ANHANG 1 : Nichtlineare Verfahren

a) Nichtlineare Duoplexverfahren

Wie im Kapitel 3 gezeigt wurde, eignet sich das Duoplexverfahren besonders gut, wenn das Problem viele Restriktionen aufweist.

Bei einem nichtlinearen Optimierungsproblem ist es in vielen Fällen zweckmässig, vor allem die nichtlinearen Restriktionen zu linearisieren, indem man diese durch eine Anzahl von Tangentialebenen ersetzt. Im allgemeinen entstehen dabei sehr viele lineare Restriktionen, auf die sich das Duoplexverfahren günstig anwenden lässt. Man vergleiche dazu die Arbeit von Künzi [20] über "The Duoplex Method in Nonlinear Programming".

b) Nichtlineare Dekompositionsverfahren

Verschiedene Autoren haben versucht, Dekompositionsmethoden für konvexe Optimierungsprobleme zu entwickeln.

Es ist leicht zu sehen, dass sich die Dekompositionsmethode von Dantzig-Wolfe für den gemischten (linearen und nichtlinearen) Fall, nämlich

$$
\begin{array}{llr}
\text{Max} \quad L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n & & \\
\qquad A_1(x_1) & = & 0 \\
\qquad\qquad A_2(x_2) & = & 0 \\
\qquad\qquad\qquad \ddots \quad A_n(x_n) & = & 0 \\
B_1x_1 + B_2x_2 + \dots\dots + B_nx_n & = & b \\
x_k \geqslant 0 \qquad (k=1,\dots,n) & &
\end{array}
$$

mit x_k als n_k - Vektor, $A_k(x_k)$ als konkave Vektorfunktion, und B_k als $(m_k \times n_k)$-Matrix, ohne wesentliche Aenderungen anwenden lässt (vgl. z.B. Baumol-Fabian [2]). In obigem Fall sind nur die Unterprobleme nichtlinear.

Noch allgemeinere Probleme wie

$$\text{Max } L = c(x_1, \ldots, x_n)$$

$$A_k(x_k) \leqslant 0 \qquad (k=1, \ldots, n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} B_k(x_k) \leqslant 0$$

werden meistens linearisiert (man vgl. dazu Huard [14], Wolfe [35] , Dantzig [8] .

Einen Spezialfall bilden die nichtlinearen Optimierungsprobleme mit quadratischer Zielfunktion und linearen Restriktionen für den Wolfe [35] und Beale [4] simplexähnliche Lösungsverfahren entwickelt haben.

Sind für diesen Fall die Restriktionen blockangular, so hat Whinston [33] ein entsprechendes Dekompositionsverfahren entwickelt.

Die Dekompositionsmethoden von Benders und Rosen kann man auch verallgemeinern. Sie lassen sich anwenden auf

$$\text{Min} \quad L^{*} = \sum_{k=1}^{n} u_k a_k + b(v)$$

$$u_k A_k + B_k(v) \geq c_k \quad (k=1,\dots,n)$$

$$(b(v) \text{ konvex}, \quad B_k(v) \text{ konkav})$$

(vgl. Benders [5] , Rosen [26] , Rosen-Ornea [28].)

Hier bleiben die Unterprobleme linear, während das Hauptproblem nichtlinear wird.

Die Dekomposition mit Linearisierung für allgemeinere Probleme ist von Benders [5] beschrieben worden.

Schliesslich ist hier die Dekompositionsmethode von Sanders [29] zu erwähnen. Sie ist anwendbar auf Probleme der Form

$$\text{Max} \quad L = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k)$$

$$A_k(x_k) \leq a_k \qquad (k=1,\dots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} B_k(x_k) \leq b \quad ,$$

wobei $c_k(x_k)$ konkave und $A_k(x_k)$, $B_k(x_k)$ konvexe Vektorfunktionen darstellen.

ANHANG 2 : Beispiele

a) Die gewöhnliche revidierte Simplexmethode

Man löse mit der gewöhnlichen revidierten Simplexmethode das Problem:

$$\text{Max } L = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

bezüglich

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 8 \\ 2x_2 + 5x_3 + x_5 & = & 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_6 & = & 16 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\ldots 6).$$

Eine zulässige Ausgangslösung ist sofort anzugeben:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$
$x_4 = 8,\ x_5 = 10,\ x_6 = 16$
$L = 0.$

Die optimale Lösung ist aus dem letzten Tableau auf Seite 106 zu entnehmen:

Tableaufolge zum Beispiel a) Seite 105

	Basisvariable	1	x_4	x_5	x_6	L	x_1	x_2	x_3
r=0	x_4	8	1	0	0		2	3	0
	x_5	10	0	1	0		0	2	5
	x_6	16	0	0	1		3	2	4
	L	0	0	0	0	1	-3	-5	-4
r=1	x_2	2,67	0,33	0	0				0
	x_5	4,67	-0,67	1	0				5
	x_6	10,67	-0,67	0	1				4
	L	13,33	1,67	0	0	1	0,33	0	-4
r=2	x_2	2,67	0,33	0	0		0,67		
	x_3	0,93	-0,13	0,2	0		-0,27		
	x_6	6,93	-0,13	-0,8	1		2,73		
	L	17,07	1.13	0,8	0	1	-0,73	0	0
r=3	x_2	0,98	0,37	0,20	-0,24				
	x_3	1,61	-0,15	0,12	0,10				
	x_1	2,54	-0,05	-0,29	0,37				
	L	18,93	1,10	0,59	0,27	1	0	0	0

$x_1 = 2,54$, $x_2 = 0,98$, $x_3 = 1,61$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, $L = 18,93$

Ferner lautet die optimale duale Lösung:

$u_1 = 1,10$
$u_2 = 0,59$
$u_3 = 0,27$.

Es sei hier der Uebergang von r=1 zu r=2 illustriert.

Aus dem Tableau für r=1 berechnet man die Koeffizienten der Schlupfvariablen x_4, x_5, x_6 und die Konstanten mit den gewöhnlichen Austauschregeln (Rechtecksregeln).

Man erhält dann u.a. die Basisinverse

$$A_B^{-1(2)} = \begin{pmatrix} 0,33 & 0 & 0 \\ -0,13 & 0,2 & 0 \\ -0,13 & 0,8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und die Multiplikatoren} \quad \begin{aligned} u_1^{(2)} &= 1,13 \\ u_2^{(2)} &= 0,8 \\ u_3^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Dann bestimmt man die übrigen Koeffizienten der Zielfunktion, es ist

$$-c_1^{(2)} = -c_1^{(o)} + \sum_{i=1}^{3} u_i^{(2)} a_{i1}^{(o)} = -0,73 \quad \text{und}$$

$c_2^{(2)} = c_3^{(2)} = 0$ weil die zugehörige Variablen in der Basis sind.

Nach Wahl der Austauschspalte (hier x_1) berechnet man die Elemente der Austauschspalte wie folgt:

$$a_{11}^{(2)} = \sum_{i=1}^{3} \beta_{1i}^{(2)} a_{i1}^{(o)} = 0,67 \quad \text{und genau so}$$

$$a_{21}^{(2)} = -\,0,27$$

$$a_{31}^{(2)} = 2,73\ .$$

b) Die Produktform der revidierten Simplexmethode

Bei der Lösung des selben Problems a) mit der Produktform der revidierten Simplexmethode verwendet man die Elementarmatrizen

$$I^{(1)}=\begin{pmatrix} 0,33 & 0 & 0 & 0 \\ -0,67 & 1 & 0 & 0 \\ -0,67 & 0 & 1 & 0 \\ 1,67 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & 1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I^{(3)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,24 & 0 \\ 0 & 1 & 0,10 & 0 \\ 0 & 0 & 0,37 & 0 \\ 0 & 0 & 0,27 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Koeffizienten der Zielfunktion hier mit einbezogen wurden (vgl. (2,31) - (2.34)).

Die erweiterte Basisinverse berechnet sich nach der Formel

$$A_B^{-1(r)} = I^{(r)} \quad I^{(r-1)} \dots I^{(1)} \qquad \text{(vgl. (2.30))}.$$

c) Die Duoplexmethode

Man löse das Problem in a) mit Hilfe der Duoplexmethode

$$\text{Max} \quad L = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

bezüglich

$$\begin{aligned} x_4 &= 8 - 2x_1 - 3x_2 && \geq 0 \\ x_5 &= 10 \quad - 2x_2 - 5x_3 && \geq 0 \\ x_6 &= 16 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 && \geq 0 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \ . \end{aligned}$$

1. Phase

$$\underset{1 \leq i \leq 3}{\text{Min}} \frac{\sum_{j=1}^{3} a_{oj}\, a_{ij}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{3} a_{oj}^{2}\right)\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^{2}\right)}}$$ ist angenommen für $i = i_p = 3$.

Man tauscht also x_2 gegen x_6 aus und erhält das Tableau:

	1	x_1	x_6	x_3
x_4	-16	2,5	1,5	6
x_5	- 6	3	1	-1
x_2	8	-1,5	-0,5	- 2
L	40	- 4,5	-2,5	- 6

2. Phase

	1	x_1	x_6	x_4
x_3	2,67	-0,42	-0,25	0,17
x_5	-8,67	3,42	1,25	-0,17
x_2	2,67	-0,67	0	-0,33
L	24	- 2	- 1	- 1

	1	x_5	x_6	x_4
x_3	1,61	-0,12	-0,01	0,15
x_1	2,54	0,29	-0,37	0,05
x_2	0,98	-0,19	0,24	-0,37
L	18,93	-0,58	-0,27	-1,10

Die optimale Lösung lautet: $x_1 = 2,54$, $x_2 = 0,98$, $x_3 = 1,61$

und $L = 18,93$.

d) Die Dekompositionsmethode nach Dantzig und Wolfe

Man löse mit Hilfe der Dantzig/Wolfe'schen Dekompositionsmethode das Problem:

$$\begin{array}{lrl}
\text{Max } L = & x_{11} + 8x_{12} + \frac{1}{2}x_{21} + \frac{3}{2}x_{22} & + 18 \\
& 2x_{11} + 3x_{12} & \leqslant 6 \\
& 5x_{11} + x_{12} & \leqslant 5 \\
& 3x_{21} - x_{22} & \leqslant 12 \\
& -3x_{21} + x_{22} & \leqslant 0 \\
& x_{21} & \leqslant 4 \\
& x_{11} + 4x_{12} + \frac{7}{2}x_{21} + \frac{1}{2}x_{22} + x_{23} & = 1 \\
& & \\
& x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geqslant 0 . &
\end{array}$$

Als Bereiche der Unterprobleme hat man hier (vgl. Fig. 7a und 7b)

$$S_1 = \left\{ x_1 = (x_{11}, x_{12}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_{11} + 3x_{12} \leqslant 6 \\ 5x_{11} + x_{12} \leqslant 5 \end{array} , \; x_{11}, x_{12} \geqslant 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 = (x_{11}, x_{12}) \;\middle|\; x_1 = \sum_{h=1}^{4} \lambda_1^h \, x_1^h , \; \sum_{h=1}^{4} \lambda_1^h = 1, \; \lambda_1^h \geqslant 0 \right\} \text{ und}$$

$$S_2 = \left\{ x_2 = (x_{21}, x_{22}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x_{21} - x_{22} \leqslant 12 \\ -3x_{21} + x_{22} \leqslant 0 \\ x_{21} \leqslant 4 \end{array} , \; x_{21}, x_{22} \geqslant 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x_2 = (x_{21}, x_{22}) \;\middle|\; x_2 = \sum_{h=1}^{3} \lambda_2^h \, x_2^h , \; \sum_{h=1}^{3} \lambda_2^h = 1, \; \lambda_2^h \geqslant 0 \right\} .$$

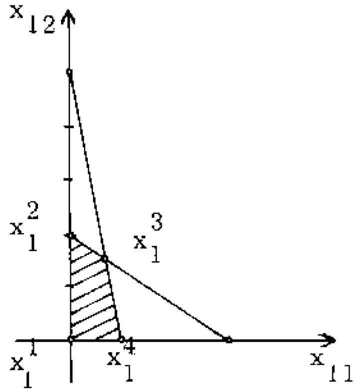

Fig. 7a

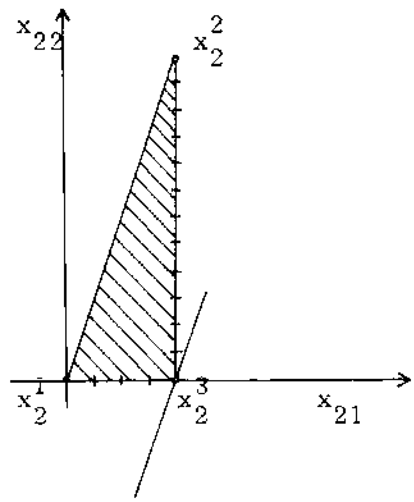

Fig. 76

Als zulässige Ausgangslösung nimmt man

$x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} = 0\ ,\quad x_{23} = 1$

d.h. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = 1$ und $v = v_1 = v_2 = 0$

Man erhält also

$r = 0$:

Basis	I	x_{23}	λ_1^1	λ_2^1	L	λ_2^2
x_{23}	1	1	0	0		20
λ_1^1	1	0	1	0		0
λ_2^1	1	0	0	1		1
L	18	0	0	0	1	-20

Mit $v = v_1 = v_2 = 0$ löst man dann die Unterprobleme.
Die Lösungen dazu sind $x_1^2 = (0,2)$, $L_1 = 16$

$x_2^2 = (4,12)$, $L_2 = 20$.

Der Austausch von x_{23} gegen λ_2^2 führt zu

$r = 1$:

Basis	1	x_{23}	λ_1^1	λ_2^1	L	λ_1^2
λ_2^2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0		$\frac{8}{20}$
λ_1^1	1	0	1	0		1
λ_2^1	$\frac{19}{20}$	$-\frac{1}{20}$	0	1		$-\frac{8}{20}$
L	19	1	0	0	1	- 8

Es ist jetzt $v = 1$, $v_1 = v_2 = 0$ und die Lösungen der Unterprobleme sind dann

$$x_1^2 = (0,2)\,, \quad L_1 = 8$$
$$x_2^1 = (0,0)\,, \quad L_2 = 0\,.$$

Nach Austausch von λ_2^2 gegen λ_1^2 hat man

$r = 2$:

Basis	1	x_{23}	λ_1^1	λ_2^1	L
λ_1^2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	
λ_1^1	$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{8}$	1	0	
λ_2^1	1	0	0	1	
L	20	2	0	0	1

Mit $v = 2$, $v_1 = v_2 = 0$ löst man die Unterprobleme und erhält als Lösungen

$$x_1^1 = (0,0) \;, \quad L_1 = 0$$

$$x_2^1 = (0,0) \;, \quad L_2 = 0 \;.$$

Also ist das Optimalitätskriterium $\mu \leq 0$ erfüllt, die optimale Lösung lautet: $\lambda_1^1 = \frac{7}{8}$, $\lambda_1^2 = \frac{1}{8}$, $\lambda_2^1 = 1$, $L = 20$

d.h. $x_1 = (x_{11}, x_{12}) = \frac{7}{8}(0,0) + \frac{1}{8}(0,2) = (0, \frac{1}{4})$

$x_2 = (x_{21}, x_{22}) = 1\,(0,0) = (0,0)$,

oder

$$x_{11} = x_{21} = x_{22} = 0 \;, \quad x_{12} = \frac{1}{4} \;, \quad x_{23} = 0 \;.$$

e) Die direkte Dekompositionsmethode nach Müller-Merbach

Mit der direkten Dekompositionsmethode von Müller-Merbach ist das folgende Problem zu lösen (vgl. Müller-Merbach [24])

$$\text{Max } L = 8x_{11} + 3x_{12} + 8x_{21} + 6x_{22}$$

bezüglich

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
4x_{11} & + & 3x_{12} & + & x_{21} & + & 3x_{22} & + & y_{01} & = 16 \\
4x_{11} & - & x_{12} & + & 3x_{21} & & & + & y_{02} & = 12 \\
x_{11} & + & 2x_{12} & & & & & + & y_{11} & = 8 \\
3x_{11} & + & x_{12} & & & & & + & y_{12} & = 10 \\
& & & & 2x_{21} & + & 3x_{22} & + & y_{21} & = 9 \\
& & & & 4x_{21} & + & x_{22} & + & y_{22} & = 12
\end{array}$$

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}) \geqslant 0 \qquad (k=1,2)$$

$$y_k = (y_{k1}, y_{k2}) \geqslant 0 \qquad (k=0,1,2).$$

Als Ausgangslösung nimmt man $x_k = 0$ $(k=1,2)$

$r = 0$:

	1	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}
y_{01}	16	-4	-3	-1	-3
y_{02}	12	-4	1	-3	0
y_{11}	8	-1	-2	0	0
y_{12}	10	-3	-1	0	0
y_{21}	9	0	0	-2	-3
y_{22}	12	0	0	-4	-1
L	0	8	3	8	6

Man tauscht nun x_{11} gegen y_{02} und erhält das Tableau für r=1. Dabei werden nur die Koeffizienten in den Feldern A_{0k}, A_{kk}, die b und c Vektoren und die neue Austauschspalte berechnet.

r = 1:

	1	y_{02}	x_{12}	x_{21}	x_{22}
y_{01}	4	1	-4	2	-3
x_{11}	3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0
y_{11}	5	$\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{4}$		0
y_{12}	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$		0
y_{21}	9			-2	-3
y_{22}	12			-4	-1
L	24	-2	5	2	6

Nach Austausch von x_{22} gegen y_{01} bekommt man:

r = 2:

	1	y_{02}	x_{12}	x_{21}	y_{01}
x_{22}	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_{11}	3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0
y_{11}	5	$\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	
y_{12}	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	
y_{21}	5			-4	1
y_{22}	$\frac{32}{3}$			$-\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$
L	32	0	- 3	6	- 2

Zum Beispiel werden die Koeffizienten $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ der Austausch-

spalte bestimmt nach (4.64):

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} (-4) \quad (-\frac{3}{4})$$

weil $A_{0'1'}^{(2)-1} = (-\frac{1}{4})^{-1} = -4$ ist.

r = 3:

	1	y_{02}	x_{12}	y_{21}	y_{01}
x_{22}	$\frac{13}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_{11}	$\frac{33}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{16}$
y_{11}	$\frac{95}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{2}$		
y_{12}	$\frac{61}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$		
x_{21}	$\frac{5}{4}$		1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y_{22}	$\frac{29}{6}$		$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{5}{6}$
L	$\frac{79}{2}$	$-\frac{3}{2}$	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Da das nächste Pfeilerelement im Feld A_{21} liegen würde, muss das Tableau für r=3 zuerst umgeformt werden, nämlich durch Vertauschung der Zeilen x_{22} gegen y_{22} und der Spalten x_{12} gegen y_{01}. Dabei wird die Formel (4.64) benützt um die fehlenden Daten zu bestimmen.

Es ergibt sich für

r = 3:

	1	y_{02}	y_{01}	y_{21}	x_{12}
y_{22}	$\frac{29}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{10}{3}$
x_{11}	$\frac{33}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{2}$
y_{11}	$\frac{95}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$		$-\frac{3}{2}$
y_{12}	$\frac{61}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$		$\frac{1}{2}$
x_{21}	$\frac{5}{4}$			$-\frac{1}{4}$	1
x_{22}	$\frac{13}{6}$			$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$
L	$\frac{79}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	3

r = 4 (optimal):

	1	y_{02}	y_{01}	y_{21}	y_{22}
x_{12}	$\frac{29}{20}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$-\frac{3}{10}$
x_{11}	$\frac{107}{80}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{3}{20}$
y_{11}	$\frac{301}{80}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{9}{16}$		
y_{12}	$\frac{363}{80}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$		
x_{12}	$\frac{27}{10}$			$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$
x_{22}	$\frac{6}{5}$			$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
L	$\frac{877}{20}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{20}$	$-\frac{9}{10}$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ABADIE, J.M. and A.C. WILLIAMS: Dual and parametric methods in decomposition. In Graves R. and P. Wolfe (eds.): Recent advances in mathematical programming. McGraw-Hill (1963), p. 149-158.

[2] BAUMOL, W.J. and T. FABIAN: Decomposition, pricing for decentralization and extremal economies. Management Science 11 (1965), p. 1-32.

[3] BEALE, E.M.L.: Cycling in the dual simplex algorithm. Naval Research Logistics Quarterly 2 (1955), p. 269-276.

[4] - : On minimizing a convex function subject to linear inequalities. Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 17(1955), p. 173-184.

[5] BENDERS, J.F. : Partition in mathematical programming. Diss. Utrecht (1960).

[6] - : Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. Numerische Mathematik 4 (1962), S. 238-252.

[7] CHARNES, A., W.W. COOPER and A. HENDERSON: An introduction to linear programming. Wiley (1953)

[8] DANTZIG, G.B.: Linear programming and extensions. Princeton (1963) Deutsche Uebersetzung: Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer (1966).

[9] - and P. WOLFE: Decomposition principle for linear programming. Operations Research Society 8 (1960), p. 101-111.

[10] - and - : The decomposition algorithm for linear programming. Econometrica 29 (1961), p. 767-778.

[11] FARKAS, J.: Ueber die Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 124 (1902), S. 1-24.

[12] GASS, S. I.: Linear programming: Methods and applications. McGraw-Hill (1964).

[13] GORDAN, P.: Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Mathematische Annalen 6 (1873), S. 23-28.

[14] HUARD, P.: Application du principe de décomposition aux programmes mathématiques non linéaires. Note Electricité de France (1963), HR-5476/3.

[15] KRELLE, W. und H.P. KUENZI: Lineare Programmierung. Industrielle Organisation Zürich (1958).

[16] KUHN, H.W. and A.W. TUCKER: Linear inequalities and related systems. Princeton (1956).

[17] KUENZI, H.P. und W. KRELLE: Nichtlineare Programmierung. Springer (1962).

[18] - : Die Duoplex-Methode. Unternehmensforschung 7 (1963), S. 103-116.

[19] - and H. TZSCHACH: The duoplex-algorithm. Numerische Mathematik 7 (1965), p. 222-225.

[20] - : The duoplex method in nonlinear programming. Journal SIAM Control 4 . 1 (1966), p. 130-137.

[21] - , H. TZSCHACH und G. ZEHNDER: Numerische Methoden der mathematischen Optimierung mit ALGOL- und FORTRAN- Programmen. Teubner (1966).

[22] MINKOWSKI, H. : Geometrie der Zahlen. Teubner (1910).

[23] MUELLER-MERBACH, H.: Die symmetrisch revidierte Simplex-Methode der linearen Planungsrechnung. Elektronische Datenverarbeitung 7 (1965), S. 105-113.

[24] - : Das Verfahren der direkten Dekomposition in der linearen Planungsrechnung. Ablauf- und Planungsrechnung 6 (1965), S. 306-322.

[25] OHSE, D.: Numerische Erfahrungen mit zwei Dekompositionsverfahren der linearen Planungsrechnung. Ablauf- und Planungsrechnung 7 (1966).

[26] ROSEN, J. B. : Convex partition programming. In Graves, R. and P. Wolfe (eds.): Recent advances in mathematical programming. McGraw-Hill (1963), p. 159-176.

[27] - : Primal partition programming for block diagonal matrices. Numerische Mathematik 6 (1964), S. 250-260.

[28] - and J. C. ORNEA: Solution of nonlinear programming problems by partitioning. Management Science 10 (1963/64), p. 160-173.

[29] SANDERS, J. L.: A nonlinear decomposition principle. Operations Research 13 (1965), p. 266-271.

[30] TAN, S. T.: Beiträge zur Dekomposition von linearen Programmen (I u. II). Unternehmensforschung 10 (1966).

[31] WAGNER, H. M.: A comparison of the original and revised simplex methods. Operations Research 5 (1957), p. 361-369.

[32] WEYL, H.: Elementare Theorie der konvexen Polyeder. Commentarii Math. Helv. 7 (1935), S. 290-306.

[33] WHINSTON, A.: A decomposition algorithm for quadratic programming. Cowles Foundation. Disc. Paper 172 (1964).

[34] WOLFE, P. : The simplex method for quadratic programming. Econometrica 27 (1959), p. 382-398.

[35] - : Some simplex-like nonlinear programming procedures. Operations Research 10 (1962), p. 437-447.

[36] ZOUTENDIJK, G.: Methods of feasible directions. Elvesier (1960).

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.