INDEX DES NOTATIONS

Les chiffres de référence indiquent successivement le chapitre, le paragraphe et le numéro.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Les chiffres de référence indiquent successivement le chapitre, le paragraphe et le numéro.

Résumé de quelques propriétés importantes des algèbres de Lie semi-simples

Dans ce résumé, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie semi-simple sur k.

Sous-algèbres de Cartan

1) Soit E l'ensemble des sous-algèbres commutatives de $\mathfrak{g}$ qui sont réductives dans $\mathfrak{g}$; c'est aussi l'ensemble des sous-algèbres commutatives de $\mathfrak{g}$ dont tous les éléments sont semi-simples. Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont les éléments maximaux de E.

2) Soit x un élément régulier de $\mathfrak{g}$. Alors x est semi-simple. Il existe une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et une seule qui contient x; c'est le commutant de x dans $\mathfrak{g}$.

3) Soit x un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$. Alors x appartient à une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Pour que x soit régulier, il faut et il suffit que la dimension du commutant de x soit égale au rang de $\mathfrak{g}$.

4) Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{h}$ est déployante si, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est trigonalisable. On dit que $\mathfrak{g}$ est déployable si $\mathfrak{g}$ possède une sous-algèbre de Cartan déployante (c' est le cas si k est algébriquement clos). On appelle algèbre de Lie semi-simple déployée un couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple et où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}$.

Dans la suite de ce résumé, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ désigne une algèbre de Lie semi-simple déployée.

Systèmes de racines

5) Pour tout élément α du dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, soit $\mathfrak{g}^\alpha$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[h, x] = \alpha(h)x$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. Si $\alpha = 0$, on a $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{h}$. On appelle racine de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tout $\alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\}$ tel que $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$. On note $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (ou simplement R) l'ensemble

des racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. C'est un système de racines réduit dans $\mathfrak{h}^*$ au sens de VI, § 1, n° 4. Pour que $\mathfrak{g}$ soit simple, il faut et il suffit que R soit irréductible.

6) Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1. L'espace vectoriel $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ est contenu dans $\mathfrak{h}$, de dimension 1, et possède un élément H_α et un seul tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$; on a $H_\alpha = \alpha^\vee$ (VI, § 1, n° 1); l'ensemble des H_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}$, est le système de racines $\mathrm{R}^\vee$ inverse de R.

7) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha$. Il existe une famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on ait $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$. Tout $x \in \mathfrak{g}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = h + \sum_{\alpha \in \mathrm{R}} \lambda_\alpha X_\alpha, \qquad \text{où} \quad h \in \mathfrak{h}, \quad \lambda_\alpha \in k.$$

Le crochet de deux éléments se calcule au moyen des formules:

$$\begin{aligned} [h, X_\alpha] &= \alpha(h) X_\alpha \\ [X_\alpha, X_\beta] &= 0 && \text{si} \quad \alpha + \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\} \\ [X_\alpha, X_{-\alpha}] &= -H_\alpha \\ [X_\alpha, X_\beta] &= \mathrm{N}_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta} && \text{si} \quad \alpha + \beta \in \mathrm{R}, \end{aligned}$$

les $\mathrm{N}_{\alpha\beta}$ étant des éléments non nuls de k.

8) Soit B une base de R. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est engendrée par les X_α et les $X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \mathrm{B}$. On a $[X_\alpha, X_{-\beta}] = 0$ si $\alpha, \beta \in \mathrm{B}$ et $\alpha \neq \beta$. Soit $(n(\alpha, \beta))_{\alpha,\beta\in\mathrm{B}}$ la matrice de Cartan de R (relativement à B). On a $n(\alpha, \beta) = \alpha(H_\beta)$. Si $\alpha, \beta \in \mathrm{B}$ et $\alpha \neq \beta$, $n(\alpha, \beta)$ est un entier négatif, et l'on a

$$(\operatorname{ad} X_\beta)^{1-n(\alpha,\beta)} X_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad (\operatorname{ad} X_{-\beta})^{1-n(\alpha,\beta)} X_{-\alpha} = 0.$$

9) Si $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathrm{R}$, soit $q_{\alpha\beta}$ le plus grand entier j tel que $\beta - j\alpha \in \mathrm{R}$. On peut choisir la famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ de 7) de telle sorte que $\mathrm{N}_{\alpha,\beta} = \mathrm{N}_{-\alpha,-\beta}$ si $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathrm{R}$. On a alors $\mathrm{N}_{\alpha\beta} = \pm(q_{\alpha\beta} + 1)$. Il existe un automorphisme involutif θ de $\mathfrak{g}$ qui transforme X_α en $X_{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$; on a $\theta(h) = -h$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. Le sous-**Z**-module $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}$ de $\mathfrak{g}$ engendré par les H_α et les X_α est une sous-**Z**-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, et l'application canonique $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} k \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme.

Le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ se déduit par extension des scalaires d'une **Q**-algèbre de Lie semi-simple déployée.

10) Le groupe de Weyl, le groupe des poids, ... de R s'appellent le groupe de Weyl, le groupe des poids, ... de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Le groupe de Weyl sera noté W dans ce qui suit. On le considère comme opérant, non seulement sur $\mathfrak{h}^*$, mais aussi sur $\mathfrak{h}$ (par transport de structure). Si $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$) désigne le sous-**Q**-espace vectoriel de $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}^*$) engendré par les H_α (resp. les α), alors $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}^*$) s'identifie canoniquement à $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} k$ (resp. $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} k$), et $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$ s'identifie au dual de $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$. Quand

on parle des chambres de Weyl de R, on se place dans $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ ou dans $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^* = \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}^* \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$.

11) Soit Φ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Si $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{\beta}$ sont orthogonaux pour Φ. La restriction de Φ à $\mathfrak{g}^{\alpha} \times \mathfrak{g}^{-\alpha}$ est non dégénérée. Si $x, y \in \mathfrak{h}$, alors $\Phi(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathrm{R}} \alpha(x)\alpha(y)$. On a $\Phi(H_{\alpha}, H_{\beta}) \in \mathbf{Z}$. La restriction de Φ à $\mathfrak{h}$ est invariante par W et non dégénérée; sa restriction à $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ est positive.

12) Le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ne dépend, à isomorphisme près, que de $\mathfrak{g}$, et non de $\mathfrak{h}$. Par abus de langage, le groupe de Weyl, le groupe des poids, ... de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ s'appellent aussi le groupe de Weyl, le groupe des poids, ... de $\mathfrak{g}$.

Si R_1 est un système de racines réduit, il existe une algèbre de Lie semi-simple déployée $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ telle que $\mathrm{R}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ soit isomorphe à R_1; elle est unique, à isomorphisme près.

La classification des algèbres de Lie semi-simples déployables est ainsi ramenée à celle des systèmes de racines.

Sous-algèbres

13) Si $\mathrm{P} \subset \mathrm{R}$, on pose $\mathfrak{g}^{\mathrm{P}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{P}} \mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{h}_{\mathrm{P}} = \sum_{\alpha \in \mathrm{P}} kH_{\alpha}$. Soient $\mathrm{P} \subset \mathrm{R}$, $\mathfrak{h}'$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}^{\mathrm{P}}$. Pour que $\mathfrak{a}$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que P soit une partie close de R, et que $\mathfrak{h}'$ contienne $\mathfrak{h}_{\mathrm{P} \cap (-\mathrm{P})}$. Pour que $\mathfrak{a}$ soit réductive dans $\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que $\mathrm{P} = -\mathrm{P}$. Pour que $\mathfrak{a}$ soit résoluble, il faut et il suffit que $\mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) = \emptyset$.

14) Soient P une partie close de R, et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\mathrm{P}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre résoluble maximale de $\mathfrak{g}$;

(ii) $\mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) = \emptyset$ et $\mathrm{P} \cup (-\mathrm{P}) = \mathrm{R}$;

(iii) il existe une chambre C de R telle que $\mathrm{P} = \mathrm{R}_{+}(\mathrm{C})$ (cf. VI, § 1, n° 6).

On appelle sous-algèbre de Borel de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ et satisfaisant aux conditions ci-dessus. Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ est appelée une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ s'il existe une sous-algèbre de Cartan déployante $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b}$ soit une sous-algèbre de Borel de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$; si k est algébriquement clos, cela équivaut à dire que $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre résoluble maximale de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\mathrm{R}_+(\mathrm{C})}$ une sous-algèbre de Borel de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{b}$ est $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{g}^{\mathrm{R}_+(\mathrm{C})}$. Soit B la base de R associée à C; l'algèbre $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ est engendrée par les $\mathfrak{g}^{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathrm{B}$.

Si $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ sont des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$, il existe une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$; une telle sous-algèbre est déployante.

15) Soient P une partie close de R, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\mathrm{P}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\mathfrak{p}$ contient une sous-algèbre de Borel de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$;

(ii) $\mathrm{P} \cup (-\mathrm{P}) = \mathrm{R}$;

(iii) il existe une chambre C de R telle que $\mathrm{P} \supset \mathrm{R}_+(\mathrm{C})$.

On appelle sous-algèbre parabolique de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ et satisfaisant aux conditions ci-dessus. Une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est dite parabolique s'il existe une sous-algèbre de Cartan déployante $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{p}$ soit une sous-algèbre parabolique de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$.

Soient $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\mathrm{P}}$ une sous-algèbre parabolique de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Q l'ensemble des $\alpha \in \mathrm{P}$ tels que $-\alpha \notin \mathrm{P}$, et $\mathfrak{s} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\mathrm{P} \cap (-\mathrm{P})}$. Alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{g}^{\mathrm{Q}}$, $\mathfrak{s}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{\mathrm{Q}}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{p}$, et le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$. Le centre de $\mathfrak{p}$ est 0.

Automorphismes

16) Le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ engendré par les $e^{\mathrm{ad}\, x}$, avec x nilpotent, est le groupe $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}$; c'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$; il est égal à son groupe dérivé.

Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ se plonge de façon naturelle dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g} \otimes_k \bar{k})$. On pose

$$\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g} \otimes_k \bar{k});$$

c'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, indépendant du choix de $\bar{k}$. On a

$$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Le groupe dérivé de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ est $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Pour la topologie de Zariski, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ sont fermés dans $\mathrm{End}_k(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ est la composante connexe de l'élément neutre de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, et $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ est dense dans $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Soient B une base de R, et Aut(R, B) le groupe des automorphismes de R qui laissent stable B. Alors $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est produit semi-direct d'un sous-groupe isomorphe à Aut(R, B) et de $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$; en particulier, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ est isomorphe à Aut(R, B), lui-même isomorphe au groupe des automorphismes du graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$.

17) On appelle épinglage de $\mathfrak{g}$ un triplet $(\mathfrak{h}', \mathrm{B}, (X_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{B}})$, où $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}$, B une base de $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$, et où, pour tout $\alpha \in \mathrm{B}$, X_α est un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{g}^\alpha$. Le groupe $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des épinglages de $\mathfrak{g}$.

Le groupe $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ opère transitivement sur l'ensemble des couples $(\mathfrak{t}, \mathfrak{b})$ où $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$.

18) On note $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ l'ensemble des $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ tels que $s(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. On pose

$$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \qquad \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

Si $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, l'application contragrédiente de $s \mid \mathfrak{h}$ est un élément du groupe $\mathrm{A}(\mathrm{R})$ des automorphismes de R; on note cet élément $\varepsilon(s)$; l'application ε est un homomorphisme de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur $\mathrm{A}(\mathrm{R})$. On a $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}).\mathrm{Ker}\,\varepsilon$, et

$$\varepsilon(\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) = \varepsilon(\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) = \mathrm{W}.$$

Soient $\mathrm{T_P} = \mathrm{Hom}(\mathrm{P}(\mathrm{R}), k^*)$, $\mathrm{T_Q} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}(\mathrm{R}), k^*)$. L'injection de $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ dans $\mathrm{P}(\mathrm{R})$ définit un homomorphisme de $\mathrm{T_P}$ dans $\mathrm{T_Q}$; soit $\mathrm{Im}(\mathrm{T_P})$ son image. Si $t \in \mathrm{T_Q}$, soit $f(t)$ l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathrm{R} \cup \{0\}$, $f(t) \mid \mathfrak{g}^\alpha$ soit l'homothétie de rapport $t(\alpha)$; on a $f(t) \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et f est un homomorphisme injectif de $\mathrm{T_Q}$ dans $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Les suites:

$$\{1\} \to \mathrm{T_Q} \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{A}(\mathrm{R}) \to \{1\}$$

et

$$\{1\} \to \mathrm{T_Q} \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{W} \to \{1\}$$

sont exactes. On a $f(\mathrm{Im}(\mathrm{T_P})) \subset \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$; par passage au quotient, f définit un homomorphisme surjectif[1] $\mathrm{T_Q}/\mathrm{Im}(\mathrm{T_P}) \to \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Pour la topologie de Zariski, $f(\mathrm{T_Q})$ est fermé dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, et $f(\mathrm{Im}(\mathrm{T_P}))$ est dense dans $f(\mathrm{T_Q})$.

Modules de dimension finie

19) Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. Pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$, soit V^μ l'ensemble des $v \in \mathrm{V}$ tels que $h.v = \mu(h)v$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. La dimension de V^μ s'appelle la multiplicité de μ dans V; si elle est $\geqslant 1$, i.e. si $\mathrm{V}^\mu \neq 0$, on dit que μ est un poids de V. On a $\mathrm{V} = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \mathrm{V}^\mu$. Tout poids de V appartient à $\mathrm{P}(\mathrm{R})$. Si μ est un poids de V, et si $w \in \mathrm{W}$, $w\mu$ est un poids de V de même multiplicité que μ. Si $v \in \mathrm{V}^\mu$ et $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, on a $x.v \in \mathrm{V}^{\mu+\alpha}$.

20) Soit B une base de R. La donnée de B définit une relation d'ordre sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$: les éléments $\geqslant 0$ de $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$ sont les combinaisons linéaires des éléments de B à coefficients rationnels $\geqslant 0$. On note $\mathrm{Q}_+(\mathrm{R})$ (resp. R_+) l'ensemble des éléments positifs de $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ (resp. de R).

Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie. Alors V possède un plus grand poids λ. Ce poids est de multiplicité 1, et c'est un poids dominant: si $\alpha \in \mathrm{R}_+$, $\lambda(H_\alpha)$ est un entier $\geqslant 0$. On a $\mathfrak{g}^\alpha \mathrm{V}^\lambda = 0$ si $\alpha \in \mathrm{R}_+$. Tout poids de V est de la forme $\lambda - \nu$, avec $\nu \in \mathrm{Q}_+(\mathrm{R})$; inversement, si un poids dominant est de la forme $\lambda - \nu$, avec $\nu \in \mathrm{Q}_+(\mathrm{R})$, c'est un poids de V.

[1] Cet homomorphisme est en fait bijectif (§ 7, exerc. 26*d*)).

21) Deux $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie qui ont le même plus grand poids sont isomorphes. Tout poids dominant est le plus grand poids d'un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie.

Tout $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie est absolument simple.

22) Soient Φ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, $C \in U(\mathfrak{g})$ l'élément de Casimir correspondant, $\langle . , . \rangle$ la forme inverse de $\Phi \mid \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}^*$, et $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie, de plus grand poids λ. Alors C_V est l'homothétie de rapport $\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle$.

23) Soient V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, et V^* son dual. Pour que $\mu \in \mathfrak{h}^*$ soit un poids de V^*, il faut et il suffit que $-\mu$ soit un poids de V, et la multiplicité de μ dans V^* est égale à la multiplicité de $-\mu$ dans V. Si V est simple de plus grand poids λ, V^* est simple de plus grand poids $-w_0\lambda$, où w_0 est l'élément de W qui transforme B en $-B$.

24) Soient V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie de plus grand poids λ, et $\mathscr{B}$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires $\mathfrak{g}$-invariantes sur V. Soit m l'entier $\sum_{\alpha \in R_+} \lambda(H_\alpha)$, et soit $w_0 \in W$ comme dans 23). Si $w_0\lambda \neq -\lambda$, V et V^* ne sont pas isomorphes, et $\mathscr{B} = 0$. Si $w_0\lambda = -\lambda$, on a $\dim \mathscr{B} = 1$, et tout élément non nul de $\mathscr{B}$ est non dégénéré; si m est pair (resp. impair), tout élément de $\mathscr{B}$ est symétrique (resp. alterné).

25) Soit $\mathbf{Z}[P]$ l'algèbre du groupe $P = P(R)$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Si $\lambda \in P$, on note e^λ l'élément correspondant de $\mathbf{Z}[P]$; les e^λ, $\lambda \in P$, forment une $\mathbf{Z}$-base de $\mathbf{Z}[P]$, et l'on a $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ pour $\lambda, \mu \in P$.

Soit V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. On appelle caractère de V, et l'on note ch V, l'élément $\sum_{\mu \in P} (\dim V^\mu) e^\mu$ de $\mathbf{Z}[P]$; cet élément appartient à la sous-algèbre $\mathbf{Z}[P]^W$ de $\mathbf{Z}[P]$ formée des éléments invariants par W. On a

$$\mathrm{ch}(V \oplus V') = \mathrm{ch}\, V + \mathrm{ch}\, V' \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(V \otimes V') = (\mathrm{ch}\, V).(\mathrm{ch}\, V').$$

Deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie de même caractère sont isomorphes.

Pour tout $\alpha \in B$, soit V_α un $\mathfrak{g}$-module simple de plus grand poids le poids fondamental ϖ_α correspondant à α. Les éléments ch V_α, $\alpha \in B$, sont algébriquement indépendants, et engendrent la $\mathbf{Z}$-algèbre $\mathbf{Z}[P]^W$.

26) Soit ρ la demi-somme des racines $\geqslant 0$. Pour tout $w \in W$, soit $\varepsilon(w)$ le déterminant de w, égal à ± 1. Si V est un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie, de plus grand poids λ, on a

$$\Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, e^{w\rho}\Big).\mathrm{ch}\ V = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\ e^{w(\lambda+\rho)},$$

et

$$\dim V = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \lambda + \rho, H_\alpha \rangle}{\langle \rho, H_\alpha \rangle}.$$

27) Pour tout $\nu \in P$, soit $\mathfrak{P}(\nu)$ le nombre de familles $(n_\alpha)_{\alpha \in R_+}$, où les n_α sont des entiers $\geqslant 0$ tels que $\nu = \sum_{\alpha \in R_+} n_\alpha \alpha$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie, de plus grand poids λ. Si $\mu \in P$, la multiplicité de μ dans V est

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\mathfrak{P}(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)).$$

28) Soient V, V′, V″ des $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie, λ, μ, ν leurs plus grands poids. Dans $V \otimes V'$, la composante isotypique de type V″ a pour longueur

$$\sum_{w, w' \in W} \varepsilon(ww')\mathfrak{P}(w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - (\nu + 2\rho)).$$

En particulier, si $\nu = \lambda + \mu$, la composante isotypique en question est simple, et engendrée par $(V \otimes V')^{\lambda+\mu} = V^\lambda \otimes V'^\mu$.

Fonctions polynomiales invariantes

29) L'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}^*)$ de $\mathfrak{g}^*$, donc est de manière canonique un $\mathfrak{g}$-module; d'où la notion de fonction polynomiale invariante sur $\mathfrak{g}$. Soit $f \in S(\mathfrak{g}^*)$. Pour que f soit invariante, il faut et il suffit que $f \circ s = f$ pour tout $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, ou que $f \circ s = f$ pour tout $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

30) Soient $I(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur $\mathfrak{g}$, et $S(\mathfrak{h}^*)^W$ l'algèbre des fonctions polynomiales W-invariantes sur $\mathfrak{h}$. Soit

$$i : S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{h}^*)$$

l'homomorphisme de restriction. L'application $i \mid I(\mathfrak{g}^*)$ est un isomorphisme de $I(\mathfrak{g}^*)$ sur $S(\mathfrak{h}^*)^W$. Si l est le rang de $\mathfrak{g}$, il existe l éléments homogènes de $I(\mathfrak{g}^*)$ qui sont algébriquement indépendants, et engendrent l'algèbre $I(\mathfrak{g}^*)$.

31) Pour qu'un élément a de $\mathfrak{g}$ soit nilpotent, il faut et il suffit que $f(a) = 0$ pour tout élément homogène f de $I(\mathfrak{g}^*)$ de degré > 0.

32) Soit $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Pour que s appartienne à $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, il faut et il suffit que $f \circ s = f$ pour tout $f \in I(\mathfrak{g}^*)$.

$\mathfrak{sl}_2$-triplets

33) On appelle $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$ une suite (x, h, y) d'éléments de $\mathfrak{g}$ distincte de $(0, 0, 0)$ et telle que $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$, $[x, y] = -h$. Alors x, y sont nilpotents dans $\mathfrak{g}$, et h est semi-simple dans $\mathfrak{g}$.

34) Soit x un élément nilpotent non nul de $\mathfrak{g}$. Il existe $h, y \in \mathfrak{g}$ tels que (x, h, y) soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

35) Soient (x, h, y) et (x', h', y') des $\mathfrak{sl}_2$-triplets de $\mathfrak{g}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:
a) il existe $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $sx = x'$;
b) il existe $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $sx = x'$, $sh = h'$, $sy = y'$.

36) Si k est algébriquement clos, les conditions *a*) et *b*) de 35) équivalent à:
c) il existe $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $sh = h'$.
De plus, le nombre de classes de conjugaison, relativement à $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, d'éléments nilpotents non nuls de $\mathfrak{g}$, est au plus égal à 3^l, où l est le rang de $\mathfrak{g}$.

37) Un élément nilpotent x de $\mathfrak{g}$ est dit principal si le centralisateur de x est de dimension égale au rang de $\mathfrak{g}$. Il existe dans $\mathfrak{g}$ des éléments nilpotents principaux. Si k est algébriquement clos, les éléments nilpotents principaux de $\mathfrak{g}$ sont conjugués par $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

TABLE DES MATIÈRES