.
4. J. L. Dupont and G. Lusztig. *On manifolds satisfying $w_1^2 = 0$.* Topology, 10:81–92, 1971 .
5. J. C. Maxwell. *Traité d'électricité et de magnétisme T.1.* Gauthier-Villars, Paris, 1885.
in englischer Sprache: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Unabridged 3d ed. V.1. – S.1., Dover, 1954.
6. A. Ostrowski. *Die Maxwell'sche Erzeugung der Kugelfunktionen.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, 33, 245–251, 1925.
7. J. J. Sylvester. *Note on spherical harmonics.* Philosophical Magazine, 2, 291–307, 1876.
siehe auch: *The Collected Mathematical Papers of J. J. Sylvester*, Vol. 3, Cambridge University Press, 37–51, 1909.

Anhang 2. Aufgaben

§ 1. Seminarmaterialien

Aufgabe 1. Gegeben sei ein Vektorfeld mit einer Singularität vom Typ eines Fokus (vgl. Zeichnung). Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $L_v u = 0$.



Aufgabe 2. Gegeben sei das Vektorfeld v durch

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}$$

Auf der Geraden $x = 1$ sei eine Anfangsfunktion des Cauchyproblems gegeben.

a) Welche Bedingung an die Anfangsfunktion $u|_{x=1}$ ist notwendig, damit eine Lösung des Cauchyproblems existiert? b) Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 3. Gegeben sei die Gleichung

$$u_t + uu_x = 0. \quad (*)$$

- a) Man finde ihre Charakteristiken.
- b) Man zeige, daß sich die Newtonsche Gleichung

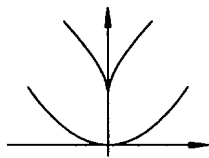
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

auf die Gleichung (*) zurückführen läßt, wenn man voraussetzt, daß $\varphi(t)$ die Position eines Teilchens auf der Geraden ist und $u(t, x)$ die Geschwindigkeit eines Teilchens, das sich zum Zeitpunkt t an der Stelle x der Geraden befindet.

Aufgabe 4. a) Man untersuche die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1$$

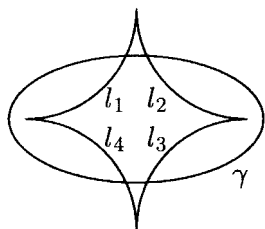
mit Anfangsbedingung $f|_{y=x^2} = 0$ in den Gebieten $y \geq x^2$ und $y \leq x^2$.



b) Man bestimme die Kurve (vgl. Zeichnung), die das Gebiet begrenzt, in dem eine Lösung eindeutig ist. Man zeige, daß diese Kurve die Menge der Krümmungszentren der Parabel $y = x^2$ ist.

c) Man wiederhole die ersten Aufgabenteile für die Randbedingung

$$f|_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} = 0.$$



d) Wir betrachten eine C^3 -kleine Störung einer Ellipse. Die gestörte Kurve γ ist in der Zeichnung dargestellt. Durch die inneren Einheitsnormalen an γ wird eine Hüllkurve definiert, deren Bogenlängen mit l_1, l_2, l_3, l_4 bezeichnet sind. Man zeige die Richtigkeit der Gleichung $l_1 + l_3 = l_2 + l_4$.

Aufgabe 5. Existiert eine Lösung des Cauchy-Problems

$$x(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, 0)$ auf der x -Achse? Falls eine Lösung existiert, ist sie eindeutig?

Hausaufgaben

Aufgabe 6. Es sei $\alpha = du - p_1 dx_1 - p_2 dx_2$. Zeigen Sie, daß keine dreidimensionale Integralmannigfaltigkeit existiert.

Aufgabe 7. Im $(2n + 1)$ -dimensionalen Raum der 1-Jets bestimme man die Charakteristiken einer a) linearen homogenen, b) linearen inhomogenen, c) quasilinearen Gleichung.

Aufgabe 8. Man untersuche Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Gleichung $yu_x = xu_y$, $u|_{x=1} = \cos y$ in einer Umgebung des Punktes $(1, y_0)$.

Aufgabe 9. Man bestimme das maximale t , für das sich die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \sin x, \quad u|_{t=0} = 0$$

auf $[0, t[$ fortsetzen läßt.

Die Wellengleichung, Wellen, die Korteweg-de-Vries-Gleichung

Aufgabe 10. Man bestimme die Charakteristiken der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 11. Welche Gestalt nimmt die Wellengleichung an, wenn man als Koordinatenachsen Charakteristiken wählt?

Aufgabe 12. Man gebe die allgemeine Gestalt der Lösung der Wellengleichung an.

Aufgabe 13. Für die Wellengleichung sei die Anfangsbedingung $u|_{t=0} = u_0(x)$ gegeben. Man bestimme eine Lösung zu dieser Anfangsbedingung. Ist sie eindeutig?

Aufgabe 14. Die Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV)

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

transformiere man mittels einer Substitution $u = \varphi(x - ct)$ (wir suchen eine Lösung als laufende Welle) in eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

Hausaufgaben

Aufgabe 15. Gegeben sei ein Koordinatenwechsel $x^i = a^{ij}y_j$. Man drücke $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ durch $\frac{\partial u}{\partial y^i}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ durch $\frac{\partial^2 u}{\partial y^i \partial y^j}$ aus und umgekehrt.

Aufgabe 16. Man zeichne ein Phasenportrait der Gleichung

$$\ddot{\varphi} = 3\varphi^2 + C\varphi + K$$

(das ist die KdV-Gleichung nach einer Substitution $u = \varphi(x - ct)$).

Aufgabe 17. Man finde in der Phasenebene (vgl. die vorige Aufgabe) eine Lösung in Form einer Welle, für die gilt $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$.

Die Wellengleichung

Aufgabe 18. Man beweise die d'Alembertsche Formel

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x - at) + \varphi(x + at) \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy,$$

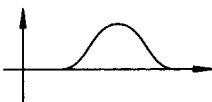
die die Lösung der Gleichung $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ einer Saite unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ liefert.

In den folgenden Aufgaben 19–24 geht es um eine halbbeschränkte ($x \geq 0$) Saite mit freiem ($u_x(0, t) \equiv 0$) oder fixiertem ($u(0, t) \equiv 0$) linkem Ende.

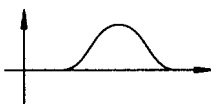
Aufgabe 19. Das linke Ende der Saite sei fixiert, und es seien Anfangsbedingungen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x \geq 0$ gegeben. Wie sind die Funktionen φ und ψ auf die Menge $x < 0$ fortzusetzen, daß die Einschränkung der Lösung des dadurch definierten Cauchy-Problems auf das Gebiet $\{(x, t) : x \geq 0\}$ mit der Lösung des ursprünglichen Cauchy-Problems übereinstimmt?

Aufgabe 20. Dasselbe für eine Saite mit freiem linken Ende.

Aufgaben 21–24. Erstellen Sie einen Trickfilm (d.h. Darstellungen der Lösungen des Cauchy-Problems für verschiedene Werte $t \geq 0$) für folgende Anfangsbedingungen

21. $\varphi(x)$: , $\psi(x) \equiv 0$, das Ende $x = 0$ fixiert.

22. Dasselbe mit freiem Ende $x = 0$.

23. $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x)$: , das Ende $x = 0$ fixiert.

24. Dasselbe mit freiem Ende $x = 0$.

Aufgabe 25. Zeichnen Sie einen Trickfilm für Anfangsbedingungen wie in den Aufgaben 21–24, aber für die beschränkte Saite $0 \leq x \leq l$ in folgenden Fällen:

- Beide Enden frei,
- beide Enden fixiert,
- ein Ende fixiert, das andere frei.

Hausaufgaben

Aufgabe 26. Man bestimme die allgemeine Lösung des Cauchy-Problems für eine beschränkte Saite mit Randbedingungen $u|_{x=0} = f(t)$, $u|_{x=l} = 0$, wenn

- $u|_{t=0} = u_t|_{t=0}$
- $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$.

Aufgabe 27. In den Voraussetzungen der vorigen Aufgabe sei $f(t)$ periodisch mit Periode T .

a) Wird die Lösung $u(x, t)$ für irgendwelche φ und ψ eine periodische Funktion in t sein?

b) Verifizieren Sie, daß es für $T = (p/q)\tau$ keine periodische Lösung gibt, wobei p und q ganze Zahlen sind und $\tau = 2l/a$.

Klausuraufgaben

1. Variante

1. Man löse das Cauchy-Problem $xu_x + u_y = 0$, $u|_{y=0} = \sin x$.
2. Für welche Werte von t ist die Lösung des Cauchy-Problems $u_t + uu_x = -x^3$, $u|_{t=0}$ auf das ganze Intervall $[0, t[$ fortsetzbar?
3. Man erstelle Trickfilme:

a) $u_{tt} = u_{xx}$, $\varphi \equiv 0$, $\psi : \begin{array}{c} \text{0} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \quad \uparrow \\ \quad 1/2 \end{array}$, fixiertes Ende $x = 0$, freies Ende $x = 1$.

b) $u_{tt} = u_{xx}$, $u|_{t=0} : \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \quad \uparrow \\ \quad +\infty \end{array}$, $u_t|_{t=0} \equiv 0$, $u|_{x=0} \equiv 0$.

4. Man bestimme die Lösung des Cauchy-Problems $u_{tt} = u_{xx}$ zu der Anfangsbedingung $u|_{t=0} = \sin^3 x$, $u_t|_{t=0} = \sin x$.
5. Gegeben sei die Reihe $1 + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \dots + \frac{1}{n} \cos nx + \dots$. Handelt es sich dabei um die Fourierreihe einer C^1 -Funktion?
6. Es sei $\{\varphi_k\}$ ein orthonormales System. Die Reihe $\sum (f, \varphi_k) \varphi_k$ konvergiere gegen f in L_2 . Man drücke $\|f\|_{L_2}$ durch die Fourierkoeffizienten aus (Parsevalsche Gleichung).

2. Variante

1. Sind die Funktionen der Gleichung $x \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}$ im \mathbb{R}^2 alle Funktionen von xy ?
2. Finden Sie die Lösung der Gleichung $yuu_x + xuu_y = xy$, deren Graph die Kurve $x = y^2 + u^2 = 1$ schneidet.
3. Zeichnen Sie Trickfilme:

a) $u_{tt} = u_{xx}$, $u|_{t=0} : \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ \quad \uparrow \end{array}$ $u_t|_{t=0} : \begin{array}{c} \text{---} \\ \quad \uparrow \end{array}$

b) $u_{tt} = u_{xx}$, $\varphi : \begin{array}{c} \text{0} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \quad \uparrow \\ \quad 1/2 \end{array}$, $\psi \equiv 0$, das Ende $x = 0$ fixiert, das Ende $x = 1$ frei.

4. Lösen Sie das Cauchy-Problem $u_{tt} = u_{xx}$ mit den Anfangsbedingungen $u|_{t=0} = \cos x$, $u_t|_{t=0} = \cos^3 x$.
5. Gegeben sei die Reihe $1 + \frac{1}{2 \ln 2} \cos 2x + \dots + \frac{1}{n \ln n} \cos nx + \dots$. Handelt es sich um die Fourierreihe einer C^1 -Funktion?
6. Es sei $\varphi \in C^\omega(S^1)$, genauer, die Funktion φ sei holomorph im Streifen $|\operatorname{Im} z| < \beta$ und $\varphi(z + 2\pi) = \varphi(z)$. Zeigen Sie, daß $|\alpha_k| < ce^{-\beta k}$.

Konservative Systeme. Lissajousche Figuren

Aufgabe 28. Gegeben sei die Gleichung $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen.

b) Eine Lösung habe die Form: $A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \varphi)$. Zeigen Sie, daß $A^2 + B^2 = C^2$.

Im weiteren wird die Gleichung

$$\ddot{x} = -\nabla U(x) \quad (2.1)$$

betrachtet.

Aufgabe 29. Gegeben sei das Potential $U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Finden Sie alle Lösungen von (2.1), die die im Teil b) der vorigen Aufgabe gegebene Form haben.

Aufgabe 30. Gegeben sei das Potential $U(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung (2.1). Wie verhalten sich die Lösungen in der (x_1, x_2) -Ebene?

Aufgabe 31. Zeigen Sie, daß die Gesamtenergie eines konservativen Systems (2.1) ein erstes Integral dieses Systems darstellt.

Nun betrachten wir das Potential $U(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{2}$. Die allgemeine Lösung von (2.1) läßt sich bei geeigneter Wahl des Anfangszeitpunkts schreiben als

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin t, \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Aufgabe 32. Es seien $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}, \pi, 0$. Wie sehen die Lissajousschen Figuren im Rechteck $|x_1| \leq A_1$, $|x_2| \leq A_2$ aus? Was passiert, wenn φ seinen Wert von 0 zu π ändert? Man bestimme die Streckungsfaktoren der Ellipsen $U(x_1, x_2) = E$ und die Lissajousschen Figuren für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Hausaufgaben

Aufgabe 33. Gegeben sei das Potential $U(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 7xy$. Lösen Sie Gleichung (2.1).

Aufgabe 34. Gegeben sei das Potential $U(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 x_2^2$. Wir betrachten die Ellipse $U(x_1, x_2) \leq E$. Es seien $E_1 = \frac{x_1^2}{2}$, $E_2 = \frac{x_2^2}{2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{2}$, $E = E_1 + E_2$. Dann liegen x_1, x_2 in den Streifen $|x_1| \leq \sqrt{2E_1}$, $|x_2| \leq \sqrt{2E_2}$. Zeigen Sie, daß das Rechteck $|x_1| \leq \sqrt{2E_1} = A_1$, $|x_2| \leq \sqrt{2E_2} = A_2$ in die Ellipse $U(x_1, x_2) \leq E$ eingeschrieben ist.

Aufgabe 35. Zeigen Sie:

- Ist $\omega = \frac{m}{n}$, so ist die Lissajoussche Figur eine geschlossene Kurve.
- Ist $\omega \notin \mathbb{Q}$, so ist sie nicht geschlossen.

Aufgabe 36. Zeigen Sie: Für $\omega = n$ existiert eine Phase φ , so daß die Lissajoussche Figur der Graph eines Polynoms vom Grad n ist (nämlich des Tschebyscheff-Polynoms $p(x) = \cos(n \arccos x)$).

Aufgabe 37. Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ und der Kosinusbogen $y = 3 \cos(x/4)$ für $0 \leq x \leq 8\pi$. Man zeige, daß die Linien dieser Kurven gleich sind.

Harmonische Funktionen

Aufgabe 38. Zeigen Sie, daß der Winkel, unter dem ein Intervall aus einem Punkt seiner Ebene gesehen wird, eine harmonische Funktion in der aufgespannten Ebene ohne die beiden Endpunkte des Intervalls ist.

Aufgabe 39. Man konstruiere eine Funktion, die im Einheitskreis harmonisch ist und auf zwei Bögen S_1 und S_2 mit $S_1 \cup S_2 = S^1$ vorgegebene Werte C_1 und C_2 annimmt.

Aufgabe 40. Man löse die analoge Aufgabe für eine Unterteilung der Kreislinie in n Bögen S_1, \dots, S_n und vorgegebene Werte C_1, \dots, C_n .

Aufgabe 41. Man formuliere die Newtonschen Gleichungen der Bewegung freier Teilchen im Polarkoordinatensystem.

Hausaufgaben

Aufgabe 42. Man zeige, daß die Lagrangefunktionen $L_1 = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$ und $L_2 = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ ihre Wirkungsminima jeweils auf ein und derselben Kurve annehmen (nämlich der kürzesten, die zwei Punkte verbindet).

Aufgabe 43. Man berechne Δ in Polar- und in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 44. Man zeige, daß die Größe des Raumwinkels, unter dem eine feste geschlossene Kontur im \mathbb{R}^3 aus einem beweglichen Punkt des Raums gesehen wird, eine harmonische Funktion dieses Punktes auf derjenigen Mannigfaltigkeit ist, die das Komplement der Kontur bedeckt.

§ 2. Aufgaben des schriftlichen Examens

1995¹

1 (1) Ist durch

$$z = r^2 + \frac{2}{9} \quad (*)$$

(mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) eine glatte Fläche im euklidischen Raum definiert? Ist sie konvex? Bestimmen Sie ihre Krümmung.

- 2 (2) Bestimmen Sie im Ursprung des Koordinatensystems den Wert des Potentials, das durch eine Doppelschicht der Dichte 1 entlang der Fläche (*) erzeugt wird.
- 3 (1,2,3,3,6) Bestimmen Sie den Mittelwert folgender Funktionen über die Fläche (*);
a) z ; b) $1/r$; c) z/r^3 ; d) r^2 ; e) $1/r^3$.
- 4 (5) Man löse das innere Dirichlet-Problem mit Randbedingung $u = 1/r^3$ auf der Fläche (*) (für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$).
- 5 (5) Wir betrachten das Einfachschichtpotential der Dichte z , die auf der Fläche (*) verteilt ist. Man bestimme den Mittelwert dieses Potentials über die Sphäre $r^2 = 1$.
- 6 (2,4) Man bestimme die obere und untere Grenze des Dirichletschen Integrals

$$\iiint (\text{grad } u)^2 dx dy dz$$

über das von der Fläche (*) berandete Gebiet für die Menge der auf dem Abschluß dieses Gebiets glatten Funktionen, die auf dem Rand mit r^2 übereinstimmen.

- 7 (6) Für kleine $|t|$ bestimme man im Punkt ($x = y = 0, z = 1/2$) den Wert der Lösung f der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \text{ grad } u) = f^2,$$

wobei u die Lösung aus Aufgabe 4 ist; die Anfangsbedingung ist ($f \equiv 1$ für $t = 0$).

HINWEIS. Dafür braucht man nicht notwendig Aufgabe 4 gelöst zu haben, Aufgabe 7 ist unabhängig davon lösbar.

¹ Neben jeder Aufgabennummer ist in Klammern die erreichbare Punktzahl bei korrekter Lösung der Aufgabe (des Aufgabenteils) angegeben. Die anzunehmenden Notenkriterien bei einem dreistündigen Examen sind: „befriedigend“ ab 12 Punkten, „gut“ ab 16 Punkten, „sehr gut“ ab 26 Punkten (die maximale Gesamtpunktzahl ist 40).

1996

1. Gegeben sei das Vektorfeld $v(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ und die Funktion $u|_{x=1} = f(y)$. Unter welcher Bedingung an f in einer Umgebung des Punktes $(1, 0)$ existiert eine Lösung des Cauchy-Problems für die Gleichung $L_v u = 0$? Ist sie eindeutig?
2. Wir betrachten die Gleichung

$$\ddot{x} = -\nabla U(x), \quad (**)$$

wobei $x = (x_1, x_2)$, $U(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2$. Für welche (reellen) Werte a sind alle Lösungen der Gleichung $(**)$ periodisch?

3. Auf zwei Geraden im \mathbb{R}^3 sei eine elektrische Ladung verteilt: Auf der Geraden $z = 1$, $y = x$ mit der Dichte 1 und auf der Geraden $z = -1$, $y = -x$ mit der Dichte -1 . Man bestimme die durch diese Ladungen gegebenen Äquipotentialflächen.
4. Auf der Sphäre $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sei eine Funktion v gegeben, die mit Ausnahme des Punktes $N = (0, 0, 1)$ überall harmonisch ist. Es seien \mathbb{R}^2 die Ebene $z = 0$ und $p : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion. Außerdem sei $u(x, y) = v(p^{-1}(x, y))$. Zeigen Sie, daß $\int_0^{2\pi} u_r(1, \varphi) d\varphi = 0$.

Vladimir Igorevich ARNOLD

Geboren in Odessa (1937)

Abschluß an der mechanisch-mathematischen Fakultät der Staatlichen Universität Moskau (MGU) (1959)

Doktor der physikalisch-mathematischen Wissenschaften (1963)

Professor (MGU, 1965)

Gewähltes Mitglied der

Londoner mathematischen Gesellschaft (1976)

Nationalen Akademie der Wissenschaften der USA (1983)

Französischen Akademie der Wissenschaften (1984)

Amerikanischen Akademie der Künste und Wissenschaften (1987)

Londoner königlichen Gesellschaft (1988)

Italienischen Nationalen Akademie „dei Lincei“ (1989)

Europäischen Akademie der Wissenschaften (1990)

Russischen Akademie der Wissenschaften (1990)

Russischen Akademie der Naturwissenschaften (1991)

Präsident der Moskauer Mathematischen Gesellschaft (1996)

Er ist Autor von über 200 wissenschaftlichen Publikationen, darunter mehr als 20 Monographien.

Aus dem Vorwort des Autors zur zweiten Auflage:

„Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen galt zur Mitte des 20. Jahrhunderts als Glanzstück der Mathematik. Grund dafür waren zum einen die Schwierigkeit und Bedeutung der Probleme, mit denen sie sich befaßt, zum anderen die Tatsache, daß sie sich später entwickelt hatte als die meisten anderen mathematischen Disziplinen.

Heute neigen viele dazu, dieses bemerkenswerte mathematische Gebiet mit einer gewissen Geringschätzung als eine altmodische Kunst, mit Unglei-

chungen zu jonglieren, oder als Versuchsgelände zur Erprobung der Funktionalanalysis zu betrachten.

Der Autor dieses äußerst kurzen Vorlesungskurses war bestrebt, Mathematikstudenten mit minimalen Vorkenntnissen (Lineare Algebra, Grundlagen der Analysis, Gewöhnliche Differentialgleichungen) ein Kaleidoskop fundamentaler Ideen der Mathematik und der Physik vorzustellen.

Anstelle des in mathematischen Büchern üblichen Prinzips der maximalen Allgemeinheit hat sich der Autor bemüht, am Prinzip der minimalen Allgemeinheit festzuhalten, gemäß welchem jede Idee zunächst in der einfachsten Situation klar verstanden sein muß, bevor die entwickelte Methode auf kompliziertere Fälle übertragen werden kann.

Besondere Aufmerksamkeit wurde auf die Wechselwirkung des Gegenstandes mit anderen Bereichen der Mathematik gerichtet, insbesondere der Geometrie von Mannigfaltigkeiten, der symplektischen Geometrie und Kontaktgeometrie, der komplexen Analysis, der Variationsrechnung und der Topologie. Der Autor richtet sich an wißbegierige Studenten, hofft aber gleichzeitig, daß sogar professionelle Mathematiker mit anderen Spezialgebieten durch dieses Buch die grundlegenden und daher einfachen Ideen der mathematischen Physik und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen kennenlernen können.“