

Literaturverzeichnis

- [1] Bourbaki, N., *Eléments de Mathématique, Livre V: Espaces vectoriels topologiques*, Chapitres I et II, 2ième éd., Paris: Hermann 1966
- [2] Bourbaki, N., *Topologie Générale*, Chapitres 1 à 4, Paris: Hermann 1971
- [3] Bröcker, Th., Jänich, K., *Einführung in die Differentialtopologie*, Heidelberger Taschenbücher 143, korr. Nachdr., Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1990
- [4] Dieudonné, J.A., *Treatise on Analysis*, Vol. II, New York und London: Academic Press 1970
- [5] Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
- [6] Dold, A., *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Ann. of Math. 78 (1963), 223-255
- [7] Dunford, N., Schwartz, J.T., *Linear Operators, Part I: General Theory*, New York: Interscience Publ. 1957
- [8] Dunford, N., Schwartz, J.T., *Linear Operators, Part II: Spectral Theory*, New York: Interscience Publ. 1963
- [9] Forster, O., *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher 184, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
- [10] Grauert, H., Remmert, R., *Theorie der Steinschen Räume*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
- [11] Hilton, P.J., *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge Univ. Press 1953
- [12] Jänich, K., *Funktionentheorie. Eine Einführung*, 3. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1993

- [13] Köthe, G., *Topologische Lineare Räume I*, 2. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
- [14] Milnor, J., *Morse Theory*, Princeton Univ. Press 1963
- [15] Neumann, J.v., *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Annalen 102 (1930), 370-427
- [16] Schubert, H., *Topologie*, 4. Aufl., Stuttgart: Teubner 1975
- [17] Steen, L.A., Seebach, J.A., *Counterexamples in Topology*, 2nd ed., New York-Heidelberg-Berlin: Springer 1978
- [18] Thom, R., *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helv. 28 (1954), 17-86
- [19] Tychonoff, A., *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Annalen 102 (1930), 544-561
- [20] Tychonoff, A., *Ein Fixpunktsatz*, Math. Annalen 111 (1935), 767-780
- [21] Wolf, J.A., *Spaces of Constant Curvature*, New York: McGraw-Hill 1967

Symbolverzeichnis

4	$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b
8	$\overset{\circ}{B}$	Inneres der Menge B
8	\bar{B}	abgeschlossene Hülle von B
11	$K_\varepsilon(x)$	Kugel vom Radius ε um einen Punkt x eines metrischen Raumes
13	$+$	disjunkte Summe, topologische Summe
18	\cong	“isomorph”, hier Zeichen für Homöomorphie
19	$(2, 3)$	offenes Intervall von 2 bis 3; Verwechslungsgefahr mit dem Zahlenpaar $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$.
33	$\ \dots\ $	Norm
34	$ \dots $	Halbnorm
37	$C(X)$	Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen auf X
39	$[x]$	Äquivalenzklasse
39	X/\sim	Menge bzw. Raum der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation \sim auf X .
43	G/H	Quotientenraum von G nach der Untergruppe H .
48	X/G	Orbitraum eines G -Raumes X
50	X/A	Quotientenraum, der durch Zusammenschlagen von $A \subset X$ zu einem Punkt entsteht
51	CX	Kegel über X
53	$X \vee Y$	“wedge”, $X \times y_0 \cup x_0 \times Y \subset X \times Y$
53	$X \wedge Y$	“smash”, $X \times Y/X \vee Y$
54	$Y \cup_\varphi X$	Quotientenraum, der aus $X + Y$ durch Identifizieren der Punkte x und $\varphi(x)$ entsteht. (“Anheften von X an Y mittels φ ”).
56	$M_1 \# M_2$	zusammenhängende Summe
57	$X \times [0, 1]/\alpha$	Quotientenraum, der aus $X \times [0, 1]$ durch Identifizieren von $(x, 0)$ mit $(\alpha(x), 1)$ hervorgeht

63	$(\widehat{X}, \widehat{d})$	Vervollständigung des metrischen Raumes (X, d)
70	$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	Vektorraum der C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger
73	\simeq	homotop
76	\simeq	homotopieäquivalent
75	$[X, Y]$	Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y
93	$\pi_n(X, x_0)$	n -te Homotopiegruppe von (X, x_0)
99	$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$	Produkt der Familie $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Mengen oder topologischen Räumen
109	$s(v_0, \dots, v_k)$	Simplex, konvexe Hülle von Punkten v_0, \dots, v_k in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n
111	$ K $	einem Polyeder K zugrunde liegende Menge
118	X^n	n -Gerüst eines zellenzerlegten Raumes X
143	TM	Tangentialbündel
157	Y_x	Faser eines topologischen Raumes $Y \xrightarrow{\pi} X$ über X an der Stelle x
157	$Y U$	Einschränkung eines topologischen Raumes Y über X auf $U \subset X$
158	\cong	Isomorphie, hier Homöomorphie "über X "
163	\sim	über Abbildungen geschrieben: in Kapitel 9 meist für "Hochhebungen" aller Art ($\tilde{\alpha}, \tilde{f}$ etc.)
171	α^-	der rückwärts durchlaufene Weg, d.h. $\alpha^-(t) := \alpha(1-t)$
172	$\Omega(X, x_0)$	Menge der Schleifen in X an x_0
172	\simeq	hier: Homotopie von Schleifen mit festem Anfangs- und Endpunkt x_0
172	$[]$	hier: Äquivalenzklassen von Schleifen nach \simeq
173	$\pi_1(X, x_0)$	Fundamentalgruppe
173	f_*	von f induzierter Homomorphismus der Fundamentalgruppen
173	$G(Y, y_0)$	charakteristische Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ der Überlagerung $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
178	$[] \sim$	nur auf den Seiten 164–168 gebrauchte Notation für die in der Definition auf S. 164 angegebene Äquivalenzrelation

-
- | | | |
|-----|----------------------------|---|
| 178 | $V(U, y)$ | nur 165–168 verwendete Spezialnotation innerhalb eines Beweises |
| 183 | \mathcal{D} | Deckbewegungsgruppe |
| 184 | N_B | Normalisator der Untergruppe B |
| 187 | (\tilde{X}, \tilde{x}_0) | universelle Überlagerung von (X, x_0) |
| 201 | X' | Dualraum eines normierten Raumes X |
| 204 | $\text{Spec } B$ | Spektrum einer kommutativen Banachalgebra |
| 206 | βX | Stone-Čech-Kompaktifizierung von X |
| 209 | \mathcal{F} | Filter |
| 215 | $ M $ | Kardinalzahl der Menge M |
| 216 | $2^{ M }$ | Kardinalzahl der Potenzmenge von M |
| 218 | $ \mathbb{N} $ | Kardinalzahl der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen; wird auch mit \aleph_0 (aleph null) bezeichnet. |

Register

- Vorbemerkung: Die kurzen Erläuterungen zu den einzelnen Stichworten können nicht immer ausführlich genug sein und ersetzen daher, wenn es darauf ankommt, nicht die genaue Definition im Text.
- A**
- abgeschlossen 8
heißt eine Menge, wenn ihr Komplement offen ist.
- abgeschlossene Hülle 8
Die inneren und die Randpunkte bilden zusammen die abgeschlossene Hülle einer Menge.
- Abstand 134
eines Punktes $a \in X$ von einer Menge B in einem metrischen Raume (X, d) : das ist das Infimum von $\{d(a, x) | x \in B\}$.
- Abzählbarkeitsaxiome 98
fordern die Existenz einer abzählbaren Umgebungsbasis für jeden Punkt (das Erste) bzw. einer abzählbaren Basis der Topologie (das Zweite).
- äußerer Punkt 8
von B : jeder Punkt, für den $X \setminus B$ Umgebung ist.
- Anheften 54
eines topologischen Raumes X mittels einer Abbildung $\varphi: X_0 \rightarrow Y$ an einen Raum Y : Übergang zu dem Quotientenraum $Y \cup_{\varphi} X := X + Y / \sim$ nach der Äquivalenzrelation, die x und $\varphi(x)$ für äquivalent erklärt.
- Anheftungsabbildung 54
heißt die Abbildung $\varphi: X_0 \rightarrow Y$ bei der Bildung von $Y \cup_{\varphi} X$ aus X und Y .
- Auswahlaxiom 212
- B**
- Banachraum 33
Vollständiger normierter Raum.
- Basis 15
einer Topologie: eine Menge von offenen Mengen, die immerhin so reichhaltig ist, daß man jede beliebige offene Menge als Vereinigung solcher Basismengen erzeugen kann. (Die offenen Kugeln sind z.B. eine Basis der Topologie eines metrischen Raumes).
- Basispunkt 172
In gewissen Situationen ist es formal zweckmäßiger, nicht die topologischen Räume zu betrachten, sondern die Paare

- (X, x_0) aus einem topologischen Raum X und einem Punkt x_0 darin. Der Punkt x_0 heißt dann der Basispunkt des Raumes (eigentlich: des Paares).
- Blätterzahl 160
einer Überlagerung an der Stelle x : Anzahl der Punkte in der Faser über x .
- bordant 95
heißten zwei kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten, deren topologische Summe Rand einer kompakten Mannigfaltigkeit ist.
- Bordismusklassen 95
Äquivalenzklassen von Mannigfaltigkeiten nach der Äquivalenzrelation "bordant".
- Brouwer, L.E.J. 116
1881-1966
- C
- Cantor, Georg 4, 5, 216, 218
1845-1918
- Charakteristische Abbildung 118
für eine n -Zelle e in einem zellenzerlegten Raum X : Das ist eine stetige Abbildung $D^n \rightarrow X$, die die offene Kugel homöomorph auf e und den Rand S^{n-1} in das $(n-1)$ -Gerüst abbildet.
- Charakteristische Untergruppe einer Überlagerung 173
Bild der Fundamentalgruppe "oben" in der Fundamentalgruppe "unten".
- covariant 85
heißten die Funktoren \mathcal{F} , die jedem Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ einen in "dieselbe Richtung", nämlich $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(Y)$ zuzuordnen.
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 71
Vektorraum der C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger.
- CW-Komplex 118
ein zellenzerlegter Raum, der die Axiome erfüllt: (1) Existenz charakteristischer Abbildungen, (2) Hüllenendlichkeit und (3) schwache Topologie.
- CX 51
Kegel $X \times [0,1] / X \times 1$ über X .
- $C(X)$ 37
Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm.
- D
- d 10
Metriken $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ werden in diesem Buch meist mit d bezeichnet
- \mathcal{D} 183
Deckbewegungsgruppe
- $\widehat{\sim}$ "Dach" 63
 $(\widehat{X}, \widehat{d})$ bezeichnet die Vervollständigung des metrischen Raumes (X, d) .
- Deckbewegungen 183
einer Überlagerung $Y \xrightarrow{\pi} X$ sind die Homöomorphismen φ von Y auf sich mit $\pi \circ \varphi = \pi$.

- Deformationsretrakt 76
 Gibt es eine zu Id_X homotope Retraktion $X \rightarrow A$, so heißt A Deformationsretrakt von X . ("starker" Deformationsretrakt, falls A bei der Homotopie punktweise fest bleiben kann).
- dicht 63
 Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt dicht in dem topologischen Raum X , wenn $\bar{A} = X$.
- Differentialoperatoren 71
 insb. lineare partielle der Form $\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$.
- Difftop* 82
 die "differentialtopologische Kategorie" (differenzierbare Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen).
- disjunkte Vereinigung 13
 $X + Y$; Vereinigung der vorher formal "disjunkt gemachten" Mengen, z.B. üblich $X + Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$.
- diskrete Topologie 16
 feinstmögliche Topologie; alle Mengen offen, insbesondere die einpunktigen. Man muß sich also die Punkte "diskret" liegend vorstellen, im Gegensatz zu "kontinuierlich" verteilten Punkten.
- Dreiecksungleichung 11
 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- Dualraum 201
 eines normierten Raumes X : Das ist der Raum X' mit der Norm $\|f\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$.
- E**
- Eindeutigkeitssatz für Überlagerungen 176
 sagt aus, inwiefern eine Überlagerung durch das Bild der Fundamentalgruppe "oben" in der Fundamentalgruppe "unten" festgelegt ist. ("Charakteristische Untergruppe").
- einfach zusammenhängend 186, 181
 heißt ein wegzusammenhängender Raum, wenn jede Schleife nullhomotop ist, d.h. wenn für einen (und dann jeden) Basispunkt die Fundamentalgruppe trivial ist.
- erzeugte Topologie 16
 Zu einer gegebenen Menge \mathcal{E} von Teilmengen von X gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}(\mathcal{E})$, für die \mathcal{E} Subbasis ist (von \mathcal{E} "erzeugte" Topologie).
- Eulercharakteristik, Eulerzahl 87, 88, 128
 Wechselsumme der Anzahlen von Ecken, Kanten usw. eines Polyeders bzw. der Betti-Zahlen eines topologischen Raumes.
- Existenzsatz für Überlagerungen 183
 sagt aus, unter welchen Umständen es zu jeder Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung mit G als charakteristischer Untergruppe gibt.
- Exkurs über Vektorraum-bündel 143
- F**
- fein 16
 Sind $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ Topologien auf X , so heißt \mathcal{O} größer (weniger offene Mengen) als \mathcal{O}' und \mathcal{O}' feiner (mehr offene Mengen) als \mathcal{O} .

- Filter** 209
auf X : Menge von Teilmengen, die mit jeder Menge alle ihre Obermengen, mit je zweien ihren Durchschnitt und nicht die leere Menge enthält.
- Filterkonvergenz** 209
Ein Filter konvergiert gegen a , wenn jede Umgebung von a zu dem Filter gehört.
- folgenkompakt** 103
ist ein Raum, in dem jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.
- folgenstetig** 101
ist eine Abbildung, wenn durch sie jede konvergente Folge in eine gegen das Bild des Limes konvergierende Folge übergeht.
- Fourierreihen** 4
Funktionsreihen der Form $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
Benannt nach Joseph Fourier (1768–1830), der sie erstmals (im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung) verwendete.
- Fréchet, Maurice** 3, 30, 34
1878–1973
- Fréchet-Raum** 36
vollständiger Hausdorffscher topologischer Vektorraum, dessen Topologie durch eine Folge von Halbnormen gegeben werden kann.
- Fundamentalgruppe** 172
 $\pi_1(X, x_0)$ eines Raumes mit Basispunkt: Als Menge die der Homotopieklassen von Schleifen an x_0 ; Verknüpfen durch das "Hintereinanderdurchlaufen" von Schleifen.
- Funktor** 85
zwischen zwei Kategorien, ordnet Objekten Objekte und Morphismen Morphismen zu, in einer mit Identitäten und Verknüpfung verträglichen Weise.
- G**
- Gelfand-Neumarkscher Darstellungssatz für B^* -Algebren** 205
- Gerüst** 118
Das n -Gerüst X^n eines zellenzerlegten Raumes X ist die Vereinigung aller Zellen der Dimensionen $\leq n$.
- G/H** 43
Quotient einer Gruppe nach einer Untergruppe.
- gleichmäßig stetig** 68
heißt eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß Punkte mit Abstand $< \delta$ stets in Punkte mit Abstand $< \varepsilon$ abgebildet werden.
- Graßmann-Mannigfaltigkeit** 45
der k -dimensionalen Teilräume des \mathbb{R}^{n+k} , das ist $O(n+k)/O(k) \times O(n)$
- G -Raum** 47
topologischer Raum X zusammen mit einer stetigen G -Aktion $G \times X \rightarrow X$. Analog differenzierbare G -Mannigfaltigkeit.
- grob** 16
Sind $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ Topologien auf X , so heißt \mathcal{O} gröber (weniger offene Mengen) als \mathcal{O}' und \mathcal{O}' feiner (mehr offene Mengen) als \mathcal{O} .

H

Häufungspunkt 4

einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$: Nicht notwendig zu A gehöriger Punkt $p \in \mathbb{R}$, für den $A \cap (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \setminus p$ für kein $\varepsilon > 0$ leer ist.

Analog für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes ($A \cap U \setminus p$ für keine Umgebung U von p leer).

Halbnorm 34

$|\dots|: E \rightarrow \mathbb{R}$; $|x|=0$ trotz $x \neq 0$ kann eintreten, sonst wie Norm.

Hausdorff, Felix 3, 5, 22

1868–1942

Hausdorffraum 22

topologischer Raum, der das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt. Auch "separierter Raum" genannt.

Hausdorffsches Trennungsaxiom 22

zu je zwei verschiedenen Punkten existieren disjunkte Umgebungen.

Henkel 56

Im Zusammenhang mit der Morse-Theorie Bezeichnung für $D^k \times D^{n-k}$.

Hilbert-Basis 33

vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum.

Hilbertquader 199

Im separablen Hilbertraum, z.B. dem der quadratsummierbaren Folgen, ist das der Teilraum der Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $|x_n| \leq \frac{1}{n}$.

Hilbertraum 33

vollständiger euklidischer bzw. unitärer Raum.

Hochhebbarkeitskriterium

174

$$\begin{array}{ccc} & (Y, y_0) & \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

\tilde{f} gesucht. Das Kriterium verweist auf die Fundamentalguppen.

Hochheben von Wegen 163

In der Überlagerungstheorie die allgegenwärtige Grundtechnik: Ist $Y \xrightarrow{\pi} X$ eine Überlagerung und y_0 Punkt über dem Anfangspunkt eines Weges α in X , dann gibt es genau einen "hochgehobenen" Weg $\tilde{\alpha}$ (d.h. $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$), der bei y_0 anfängt.

homöomorph 18

heißen zwei Räume, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Homöomorphismus 17

$f: X \rightarrow Y$ heißt Homöomorphismus, wenn es bijektiv ist und f und f^{-1} beide stetig sind.

homogener Raum 43

Quotient G/H topologischer Gruppen.

Homologie 89, 91, 114, 127

Von der Homologie ist zwar, wie von einer Reihe anderer über die Mengentheoretische Topologie hinausgehender Gegenstände in diesem Buch mehrfach die Rede, aber die Definition wird hier nicht gegeben. Siehe z.B. [5] oder [16].

- homotop 73
 heißen zwei Abbildungen von X nach Y , wenn sie stetig ineinander deformierbar sind.
- Homotopie 73
 eine Homotopie zwischen $f, g: X \rightarrow Y$ ist eine stetige Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$.
- Homotopieäquivalenz 76
 stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, für die ein "Homotopieinverses" $g: Y \rightarrow X$ existiert.
- Homotopiegruppen 93
 $\pi_n(X, x_0)$ eines Raumes X mit Basispunkt x_0 . Dieser wichtige Begriff wurde 1935 durch Witold Hurewicz (1904–1957) eingeführt.
- Homotopieinverses 76
 zu $f: X \rightarrow Y$ ist eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$, wenn $g \circ f$ und $f \circ g$ homotop zur Identität sind.
- Homotopiekategorie $\mathcal{H}top$ 83
 Objekte: topologische Räume
 Morphismen: Homotopieklassen stetiger Abbildungen.
- Homotopieklassen 75
 Äquivalenzklassen von Abbildungen $X \rightarrow Y$ nach der Äquivalenzrelation "homotop".
- Hüllenendlichkeit 118
 einer Zellenzerlegung: jede Zellenhülle darf dann nur endlich viele Zellen treffen.
- I
- ideale Grenzpunkte 65
 die für die Vervollständigung eines metrischen Raumes neu zu erschaffenden Punkte.
- Induktionsprinzip 213
- induzierte Topologie 13
 eine Menge $V \subset X_0$ heißt offen in der von $X_0 \subset X$ "induzierten" Topologie, wenn sich eine in X offene Menge U mit $V = X_0 \cap U$ finden läßt ("Teilraumtopologie").
- innerer Punkt 8
 von B : jeder Punkt, für den B Umgebung ist.
- Inneres 8
 einer Menge B : Menge der inneren Punkte von B .
- Invariante 87
- Inzidenzangaben 112
- Inzidenzzahlen 127
 beschreiben homologisch die Art und Weise, wie in einem CW -Komplex die Zellen am niederdimensionalen Gerüst haften. Im Text nicht näher erläutert.
- Isomorphie 158
 von topologischen Räumen (Y, π) und $(\tilde{Y}, \tilde{\pi})$ über X : Homöomorphismus $\varphi: Y \rightarrow \tilde{Y}$ mit $\tilde{\pi} \circ \varphi = \pi$ (Homöomorphismus "über" X).
- Isomorphismen 84
 einer Kategorie: diejenigen Morphismen, die einen inversen Morphismus besitzen, in der topologischen Kategorie z.B. sind das die Homöomorphismen.

- K**
- Kardinalzahlen 215, 194
- Kategorie 81, 76
Objekte, Morphismen und deren Verknüpfungen als Daten, Identitätsaxiom und Assoziativität als Axiome.
- Kegel 51
über X , das ist
 $CX := X \times [0,1] / X \times \{1\}$.
- Kette 213
- Klassifikation der Überlagerungen 176, 183
besteht aus dem Eindeutigkeitssatz auf S. 176 und dem Existenzsatz auf S. 186.
- Kleine Kategorien 84
sind solche, deren Objekte die Punkte einer bestimmten Menge sind.
- Kleinscher Schlauch 58
benannt nach Felix Klein (1849–1925).
- kommutative
Banachalgebra 203
- kompakt 24
heißt ein Raum, wenn jede (beachte: *jede*) offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gestattet. (Viel-
fach wird noch die Hausdorff-
eigenschaft dazugefordert).
- Kontinuumshypothese 218
- kontravariant 85
heißen die Funktoren \mathcal{F} , die
jedem Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$
einen in die "entgegengesetzte
Richtung", nämlich
 $\mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(X)$ zuordnen.
- Konvergenz 23
Ein Punkt a heißt Limes
einer Folge in einem topolo-
gischen Raum, wenn in jeder
Umgebung von a die Folge
schließlich bleibt.
- konvexe Eigenschaft 146
von Schnitten in Vektor-
raumbündeln: In einem ge-
wissen $\Omega \subset E$ zu liegen, für
das jedes Ω_x konvex ist.
- "Kringel" 8
 \mathring{B} bezeichnet das Innere
von B .
- ε -Kugel 11
in einem metrischen Raum:
 $K_\varepsilon(x) := \{y \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}$; im \mathbb{R}^n
mit der üblichen Metrik also
 $K_\varepsilon(x) := \{y \mid \|x-y\| \leq \varepsilon\}$.
- Kuratowskische Hüllenaxiome
10
Alternative Fassung des Be-
griffes "topologischer Raum"
durch Axiomatisierung des
Begriffes der abgeschlossenen
Hülle.
- L**
- lexikographische Ordnung 213
- Liegruppen 105, 195
differenzierbare Mannigfaltig-
keiten mit differenzierbarer
Gruppenstruktur.
- lokal homöomorph 160
ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$,
wenn es zu jedem $x \in X$
offene Umgebungen U von x
und V von $f(x)$ gibt, so daß
 $f|U$ einen Homöomorphismus
von U auf V definiert.

- lokal triviale Faserung 159
 topologischer Raum Y über X , so daß für jeden Punkt in X eine Umgebung U existiert, über der Y trivial ist, d.h. daß $Y|U$ zu $U \times F \rightarrow U$ homöomorph über U ist.
- lokal wegweise zusammenhängend 174
 heißt ein Raum, wenn in jeder Umgebung eines jeden seiner Punkte eine wegzusammenhängende Umgebung enthalten ist.
- lokalkonvex 36
 heißt ein topologischer Vektorraum, wenn jede Nullumgebung eine konvexe Nullumgebung enthält.
- L^p -Räume 70
 nach Henry Lebesgue (1875–1941) benannte Funktionenräume mit der Norm $\|f\|_p := (\int |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.
- M**
- \mathcal{M} 82
 Kategorie der Mengen und Abbildungen
- $M_1 \# M_2$ 56
 zusammenhängende Summe.
- Mannigfaltigkeit 105, 25, 131
 "Differenzierbare Mannigfaltigkeit" ist der Grundbegriff der Differentialtopologie. Siehe z.B. [3].
- metrischer Raum 10
 Paar (X, d) mit positiv definitem, symmetrischem, die Dreiecksungleichung erfüllendem $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Die $(X, \mathcal{O}(d))$ bilden eine wichtige Beispielklasse topologischer Räume.
- metrisierbarer Raum 12
 topologischer Raum (X, \mathcal{O}) , für den es möglich ist, eine Metrik mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}(d)$ zu finden.
- Möbiusband 57
 benannt nach August Ferdinand Möbius (1790–1868).
- Monodromielemma 166
 der Überlagerungstheorie: homotope Wege werden zum gleichen Endpunkt hochgehoben.
- Morse-Theorie 56, 80
 Von Marston Morse (1892–1977) entwickelte differentialtopologische Theorie, die aus Art und Anzahl der kritischen Punkte einer Funktion auf einer (gegebenenfalls auch ∞ -dimensionalen) Mannigfaltigkeit Rückschlüsse auf die topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit zu ziehen gestattet.
- $\text{Mor}(X, Y)$ 81
 Menge der Morphismen von X nach Y in einer Kategorie.
- N**
- \mathfrak{N}_n 95
 Bordismengruppen
- Nordpol 53
 der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, das ist $N = (0, \dots, 0, 1)$.
- Norm 33
 $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit, homogen, Dreiecksungleichung.

- normale Überlagerungen 185
sind solche, deren charakteristische Untergruppe Normalteiler der Fundamentalgruppe der Basis ist. Geometrisch bedeutet das: Die Deckbewegungsgruppe operiert transitiv auf den Fasern.
- Normalisator 184
einer Untergruppe BCA : das ist die größte Gruppe N_B zwischen B und A , in der B noch Normalteiler ist.
- nullhomotop 180
heißt eine Schleife, die homotop (mit festem Anfangs- und Endpunkt) zur konstanten Schleife ist. Sie repräsentiert also das neutrale Element der Fundamentalgruppe.
- O**
- $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 81
Klasse der Objekte der Kategorie \mathcal{C} .
- $\mathcal{O}(d)$ 11
Topologie des metrischen Raumes (X, d) .
- offen 7
Aus der axiomatischen Fassung dieses Begriffs besteht die Definition des Begriffes "topologischer Raum". Alle anderen topologischen Begriffe werden aus dem Grundbegriff "offen" abgeleitet.
- offene Kugel 11
in einem metrischen Raum ist $\{y | d(x, y) < \varepsilon\}$ die "offene ε -Kugel" um x . Wegen der Dreiecksungleichung ist sie wirklich in $\mathcal{O}(d)$.
- offene Kästchen 14, 100
in $X \times Y$: Die Mengen der Form $U \times V$, wobei U offen in X , V offen in Y .
In unendlichen Produkten: *Endliche* Durchschnitte von "offenen Zylindern". Bilden Basis der Produkttopologie.
- offene Überdeckung 24
eines topologischen Raumes X : Familie $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offener Mengen, deren Vereinigung X ergibt.
- offener Kern 8
Menge der inneren Punkte.
- Orbit 47
oder Bahn eines Punktes x in einem G -Raum. Das ist die Menge Gx der Punkte, in die x durch die Aktion der Gruppe gebracht werden kann.
- Orbitraum 48
 X/G eines G -Raumes X , das ist der Raum der Orbits, versehen mit der Quotiententopologie.
- Ordinalzahlen 216
- $\mathcal{O}|X_0$ 13
Die von (X, \mathcal{O}) auf $X_0 \subset X$ induzierte Topologie.
- P**
- parakompakt 152
heißt ein Hausdorffraum, wenn jede Überdeckung eine lokalendliche Verfeinerung hat. Wichtig, weil genau dann jede Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der 1 besitzt.
- Peano, Giuseppe 186
1858–1932

- $\pi_n(X, x_0)$ 93
 n -te Homotopiegruppe von (X, x_0) .
- + "plus" 13
 $X+Y$ bezeichnet die disjunkte Summe von Mengen bzw. topologischen Räumen.
- Polyeder 110
 oder simplizialer Komplex: Menge K von Simplexes im \mathbb{R}^n gewisse Regularitätsbedingungen erfüllend). Die Bezeichnung Polyeder wird dann auch für die Vereinigung $|K|$ dieser Simplexes verwendet.
- $\mathfrak{P}(X)$ 10, 215
 Menge aller Teilmengen von X ("Potenzmenge").
- prä-Fréchet-Raum 35
 Hausdorffscher, nicht notwendig vollständiger topologischer Vektorraum, dessen Topologie durch eine Folge von Halbnormen gegeben werden kann.
- Produkt topologischer Räume 14, 99
 Produkt $X \times Y$ bzw. $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, versehen mit der Produkttopologie ("offene Kästchen" als Basis).
- Produkttopologie 14, 100
 $\Omega \subset X \times Y$ ist offen in der Produkttopologie, wenn es um jeden Punkt von Ω ein in Ω gelegenes offenes Kästchen $U \times V$ gibt. (Ähnlich für unendlich viele Faktoren.)
- Q**
- quasikomakt 24
 heißen die kompakten Räume bei jenen Autoren, die das Wort kompakt für das reservieren, was wir hier "kompakt und Hausdorffsch" nennen würden.
- "quer" 8
 \bar{B} bezeichnet die abgeschlossene Hülle von B .
- Quotientenraum 39
 X/\sim eines topologischen Raumes X nach einer Äquivalenzrelation \sim : Das ist die Menge X/\sim der Äquivalenzklassen, versehen mit der "Quotiententopologie".
- Quotiententopologie 39
 auf X/\sim ist die feinste, für die $X \rightarrow X/\sim$ noch stetig ist, also: UCX/\sim genau dann offen, wenn das Urbild in X offen ist.
- R**
- Raumformen 194
 Begriff aus der Differentialgeometrie: vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter Riemannscher Schnittkrümmung; im vorliegenden Text nicht näher erläutert. — Der Gedanke an dreidimensionale Raumformen als mögliche Modelle für den realen physikalischen Raum schon bei Riemann 1854.
- raumfüllende Kurve 186
 stetige surjektive Abbildung $[0,1] \rightarrow [0,1]^n$.

- reflexiver Banachraum 201
 Banachraum X , für den die kanonische Inklusion $X \subset (X')'$ in sein "Doppeldual" sogar eine Bijektion ist: $X = X''$.
- Rekursionsformel 213
- rekursiv definieren 213
- Retrakt, Retraktion 76
 ACX heißt Retrakt von X , wenn es eine Retraktion von X auf A , d.h. eine stetige Abbildung $X \rightarrow A$, die auf A die Identität ist, gibt.
- Randpunkt 8
 von B : jede Umgebung trifft sowohl B als auch $X \setminus B$.
- Riemann, Bernhard
 4, 149, 192, 194
 1826-1866
- Riemannsche Flächen 193
 zusammenhängende komplex eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten. Im vorliegenden Buch nicht näher erläutert, vgl. aber [12], § 11.
- Riemannsche Metrik 149
 auf einem Vektorraumbündel E : Ein Skalarprodukt $(,)$ für jede Faser E_x , derart daß $x \mapsto (,)_x$ in geeignetem Sinne stetig bzw. differenzierbar ist.
- S**
- Schnitt 90, 143
 einer stetigen Abbildung $\pi: Y \rightarrow X$; das ist eine stetige Abbildung $\sigma: X \rightarrow Y$ mit $\pi \circ \sigma = \text{Id}_X$.
- Schröder-Bernsteinscher Satz 215
- Schrumpfung 155
 einer offenen Überdeckung: das ist eine Überdeckung durch offene Mengen, deren abgeschlossene Hüllen in Mengen der vorgegebenen Überdeckung enthalten sind.
- schwache Topologie
 38, 101, 118, 124, 201
 — für topologische Vektorräume: grösste Topologie, in der die stetigen linearen Funktionale noch stetig bleiben.
 — für zellenzerlegte Räume: Eine Teilmenge ist genau dann abgeschlossen in der schwachen Topologie, wenn ihr Durchschnitt mit allen Zellenhüllen abgeschlossen ist.
- semi-lokal einfach zusammenhängend 181
 heißt ein Raum, wenn in jeder Umgebung eines jeden seiner Punkte x eine Umgebung U enthalten ist, so daß jede Schleife in U an x im ganzen Raum X nullhomotop ist.
- separabel 106
 ist ein topologischer Raum, der eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.
- Simplex 109
 Die konvexe Hülle von $k+1$ Punkten im \mathbb{R}^n in allgemeiner Lage ist ein k -Simplex.
- simpliciale Abbildungen 114
 Abbildungen zwischen Polyedern, die k -Simplexes affin in k -Simplexes abbilden.
- simpliciale Homologie 114
 (Definition nicht im Text)

- simpliziale Kategorie 114
 Polyeder und simpliziale Abbildungen.
- Skelett 118
 Das n -Skelett oder n -Gerüst eines zellenzerlegten Raumes ist die Vereinigung aller Zellen der Dimensionen $\leq n$.
- Smash 53
 $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$
- Sobolev-Räume 72
- Spektrum 204
 einer kommutativen Banachalgebra: Menge der maximalen Ideale, versehen mit der schwach- $*$ -Topologie.
- Standgruppe 49
 oder Isotropiegruppe G_x eines Punktes x in einem G -Raum: Untergruppe der x festlassenden Elemente von G .
- stetige Abbildung 16
 $f: X \rightarrow Y$ stetig, wenn Urbilder offener Mengen stets offen.
- Stone-Čech-Kompaktifizierung 206
 βX eines vollständig regulären Raumes X , das ist die in einem gewissen Sinne "größtmögliche" Kompaktifizierung von X .
- Subbasis 15
 einer Topologie: eine Menge von offenen Mengen, die immerhin so reichhaltig ist, daß die daraus durch endliche Durchschnittsbildungen definierten offenen Mengen eine Basis bilden. (Die offenen Zylinder sind z.B. eine Subbasis der Produkttopologie.)
- subordiniert 145
 anderes Wort für "untergeordnet" (S. 142): Eine Zerlegung der Eins heißt einer Überdeckung *subordiniert*, wenn jeder Träger eines Summanden in einer Überdeckungsmenge steckt.
- Summe von Mengen 13
 $X+Y$; Vereinigung der vorher formal "disjunkt gemachten" Mengen, z.B. üblich
 $X+Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$.
- Summe von topologischen Räumen 14
 $X+Y$ versehen mit der naheliegenden Topologie $\{U+V \mid U \text{ offen in } X, V \text{ offen in } Y\}$.
- Suspension 52
 oder Einhängung ΣX von X , entsteht aus dem Zylinder über X durch Zusammenschlagen von Boden und Deckel zu je einem Punkt.
- $s(v_0, \dots, v_k)$ 109
 Simplex, konvexe Hülle von Punkten v_0, \dots, v_k in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^n .
- T**
- Teilraum 13
 X_0 eines topologischen Raumes X : Teilmenge $X_0 \subset X$, versehen nicht mit irgendeiner, sondern mit der "Teilraumtopologie".
- Teilraumtopologie 13
 oder induzierte Topologie: $V \subset X_0$ heißt offen in der Teilraumtopologie von X_0 in X , wenn sich eine in X offene Menge U mit $V = X_0 \cap U$ finden läßt.
- Teilsimplex 109

- teilweise geordnete Menge 213
- Thom, René 53, 95
* 1923
- Thom-Raum 53
eines Vektorraumbündels E ,
das ist DE/SE .
- Tietzesches Erweiterungs-
lemma 140
über die Fortsetzbarkeit von
auf abgeschlossenen Teilmengen
gegebenen Funktionen.
- TM 143
Tangentialbündel der Man-
nigfaltigkeit M . Im Text nicht
näher erläutert; siehe [3].
- $\mathcal{T}op$ 82
die "topologische Kategorie"
(topologische Räume und stetige
Abbildungen).
- Topologie 7
im engeren Sinne: Menge der
offenen Mengen eines topo-
logischen Raumes. — Sonst:
Bezeichnung für die Theorie
der topologischen Räume.
- Topologie eines metrischen
Raumes 11
 $\mathcal{O}(d) := \{U \mid \text{zu jedem } x \in U$
 $\text{gibt es } \varepsilon > 0 \text{ mit } K_\varepsilon(x) \subset U\}$.
- topologische Gruppe 43, 31
 G Gruppe und topologischer
Raum zugleich, und zwar so,
daß $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ stetig ist.
- topologische Summe 14
zweier topologischer Räume
 X und Y : die disjunkte Ver-
einigung $X+Y$, versehen mit
der naheliegenden Topologie
 $\{U+V \mid U \text{ offen in } X, V \text{ offen}$
 $\text{in } Y\}$.
- topologischer Raum 7
Paar (X, \mathcal{O}) , so daß \emptyset und X ,
beliebige Vereinigungen und
endliche Durchschnitte von
Mengen aus \mathcal{O} wieder in \mathcal{O} .
- topologischer Raum
über X 157
das ist ein Paar (Y, π) aus
einem topologischen Raum Y
und einer surjektiven stetigen
Abbildung $\pi: Y \rightarrow X$.
- topologischer
Vektorraum 31
Vektorraum, der zugleich eine
mit der linearen Struktur
verträgliche Topologie trägt.
- Träger 132
Trf einer Funktion f : Abge-
schlossene Hülle der Menge
der Punkte, an denen die
Funktion nicht Null ist.
- transitiv 185
operiert eine Gruppe auf
einer Menge, wenn sie dort
nur einen Orbit hat, d.h.
wenn es zu $x, y \in Y$ stets ein
 $g \in G$ mit $y = gx$ gibt.
- triviale Topologie 16
größtmögliche Topologie,
nur aus \emptyset und X bestehend.
- Tychonoff, Andrej Nikolaje-
witsch 197
*1906

- Tychonoffscher Produktsatz 197
 Beliebige Produkte kompakter Räume sind kompakt. — Was wir kompakt nennen, nannte Tychonoff "bikom-pakt". Er schreibt in [20], S.772: "Das Produkt von bikompakten Räumen ist wieder bikompakt. Diesen Satz beweist man wörtlich so, wie die Bikompaktheit des Produkts von Strecken", und dafür verweist er auf [19], §2. — "Probably the most important single theorem of general topology" (J.L. Kelley, General Topology, Springer Verlag).
- U
- Überlagerung 160
 lokal triviale Faserung mit diskreten Fasern.
- Ultrafilter 210
 maximaler Filter.
- Umgebung 8
 von x heißt eine Menge, wenn sie nicht nur x , sondern sogar eine x enthaltende offene Menge umfaßt.
- Umgebungsaxiome 9
 Alternative Fassung des Begriffes "topologischer Raum" durch Axiomatisierung des Umgebungsbegriffes.
- Umgebungsbasis 97
 Menge von Umgebungen von x_0 , in der "beliebig kleine Umgebungen vorkommen", nämlich in dem Sinne, daß in jeder beliebigen Umgebung eine solche Basis-Umgebung enthalten ist.
- Umlaufszahl 93
- universelle
 Überlagerung 187
 eines Raumes: die (i.w. eindeutig bestimmte) Überlagerung mit einfach zusammenhängendem Überlagerungsraum. Wegen der Bezeichnung "universell" siehe den Satz auf S. 190.
- untergeordnet 142
 Eine Zerlegung der 1 ist einer Überdeckung untergeordnet oder subordiniert, wenn der Träger eines jeden Summanden jeweils in einer der Überdeckungsmengen enthalten ist.
- Unterkomplex 120
 eines CW -Complexes: abgeschlossene Vereinigung von Zellen.
- Urysohn,
 Pawel Samuilowitsch 133
 1898-1924
- Urysohnsches Lemma 134
 Fundamentalsatz der Funktionenkonstruktion auf topologischen Räumen.
- V
- Vektorfeld 25, 48, 148, 149
 Auf die Integration von Vektorfeldern auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten wird für die damit vertrauten Leser in Beispielen bezug genommen. Lernen kann man das z.B. aus [3].
- Vektorraumbündel 143
 Bestehend aus Totalraum, Basis, Projektion, Vektorraumstruktur auf den Fasern. Müssen das "Axiom der lokalen Trivialität" erfüllen. Beispiel: Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit.

- Verfeinerung 152
 Eine Überdeckung heißt Verfeinerung einer anderen, wenn jede Menge dieser einen in einer der anderen liegt.
- Vergißfunktoren 86, 89, 114
- Vervollständigung 63
 eines metrischen Raumes:
 ein vollständiger metrischer Raum, in dem der gegebene als dichter metrischer Teilraum liegt.
- verzweigte Überlagerungen 161
 allgemeinerer Überlagerungsbegriff als der in diesem Buche Kap. 9 behandelte.
- vollständig regulär 206
 heißt ein topologischer Raum, in dem die einpunktigen Teilmengen abgeschlossen sind und in dem es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge A und Punkt $p \notin A$ eine stetige Funktion nach $[0,1]$ gibt, die auf p Null und auf A Eins ist.
- vollständiger metrischer Raum 62
 ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert.
- vollständiger topologischer Vektorraum 35
 topologischer Vektorraum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, wobei der Begriff Cauchyfolge (in Abwesenheit einer Metrik!) mittels Nullumgebungen definiert ist.
- Volltorus 78
 das ist $S^1 \times D^2$.
- W**
- Wedge 53
 oder "Einpunktverbindung" $X \vee Y$ von zwei mit Basispunkten versehenen Räumen. Das ist der Teilraum $X \times y_0 \cup x_0 \times Y \subset X \times Y$.
- Weg 20
 stetige Abbildung $[0,1] \rightarrow X$.
- wegzusammenhängend 20
 heißt ein Raum, wenn man darin je zwei Punkte durch einen Weg verbinden kann.
- Whitehead, J.H.C. 118
 1904–1960
- wohlgeordnet 213
- Würfel 94, 198
 $I^n = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$
- X**
- X/A 50
 Quotientenraum, der durch Zusammenschlagen von ACX zu einem Punkte entsteht.
- X/G 48
 Orbitraum eines G -Raumes X .
- X/\sim 39
 Quotient des Raumes X nach der Äquivalenzrelation \sim .

- $[X, Y]$ 75
Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von $X \rightarrow Y$.
- Y**
- $Y \cup_{\varphi} X$ 54
Raum, der durch Anheften von X an Y mittels φ entsteht.
- Z**
- Zariski-Topologie 23
Topologie des projektiven Raumes, in der eine Menge genau dann offen ist, wenn sie Komplement einer projektiven Varietät ist.
- Zelle 115
nennt man jeden topologischen Raum, der zu einem \mathbb{R}^n homöomorph ist.
- Zellenzerlegung 115
eines topologischen Raumes X : eine Zerlegung in Teilmengen, welche Zellen sind.
- Zerlegung 115
einer Menge X : Menge paarweise disjunkter Teilmengen, deren Vereinigung ganz X ist.
- Zerlegung der Eins 142
Darstellung der konstanten Funktion Eins auf einem topologischen Raum X als "lokal endliche" Summe von Funktionen $X \rightarrow [0, 1]$.
Nützlich, wenn die Summanden "kleine" Träger haben.
- Zornsches Lemma 214
Ist in einer teilweise geordneten Menge M jede Kette beschränkt, so hat M ein maximales Element.
- zusammenhängend 18
heißt ein Raum X , wenn nur X und \emptyset offen und abgeschlossen in X zugleich sind.
- zusammenhängende Summe zweier Mannigfaltigkeiten 56
- Zusammenschlagen eines Teilraums 50
 $A \subset X$ zu einem Punkt: Übergang zum Quotientenraum X/A nach der Äquivalenzrelation, die alle Punkte in A für äquivalent erklärt.
- zusammenziehbar 76
heißt ein Raum, der zum einpunktigen Raum homotopieäquivalent ist.