A

Lösungen zu den Übungen

Inhaltsverzeichnis

A.1 Deskriptive Statistik

Lösung zu Aufgabe 2.1:

- Wählerverhalten: Die statistische Masse sind z. B. die Bürger in Nordrhein-Westfalen. Die statistischen Einheiten sind die einzelnen Bürger. Die räumliche Abgrenzung ist dann das Land Nordrhein-Westfalen, die sachliche Abgrenzung der wahlberechtigte Bürger und die zeitliche Abgrenzung der Tag der Umfrage.
- Studiendauer: Die statistische Masse sind die Studenten an deutschen Hochschulen. Die statistische Einheit ist die Studentin, der Student. Die räumliche Abgrenzung sind die Studenten an deutschen Hochschulen, die sachliche Abgrenzung die examinierten Studenten und die zeitliche Abgrenzung der Zeitraum der Untersuchung.

Lösung zu Aufgabe 2.2:

- Eheschließungen: Ereignismasse
- Wahlberechtigte Bundesbürger: Bestandsmasse
- Zahl der Verkehrsunfälle: Ereignismasse
- Auftragseingang: Ereignismasse

Lösung zu Aufgabe 2.3:

- $X(\omega_i) = \text{Haarfarbe}$, $\mathcal{A}_X = \{\text{blond}, \text{schwarz}, \ldots\}$
- $X(\omega_i) = \text{Einkommen}$, $\mathcal{A}_X \subseteq \mathbb{R}^+$, z. B. 2 631.78 €, 1 415.47 €, 3 541.01 €

- $X(\omega_i)$ = Klausurnote, $\mathcal{A}_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $X(\omega_i)$ = Schulabschluss, $\mathcal{A}_X = \{$kein, Hauptschulabschluss, Realschulabschluss, Fachhochschulreife, Abitur, sonstiger$\}$
- $X(\omega_i)$ = Freizeitbeschäftigung, $\mathcal{A}_X = \{$Segeln, Lesen, Musik, sonstige$\}$

Es sind nicht alle möglichen Ausprägungen aufzuzählen, sondern nur die, die in der statistischen Untersuchung von Interesse sind. Die letzten beiden Merkmale sind häufbar. Es können durch Weiterbildung verschiedene Schulabschlüsse erreicht werden. In der Freizeit kann man verschiedenen Beschäftigungen nachgehen.

Lösung zu Aufgabe 2.4:

- Semesterzahl: Verhältnisskala
- Temperatur: Intervallskala
- Klausurpunkte: Ordinalskala
- Längen- und Breitengrade der Erde: Intervallskala
- Studienfach: Nominalskala
- Handelsklassen von Obst: Ordinalskala

Lösung zu Aufgabe 2.5: Für die erste Klasseneinteilung betragen die relativen Häufigkeiten:

$$f(x_1) = \frac{1}{5}, \quad f(x_2) = \frac{2}{5}, \quad f(x_3) = \frac{2}{5} \tag{A.1}$$

Für die zweite Klasseneinteilung ergibt sich folgende Verteilung der relativen Häufigkeiten:

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = \frac{2}{5}, \quad f(x_3) = \frac{3}{5} \tag{A.2}$$

Man erkennt sofort die Wirkung der unterschiedlichen Klasseneinteilung auf die relativen Häufigkeiten.

Lösung zu Aufgabe 2.6: Jeder fünfte Autofahrer bedeutet von fünfen einer, von zehnen zwei, von hundert zwanzig. Das sind natürlich nicht 5 Prozent der Autofahrer, sondern 20 Prozent der Autofahrer. Also ist der Anteil der „Raser" nicht von 10% auf 5% gefallen, sondern auf 20% gestiegen.

Lösung zu Aufgabe 4.1: Die Werte der Informationsentropie sind wie folgt:

$$h_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 0 \iff r_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 1 \tag{A.3}$$
$$h_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 0.4690 \iff r_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 0.5310 \tag{A.4}$$
$$h_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 0.8813 \iff r_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 0.1187 \tag{A.5}$$
$$h_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 1.0000 \iff r_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 0 \tag{A.6}$$

Der Zuwachs der Informationsentropie ist von der Verteilung (0.1,0.9) auf (0.3, 0.7) wesentlich größer als von der Verteilung (0.3,0.7) auf die Gleichverteilung (0.5, 0.5), obwohl sich die relativen Häufigkeiten nur um 20 Prozentpunkte verschoben haben. Dies ist mit dem nicht linearen Zuwachs des Streuungsmaßes gemeint. Die Redundanz der Information nimmt mit steigender Informationsentropie, steigender Streuung ab. Im ersten Fall nimmt die Redundanz ihren maximal Wert an, weil von n Ereignissen (Beobachtungen) $n-1$ redundant sind, im zweiten Fall ist rd. 53% der Information redundant und im Extremfall einer Gleichverteilung ist keine Information redundant.

Lösung zu Aufgabe 4.2: Die Quartile der Häufigkeitsverteilung können aus der empirischen Verteilungsfunktion abgelesen werden (siehe Tabelle A.1). Zu beachten ist hier, dass das erste und zweite Quartil die gleiche Merkmalsausprägung aufweisen, da der Anfang der Häufigkeitsverteilung zu schwach besetzt ist. Im Boxplot zeigt sich dies dadurch, dass die Box nicht sichtbar durch den Median unterteilt wird. Der Median liegt auf der Linie des 1. Quartils. Die Verteilung ist sehr linkssteil ($QS = 0$).

$$x_{0.25} = 800 \quad x_{0.50} = 800 \quad x_{0.75} = 1\,000 \tag{A.7}$$

Tabelle A.1. Häufigkeitsverteilung

Klasse	$(\ldots,\ldots]$	x_j	Δ_j	$n(x_j)$	$f(x_j)$	$F(x_k)$	$f^*(x_j)$
1	$(300, 500]$	400	200	3	0.10	0.10	0.0005
2	$(500, 700]$	600	200	3	0.10	0.20	0.0005
3	$(700, 900]$	800	200	13	0.43	0.63	0.00215
4	$(900, 1\,100]$	1 000	200	8	0.27	0.90	0.00135
5	$(1\,100, 1\,300]$	1 200	200	3	0.10	1.00	0.0005
$\sum$	–	–	–	30	1.00	–	–

Die Werte in der ersten Klasse sind als Ausreißer zu werten. Das Merkmal „Stunden“ ist ein verhältnisskaliertes (metrisches) Merkmal.

Lösung zu Aufgabe 4.3: Der mittlere Quartilsabstand beträgt

$$MQA = \frac{1}{2}(1\,000 - 800) = 100 \tag{A.8}$$

Die mittlere Quartilsabweichung ist mit 100 Stunden mäßig groß, wenn man bedenkt, dass die Werte zwischen rd. 400 und 1 200 Stunden liegen. Das Streuungsmaß von Vogel und Dobbener zeigt ebenfalls eine mäßig starke Streuung der Merkmalswerte an. Bedenken Sie, dass das Streuungsmaß recht schnell Werte in der Höhe von 0.5 ausweist, höhere Werte aber erst bei deutlich stärkerer Streuung der Merkmalswerte (nicht linearer Zuwachs).

$$VD_5 = 2.61 \quad VD_5^* = 0.65 \tag{A.9}$$

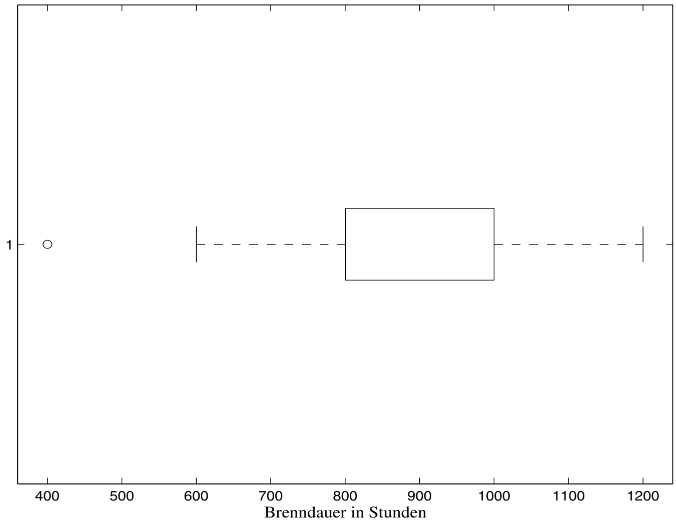

Abb. A.1. Boxplot der Glühbirnenbrenndauer

Lösung zu Aufgabe 4.4: Es handelt sich um ein metrisches Messniveau, genauer um eine Verhältnisskala, auf der die Werte erfasst sind.

Der Stamm für das Stamm-Blatt Diagramm ist in Einheiten von 100 Stunden abgetragen (siehe Abbildung A.2). Die Stundenangaben wurden auf ganze Zehner gerundet. Die gleiche Häufigkeitsverteilung ist in Abbildung A.3 als Histogramm dargestellt.

3	89
4	7
5	09
6	6
7	45577
8	00011157
9	024567
10	11
11	9
12	12

Abb. A.2. Stamm-Blatt Diagramm

Lösung zu Aufgabe 4.5: Aus der gegebenen Tabelle in der Aufgabe müssen die Wachstumsfaktoren (x_i) der Gewinne (G_i) berechnet werden (siehe Tabelle A.2):

$$x_i = \frac{G_i}{G_{i-1}} \tag{A.10}$$

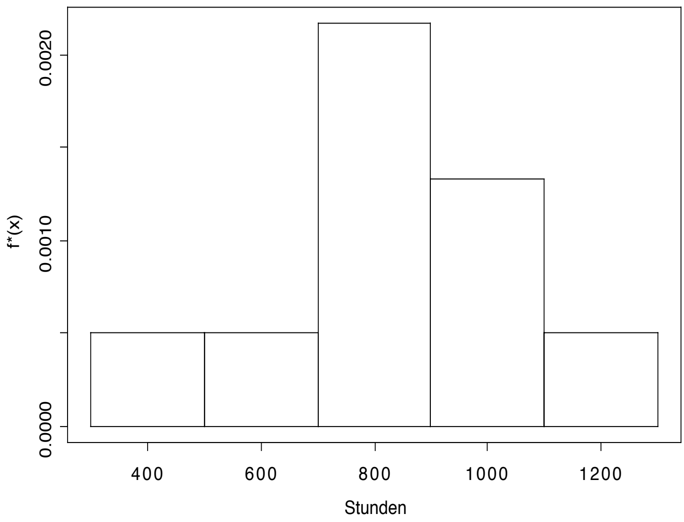

Abb. A.3. Histogramm der Glühbirnenbrenndauer

Tabelle A.2. Wachstumsfaktoren

	Jahr				
	1993	1994	1995	1996	1997
Gewinne	500	525	577.5	693	900.9
x_i	–	1.05	1.1	1.2	1.3

Aus den Wachstumsfaktoren wird das geometrische Mittel berechnet.

$$\begin{aligned} \bar{x}_g &= \sqrt[4]{\prod_{i=1}^{4} x_i} \\ &= \sqrt[4]{(1.05 \times 1.1 \times 1.2 \times 1.3)} \\ &\approx 1.158 \Rightarrow 15.8\% \end{aligned} \tag{A.11}$$

Wachstumsfaktoren werden multiplikativ auf die Basis angewendet, um den Zuwachs zu errechnen. Dabei wird der Zuwachs aus der Vorperiode mit berücksichtigt (Zinseszins). Daher ist das geometrische Mittel das geeignete Mittel. Das arithmetische Mittel hingegen addiert die Wachstumsfaktoren auf, was inhaltlich bedeutet, dass der Zinseszins nicht berücksichtigt wird. Das arithmetische Mittel weist daher bei monoton wachsenden Folgen stets eine zu hohe Wachstumsrate aus; hier 16.25%.

Lösung zu Aufgabe 4.6: Aus der Häufigkeitsverteilung der Aufgabe 4.4 errechnen sich folgende Maßzahlen (die Angaben sind auf zwei Stellen der Mantisse gerundet):

$$x_{0.5} = 800 \tag{A.12}$$

$$\bar{x} = 833.33 \tag{A.13}$$

$$\sigma = 213.44 \tag{A.14}$$

$$\sigma_{korr} = 205.48 \tag{A.15}$$

Die Maßzahlen, die sich aus der Urliste errechnen, sind:

$$x_{0.5} = 808.70 \tag{A.16}$$

$$\bar{x} = 819.73 \tag{A.17}$$

$$\sigma = 209.37 \tag{A.18}$$

$$\mid v \mid = \frac{205.48}{833.33} = 0.25 \tag{A.19}$$

$$\mid v^* \mid = \frac{0.25}{\sqrt{29}} = 0.046 \tag{A.20}$$

Bei klassierten Werten sind Median, Mittelwert und Varianz nur eine Approximation der tatsächlichen Stichprobenmomente.

Lösung zu Aufgabe 4.7: Die Verteilung der Brenndauer der Glühbirnen zeigt in den Grafen (Stamm-Blatt Diagramm, Histogramm, Boxplot) eine deutliche Häufung im Bereich von 700 bis 900 Stunden an. Die Werte schwanken mäßig um dieses Zentrum. Der Variationskoeffizient zeigt eine recht homogene Verteilung an. Dies liegt daran, dass bei einer mittleren Brenndauer von rd. 800 Stunden die Werte relativ nah beieinander liegen, wenn man davon ausgeht, dass alle positiven Werte aus den reellen Zahlen beobachtet werden könnten. Insofern ist der Variationskoeffizient hier nicht so sehr für die Beurteilung der Streuung dieser Verteilung geeignet. Die Konstruktion des Variationskoeffizienten ist für einen Vergleich von Verteilungen ausgelegt.

Lösung zu Aufgabe 4.8: In der Aufgabe sind die relativen Marktanteile gegeben. Die anteilige Merkmalssumme ist somit:

$$g(x_k) = \{0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.68, 1.00\} \tag{A.21}$$

Die empirische Verteilungsfunktion besitzt folgenden Verlauf:

$$F(x_k) = \{0, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00\} \tag{A.22}$$

Werden beide Funktionen gegeneinander abgetragen, so erhält man die Lorenzkurve (siehe Abbildung A.4).

Der Gini-Koeffizient berechnet sich aus

$$\begin{aligned} L &= 1 - \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} g(x_k) \\ &= 1 - \frac{2}{4} \big(0.12 + 0.24 + 0.36 + 0.68\big) \\ &= 0.30 \end{aligned} \tag{A.23}$$

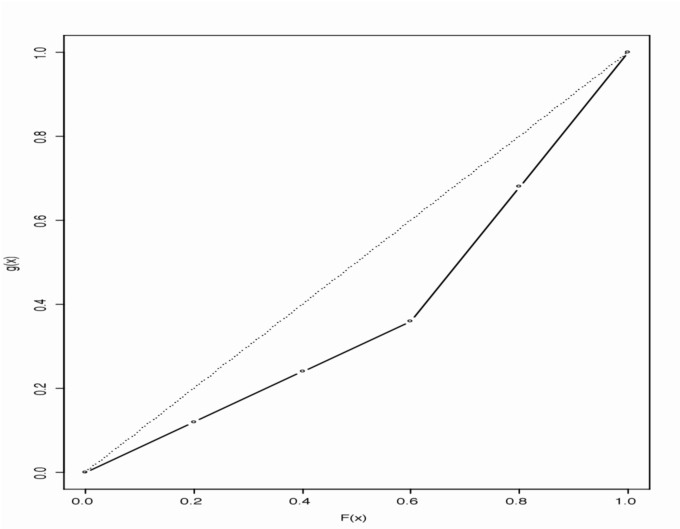

Abb. A.4. Lorenzkurve der Marktanteile

Der Herfindahl-Index bestimmt sich aus den quadrierten relativen Marktanteilen.

$$\pi_i = \{0.12^2, 0.12^2, 0.12^2, 0.32^2, 0.32^2\} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned} HF &= \sum_{i=1}^{5} \pi_i \\ &= 0.248 \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned} HF^* &= \frac{HF - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \\ &= \frac{0.248 - 0.20}{1 - 0.20} = 0.06 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Die Informationsentropie berechnet sich aus:

$$\begin{aligned} h_n &= -\frac{1}{\ln 5} \sum_{i=1}^{5} \pi_i \, \ln \pi_i \\ &= -\frac{1}{1.609} \, (-1.238) = 0.769 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Alle drei Maße weisen eine geringe Marktkonzentration aus. Bei der Informationsentropie ist zu beachten, dass je höher das Maß ausfällt, desto geringer die Konzentration der Merkmalswerte ist.

Lösung zu Aufgabe 4.9: Aus den gegebenen Daten ergibt sich die Häufigkeitsverteilung in Tabelle A.3.

Tabelle A.3. Relative Konzentration

Klasse	x_j	$n(x_j)$	$F(x_k)$	$g(x_k)$
1	400	3	0.1	0.048
2	600	3	0.2	0.120
3	800	13	0.63	0.536
4	1 000	8	0.9	0.856
5	1 200	3	1.0	1.000

Die Fläche F wird aus der Formel 4.186 mit $m = 5$ bestimmt: $F = 0.0687$ mit $g(x_0) = 0$. Die Fläche $F_{\max}$ berechnet sich aus der Beziehung 4.187, da keiner der beiden Extremfälle vorliegt: $F_{\max} = 0.426$. Der Gini-Koeffizient ist damit: $L = 0.1612$. Die Brenndauer der Glühbirnen verteilt sich recht gleichmäßig auf die 5 Klassen.

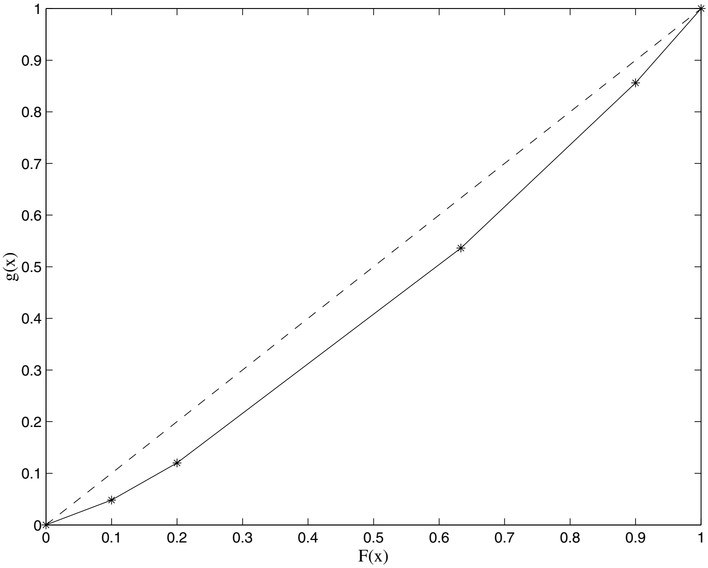

Abb. A.5. Lorenzkurve für klassierte Werte

Lösung zu Aufgabe 5.1: Um die statistische Unabhängigkeit der Verteilungen zu überprüfen, müssen die bedingten Verteilungen von $f(X|Y)$ oder $f(Y|X)$ bestimmt werden (siehe Tabelle A.4).

Die bedingten Verteilungen von Y sind verschieden. Daraus folgt, dass die Merkmale X und Y statistisch voneinander abhängen. Alternativ könnte man auch die bedingten Verteilungen von X bestimmen (siehe Tabelle A.5).

Tabelle A.4. Bedingte Verteilung von Y

$f(y_j \mid x_1)$	$f(y_j \mid x_2)$	$f(y_j \mid x_3)$
0.20	0.30	0.50
0.25	0.35	0.40
0.55	0.35	0.10

Tabelle A.5. Bedingte Verteilung von X

$f(x_i \mid y_1)$	0.20	0.30	0.50
$f(x_i \mid y_2)$	0.25	0.35	0.40
$f(x_i \mid y_3)$	0.55	0.35	0.10

Für die zweite Häufigkeitsverteilung ergeben sich folgende bedingte Verteilungen von Y (siehe Tabelle A.6).

Tabelle A.6. Bedingte Verteilung von Y

$f(y_j \mid x_1)$	$f(y_j \mid x_2)$	$f(y_j \mid x_3)$
0.17	0.17	0.17
0.50	0.50	0.50
0.33	0.33	0.33

Die bedingten Verteilungen von Y sind identisch. Die beiden Merkmale X und Y sind statistisch unabhängig. Daher müssen auch die bedingten Verteilungen von X identisch sein (siehe Tabelle A.7).

Tabelle A.7. Bedingte Verteilung von X

$f(x_i \mid y_1)$	0.2	0.5	0.3
$f(x_i \mid y_2)$	0.2	0.5	0.3
$f(x_i \mid y_3)$	0.2	0.5	0.3

Lösung zu Aufgabe 5.2:

1. Aus den Angaben kann die Tabelle bestimmt werden (siehe Tabelle A.8).
2. In dem Aufgabentext wurde die Angabe $f(P \mid G) = 5/9$ mitgeteilt. Es wird auf die geheilten Patienten Bezug genommen.
3. Der Anteil der insgesamt geheilten Patienten beträgt $f(G) = 9/30$.
4. Der Anteil der nicht geheilten Patienten, die in der Klinik behandelt wurden, beträgt $f(\overline{G} \mid P) = 20/25$. Ein großer Anteil der klinisch behandelten Patienten ist nicht geheilt worden. Er liegt mit $f(G \mid P) = 0.2$ sogar unter dem

Tabelle A.8. Kontingenztabelle

	P	$\overline{P}$	$\sum$
G	5	4	9
$\overline{G}$	20	1	21
$\sum$	25	5	30

durchschnittlichen Heilungserfolg $f(G)$. Dies spricht hier gegen die klinische Behandlung.
Was erst wie ein Erfolg aussieht, ist dennoch ein Misserfolg. Für den Patienten ist interessant, wie hoch die Heilungsrate ist, wenn er sich in der Klinik behandeln lässt und nicht, wie hoch der Anteil der klinisch behandelten Patienten unter den geheilten ist. Es kommt auf die Bedingung an!

Lösung zu Aufgabe 5.3: Für die Berechnung von χ^2 sind zuerst die theoretischen Häufigkeiten bei statistischer Unabhängigkeit zu berechnen (siehe Tabelle A.9), die sich aus den Produkten der Häufigkeiten der Randverteilungen ergibt.

Tabelle A.9. Theoretische Häufigkeit bei Unabhängigkeit

$\hat{n}(x_i, y_j)$			
22.5	15	7.5	5
36.0	24	12.0	8
27.0	18	9.0	6
4.5	3	1.5	1

Tabelle A.10. Arbeitstabelle

$\frac{\left(n(x_i,y_j)-\hat{n}(x_i,y_j)\right)^2}{\hat{n}(x_i,y_j)}$			
13.61	1.67	7.50	5.0
0.44	0.04	4.08	0.5
10.70	2.72	28.44	6.0
4.50	3.00	1.50	81.0

Die Summe der Zahlen in der Tabelle A.10 ist die χ^2 Statistik.

$$\chi^2 = 170.718 \tag{A.28}$$

$$\phi^2 = \frac{170.7}{200} = 0.8535 \tag{A.29}$$

$$C = \sqrt{\frac{0.8535}{3}} = 0.5334 \tag{A.30}$$

Zur Berechnung der Transinformation werden die relativen Häufigkeiten benötigt (siehe Tabelle A.11).

Tabelle A.11. Relative Häufigkeiten

Merkmal	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(y_j)$
y_1	0.20	0.050	0.000	0.00	0.25
y_2	0.20	0.125	0.025	0.05	0.40
y_3	0.05	0.125	0.125	0.00	0.30
y_4	0.00	0.000	0.000	0.05	0.05
$f(x_i)$	0.45	0.300	0.150	0.10	1

Aus der Tabelle A.11 lassen sich die gemeinsame Entropie H_{pq}, die Entropien der Randverteilungen H_p und H_q sowie die Transinformation berechnen.

$$h_{44} = 0.7628 \tag{A.31}$$

$$h_4 = 0.8911 \times \log_{16} 4 = 0.4455 \tag{A.32}$$

$$h_4 = 0.8829 \times \log_{16} 4 = 0.4415 \tag{A.33}$$

$$T = 0.1242 \tag{A.34}$$

$$T^* = \frac{0.4970}{1.7660} = 0.2814 \tag{A.35}$$

Der Cramérsche Kontingenzkoeffizient zeigt der Größe nach einen etwas stärkeren Zusammenhang als die normierte Entropie an, welcher auf die unterschiedliche Konstruktion der beiden Zusammenhangsmaße zurückzuführen ist. Beide Maße weisen aber insgesamt nur einen schwachen Zusammenhang zwischen dem Beruf des Vaters und dem des Sohnes aus.

Lösung zu Aufgabe 5.4: Die Beobachtungswerte in der Tabelle weisen keine Bindungen zwischen den Merkmalen X und Y auf. Daher kann der Spearmansche Korrelationskoeffizient ρ_S mit der vereinfachten Formel

$$\rho_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} \big(R(x_i) - R(y_i)\big)^2}{n\,(n^2 - 1)} \tag{A.36}$$

berechnet werden. Die Rangzahlen sind in Tabelle A.12 angegeben.

$$\rho_S = 1 - \frac{6 \times 150}{12\,(12^2 - 1)} = 0.4755 \tag{A.37}$$

Tabelle A.12. Rangzahlen

$R(x_i)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(y_i)$	12	2	3	1	4	8	5	6
$\big(R(x_i) - R(y_i)\big)^2$	121	0	0	9	1	4	4	4
$R(x_i)$	9	10	11	12				
$R(y_i)$	7	9	10	11				
$\big(R(x_i) - R(y_i)\big)^2$	4	1	1	1				

Die Rangkorrelation zwischen Ligaplatz und Prämie ist hier schwach. Dies bedeutet, dass die Prämienhöhe und der Ligaplatz nur wenig miteinander verbunden sind. Eine Kausalität darf hieraus aber nicht abgeleitet werden.

Lösung zu Aufgabe 5.5:

$$\bar{x} = 1\,556.8 \tag{A.38}$$

$$\bar{y} = 10.495 \tag{A.39}$$

$$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i\, y_i = 16\,076.565 \tag{A.40}$$

$$cov(x, y) = -262.051 \tag{A.41}$$

Lösung zu Aufgabe 5.6: Um die Wirksamkeit der Behandlung zu beurteilen, werden die Heilungsraten $f(\text{geheilt}|\text{behandelt})$ und $f(\text{geheilt}|\text{nicht behandelt})$ berechnet. Für die beiden Gebiete A_1, A_2 und $A = A_1 + A_2$ stehen die Raten in der Tabelle A.13.

Tabelle A.13. Heilungsraten

	A_1		A_2		A	
	beh.	$\overline{\text{beh.}}$	beh.	$\overline{\text{beh.}}$	beh.	$\overline{\text{beh.}}$
geh.	10	100	100	50	110	150
$\overline{\text{geh.}}$	100	730	50	20	150	750
$\sum$	110	830	150	70	260	900
Heilungsrate	9.09%	12.05%	66.67%	71.43%	42.31%	16.67%

Die Heilungsrate in den Teilgebieten ist bei den nicht behandelten Patienten größer, woraus auf die Unwirksamkeit der Behandlung geschlossen werden könnte. Wird die Heilungsrate im Gesamtgebiet betrachtet, so ist sie bei den behandelten Patienten höher, woraus auf die Wirksamkeit der Behandlung geschlossen werden könnte, wenngleich eine Rate von 42.3% nicht gerade überzeugend wirkt. Die Ursache der Umkehrung liegt am hohen Anteil der behandelten Patienten im Gebiet A_2 und der nicht behandelten Patienten in A_1.

Um das Phänomen zu erklären, muss man dieser Ursache nachgehen. Beispielsweise könnte A_1 ein ländliches Gebiet sein, und A_2 eine Stadt, wodurch der Anteil der behandelten zu den nicht behandelten Personen erklärt werden könnte. Ferner könnte damit eventuell auch erklärt werden, warum der Behandlungserfolg im Gebiet A_1 so gering ist; die Personen gehen auf dem Land, vielleicht wegen der schlechteren ärztlichen Versorgung, erst in einem fortgeschrittenen Stadium der Erkrankung zum Arzt.

$$0.1667 = 0.1205\,\frac{830}{900} + 0.7143\,\frac{70}{900} \tag{A.42}$$

$$0.4231 = 0.0909\,\frac{110}{260} + 0.6667\,\frac{150}{260} \tag{A.43}$$

Die Berechnung des Cramérschen Kontingenzkoeffizienten zeigt für die Teilgebiete einen sehr niedrigen Zusammenhang an: $C_{A_1} = 0.0296$, $C_{A_2} = 0.0476$. Hingegen wird für das Gesamtgebiet ein deutlich höherer Wert ausgewiesen ($C_A = 0.2564$), obwohl der Zusammenhang zwischen Heilung und Behandlung als eher schwach einzustufen ist.

Lösung zu Aufgabe 6.1: Um die Normalgleichung

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{A.44}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5.00 & 7.40 \\ 7.40 & 14.88 \end{pmatrix} \tag{A.45}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3.90 \\ 6.91 \end{pmatrix} \tag{A.46}$$

zu lösen, muss die Inverse der Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ berechnet werden.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7576 & -0.3768 \\ -0.3768 & 0.2546 \end{pmatrix} \tag{A.47}$$

Die Regressionskoeffizienten ergeben sich dann aus folgender aufgelösten Matrixgleichung:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \begin{pmatrix} 0.3512 \\ 0.2897 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.48}$$

Im Fall der Einfachregression kann der Regressionskoeffizient β_1 auch wie folgt bestimmt werden:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2} = \frac{0.2276}{0.7856} = 0.2897 \tag{A.49}$$

Der Regressionskoeffizient β_1 gibt die Änderung der abhängigen Variable y bei Änderung der unabhängigen Variable x an. Ändert sich x um $x\%$ so ändert sich y um $\beta_1\, x\% = y\%$. Steigt das Einkommen um 100 DM, so steigen die Lebensmittelausgaben um durchschnittlich 28.97 DM. Aus den standardisierten Regressionskoeffizienten lässt sich erkennen, ob die Koeffizienten bezogen auf das Niveau der Daten groß oder klein sind. Aus den Varianzen

$$\sigma_x^2 = 0.7856 \tag{A.50}$$

$$\sigma_y^2 = 0.0696 \tag{A.51}$$

können die standardisierten Koeffizienten $\tilde{\beta}_0$ und $\tilde{\beta}_1$ errechnet werden:

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{0.3512}{\sqrt{0.0696}} = 1.3312 \tag{A.52}$$

$$\tilde{\beta}_1 = 0.2897\,\frac{\sqrt{0.7856}}{\sqrt{0.0696}} = 0.9733 \tag{A.53}$$

Es zeigt sich, dass die Einkommensabhängigkeit einen kleineren Einfluss als der Niveauparameter auf das Einkommen besitzt. Dies weist auf eine Trendkomponente in den Daten hin. Interessant ist der Vergleich der standardisierten Regressionskoeffizienten vor allem dann, wenn mehrere Regressoren zur Erklärung der abhängigen Variable eingesetzt werden. Dann lässt sich ermittelt und zwar unabhängig vom Niveau der Daten, welcher Regressor den stärksten Einfluss auf die abhängige Variable hat. Die Überprüfung der Stärke des Einflusses auf die abhängige Variable wird auch mit dem t-Test überprüft. Dazu ist jedoch dann eine Verteilungsannahme notwendig, die in der deskriptiven Statistik nicht gemacht wird.

Lösung zu Aufgabe 6.2:

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{cov(x,y)^2}{\sigma_x^2\,\sigma_y^2} = \frac{0.2276^2}{0.7856 \times 0.0696} = 0.9474 \\ &= \frac{\sigma_{\hat{\mathbf{y}}}^2}{\sigma_{\mathbf{y}}^2} = \frac{0.06594}{0.0696} = 0.9474 \end{aligned} \tag{A.54}$$

Die lineare Regression erklärt somit ungefähr 94.74% der Varianz der Ausgaben für Lebensmittel und damit einen recht hohen Anteil der Streuung der Lebensmitteausgaben.

Lösung zu Aufgabe 6.3: Ja, die Werte ändern sich, jedoch nur in der Größenordnung. Wird das Einkommen in den Größen 900, 700, u. s. w. in der Regression verwendet, die Ausgaben verbleiben in der Angabe in Tausend €, so werden die Koeffizienten um den Faktor 100 wachsen, aber in den Ziffern gleich bleiben. Also von 0.3512 auf 35.12 für $\hat{\beta}_0$ und 0.2897 auf 28.97 für $\hat{\beta}_1$. Bei den standardisierten Koeffizienten bleibt dieser Effekt aus.

Werden auf alle Einkommen der Wert 2 addiert, so ändert sich das Absolutglied auf $\hat{\beta}_0 = 2.3512$, aber Koeffizient $\hat{\beta}_1$ bleibt unverändert. Die Niveauänderung verändert nicht den Zusammenhang zwischen Einkommen und Ausgaben. Wird kein β_0 in der Regressionsfunktion berücksichtigt, dann ändert sich mit der Niveauänderung auch der Koeffizient $\hat{\beta}_1$!

Lösung zu Aufgabe 6.4: Es wird der Kleinst-Quadrate Schätzer ohne Matrixalgebra hergeleitet. Die zu minimierende Funktion lautet:

$$S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{t=1}^{n} u\big(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\big)_t^2 = \min \tag{A.55}$$

Die partiellen Ableitungen nach $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ ergeben sich unter Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_0} &= 2 \sum_{t=1}^{n} u\big(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\big)_t \frac{\partial u}{\partial \hat{\beta}_0} \\ &= 2 \sum_{t=1}^{n} \big(y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_t\big)(-1) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{A.56}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_1} &= 2 \sum_{t=1}^{n} u\big(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\big)_t \frac{\partial u}{\partial \hat{\beta}_1} \\ &= 2 \sum_{t=1}^{n} \big(y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_t\big)(-x_t) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{A.57}$$

mit:

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{\beta}_0} = -1 \tag{A.58}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{\beta}_1} = -x \tag{A.59}$$

Auflösen der ersten Bedingung nach $\hat{\beta}_0$ führt zur ersten Normalgleichung. Übrigens diese erste Normalgleichung existiert nur, wenn ein β_0 mitgeschätzt wird. Sie stellt sicher, dass $\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t = 0$ gilt, wie in Gleichung (A.56) zu sehen ist.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \tag{A.60}$$

Die Auflösung der zweiten Normalgleichung nach $\hat{\beta}_1$ unter Einsetzen des Ergebnisses für $\hat{\beta}_0$ liefert die Schätzung für $\hat{\beta}_1$.

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_1} = \sum_{t=1}^{n} y_t x_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^{n} x_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} x_t^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.61}$$

$$\hat{\beta}_1 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} x_t^2 = \sum_{t=1}^{n} y_t\, x_t - \left(\bar{y} - \hat{\beta}_1\, \bar{x}\right) \bar{x} \tag{A.62}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\frac{1}{n} \sum\limits_{t=1}^{n} x_t\, y_t - \bar{x}\, \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2 - \bar{x}^2} \\ &= \frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}\end{aligned} \tag{A.63}$$

Lösung zu Aufgabe 7.1:

$$U_{2000}^{1995} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{2000}(i)\, q_{2000}(i)}{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{1995}(i)\, q_{1995}(i)} = \frac{36\,000}{29\,000} \times 100 = 124.14 \tag{A.64}$$

$$P_{2000}^{1995\, P} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{2000}(i)\, q_{2000}(i)}{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{1995}(i)\, q_{2000}(i)} = \frac{36\,000}{33\,000} \times 100 = 109.09 \tag{A.65}$$

$$P_{2000}^{1995\, L} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{2000}(i)\, q_{1995}(i)}{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{1995}(i)\, q_{1995}(i)} = \frac{28\,000}{29\,000} \times 100 = 96.55 \tag{A.66}$$

$$Q_{2000}^{1995\, P} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{2000}(i)\, q_{2000}(i)}{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{2000}(i)\, q_{1995}(i)} = \frac{36\,000}{28\,000} \times 100 = 128.57 \tag{A.67}$$

$$Q_{2000}^{1995\, L} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{1995}(i)\, q_{2000}(i)}{\sum\limits_{i=1}^{3} p_{1995}(i)\, q_{1995}(i)} = \frac{33\,000}{29\,000} \times 100 = 113.79 \tag{A.68}$$

Ein Vergleich der Preisindizes zeigt, dass beim Laspeyres Preisindex der Einfluss der Preissenkung bei Produkt 1 gegenüber der Preiserhöhung bei Produkt 2 überwiegt, da Produkt 1 in der Basisperiode den größeren Mengenanteil besitzt. Beim Preisindex nach Paasche überwiegt dagegen die Preiserhöhung bei Produkt 2, da hier die Menge von Produkt 2 in der Berichtsperiode den größeren Mengenanteil besitzt. Hinzu kommt, dass die Preissenkung bei Produkt 1 mit der geringeren Menge gewichtet wird. Ähnliches ist beim Vergleich der Mengenindizes festzustellen. Man kann also beobachten, dass insbesondere bei größeren Mengen- bzw. Preisänderungen die Wahl der Indexformel einen stärkeren Einfluss auf die Höhe der Indexwerte hat.

Lösung zu Aufgabe 7.2:

1. Die Änderungsraten gegenüber dem Vorjahresquartal stehen in Tabelle A.14.

Tabelle A.14. Änderungsraten

2002			
1	2	3	4
8.0%	8.0%	8.8%	5.6%

   Man erkennt deutlich, dass die prozentuale Änderung gegenüber dem Vorjahresquartal vom 3. Quartal auf das 4. Quartal zurückgegangen ist, obwohl der Index von 111 auf 113 gestiegen ist. Die Zunahme hat sich sogar beschleunigt: von 1.08 Prozentpunkten über 1.92 auf 2 Prozentpunkte gegenüber den jeweiligen Vorquartalen. Dass hier die Änderung gegenüber dem Vorjahresquartal dennoch zurückgeht liegt am Basiseffekt. Im entsprechenden Vorjahreszeitraum ist der Index wesentlich stärker gestiegen, um 5 Prozentpunkte.
2. Die annualisierte Änderungsrate berechnet sich aus der hochgerechneten Quartalsänderungsrate. Es wird dabei unterstellt, dass sich die Quartalsänderung über die nächsten drei Quartale unverändert fortsetzt. Die annualisierte Wachstumsrate für das erste Quartal ist:

$$r = \left(\frac{108}{107}\right)^4 - 1 = 0.038 \tag{A.69}$$

   Es errechnen sich die annualisierten Änderungsraten in Tabelle A.15.

Tabelle A.15. Annualisierte Änderungsrate

3.8%	4.1%	7.2%	7.4%

   Die annualisierten Änderungsraten zeigen den beschleunigten Zuwachs des Index im Jahr 2002 an. Gleichwohl sind die Werte völlig anders als die tatsächliche Änderungsrate in den letzten vier Quartalen, da die Berechnungsart eine andere ist.

A.2 Indukitve Statistik

Lösung zu Aufgabe 8.1: Es handelt sich hier um eine Kombination der Karten ohne Wiederholung. Die Reihenfolge, in der die Karten auf der Hand sortiert sind, spielt keine Rolle. Der 1. Spieler kann $\binom{32}{10}$, der 2. Spieler $\binom{22}{10}$ und der 3. Spieler $\binom{12}{10}$ verschiedene Kartenkombinationen auf die Hand bekommen. Insgesamt ergeben sich damit

$$\binom{32}{10} \times \binom{22}{10} \times \binom{12}{10} = 2.7533 \times 10^{15} \tag{A.70}$$

verschiedene Anfangssituationen für die Spieler.

Lösung zu Aufgabe 8.2: Die Studenten haben also folgende Möglichkeiten, die Klausurfragen zu beantworten:

1. aus den ersten 5 Fragen 3 und aus den letzten 7 Fragen 5,
2. aus den ersten 5 Fragen 4 und aus den letzten 7 Fragen 4,
3. aus den ersten 5 Fragen 5 und aus den letzten 7 Fragen 3.

Es handelt sich hier um eine Kombination ohne Wiederholung, da die Reihenfolge der Beantwortung keine Rolle spielt. Insgesamt ergeben sich

$$\binom{5}{3} \times \binom{7}{5} + \binom{5}{4} \times \binom{7}{4} + \binom{5}{5} \times \binom{7}{3} = 420 \tag{A.71}$$

verschiedene Möglichkeiten, die Klausurfragen zu beantworten.

Lösung zu Aufgabe 8.3: Bei $n = 5, 4, 3$ Richtigen müssen n aus den 6 gezogenen Kugeln und $6 - n$ aus den 43 nicht gezogenen Kugeln angekreuzt sein. Es gibt

$$\binom{6}{n} \binom{43}{6-n} \tag{A.72}$$

verschiedene Gewinnmöglichkeiten für n Richtige. Für $n = 5$ sind es 258, für $n = 4$ sind es 13545 und für $n = 3$ sind es 246820 verschiedene Möglichkeiten einen Gewinn zu erzielen.

Lösung zu Aufgabe 9.1:

$$P(A) = \frac{10}{1\,000} = 0.01 \tag{A.73}$$

$$P(B) = \frac{80}{1\,000} = 0.08 \tag{A.74}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.09 \tag{A.75}$$

Die letzte Aussage gilt, weil die Ereignisse disjunkt sind.

Lösung zu Aufgabe 9.2:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{70}{200} + \frac{50}{200} - \frac{20}{200} = 0.5 \end{aligned} \tag{A.76}$$

Lösung zu Aufgabe 9.3:

$$\begin{aligned} P(A \text{ oder } B) &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32} \end{aligned} \tag{A.77}$$

Lösung zu Aufgabe 9.4: Die Augensumme wird mit dem Ereignis A bezeichnet. Es wird nach der Wahrscheinlichkeit $P(A > 3)$ gefragt. Bei drei Würfeln ist die kleinste Augensumme $A = 3$; sie tritt nur in einer Kombination auf. Daher ist hier $P(A \leq 3) = P(A = 3)$. Die Gesamtzahl verschiedener Anordnungen ist eine Variation mit Wiederholung $n^m = 6^3 = 216$, von der aber nur eine mit 3 Punkten existiert.

$$\begin{aligned} P(A > 3) &= 1 - P(A \leq 3) \\ &= 1 - \frac{1}{216} \\ &= \frac{215}{216} \end{aligned} \tag{A.78}$$

Lösung zu Aufgabe 9.5: Sei B_n das Ereignis, dass sich unter den ersten n Würfen mindestens eine Sechs befindet. Über den Umkehrschluss ist es hier einfach, auf das gewünschte Ergebnis zu kommen. In den ersten n Würfen keine Sechs zu werfen ist dann:

$$\overline{B}_n = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n \tag{A.79}$$

und wegen der Unabhängigkeit der $\overline{A}_i$ folgt:

$$P(\overline{B}_n) = P(\overline{A}_1)\, P(\overline{A}_2) \times \cdots \times P(\overline{A}_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \tag{A.80}$$

Da B_n und $\overline{B}_n$ disjunkte Ereignisse sind, kann aus dem Komplement

$$P(B_n) = 1 - P(\overline{B}_n) \tag{A.81}$$

auf die gesuchte Wahrscheinlichkeit geschlossen werden.

$$P(B_n) = 1 - P(\overline{B}_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \tag{A.82}$$

$P(B_n)$ ist größer als 0.9, wenn $(5/6)^n < 0.1$ ist; also muss n größer als 13 sein, da $(5/6)^{13} = 0.093$ ist.

Lösung zu Aufgabe 9.6: Es wird das Ereignis A_i definiert, dass der Würfel eine 6 anzeigt $(i = 1, \dots, 4)$.

$$P(\overline{A_i}) = \frac{5}{6} \tag{A.83}$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine 6 eintritt. Es wird das Ereignis B definiert, dass sich unter 4 Würfen eine 6 befindet. Die Ereignisse A_i sind unabhängig. Mit $\overline{B}$ wird das Ereignis bezeichnet, dass keine 6 in 4 Würfen fällt.

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= P(\overline{A_1})\, P(\overline{A_2})\, P(\overline{A_3})\, P(\overline{A_4}) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.48 \end{aligned} \tag{A.84}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0.52 \tag{A.85}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 0.52. Es wird das Ereignis C_i definiert, dass das Würfelpaar eine Doppelsechs anzeigt $(i = 1, \dots, 24)$.

$$P(C_i) = \frac{1}{36} \tag{A.86}$$

$$P(\overline{C_i}) = 1 - \frac{1}{36} = 0.97 \tag{A.87}$$

Es wird das Ereignis D definiert, dass sich unter 24 Würfen eine Doppelsechs befindet. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für „keine 6 in 24 Würfen“:

$$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= \prod_{i=1}^{24} P(\overline{C_i}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} = 0.51 \end{aligned} \tag{A.88}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit:

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 0.49 \tag{A.89}$$

Es ist wahrscheinlicher mit einem Würfel in 4 Würfen mindestens eine 6 zu würfeln als in 24 Würfen mit zwei Würfeln eine Doppelsechs.

Lösung zu Aufgabe 9.7:

1. Es wird das Ereignis N definiert, dass das Erzeugnis normgerecht sei. Es wird das Ereignis G definiert, dass das Prüfverfahren normgerecht anzeigt. Aus der Aufgabe sind folgende Werte bekannt:

$$P(N) = 0.9 \quad P(G \mid N) = 0.95 \quad P(G \mid \overline{N}) = 0.1 \tag{A.90}$$

$$P(N \mid G) = \frac{P(N \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G \mid N)\, P(N)}{P(G)} \quad \text{Bayes Theorem} \tag{A.91}$$

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G \cap N) + P(G \cap \overline{N}) \quad \text{Satz der totalen Wahrscheinlichkeit} \\ &= P(G \mid N)\, P(N) + P(G \mid \overline{N})\, P(\overline{N}) \\ &= 0.95 \times 0.9 + 0.1 \times 0.1 = 0.865 \end{aligned} \tag{A.92}$$

$$P(N \mid G) = \frac{0.95 \times 0.9}{0.865} = 0.9884 \tag{A.93}$$

2. Es wird das Ereignis GG definiert, dass das Prüfverfahren für dasselbe Erzeugnis zweimal unabhängig voneinander normgerecht anzeigt.

$$P(GG \mid N) = P(G \mid N)\, P(G \mid N) = 0.95^2 \tag{A.94}$$

$$P(GG \mid \overline{N}) = P(G \mid \overline{N})\, P(G \mid \overline{N}) = 0.1^2 \tag{A.95}$$

$$\begin{aligned} P(N \mid GG) &= \frac{P(GG \mid N)\, P(N)}{P(GG \mid N)\, P(N) + P(GG \mid \overline{N})\, P(\overline{N})} \\ &= \frac{0.95^2 \times 0.9}{0.95^2 \times 0.9 + 0.1^2 \times 0.1} \\ &= 0.9988 \end{aligned} \tag{A.96}$$

Die Wahrscheinlichkeit wird durch zweimaliges Anwenden des Prüfverfahrens nicht deutlich erhöht.

Lösung zu Aufgabe 9.8: Es sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(K \mid \overline{B})$ und $P(\overline{K} \mid B)$ gesucht (siehe hierzu auch Kapitel 16.5). Im Aufgabentext sind die Angaben $P(K) = 0.05$, $P(B \mid K) = 0.95$ und $P(B \mid \overline{K}) = 0.10$ angegeben. Aus den Komplementen erhält man folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\overline{K}) = 0.95 \tag{A.97}$$

$$P(\overline{B} \mid K) = 0.05 \tag{A.98}$$

$$P(\overline{B} \mid \overline{K}) = 0.90 \tag{A.99}$$

Mittels des Bayesschen Satzes kann man nun die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnen.

$$\begin{aligned} P(K \mid \overline{B}) &= \frac{P(\overline{B} \mid K)\, P(K)}{P(\overline{B} \mid K)\, P(K) + P(\overline{B} \mid \overline{K})\, P(\overline{K})} \\ &= \frac{0.05 \times 0.05}{0.05 \times 0.05 + 0.90 \times 0.95} = \frac{0.0025}{0.8575} = 0.0029 \end{aligned} \tag{A.100}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{K} \mid B) &= \frac{P(B \mid \overline{K})\, P(\overline{K})}{P(B \mid K)\, P(K) + P(B \mid \overline{K})\, P(\overline{K})} \\ &= \frac{0.1 \times 0.95}{0.95 \times 0.05 + 0.10 \times 0.95} = \frac{0.095}{0.1425} = 0.6667 \end{aligned} \tag{A.101}$$

Lösung zu Aufgabe 10.1: Für eine Dichtefunktion muss

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \tag{A.102}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1 \tag{A.103}$$

gelten. Die erste Bedingung ist erfüllt, weil

$$f_X(x) = \frac{1}{3} \quad \text{für } 1 < x < 4 \tag{A.104}$$

gilt und sonst null. Aus

$$\int_1^4 \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\, x \Big|_1^4 = 1 \tag{A.105}$$

ergibt sich auch, dass die zweite Bedingung erfüllt ist. Es handelt sich also um eine Dichtefunktion.

Lösung zu Aufgabe 10.2:

$$P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right) = \int_{1/4}^{1/2} 2\, x\, dx = x^2 \Big|_{1/4}^{1/2} = \frac{3}{16} \tag{A.106}$$

$$E(X) = \int_0^1 x\, 2\, x\, dx = \frac{2}{3}\, x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \tag{A.107}$$

$$Var(X) = \int_0^1 x^2\, 2\, x\, dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2\, \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \tag{A.108}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{18}} \tag{A.109}$$

Lösung zu Aufgabe 10.3:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_2^x 0.2\, d\xi = 0.2\, \xi \Big|_2^x \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ 0.2\, x - 0.4 & \text{für } 2 \leq x < 7 \\ 1 & \text{für } 7 \leq x \end{cases} \end{aligned} \tag{A.110}$$

Lösung zu Aufgabe 10.4:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=2}^{12} x_i\, f_X(x_i) \\ &= 2\,\frac{1}{36} + 3\,\frac{2}{36} + 4\,\frac{3}{36} + 5\,\frac{4}{36} + 6\,\frac{5}{36} + 7\,\frac{6}{36} \\ &\quad + 8\,\frac{5}{36} + 9\,\frac{4}{36} + 10\,\frac{3}{36} + 11\,\frac{2}{36} + 12\,\frac{1}{36} \\ &= 7 \end{aligned} \tag{A.111}$$

Lösung zu Aufgabe 10.5:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_2^6 (0.125\,x - 0.25)\,dx \\ &= \int_2^6 0.125\,x\,dx - \int_2^6 0.25\,dx \\ &= 0.125\,\frac{x^2}{2}\bigg|_2^6 - 0.25\,x\bigg|_2^6 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{A.112}$$

Lösung zu Aufgabe 10.6:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{5} x_i\, f_X(x_i) \\ &= 2 \times 0.1 + 3 \times 0.4 + 5 \times 0.2 + 8 \times 0.1 + 9 \times 0.2 \\ &= 5 \end{aligned} \tag{A.113}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{5} x_i^2\, f_X(x_i) - 5^2 \\ &= 4 \times 0.1 + 9 \times 0.4 + 25 \times 0.2 + 64 \times 0.1 + 81 \times 0.2 - 25 \\ &= 31.6 - 25 \\ &= 6.6 \end{aligned} \tag{A.114}$$

Lösung zu Aufgabe 10.7: Aus

$$P\big(\mid X - \mu_X \mid \geq c\,\sigma_X\big) \leq \frac{1}{c^2} \tag{A.115}$$

ergibt sich, dass

$$c\,\sigma_X = 1 \tag{A.116}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sigma_X} = \frac{1}{0.1} \\ &= 10 \end{aligned} \tag{A.117}$$

gelten muss. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit einen Metallstift mit mehr als 1 mm Abweichung vom Sollmaß in der Produktion zu finden höchstens 0.01.

$$P\big(\mid X - 100 \mid \geq 1\big) \leq \frac{1}{100} \tag{A.118}$$

Lösung zu Aufgabe 10.8: Aus

$$P\big(\mid X - 1000 \mid < c\,\sigma_X\big) > 1 - \frac{1}{c^2} \tag{A.119}$$

$$P\big(\mid X - 1000 \mid < 10\big) > 1 - \frac{1}{c^2} \tag{A.120}$$

ergibt sich:

$$c\,\sigma_X = 10 \tag{A.121}$$

$$c = \frac{10}{4} = 2.5 \tag{A.122}$$

$$1 - \frac{1}{c^2} = 0.84 \tag{A.123}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zuckertüte die Sollvorschrift erfüllt, beträgt 0.84.

Lösung zu Aufgabe 11.1:

1. Aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) = {} & P(X \leq x \mid Y = 0)\, P(Y = 0) \\ & + P(X \leq x \mid Y = 1)\, P(Y = 1) \end{aligned} \tag{A.124}$$

Für $x \leq 0.5$ gilt

$$P(X \leq x \mid Y = 1) = 0 \tag{A.125}$$

und damit

$$P(X \leq x) = x\,(1 - p) + 0 \times p \tag{A.126}$$

und für $x \geq 0.5$ gilt

$$P(X \leq x \mid Y = 1) = 1 \tag{A.127}$$

und damit

$$P(X \leq x) = x\,(1-p) + 1 \times p. \tag{A.128}$$

Die Verteilungsfunktion ist bestimmt.

$$F_X(x) = \begin{cases} (1-p)\,x & \text{für } x \leq x < 0.5 \\ p + (1-p)\,x & \text{für } 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{A.129}$$

Die Funktion springt an der Stelle $x = 0.5$ um den Betrag p, wie in Abbildung A.6 zu sehen ist. Hier wurde $p = 0.5$ angenommen. Aufgrund dieser Sprungstelle ist $P(X = 0.5) \neq 0$.

2. Aus dem Bayes Theorem folgt

$$P(Y = 0 \mid X = 0.5) = \frac{P(X = 0.5 \mid Y = 0)\,P(Y = 0)}{P(X = 0.5)} = \frac{0\,(1-p)}{p} = 0 \tag{A.130}$$

und

$$P(Y = 1 \mid X = 0.5) = \frac{P(X = 0.5 \mid Y = 1)\,P(Y = 1)}{P(X = 0.5)} = \frac{1\,p}{p} = 1 \tag{A.131}$$

3. Für $P(0.49 < X < 0.51)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P(0.49 < X < 0.51) &= F_X(0.51) - F_X(0.49) \\ &= p + (1-p)\,0.51 - (1-p)\,0.49 \\ &= p + (1-p)\,0.02 = 0.02 + 0.98\,p \end{aligned} \tag{A.132}$$

Aus dem Bayes Theorem ist damit die Lösung bestimmbar:

$$\begin{aligned} P(Y = 1 \mid 0.49 < X < 0.51) &= \frac{P(0.49 < X < 0.51 \mid Y = 1)\,P(Y = 1)}{P(0.49 < X < 0.51)} \\ &= \frac{\big(F_X(0.51 \mid Y = 1) - F_X(0.49 \mid Y = 1)\big)\,P(Y = 1)}{P(0.49 < X < 0.51)} \\ &= \frac{\big(1 - 0\big)\,P(Y = 1)}{0.02 + 0.98\,p} \\ &= \frac{p}{0.02 + 0.98\,p} \end{aligned} \tag{A.133}$$

Für $p = 0.5$ ergibt sich dann $50/51$.

Lösung zu Aufgabe 11.2:

1. Da die Erwartungswertbildung eine lineare Operation ist, kann der Erwartungswert wie folgt berechnet werden:

$$E(2\,X - Y + 4) = 2\,E(X) - E(Y) + 4 = 2 - 2 + 4 = 4 \tag{A.134}$$

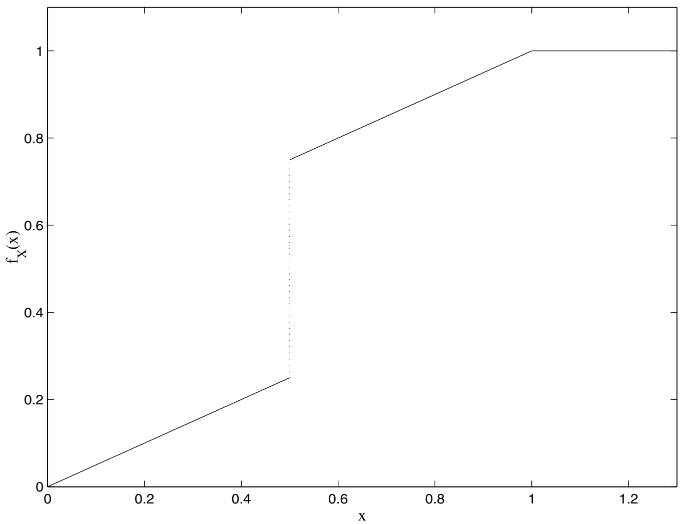

Abb. A.6. $F_X(x)$ von Aufgabe 11.1

2. Aufgrund der in den Kapiteln 10.7 und 11.4 dargelegten Eigenschaften der Varianz und Kovarianz ist die Varianz der Linearkombination folgende:

$$\begin{aligned} Var(2X - Y + 4) &= Var(2X - Y) \\ &= Var(2X) + Var(-Y) + 2\,Cov(2X, -Y) \\ &= 4\,Var(X) + Var(Y) - 4\,Cov(X, Y) \\ &= 16 + 1 + 4 = 21 \end{aligned} \tag{A.135}$$

3. Für die Bestimmung der Kovarianz werden ebenfalls die in Kapitel 11.4 beschriebenen Zusammenhänge angewendet.

$$\begin{aligned} Cov(X + Y, X - Y) &= Cov(X, X) + Cov(X, -Y) \\ &\quad + Cov(Y, X) + Cov(Y, -Y) \\ &= Var(X) - Cov(X, Y) \\ &\quad + Cov(X, Y) - Var(Y) = 3 \end{aligned} \tag{A.136}$$

4. Um den Erwartungswert $E\big((X + Y)^2\big)$ berechnen zu können, muss die Varianz von $X + Y$ bestimmt werden und dann die allgemeine Berechnungsformel für die Varianz

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \tag{A.137}$$

angewendet werden.

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X, Y) \\ &= 4 + 1 - 2 = 3 \end{aligned} \tag{A.138}$$

$$E\big((X+Y)^2\big) = Var(X+Y) + \big(E(X+Y)\big)^2 \\ = 3 + 9 = 12 \tag{A.139}$$

Lösung zu Aufgabe 11.3: Es wird zuerst die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X bestimmt.

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-u}\,du = 1 - e^{-x} \quad \text{für } x > 0 \tag{A.140}$$

1. Mit dem obigen Ergebnis lässt sich $P(X > 1)$ leicht bestimmen.

$$P(X > 1) = 1 - F_X(1) = e^{-1} \tag{A.141}$$

2. Bei der Berechnung von $P(X > 2 \mid X > 1)$ ist zu beachten, dass die Bedingung schwächer ist als das Argument: Denn wenn $X > 2$ eintreten soll, muss zwangsläufig auch die Bedingung $X > 1$ erfüllt sein. Daher gilt:

$$\begin{aligned} P(X > 2 \mid X > 1) &= \frac{P(X > 1 \text{ und } X > 2)}{P(X > 1)} \\ &= \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = \frac{1 - F_X(2)}{1 - F_X(1)} \\ &= \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = \frac{1}{e} \end{aligned} \tag{A.142}$$

3. Hier gilt die gleiche Überlegung wie unter 2): Wenn $X < 1$ gilt, gilt stets auch $X < 2$.

$$P(X < 2 \mid X < 1) = \frac{P(X < 2 \text{ und } X < 1)}{P(X < 1)} = \frac{P(X < 1)}{P(X < 1)} = 1 \tag{A.143}$$

Lösung zu Aufgabe 12.1: Die Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - 900}{100} \tag{A.144}$$

ist standardnormalverteilt. Damit gilt:

$$\begin{aligned} P(X < 650) &= F_Z\left(\frac{650 - 900}{100}\right) = F_Z(-2.5) \\ &= 1 - F_Z(2.5) = 0.0062 \end{aligned} \tag{A.145}$$

$$\begin{aligned} P(800 < X < 1\,050) &= P\left(\frac{800 - 900}{100} < Z < \frac{1\,050 - 900}{100}\right) \\ &= F_Z(1.5) - F_Z(-1) = 0.7745 \end{aligned} \tag{A.146}$$

$$P(X < 800 \vee X > 1\,200) = F_Z\left(\frac{800-900}{100}\right) + 1 - F_Z\left(\frac{1\,200-900}{100}\right) = F_Z(-1) + 1 - F_Z(3) = 0.1600 \tag{A.147}$$

Lösung zu Aufgabe 12.2: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X zwischen den Werten $\mu_X \pm z\,\sigma_X$ mit $z = 1, 2, 3$ liegt ist unabhängig von μ_X und σ_X, da wegen der Standardisierung gilt:

$$X = \mu_X \pm z\,\sigma_X \tag{A.148}$$

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{\mu_X \pm z\,\sigma_X - \mu_X}{\sigma_X} = \pm z \tag{A.149}$$

Es sind also die Wahrscheinlichkeiten folgender Konfidenzintervalle zu berechnen deren Werte sich aus der Tabelle der Standardnormalverteilung ergeben:

$$P(-1 < Z < 1) = F_Z(1) - F_Z(-1) = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826 \tag{A.150}$$

$$P(-2 < Z < 2) = F_Z(2) - F_Z(-2) = 0.9544 \tag{A.151}$$

$$P(-3 < Z < 3) = F_Z(3) - F_Z(-3) = 0.9974 \tag{A.152}$$

68.26% der Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen liegen innerhalb der Standardabweichung σ_X, 95.44% der Werte liegen innerhalb des „Zwei-Sigma-Bandes“ und 99.74% der Werte liegen innerhalb des „Drei-Sigma-Bandes“.

Lösung zu Aufgabe 12.3: Ist Z standardnormalverteilt, so gilt:

$$P(-1 < Z < 1) = 0.68 \tag{A.153}$$

Aus

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \tag{A.154}$$

erhält man

$$X = Z\,\sigma_X + \mu_X \tag{A.155}$$

Damit gilt:

$$x_u = -1 \times 4 + 3 = -1 \tag{A.156}$$

$$x_o = 1 \times 4 + 3 = 7 \tag{A.157}$$

Die Zufallsvariable X liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit zwischen -1 und 7.

$$P(-1 < X < 7) = 0.68 \tag{A.158}$$

Lösung zu Aufgabe 13.1:

1. Die Zufallsvariable X := Anzahl der fehlerhaften Stücke wird binomialverteilt mit $n = 5$ und $\theta = 0.2$ angenommen, weil die Produktserie als unendlich unterstellt wird. Es ist nach den Wahrscheinlichkeiten $P(X = 0)$, $P(X = 1), \ldots,$ $P(X = 4)$ gefragt.

$$P(X = 0) = f_X(0) = Bin(0, 5, 0.2) = 0.3277 \quad \text{(A.159)}$$
$$P(X = 1) = f_X(1) = Bin(1, 5, 0.2) - Bin(0, 5, 0.2) = 0.4096 \quad \text{(A.160)}$$
$$P(X = 2) = f_X(2) = Bin(2, 5, 0.2) - Bin(1, 5, 0.2) = 0.2048 \quad \text{(A.161)}$$
$$P(X = 3) = f_X(3) = Bin(3, 5, 0.2) - Bin(2, 5, 0.2) = 0.0512 \quad \text{(A.162)}$$

2. Die Zufallsvariable Y := Anzahl der einwandfreien Stücke ist auch binomialverteilt mit $n = 5$, jedoch mit $\theta = 0.8$.

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= f_Y(0) = Bin(0, 5, 0.8) \\ &= Bin(5, 5, 0.2) - Bin(4, 5, 0.2) \\ &= 1 - 0.9997 = 0.0003 \end{aligned} \quad \text{(A.163)}$$
$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= f_Y(1) = Bin(1, 5, 0.8) - Bin(0, 5, 0.8) \\ &= Bin(4, 5, 0.2) - Bin(3, 5, 0.2) = 0.0064 \end{aligned} \quad \text{(A.164)}$$
$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= f_Y(2) = Bin(2, 5, 0.8) - Bin(1, 5, 0.8) \\ &= Bin(3, 5, 0.2) - Bin(2, 5, 0.2) = 0.0512 \end{aligned} \quad \text{(A.165)}$$
$$\begin{aligned} P(Y = 3) &= f_Y(3) = Bin(3, 5, 0.8) - Bin(2, 5, 0.8) \\ &= Bin(2, 5, 0.2) - Bin(1, 5, 0.2) = 0.2048 \end{aligned} \quad \text{(A.166)}$$

Lösung zu Aufgabe 13.2: Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der richtig getippten Zahlen angibt, ist hypergeometrisch verteilt mit $n = 7$, $M = 7$ und $N = 38$. Damit sind die Wahrscheinlichkeiten für $X = 4, 5, 6, 7$ Richtige zu tippen:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{7}{4}\binom{31}{3}}{\binom{38}{7}} = 0.0125 \quad \text{(A.167)}$$
$$P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5}\binom{31}{2}}{\binom{38}{7}} = 0.0008 \quad \text{(A.168)}$$
$$P(X = 6) = \frac{\binom{7}{6}\binom{31}{1}}{\binom{38}{7}} = 0.00002 \quad \text{(A.169)}$$
$$P(X = 7) = \frac{\binom{7}{7}\binom{31}{0}}{\binom{38}{7}} = 0.00000008 \quad \text{(A.170)}$$

Lösung zu Aufgabe 13.3: Die Zufallsvariable X „Anzahl der Telefonanrufe in einer Minute ist poissonverteilt mit $\lambda = 1$. Damit sind die Wahrscheinlichkeiten für:

$$P(X=1) = \frac{1^1}{1!}\, e^{-1} = 0.3679 \tag{A.171}$$

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \sum_{x=0}^{1} \frac{1^x}{x!}\, e^{-1} = 0.7358 \tag{A.172}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1^0}{0!}\, e^{-1} = 0.6321 \tag{A.173}$$

$$P(X = 2 \cup X = 3) = P(X=2) + P(X=3) = 0.2453 \tag{A.174}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil für die Zufallsvariable X angenommen wird, dass die einzelnen Ereignisse stochastisch unabhängig sind. Ferner wird die Reproduktivität der Poissonverteilung genutzt.

Lösung zu Aufgabe 13.4: Die Zufallsvariable X „Anzahl der defekten Teile" in der Stichprobe ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $\theta = 0.04$. Bei großem n und kleinem θ ist die Poissonverteilung eine gute Approximation für die Binomialverteilung. Die Zufallsvariable X „Anzahl der Ausschussstücke pro Stunde" ist dann approximativ poissonverteilt. Die Angabe, dass die defekten Teile innerhalb einer Stunde gezählt werden sollen, ist für die Approximation notwendig: $\lambda = 100 \times 0.04 = 4$. X kann als approximativ poissonverteilt mit $\lambda = 4$ angenommen werden. Die Wahrscheinlichkeiten sind in Tabelle A.16 abgetragen.

Tabelle A.16. Wahrscheinlichkeiten

	Bin	*Poi*
$P(X=4)$	0.1994	0.1954
$P(X \geq 7)$	0.1064	0.1107
$P(X \leq 8)$	0.9810	0.9786

Die Wahrscheinlichkeit von $P(X \geq 7)$ ist über folgenden Zusammenhang bestimmt worden:

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \tag{A.175}$$

Lösung zu Aufgabe 13.5:

1. Die Zufallsvariable X misst die Zeit bis zum ersten Ereignis. X ist somit exponentialverteilt mit dem Erwartungswert $E(X) = 2$. Daraus ergibt sich der Parameter $\nu = 0.5$: $X \sim \mathit{Exp}(0.5)$. Es ist nach der Wahrscheinlichkeit $P(X > 6)$ gefragt, die sich aus $1 - P(X < 6)$ berechnet.
$$P(X > 6) = e^{-0.5 \times 6} = e^{-3} = 0.049 \tag{A.176}$$
2. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Kunden. X ist somit poissonverteilt mit $\lambda = \nu\, t$. Die Zeitspanne ist mit 6 Minuten angeben, so dass $\lambda = 0.5 \times 6 = 3$ beträgt: $X \sim \mathit{Poi}(3)$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt folglich:

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{3^x}{x!} e^{-3} = 0.423 \tag{A.177}$$

3. Die Zufallsvariable X misst die Zeit bis zum Eintreffen des nächsten Kunden. X ist somit wieder exponentialverteilt mit $\nu = 0.5$. Es ist die Wahrscheinlichkeit $P(X < 2)$ gesucht.

$$P(X < 2) = 1 - e^{-0.5 \times 2} = 0.632 \tag{A.178}$$

4. Die durchschnittliche Wartezeit für einen Kunden beträgt hier $E(X) = 2$. Somit beträgt die durchschnittliche Wartezeit für 3 Kunden $3\,E(X) = 6\,[min]$.

Lösung zu Aufgabe 14.1: Aus $\alpha = 0.2$ resultiert $\alpha/2 = 0.1$. Für $n = 25$ ergibt sich aus der Tabelle der χ^2-Quantile

$$\chi^2_{0.1}(25) = 16.4734 \tag{A.179}$$
$$\chi^2_{0.9}(25) = 34.3816 \tag{A.180}$$

Lösung zu Aufgabe 14.2: Es gilt:

$$\begin{aligned} P(-t < T_{24} < 0) &= F_{T_{24}}(0) - F_{T_{24}}(-t) \\ &= 0.5 - F_{T_{24}}(-t) = 0.5 - \big(1 - F_{T_{24}}(t)\big) \\ &= F_{T_{24}}(t) - 0.5 = 0.49 \end{aligned} \tag{A.181}$$

$$F_{T_{24}}(t) = 0.99 \Rightarrow t_{0.99}(24) = 2.4922 \tag{A.182}$$

Aufgrund der Symmetrie der t-Verteilung gilt:

$$F_{T_{24}}(-t) = -F_{T_{24}}(t) \tag{A.183}$$

und somit ist $-t = -2.4922$.

Lösung zu Aufgabe 14.3: Die Zufallsvariable V ist F-verteilt mit $FG_1 = 4$ und $FG_2 = 5$. Das 0.9-Quantil der entsprechenden F-Verteilung beträgt:

$$F_{0.9}(4,5) = F_V^{-1}(0.9,4,5) = 3.5202 \tag{A.184}$$

Für das 0.1-Quantil gilt:

$$F_{0.1}(4,5) = \frac{1}{F_V^{-1}(0.9,5,4)} = \frac{1}{4.0506} = 0.2469 \tag{A.185}$$

Lösung zu Aufgabe 15.1:

1. Die Zufallsvariable X_i ist bernoulliverteilt mit $\theta = 1/6$. Die Zufallsvariable $n\,\bar{X}$ ist binomialverteilt mit $n = 300$ und $\theta = 1/6$. Approximativ ist die Zufallsvariable $n\,\bar{X}$ normalverteilt mit Erwartungswert $n\,\theta$ und Varianz $n\,\theta\,(1-\theta)$:

$$n\,\bar{X} \dot{\sim} N\big(n\,\theta, n\,\theta\,(1-\theta)\big) \tag{A.186}$$

Daraus folgt, dass die Zufallsvariable $\hat{\theta} = \bar{X}$ normalverteilt ist mit Erwartungswert θ und Varianz $\theta\,(1-\theta)/n$.

$$\hat{\theta} \dot{\sim} N\big(\theta, \theta\,(1-\theta)/n\big) \tag{A.187}$$

2. Die Varianz des Stichprobenmittels wird durch

$$\begin{aligned} S^2_{\hat{\theta}} &= \frac{\hat{\theta}\,(1-\hat{\theta})}{n-1} \\ &= \frac{0.1467\,(1-0.1467)}{299} = 0.00042 \end{aligned} \tag{A.188}$$

erwartungstreu geschätzt. Das approximative Konfidenzintervall für θ berechnet sich nach:

$$P\left(\hat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2}\,S_{\hat{\theta}}\right) = 1-\alpha \tag{A.189}$$

Für $z_{0.95}$ ergibt sich aus der Standardnormalverteilungstabelle ein Wert von: 1.645. Damit hat das Konfidenzintervall folgende Werte:

$$P(0.113 < \theta < 0.180) \approx 0.90 \tag{A.190}$$

3. Das Konfidenzintervall überdeckt den wahren Wert von $\theta = 1/6$. Wird der Versuch oft wiederholt, so wird der wahre Wert von θ mit 90 prozentiger Wahrscheinlichkeit zwischen den Intervallgrenzen liegen.

Lösung zu Aufgabe 15.2: Der geschätzte Anteilswert beträgt $\hat{\theta} = 0.15$. Es handelt sich hier um eine Stichprobe ohne Zurücklegen, da defekte Elemente nicht mehr zurückgegeben werden. Eine erwartungstreue Schätzung der Varianz des Anteilwerts ist:

$$\begin{aligned} S^2_{\hat{\theta}} &= \frac{\hat{\theta}\,(1-\hat{\theta})}{n-1}\left(1-\frac{n}{N}\right) \\ &= \frac{0.15\,(1-0.15)}{100-1}\left(1-\frac{100}{1000}\right) = 0.0012 \end{aligned} \tag{A.191}$$

Das approximative Konfidenzintervall lautet:

$$\begin{aligned} P\big(\hat{\theta} - z_{1-\alpha/2}\,S_{\hat{\theta}} < \theta < \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2}\,S_{\hat{\theta}}\big) &\approx 1-\alpha \\ P\big(0.15 - 1.96 \times 0.034 < \theta < 0.15 + 1.96 \times 0.034\big) &\approx 0.95 \\ P\big(0.083 < \theta < 0.217\big) &\approx 0.95 \end{aligned} \tag{A.192}$$

Lösung zu Aufgabe 15.3:

$$MSE(\hat{\pi}) = Var(\hat{\pi}) - Bias(\hat{\pi})^2 \tag{A.193}$$

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\pi}) &= E(\hat{\pi}) - \pi = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \pi \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) - \pi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \pi - \pi = 0 \end{aligned} \tag{A.194}$$

$$Var(\hat{\pi}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \tag{A.195}$$

$$E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 f_X(x_i) = 0 \times (1-\pi) + 1 \times \pi = \pi \tag{A.196}$$

$$Var(X_i) = \pi - \pi^2 = \pi\,(1-\pi) \tag{A.197}$$

$$Var(\hat{\pi}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \pi\,(1-\pi) = \frac{1}{n}\pi\,(1-\pi) \tag{A.198}$$

$$MSE(\hat{\pi}) = \frac{1}{n}\pi\,(1-\pi) - 0 = \frac{1}{n}\pi\,(1-\pi) \tag{A.199}$$

Die Werte für $MSE(\hat{\pi})$ werden durch einsetzen der Werte für π berechnet. In der Grafik A.7 sieht man deutlich, dass für $\pi = 0.5$ sich der größte MSE ergibt. Der Schätzer variiert für diese Wahrscheinlichkeit am stärksten, er lässt sich am ungenausten bestimmen (siehe auch Informationsentropie).

Lösung zu Aufgabe 16.1: Die interssierende Hypothese ist beim BSE-Test: H_1 : „Das Tier hat BSE.“ Mit dem BSE-Test wird lediglich überprüft, ob sich unter der Hypothese H_0 : „Das Tier hat kein BSE.“ Anzeichen für BSE finden. Es wird nicht überprüft, wie oft ein Tier fälschlicherweise als BSE-krank eingestuft wird, obwohl es gesund ist und natürlich ist mit dem Test überhaupt nicht festzustellen, wie oft die Hypothese H_0 angenommen wurde, obwohl das Tier tatsächlich krank war.

Lösung zu Aufgabe 16.2: Unter der Nullhypothese $\mu_0 = \mu_X$ gilt ($X_i = IQ$):

$$X_i \sim N(\mu_0, \sigma_X^2 = 15^2) \tag{A.200}$$

Damit ist dann das standardisierte Stichprobenmittel standardnormalverteilt.

$$Z_n = \frac{\bar{X} - 100}{15/5} \sim N(0,1) \tag{A.201}$$

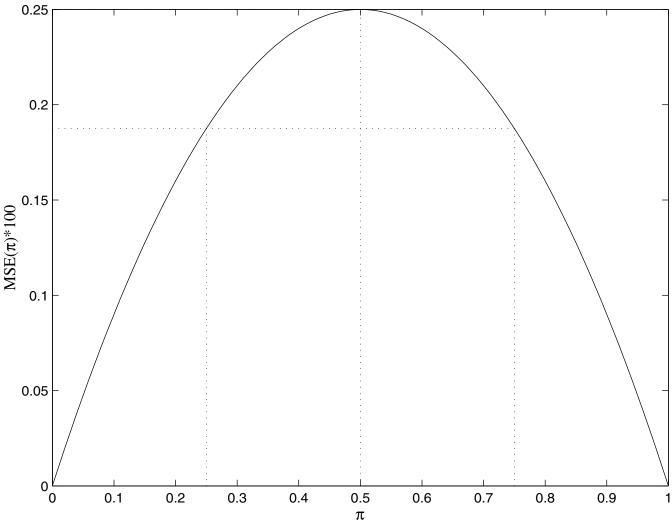

Abb. A.7. $MSE(\hat{\pi})$

1. Für das Hypothesenpaar
$$H_0 : \mu_X \leq 100 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_X > 100 \tag{A.202}$$
ist der Ablehnungsbereich $K = \{Z_n : \; Z_n > z_{1-\alpha}\}$ ist für $\alpha = 0.1 \Rightarrow z_{0.9} = 1.28$ gleich $K = \{Z_n : \; Z_n > 1.28\}$ und der Annahmebereich entsprechend $\bar{K} = \{Z_n : \; Z_n \leq 1.28\}$.
2. Der Fehler 2. Art ist definitionsgemäß
$$\begin{aligned} P(\text{Fehler 2. Art}) &= P(H_0 \text{ beibehalten} \mid H_1 \text{ wahr}) \\ &= 1 - P(H_0 \text{ ablehnen} \mid H_1 \text{ wahr}) \\ &= 1 - g_{G_n}(\mu_X) \quad \text{mit } \mu_X \in H_1 \end{aligned} \tag{A.203}$$
$$\begin{aligned} g_{G_n}(\mu_X) &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_X/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \mid \mu_X\right) \\ &= 1 - F_{Z_n}\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_X - \mu_0}{\sigma_X/\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \tag{A.204}$$
$$\begin{aligned} g_{G_n}(105) &= 1 - F_{Z_n}\left(1.28 - \frac{105 - 100}{15/5}\right) \\ &= 1 - F_{Z_n}(-0.385) \\ &= 1 - \Big(1 - F_{Z_n}(0.385)\Big) \\ &\sim 0.65 \quad \text{Fehler 1. Art} \end{aligned} \tag{A.205}$$
$$1 - g_{G_n}(105) = 1 - 0.65 \sim 0.35 \quad \text{Fehler 2. Art} \tag{A.206}$$

Der Fehler 2. Art beträgt 35%.

3. Mit einem Stichprobenmittel von $\bar{X} = 104$ errechnet sich ein Wert von 4/3 für die Teststatistik. Da der kritische Wert $z_{1-\alpha} = 1.28$ kleiner als Z_n ist, wird die Nullhypothese abgelehnt.

Lösung zu Aufgabe 16.3: Der Preis ist der Aufgabenstellung zufolge normalverteilt $(X_i = p_i)$.

$$X_i \sim N(\mu_X = 600, \sigma_X^2 = 225) \tag{A.207}$$

1. Es ist folgendes Hypothesenpaar zu überprüfen ($\mu_0 = 600$):

$$H_0 : \mu_X \leq 600 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_X > 600 \tag{A.208}$$

Bei einem Stichprobenmittel von $\bar{X} = 605$ hat die Teststatistik den Wert:

$$Z_n = \frac{605 - 600}{\sqrt{225}/\sqrt{40}} = 2.108 \tag{A.209}$$

Bei einem α von 0.01 ergibt sich ein $z_{0.99}$ von 2.33. Da $Z_n < z_{0.99}$ ist, hat sich der Preis nicht signifikant erhöht; die Nullhypothese wird beibehalten.

2. Es wird angenommen, dass $\mu_X = 610$ gilt, so dass von folgendem Hypothesenpaar ausgegangen wird.

$$H_0 : \mu_X \leq 600 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_X > 600 \tag{A.210}$$

μ_X liegt damit in H_1. Die Gütefunktion zu diesem Hypothesenpaar lautet:

$$g_{G_n}(\mu_X) = 1 - F_{Z_n}\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu_X - \mu_0}{\sigma_X/\sqrt{n}}\right) \tag{A.211}$$

$$\begin{aligned} g_{G_n}(610) &= 1 - F_{Z_n}\left(2.33 - \frac{610 - 600}{15/\sqrt{40}}\right) \\ &= 1 - F_{Z_n}(-1.89) \qquad\qquad (A.212) \\ &= F_{Z_n}(1.89) = 0.97 \\ &= P(H_0 \text{ ablehnen} \mid H_1 \text{ wahr}) = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(H_0 \text{ annehmen} \mid H_1 \text{ wahr}) &= \beta \\ &= 1 - g_{G_n}(610) \qquad\qquad (A.213) \\ &= 1 - 0.971 = 0.029 \end{aligned}$$

Bei $\mu_X = 610$ ist es sehr unwahrscheinlich H_0 beizubehalten.

3. Es wird nach dem Stichprobenumfang gesucht, der unter $H_1 : \mu_X = 605$ sicherstellt, dass H_0 nur in 1% der Fälle abgelehnt wird. Dies ist der Fehler 2. Art.

$$\begin{aligned} g_{G_n}(605) &= 1 - F_{Z_n}\left(2.33 - \frac{5}{15/\sqrt{n}}\right) \\ &= P(H_0 \text{ ablehnen} \mid 605) = 0.99 \\ &= F_{Z_n}(-2.33 + 5/15\sqrt{n}) = 0.99 \end{aligned} \tag{A.214}$$

$$-2.33 + 5/15\sqrt{n} \stackrel{!}{=} 2.33 \tag{A.215}$$

$$n \geq 196 \tag{A.216}$$

Bei diesem Stichprobenumfang wird sichergestellt, dass für $\mu_X = 600$ in 1% der Fälle eine Fehlentscheidung getroffen wird (H_0 ablehnen obwohl H_0 gilt) und für $\mu_X = 605$ ebenfalls in 1% der Fälle eine Fehlentscheidung getroffen wird (H_0 annehmen obwohl H_1 gilt).
Bei dem Ansatz

$$F_{Z_n}\left(\frac{5}{15/\sqrt{n}}\right) = 0.99 \tag{A.217}$$

$$n = (15/5 \times 2.33)^2 \sim 49 \tag{A.218}$$

ist nur sichergestellt, dass unter H_0 in 1% der Fälle eine Fehlentscheidung getroffen wird. Der Fehler 2. Art bleibt hier unberücksichtigt.

Lösung zu Aufgabe 16.4: Aus den beiden Stichproben errechnen sich folgende Stichprobenmaßzahlen:

$$\bar{X} = 7 \tag{A.219}$$

$$\bar{Y} = 5 \tag{A.220}$$

$$s_X^2 = 2 \tag{A.221}$$

$$s_Y^2 = 4 \tag{A.222}$$

Da in der kleinen Stichprobe die Annahme identischer Varianzen getroffen wird, wird S_{pooled} bestimmt.

$$S_{pooled} = \sqrt{\frac{5 \times 2 + 4 \times 4}{6 + 5 - 2}} = 1.699 \tag{A.223}$$

Der Test über das Hypothesenpaar

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \tag{A.224}$$

wird mit der Teststatistik

$$T_n = \frac{7 - 5}{1.699\sqrt{1/6 + 1/5}} = 1.944 \tag{A.225}$$

überprüft. Bei einem Niveau von $\alpha = 0.02$ ergibt sich ein kritischer Wert von

$$t_{0.99}(5+6-2) = 2.821. \tag{A.226}$$

Die Nullhypothese wird beibehalten.

Lösung zu Aufgabe 16.5: Die Gütefunktion der Statistik bestimmt sich analog zu der Vorgehensweise in Kapitel 16.6.

$$\begin{aligned}
g_{G_n}(\delta) &= P\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0+\delta-\delta}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}} > z_{1-\alpha/2} \mid \delta\right) \\
&\quad + P\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0+\delta-\delta}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}} < -z_{1-\alpha/2} \mid \delta\right) \\
&= 1 - F_{Z_n}\left(z_{1-\alpha/2} - \frac{\delta-\delta_0}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&\quad + F_{Z_n}\left(-z_{1-\alpha/2} - \frac{\delta-\delta_0}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&= F_{Z_n}\left(-z_{1-\alpha/2} + \frac{\delta-\delta_0}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&\quad + F_{Z_n}\left(-z_{1-\alpha/2} - \frac{\delta-\delta_0}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\right)
\end{aligned} \tag{A.227}$$

Der erste Term in der Gütefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit H_0 zu verwerfen an, wenn $\delta > 0$ ist, der zweite Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, wenn $\delta < 0$ ist. Die Summe

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}&\left(-z_{1-\alpha/2} + \frac{\delta-\delta_0}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&\qquad + F_{Z_n}\left(-z_{1-\alpha/2} - \frac{\delta-\delta_0}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 0.9
\end{aligned} \tag{A.228}$$

ist nicht eindeutig lösbar. Da sich hier aber nur der erste Teil deutlich von null unterscheidet, wird zur Lösung der zweite vernachlässigt. Ferner ist angenommen, dass die Nullhypothese $\delta_0 = 0$ lautet, so dass sich der Ausdruck weiter vereinfacht.

$$F_{Z_n}\left(-z_{1-\alpha/2} + \frac{\delta}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 0.9 \tag{A.229}$$

$$-z_{1-\alpha/2} + \frac{\delta}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}} = z_{1-\alpha} \tag{A.230}$$

$$\begin{aligned}
n &= \frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\alpha/2})^2\,\sigma^2}{\delta^2}\,2 \\
&= \frac{(z_{0.9} + z_{0.975})^2\,\sigma^2}{\delta^2}\,2 \\
&= \frac{(1.28+1.96)^2 \times 6^2}{2^2}\,2 \sim 189
\end{aligned} \tag{A.231}$$

Um eine Differenz von 2 bei einem Signifikanzniveau von 95% mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% feststellen zu können, bedarf es einer Stichprobe von mindestens 189 Elementen. Je größer die wahre Differenz ist, desto kleiner wird der unter sonst gleichen Bedingungen notwendige Stichprobenumfang; je größer die Varianz, desto größer wird auch der Stichprobenumfang.

Lösung zu Aufgabe 17.1: Es ist das Hypothesenpaar

$$H_0 : f_n(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{für } x = \{K_1, K_2\} \\ 0.6 & \text{für } x = \{K_3\} \end{cases} \quad \text{gegen} \quad H_1 : f_n(x) \neq f_X(x) \tag{A.232}$$

zu testen. Da es sich um ein kategoriales Merkmal handelt, kann der χ^2-Text direkt angewendet werden, ohne eine Klassierung der Werte extra durchführen zu müssen (siehe Tabelle A.17).

Tabelle A.17. Arbeitstabelle Marktanteile Kaffeesorten

K_j	$n(x_j)$	$f_X(x_j)$	$\hat{n}(x_j)$
K_1	36	0.2	30
K_2	42	0.2	30
K_3	72	0.6	90
$\sum$	150	1	150

Der Wert der χ^2-Statistik berechnet sich auf 9.6; der kritische Wert liegt bei $\chi^2_{0.95}(2) = 5.991$. Die Nullhypothese ist abzulehnen. Die Kampagnen haben die Marktanteile der Kaffeesorten verschoben.

Lösung zu Aufgabe 17.2: Es ist die teilspezifizierte Hypothese

$$H_0 : F_n(x) = F_X(x) \quad \text{gegen} \quad F_n(x) \neq F_X(x) \tag{A.233}$$

mit $F_X(x)$ der Verteilungsfunktion der Normalverteilung. Die Parameter Erwartungswert und Varianz sind aus den klassierten Werten zu schätzen. Für 5 Klassen ergibt sich aus den Werten eine Klassenbreite von:

$$\varDelta_j = \frac{\max(x) - \min(x)}{m} = \frac{0.11}{5} = 0.022 \tag{A.234}$$

Damit werden die Werte klassiert (siehe Tabelle A.18). Die ML-Schätzer für Mittelwert und Varianz aus den klassierten Werten sind:

$$\hat{\mu}_X = 0.731 \tag{A.235}$$

$$\hat{\sigma}_X = 0.031 \tag{A.236}$$

Die Wahrscheinlichkeiten berechnen sich aus der Normal- bzw. Standardnormalverteilung. Für die erste Klasse ist es hier angegeben. Hier muss noch beachtet werden, dass der Wertebereich der Normalverteilung von $-\infty$ bis ∞ geht und somit für die Untergrenze der ersten Klasse $-\infty$ und für die Obergrenze der letzten Klasse ∞ gewählt werden muss. Nur dann ist sichergestellt, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten eins ergibt.

$$\begin{aligned} P\big((-\infty, 0.702]\big) &= F_X(0.702) - F_X(-\infty) \\ &= F_Z\left(\frac{0.702 - 0.731}{0.031}\right) \\ &= 1 - F_Z(0.929) = 0.177 \end{aligned} \tag{A.237}$$

Tabelle A.18. Klassierte Schraubendurchmesser

j	$(x_{j-1}, x_j]$	$n(x_j)$	$P\big((x_{j-1}, x_j]\big)$	$\hat{n}(x_j)$
1	$(0.680, 0.702]$	5	0.177	3.531
2	$(0.702, 0.724]$	4	0.239	4.772
3	$(0.724, 0.746]$	4	0.276	5.526
4	$(0.746, 0.768]$	4	0.196	3.924
5	$(0.768, 0.790]$	3	0.112	2.246
$\sum$	–	20	1	20

Aus den Wahrscheinlichkeiten $P\big((x_{j-1}, x_j]\big)$ werden die theoretischen Häufigkeiten bestimmt.

$$P\big((x_{j-1}, x_j]\big)\, n = \hat{n}(x_j) \tag{A.238}$$

Der Wert der χ^2-Statistik berechnet sich auf 1.412. Der kritische Wert liegt bei

$$\chi^2_{0.95}(2) = 5.991, \tag{A.239}$$

so dass die Nullhypothese nicht abgelehnt wird. Nach der Gleichung für die optimale Klassenzahl ergibt sich $m = 14$. Mit dieser Klassenzahl errechnet sich ein Wert der Teststatistik von $\chi^2 = 7.549$. Der kritische Wert liegt bei

$$\chi^2_{0.95}(11) = 19.675. \tag{A.240}$$

Die Nullhypothese wird auch jetzt nicht abgelehnt.

Lösung zu Aufgabe 17.3: In der Lösung zur Übung A.1 (Seite 564) sind die Kontingenztabellen angeben. Die Zufallsvariable X_1 gebe die Anzahl der geheilten, die Zufallsvariable X_2 gebe die Anzahl der nicht geheilten Personen an jeweils bezogen auf die Merkmalsausprägung „behandelt" bzw. „nicht behandelt". Die Heilung wird hier als ein Zufallsprozess aufgefasst.

Mit den Zahlen aus der Tabelle A.19 werden die theoretischen Häufigkeiten bestimmt, die sich bei gleichen Verteilungen unter den beiden Merkmalen „behandelt" und „nicht behandelt" einstellen müssten (siehe Tabelle A.20).

Tabelle A.19. Kontingenztabelle für Gebiet A_1

	beh.	$\overline{\text{beh.}}$
$X_1 =$ geh.	10	100
$X_2 = \overline{\text{geh.}}$	100	730
$\sum$	110	830

Tabelle A.20. Arbeitstabelle zur Übung 17.3

x_j	$n_1(x_j)$	$n_2(x_j)$	$n(x_j)$	$f_X(x_j)$	$\hat{n}_1(x_j)$	$\hat{n}_2(x_j)$
beh.	10	100	110	0.117	12.87	97.13
$\overline{\text{beh.}}$	100	730	830	0.883	97.13	732.87
$\sum$	110	830	960	1.000	110	830

Aus der Tabelle A.20 errechnet sich ein χ^2-Statistikwert von 0.822. Der kritische Wert beträgt $\chi^2_{0.95}(1) = 3.842$, so dass die Nullhypothese, dass die Verteilungen ähnlich sind, nicht verworfen werden kann. Die Voraussetzungen für eine gute Approximation sind gegeben. Die tatsächlichen und die theoretischen Häufigkeiten liegen stets über 10 bzw. 5. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Teststatistik den theoretischen Wert übersteigt liegt über 0.1.

$$P\big(\chi^2 > \chi^2(1)\big) = 0.635 \tag{A.241}$$

Nun ist die gleiche Rechnung für das Gebiet A_2 zu wiederholen. Der Wert der Teststatistik beträgt nun $\chi^2 = 0.499$. Der kritische Wert aufgrund der gleichen Freiheitsgrade wieder $\chi^2_{0.95}(1) = 3.842$, so dass die Nullhypothese nicht verworfen werden kann. Auch die Voraussetzungen für eine gute Approximation sind gegeben.

$$P\big(\chi^2 > \chi^2(1)\big) = 0.520 \tag{A.242}$$

Werden nun die beiden Teilgebiete zusammengefasst, so weist die χ^2-Statistik einen Wert von 76.267 aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Teststatistik größer als der theoretische Wert ist beträgt nahezu eins.

$$P\big(\chi^2 > \chi^2(1)\big) \approx 1 \tag{A.243}$$

Die Nullhypothese wird nun klar verworfen. Dies ist das Simpson-Paradoxon, das in der Aufgabe 5.6 behandelt wurde.

Lösung zu Aufgabe 17.4: In der Lösung zur Übung A.1 (Seite 562) wurde die χ^2-Statistik bereits berechnet.

$$\chi^2 = 170.718 \tag{A.244}$$

Die Voraussetzungen für eine gute Approximation der Verteilung der χ^2-Statistik an die χ^2-Verteilung sind hier nur teilweise erfüllt. Die tatsächlichen und die theoretischen Häufigkeiten unterschreiten zum Teil die geforderten Werte von 10 bzw.

5. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Teststatistik den theoretischen Wert übersteigt, beträgt eins.

$$P\big(170.718 > \chi^2(9)\big) \approx 1 \tag{A.245}$$

Der kritische Wert beträgt bei $(k-1)\,(m-1) = 9$ Freiheitsgraden und einem 5% Signifikanzniveau

$$\chi^2_{0.95}(9) = 16.919. \tag{A.246}$$

Da aber der Wert der χ^2-Statistik deutlich über dem kritischen Wert liegt, kann man die Nullhypothese der statistischen Unabhängigkeit als verworfen ansehen. Die Berufswahl des Kindes hängt von dem Beruf des Vaters ab. Es ist aber damit natürlich nicht gesagt, dass der Beruf des Vaters kausal den Beruf des Kindes bestimmt, sondern lediglich, dass ein statistischer Zusammenhang bei dieser Stichprobe zwischen den beiden Merkmalen aufgetreten ist. Eine theoretische Überlegung die einen kausalen Zusammenhang erklärt wird aber durch dieses Testergebnis gestützt.

B

Tabellen

Inhaltsverzeichnis

In den folgenden Tabellen sind bestimmte Werte einiger wichtiger Verteilungsfunktionen bzw. häufig verwendete Quantile von Verteilungsfunktionen abgedruckt, je nach dem welche tabellarische Darstellung geeignet ist. Nicht gelistete Werte können durch Interpolation oder besser mit geeigneten Computerprogrammen (bereits Tabellenkalkulationsprogramme besitzen diese Funktionen) bestimmt werden.

B.1 Binomialverteilung

Tabelle B.1. Binomialverteilung $F_X(x)$, $n = 5$

x	θ									
	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312
1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9687

Tabelle B.2. Binomialverteilung $F_X(x)$, $n = 10$

x	θ									
	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990

Tabelle B.3. Binomialverteilung $F_X(x)$, $n = 15$

x	θ									
	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelle B.4. Binomialverteilung $F_X(x)$, $n = 20$

x	θ									
	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059
5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316
8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelle B.5. Binomialverteilung $F_X(x)$, $n = 25$

x	θ									
	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
0	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.8729	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
3	0.9659	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
4	0.9928	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
5	0.9988	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
6	0.9998	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
7	1.0000	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
8	1.0000	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
9	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
10	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelle B.6. Binomialverteilung $F_X(x)$, $n = 30$

x	θ									
	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
0	0.2146	0.0424	0.0076	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.5535	0.1837	0.0480	0.0105	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.8122	0.4114	0.1514	0.0442	0.0106	0.0021	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9392	0.6474	0.3217	0.1227	0.0374	0.0093	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000
4	0.9844	0.8245	0.5245	0.2552	0.0979	0.0302	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000
5	0.9967	0.9268	0.7106	0.4275	0.2026	0.0766	0.0233	0.0057	0.0011	0.0002
6	0.9994	0.9742	0.8474	0.6070	0.3481	0.1595	0.0586	0.0172	0.0040	0.0007
7	0.9999	0.9922	0.9302	0.7608	0.5143	0.2814	0.1238	0.0435	0.0121	0.0026
8	1.0000	0.9980	0.9722	0.8713	0.6736	0.4315	0.2247	0.0940	0.0312	0.0081
9	1.0000	0.9995	0.9903	0.9389	0.8034	0.5888	0.3575	0.1763	0.0694	0.0214
10	1.0000	0.9999	0.9971	0.9744	0.8943	0.7304	0.5078	0.2915	0.1350	0.0494
11	1.0000	1.0000	0.9992	0.9905	0.9493	0.8407	0.6548	0.4311	0.2327	0.1002
12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9969	0.9784	0.9155	0.7802	0.5785	0.3592	0.1808
13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9918	0.9599	0.8737	0.7145	0.5025	0.2923
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9973	0.9831	0.9348	0.8246	0.6448	0.4278
15	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9936	0.9699	0.9029	0.7691	0.5722
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9979	0.9876	0.9519	0.8644	0.7077
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9955	0.9788	0.9286	0.8192
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9917	0.9666	0.8998
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9971	0.9862	0.9506
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9950	0.9786
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9919
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9974
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

B.2 Poissonverteilung

Tabelle B.7. Poissonverteilung $F_X(x)$

x	λ									
	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
0	0.9802	0.9608	0.9418	0.9231	0.9048	0.7788	0.7408	0.7047	0.6703	0.6376
1	0.9998	0.9992	0.9983	0.9970	0.9953	0.9735	0.9631	0.9513	0.9384	0.9246
2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9978	0.9964	0.9945	0.9921	0.9891
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9992	0.9988
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

Tabelle B.8. Poissonverteilung $F_X(x)$

x	λ									
	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.6065	0.5769	0.5488	0.5220	0.4966	0.4724	0.4493	0.4274	0.4066	0.3867
1	0.9098	0.8943	0.8781	0.8614	0.8442	0.8266	0.8088	0.7907	0.7725	0.7541
2	0.9856	0.9815	0.9769	0.9717	0.9659	0.9595	0.9526	0.9451	0.9371	0.9287
3	0.9982	0.9975	0.9966	0.9956	0.9942	0.9927	0.9909	0.9889	0.9865	0.9839
4	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989	0.9986	0.9982	0.9977	0.9971
5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9997	0.9995

Tabelle B.9. Poissonverteilung $F_X(x)$

x	λ									
	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
0	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608
1	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311
2	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695
3	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919
4	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477
5	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349
6	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993

Tabelle B.10. Poissonverteilung $F_X(x)$

x	λ									
	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8
0	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0150	0.0123	0.0101	0.0082
1	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0780	0.0663	0.0563	0.0477
2	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.2102	0.1851	0.1626	0.1425
3	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3954	0.3594	0.3257	0.2942
4	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5898	0.5512	0.5132	0.4763
5	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7531	0.7199	0.6858	0.6510
6	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8675	0.8436	0.8180	0.7908
7	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9361	0.9214	0.9049	0.8867
8	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9721	0.9642	0.9549	0.9442
9	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9889	0.9851	0.9805	0.9749
10	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9959	0.9943	0.9922	0.9896
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9986	0.9980	0.9971	0.9960
12	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9993	0.9990	0.9986
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999

Tabelle B.11. Poissonverteilung $F_X(x)$

x	λ									
	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8
0	0.0067	0.0055	0.0045	0.0037	0.0030	0.0025	0.0020	0.0017	0.0014	0.0011
1	0.0404	0.0342	0.0289	0.0244	0.0206	0.0174	0.0146	0.0123	0.0103	0.0087
2	0.1247	0.1088	0.0948	0.0824	0.0715	0.0620	0.0536	0.0463	0.0400	0.0344
3	0.2650	0.2381	0.2133	0.1906	0.1700	0.1512	0.1342	0.1189	0.1052	0.0928
4	0.4405	0.4061	0.3733	0.3422	0.3127	0.2851	0.2592	0.2351	0.2127	0.1920
5	0.6160	0.5809	0.5461	0.5119	0.4783	0.4457	0.4141	0.3837	0.3547	0.3270
6	0.7622	0.7324	0.7017	0.6703	0.6384	0.6063	0.5742	0.5423	0.5108	0.4799
7	0.8666	0.8449	0.8217	0.7970	0.7710	0.7440	0.7160	0.6873	0.6581	0.6285
8	0.9319	0.9181	0.9027	0.8857	0.8672	0.8472	0.8259	0.8033	0.7796	0.7548
9	0.9682	0.9603	0.9512	0.9409	0.9292	0.9161	0.9016	0.8858	0.8686	0.8502
10	0.9863	0.9823	0.9775	0.9718	0.9651	0.9574	0.9486	0.9386	0.9274	0.9151
11	0.9945	0.9927	0.9904	0.9875	0.9841	0.9799	0.9750	0.9693	0.9627	0.9552
12	0.9980	0.9972	0.9962	0.9949	0.9932	0.9912	0.9887	0.9857	0.9821	0.9779
13	0.9993	0.9990	0.9986	0.9980	0.9973	0.9964	0.9952	0.9937	0.9920	0.9898
14	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9986	0.9981	0.9974	0.9966	0.9956
15	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9996	0.9995	0.9993	0.9990	0.9986	0.9982
16	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997

Tabelle B.12. Poissonverteilung $F_X(x)$

x	λ									
	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
0	0.0009	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0073	0.0061	0.0051	0.0043	0.0036	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005
2	0.0296	0.0255	0.0219	0.0188	0.0161	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028
3	0.0818	0.0719	0.0632	0.0554	0.0485	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103
4	0.1730	0.1555	0.1395	0.1249	0.1117	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293
5	0.3007	0.2759	0.2526	0.2307	0.2103	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671
6	0.4497	0.4204	0.3920	0.3646	0.3384	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301
7	0.5987	0.5689	0.5393	0.5100	0.4812	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202
8	0.7291	0.7027	0.6757	0.6482	0.6204	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328
9	0.8305	0.8096	0.7877	0.7649	0.7411	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579
10	0.9015	0.8867	0.8707	0.8535	0.8352	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830
11	0.9467	0.9371	0.9265	0.9148	0.9020	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968
12	0.9730	0.9673	0.9609	0.9536	0.9454	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916
13	0.9872	0.9841	0.9805	0.9762	0.9714	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645
14	0.9943	0.9927	0.9908	0.9886	0.9859	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165
15	0.9976	0.9969	0.9959	0.9948	0.9934	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513
16	0.9990	0.9987	0.9983	0.9978	0.9971	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730
17	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9988	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857
18	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928
19	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997

Tabelle B.13. Poissonverteilung $F_X(x)$

x	λ									
	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0
1	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0018	0.0012	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
3	0.0071	0.0049	0.0034	0.0023	0.0016	0.0011	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002
4	0.0211	0.0151	0.0107	0.0076	0.0053	0.0037	0.0026	0.0018	0.0012	0.0009
5	0.0504	0.0375	0.0277	0.0203	0.0148	0.0107	0.0077	0.0055	0.0039	0.0028
6	0.1016	0.0786	0.0603	0.0458	0.0346	0.0259	0.0193	0.0142	0.0105	0.0076
7	0.1785	0.1432	0.1137	0.0895	0.0698	0.0540	0.0415	0.0316	0.0239	0.0180
8	0.2794	0.2320	0.1906	0.1550	0.1249	0.0998	0.0790	0.0621	0.0484	0.0374
9	0.3971	0.3405	0.2888	0.2424	0.2014	0.1658	0.1353	0.1094	0.0878	0.0699
10	0.5207	0.4599	0.4017	0.3472	0.2971	0.2517	0.2112	0.1757	0.1449	0.1185
11	0.6387	0.5793	0.5198	0.4616	0.4058	0.3532	0.3045	0.2600	0.2201	0.1848
12	0.7420	0.6887	0.6329	0.5760	0.5190	0.4631	0.4093	0.3585	0.3111	0.2676
13	0.8253	0.7813	0.7330	0.6815	0.6278	0.5730	0.5182	0.4644	0.4125	0.3632
14	0.8879	0.8540	0.8153	0.7720	0.7250	0.6751	0.6233	0.5704	0.5176	0.4657
15	0.9317	0.9074	0.8783	0.8444	0.8060	0.7636	0.7178	0.6694	0.6192	0.5681
16	0.9604	0.9441	0.9236	0.8987	0.8693	0.8355	0.7975	0.7559	0.7112	0.6641
17	0.9781	0.9678	0.9542	0.9370	0.9158	0.8905	0.8609	0.8272	0.7897	0.7489
18	0.9885	0.9823	0.9738	0.9626	0.9481	0.9302	0.9084	0.8826	0.8530	0.8195
19	0.9942	0.9907	0.9857	0.9787	0.9694	0.9573	0.9421	0.9235	0.9012	0.8752
20	0.9972	0.9953	0.9925	0.9884	0.9827	0.9750	0.9649	0.9521	0.9362	0.9170
21	0.9987	0.9977	0.9962	0.9939	0.9906	0.9859	0.9796	0.9712	0.9604	0.9469
22	0.9994	0.9990	0.9982	0.9970	0.9951	0.9924	0.9885	0.9833	0.9763	0.9673
23	0.9998	0.9995	0.9992	0.9985	0.9975	0.9960	0.9938	0.9907	0.9863	0.9805
24	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9980	0.9968	0.9950	0.9924	0.9888
25	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990	0.9984	0.9974	0.9959	0.9938
26	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9979	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9989	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9991
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998

B.3 Standardnormalverteilung

Tabelle B.14. Standardnormalverteilung $F_Z(z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

B.4 χ^2–Verteilung

Tabelle B.15. Quantile der χ^2–Verteilung $\chi^2_{1-\alpha}(FG) = F^{-1}_{U_n}(1-\alpha)$

FG	$u_{0,01}$	$u_{0,025}$	$u_{0,05}$	$u_{0,1}$	$u_{0,9}$	$u_{0,95}$	$u_{0,975}$	$u_{0,99}$
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
60	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794
120	86.9233	91.5726	95.7046	100.6236	140.2326	146.5674	152.2114	158.9502

B.5 t–Verteilung

Tabelle B.16. Quantile der t–Verteilung $t_{1-\alpha}(FG) = F_{T_n}^{-1}(1-\alpha)$

FG	$t_{0,6}$	$t_{0,75}$	$t_{0,8}$	$t_{0,9}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$
1	0.3249	1.0000	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.2887	0.8165	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.2767	0.7649	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.2707	0.7407	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.2672	0.7267	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.2648	0.7176	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.2632	0.7111	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.2619	0.7064	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.2610	0.7027	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.2602	0.6998	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.2596	0.6974	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.2590	0.6955	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.2586	0.6938	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.2582	0.6924	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.2579	0.6912	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.2576	0.6901	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.2573	0.6892	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.2571	0.6884	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.2569	0.6876	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.2567	0.6870	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.2566	0.6864	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.2564	0.6858	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.2563	0.6853	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.2562	0.6848	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.2561	0.6844	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.2560	0.6840	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.2559	0.6837	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.2558	0.6834	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.2557	0.6830	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.2556	0.6828	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40	0.2550	0.6807	0.8507	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
60	0.2545	0.6786	0.8477	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
120	0.2539	0.6765	0.8446	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174

B.6 F–Verteilung

Tabelle B.17. Quantile der F–Verteilung $F_{0.90}(FG_1, FG_2) = F_{F_n}^{-1}(0.90, FG_1, FG_2)$

FG_2	FG_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226
12	3.1765	2.8068	2.6055	2.4801	2.3940	2.3310	2.2828	2.2446	2.2135	2.1878
15	3.0732	2.6952	2.4898	2.3614	2.2730	2.2081	2.1582	2.1185	2.0862	2.0593
20	2.9747	2.5893	2.3801	2.2489	2.1582	2.0913	2.0397	1.9985	1.9649	1.9367
30	2.8807	2.4887	2.2761	2.1422	2.0492	1.9803	1.9269	1.8841	1.8490	1.8195
40	2.8354	2.4404	2.2261	2.0909	1.9968	1.9269	1.8725	1.8289	1.7929	1.7627
50	2.8087	2.4120	2.1967	2.0608	1.9660	1.8954	1.8405	1.7963	1.7598	1.7291
60	2.7911	2.3933	2.1774	2.0410	1.9457	1.8747	1.8194	1.7748	1.7380	1.7070
100	2.7564	2.3564	2.1394	2.0019	1.9057	1.8339	1.7778	1.7324	1.6949	1.6632
120	2.7478	2.3473	2.1300	1.9923	1.8959	1.8238	1.7675	1.7220	1.6842	1.6524
200	2.7308	2.3293	2.1114	1.9732	1.8763	1.8038	1.7470	1.7011	1.6630	1.6308
	12	15	20	30	40	50	60	100	120	200
1	60.705	61.220	61.740	62.265	62.529	62.688	62.794	63.007	63.061	63.168
2	9.4081	9.4247	9.4413	9.4579	9.4662	9.4712	9.4746	9.4812	9.4829	9.4862
3	5.2156	5.2003	5.1845	5.1681	5.1597	5.1546	5.1512	5.1443	5.1425	5.1390
4	3.8955	3.8704	3.8443	3.8174	3.8036	3.7952	3.7896	3.7782	3.7753	3.7695
5	3.2682	3.2380	3.2067	3.1741	3.1573	3.1471	3.1402	3.1263	3.1228	3.1157
6	2.9047	2.8712	2.8363	2.8000	2.7812	2.7697	2.7620	2.7463	2.7423	2.7343
7	2.6681	2.6322	2.5947	2.5555	2.5351	2.5226	2.5142	2.4971	2.4928	2.4841
8	2.5020	2.4642	2.4246	2.3830	2.3614	2.3481	2.3391	2.3208	2.3162	2.3068
9	2.3789	2.3396	2.2983	2.2547	2.2320	2.2180	2.2085	2.1892	2.1843	2.1744
10	2.2841	2.2435	2.2007	2.1554	2.1317	2.1171	2.1072	2.0869	2.0818	2.0713
12	2.1474	2.1049	2.0597	2.0115	1.9861	1.9704	1.9597	1.9379	1.9323	1.9210
15	2.0171	1.9722	1.9243	1.8728	1.8454	1.8284	1.8168	1.7929	1.7867	1.7743
20	1.8924	1.8449	1.7938	1.7382	1.7083	1.6896	1.6768	1.6501	1.6433	1.6292
30	1.7727	1.7223	1.6673	1.6065	1.5732	1.5522	1.5376	1.5069	1.4989	1.4824
40	1.7146	1.6624	1.6052	1.5411	1.5056	1.4830	1.4672	1.4336	1.4248	1.4064
50	1.6802	1.6269	1.5681	1.5018	1.4648	1.4409	1.4242	1.3885	1.3789	1.3590
60	1.6574	1.6034	1.5435	1.4755	1.4373	1.4126	1.3952	1.3576	1.3476	1.3264
100	1.6124	1.5566	1.4943	1.4227	1.3817	1.3548	1.3356	1.2934	1.2819	1.2571
120	1.6012	1.5450	1.4821	1.4094	1.3676	1.3400	1.3203	1.2767	1.2646	1.2385
200	1.5789	1.5218	1.4575	1.3826	1.3390	1.3100	1.2891	1.2418	1.2285	1.1991

Tabelle B.18. Quantile der F–Verteilung $F_{0.95}(FG_1, FG_2) = F_{F_n}^{-1}(0.95, FG_1, FG_2)$

FG_2	FG_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772
50	4.0343	3.1826	2.7900	2.5572	2.4004	2.2864	2.1992	2.1299	2.0734	2.0261
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926
100	3.9361	3.0873	2.6955	2.4626	2.3053	2.1906	2.1025	2.0323	1.9748	1.9267
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105
200	3.8884	3.0411	2.6498	2.4168	2.2592	2.1441	2.0556	1.9849	1.9269	1.8783
	12	15	20	30	40	50	60	100	120	200
1	243.91	245.95	248.01	250.10	251.14	251.77	252.20	253.04	253.25	253.68
2	19.413	19.429	19.446	19.462	19.471	19.476	19.479	19.486	19.487	19.491
3	8.7446	8.7029	8.6602	8.6166	8.5944	8.5810	8.5720	8.5539	8.5494	8.5402
4	5.9117	5.8578	5.8025	5.7459	5.7170	5.6995	5.6877	5.6641	5.6581	5.6461
5	4.6777	4.6188	4.5581	4.4957	4.4638	4.4444	4.4314	4.4051	4.3985	4.3851
6	3.9999	3.9381	3.8742	3.8082	3.7743	3.7537	3.7398	3.7117	3.7047	3.6904
7	3.5747	3.5107	3.4445	3.3758	3.3404	3.3189	3.3043	3.2749	3.2674	3.2525
8	3.2839	3.2184	3.1503	3.0794	3.0428	3.0204	3.0053	2.9747	2.9669	2.9513
9	3.0729	3.0061	2.9365	2.8637	2.8259	2.8028	2.7872	2.7556	2.7475	2.7313
10	2.9130	2.8450	2.7740	2.6996	2.6609	2.6371	2.6211	2.5884	2.5801	2.5634
12	2.6866	2.6169	2.5436	2.4663	2.4259	2.4010	2.3842	2.3498	2.3410	2.3233
15	2.4753	2.4034	2.3275	2.2468	2.2043	2.1780	2.1601	2.1234	2.1141	2.0950
20	2.2776	2.2033	2.1242	2.0391	1.9938	1.9656	1.9464	1.9066	1.8963	1.8755
30	2.0921	2.0148	1.9317	1.8409	1.7918	1.7609	1.7396	1.6950	1.6835	1.6597
40	2.0035	1.9245	1.8389	1.7444	1.6928	1.6600	1.6373	1.5892	1.5766	1.5505
50	1.9515	1.8714	1.7841	1.6872	1.6337	1.5995	1.5757	1.5249	1.5115	1.4835
60	1.9174	1.8364	1.7480	1.6491	1.5943	1.5590	1.5343	1.4814	1.4673	1.4377
100	1.8503	1.7675	1.6764	1.5733	1.5151	1.4772	1.4504	1.3917	1.3757	1.3416
120	1.8337	1.7505	1.6587	1.5543	1.4952	1.4565	1.4290	1.3685	1.3519	1.3162
200	1.8008	1.7166	1.6233	1.5164	1.4551	1.4146	1.3856	1.3206	1.3024	1.2626

Tabelle B.19. Quantile der F–Verteilung $F_{0.975}(FG_1, FG_2) = F_{F_n}^{-1}(0.975, FG_1, FG_2)$

FG_2	FG_1 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.332	39.355	39.373	39.387	39.398
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419
4	12.218	10.649	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.007	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882
50	5.3403	3.9749	3.3902	3.0544	2.8327	2.6736	2.5530	2.4579	2.3808	2.3168
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702
100	5.1786	3.8284	3.2496	2.9166	2.6961	2.5374	2.4168	2.3215	2.2439	2.1793
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570
200	5.1004	3.7578	3.1820	2.8503	2.6304	2.4720	2.3513	2.2558	2.1780	2.1130
	12	15	20	30	40	50	60	100	120	200
1	976.71	984.87	993.10	1001.4	1005.6	1008.1	1009.8	1013.2	1014.0	1015.7
2	39.415	39.431	39.448	39.465	39.473	39.478	39.481	39.488	39.490	39.493
3	14.337	14.253	14.167	14.081	14.037	14.010	13.992	13.956	13.947	13.929
4	8.7512	8.6565	8.5599	8.4613	8.4111	8.3808	8.3604	8.3195	8.3092	8.2885
5	6.5245	6.4277	6.3286	6.2269	6.1750	6.1436	6.1225	6.0800	6.0693	6.0478
6	5.3662	5.2687	5.1684	5.0652	5.0125	4.9804	4.9589	4.9154	4.9044	4.8824
7	4.6658	4.5678	4.4667	4.3624	4.3089	4.2763	4.2544	4.2101	4.1989	4.1764
8	4.1997	4.1012	3.9995	3.8940	3.8398	3.8067	3.7844	3.7393	3.7279	3.7050
9	3.8682	3.7694	3.6669	3.5604	3.5055	3.4719	3.4493	3.4034	3.3918	3.3684
10	3.6209	3.5217	3.4185	3.3110	3.2554	3.2214	3.1984	3.1517	3.1399	3.1161
12	3.2773	3.1772	3.0728	2.9633	2.9063	2.8714	2.8478	2.7996	2.7874	2.7626
15	2.9633	2.8621	2.7559	2.6437	2.5850	2.5488	2.5242	2.4739	2.4611	2.4352
20	2.6758	2.5731	2.4645	2.3486	2.2873	2.2493	2.2234	2.1699	2.1562	2.1284
30	2.4120	2.3072	2.1952	2.0739	2.0089	1.9681	1.9400	1.8816	1.8664	1.8354
40	2.2882	2.1819	2.0677	1.9429	1.8752	1.8324	1.8028	1.7405	1.7242	1.6906
50	2.2162	2.1090	1.9933	1.8659	1.7963	1.7520	1.7211	1.6558	1.6386	1.6029
60	2.1692	2.0613	1.9445	1.8152	1.7440	1.6985	1.6668	1.5990	1.5810	1.5435
100	2.0773	1.9679	1.8486	1.7148	1.6401	1.5917	1.5575	1.4833	1.4631	1.4203
120	2.0548	1.9450	1.8249	1.6899	1.6141	1.5649	1.5299	1.4536	1.4327	1.3880
200	2.0103	1.8996	1.7780	1.6403	1.5621	1.5108	1.4742	1.3927	1.3700	1.3204

Tabelle B.20. Quantile der F–Verteilung $F_{0.99}(FG_1, FG_2) = F_{F_n}^{-1}(0.99, FG_1, FG_2)$

FG_2	FG_1 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5	6055.8
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.246	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.259	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.561	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.044	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491
12	9.3302	6.9266	5.9525	5.4120	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875	4.2961
15	8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948	3.8049
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.6987	3.5644	3.4567	3.3682
30	7.5625	5.3903	4.5097	4.0179	3.6990	3.4735	3.3045	3.1726	3.0665	2.9791
40	7.3141	5.1785	4.3126	3.8283	3.5138	3.2910	3.1238	2.9930	2.8876	2.8005
50	7.1706	5.0566	4.1993	3.7195	3.4077	3.1864	3.0202	2.8900	2.7850	2.6981
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6490	3.3389	3.1187	2.9530	2.8233	2.7185	2.6318
100	6.8953	4.8239	3.9837	3.5127	3.2059	2.9877	2.8233	2.6943	2.5898	2.5033
120	6.8509	4.7865	3.9491	3.4795	3.1735	2.9559	2.7918	2.6629	2.5586	2.4721
200	6.7633	4.7129	3.8810	3.4143	3.1100	2.8933	2.7298	2.6012	2.4971	2.4106

FG_2	12	15	20	30	40	50	60	100	120	200
1	6106.3	6157.3	6208.7	6260.6	6286.8	6302.5	6313.0	6334.1	6339.4	6350.0
2	99.416	99.433	99.449	99.466	99.474	99.479	99.483	99.489	99.491	99.494
3	27.052	26.872	26.690	26.505	26.412	26.354	26.316	26.240	26.221	26.183
4	14.374	14.198	14.020	13.838	13.745	13.690	13.652	13.577	13.558	13.520
5	9.8883	9.7222	9.5526	9.3793	9.2912	9.2378	9.2020	9.1299	9.1118	9.0754
6	7.7183	7.5590	7.3958	7.2285	7.1432	7.0915	7.0567	6.9867	6.9690	6.9336
7	6.4691	6.3143	6.1554	5.9920	5.9084	5.8577	5.8236	5.7547	5.7373	5.7024
8	5.6667	5.5151	5.3591	5.1981	5.1156	5.0654	5.0316	4.9633	4.9461	4.9114
9	5.1114	4.9621	4.8080	4.6486	4.5666	4.5167	4.4831	4.4150	4.3978	4.3631
10	4.7059	4.5581	4.4054	4.2469	4.1653	4.1155	4.0819	4.0137	3.9965	3.9617
12	4.1553	4.0096	3.8584	3.7008	3.6192	3.5692	3.5355	3.4668	3.4494	3.4143
15	3.6662	3.5222	3.3719	3.2141	3.1319	3.0814	3.0471	2.9772	2.9595	2.9235
20	3.2311	3.0880	2.9377	2.7785	2.6947	2.6430	2.6077	2.5353	2.5168	2.4792
30	2.8431	2.7002	2.5487	2.3860	2.2992	2.2450	2.2079	2.1307	2.1108	2.0700
40	2.6648	2.5216	2.3689	2.2034	2.1142	2.0581	2.0194	1.9383	1.9172	1.8737
50	2.5625	2.4190	2.2652	2.0976	2.0066	1.9490	1.9090	1.8248	1.8026	1.7567
60	2.4961	2.3523	2.1978	2.0285	1.9360	1.8772	1.8363	1.7493	1.7263	1.6784
100	2.3676	2.2230	2.0666	1.8933	1.7972	1.7353	1.6918	1.5977	1.5723	1.5184
120	2.3363	2.1915	2.0346	1.8600	1.7628	1.7000	1.6557	1.5592	1.5330	1.4770
200	2.2747	2.1294	1.9713	1.7941	1.6945	1.6295	1.5833	1.4811	1.4527	1.3912

Literaturverzeichnis

1. R. L. Ackoff. *The Design of Social Research*. The University of Chicago Press, Chicago, London, 1953.
2. A. A. Afifi und V. Clark. *Computer-Aided Multivariate Analysis*. Chapman & Hall, London, Weinheim, New York, 3. Auflage, 1996.
3. A. Agresti. *Categorial Data Analysis*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2. Auflage, 2002.
4. P. Albrecht. *On the Correct Use of the Chi-square Goodness-of-fit-Test*. *Scandinavian Actuarial Journal*, Seiten 149–160, 1980.
5. T. W. Anderson. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1958.
6. T. W. Anderson. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 2. Auflage, 1984.
7. H. J. Andreß, J. A. Hagenaars und S. Kühnel. *Analyse von Tabellen und kategorialen Daten*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
8. K. Backhaus, B. Erichson, W. Plinke und R. Weiber. *Multivariate Analysemethoden*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 7. Auflage, 1994.
9. Günter Bamberg und Franz Baur. *Statitsik*. Oldenbourg, München, Wien, 11., überarb. Auflage, 2001.
10. H.-P. Beck-Bornholdt und H.-H. Dubben. *Der Schein der Weisen*. Hoffmann und Campe, Hamburg, 2. Auflage, 2001.
11. F. Benford. *The law of anomalous numbers*. in: *Proceedings of the Philosophical Society*, Band 78, Seiten 551–572, 1938.
12. D. A. Berry und B. W. Lindgren. *Statistics: Theory and Methods*. Duxbury Press, Belmont, Albany, Bonn, 2. Auflage, 1990.
13. G. K. Bhattacharyya und R. A. Johnson. *Statistical Concepts and Methods*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 1977.
14. H. M. Blalock, Jr. *Social Statistics*. McGraw-Hill, New York, St. Louis, San Francisco, 2. Auflage, 1972.
15. R. D. Bock. *Multivariate Statistical Methods in Behavioral Research*. McGraw-Hill, New York, St. Louis San Francisco, 1975.
16. J. Bortz. *Lehrbuch der empirischen Sozialforschung*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1985.
17. N. M. Bradburn und S. Sudman. *Polls and Surveys: Understanding What They Tell Us*. Jossey-Bass, San Francisco, 1988.

18. H. Büning und G. Trenkler. *Nichtparametrische statistische Methoden*. de Gruyter, Berlin, New York, 2. erw. und völlig überar. Auflage, 1994.
19. S. K. Campbell. *Applied Business Statistics*. Harper & Row, New York, 1987.
20. J. M. Chambers, W. S. Cleveland, B. Kleiner und P. A. Tukey. *Graphical Methods for Data Analysis*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, 1983.
21. S. Chatterjee und B. Price. *Praxis der Regressionsanalyse*. Oldenbourg, München, Wien, 2. Auflage, 1995.
22. W. W. Cooley und P. R. Lohnes. *Multivariate Data Analysis*. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1971.
23. E. Czuber. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*. Teubner, Leipzig, Berlin, 4. Auflage, 1924.
24. P. Dorer, H. Mainbusch und H. Tubies. *Bundesstatistikgesetz: Gesetz über die Statistik für Bundeszwecke mit den Leitsätzen des Volkszählungsurteils, Mikrozensusgesetz und Volkszählungsgesetz; Kommentar*. C. H. Beck, München, 1988.
25. G. Ebel. *Die Berechnung der Wägungsschemata für die Preisindizes für die Lebenshaltung*. *Wirtschaft und Statistik*, 3:171–178, 1999.
26. A. S. C. Ehrenberg. *Data Reduction: Analysing and Interpreting Statistical Data*. John Wiley & Sons, London, New York, Syndney, 1975.
27. A. Einstein und L. Infeld. *The Evolution of Physics*. Simon & Schuster, New York, 1942.
28. B. Everitt. *Cluster Analysis*. Heinemann Educational Books, London, 1974.
29. L. Fahrmeir und A. Hamerle. *Mehrdimensionale Zufallsvariable und Verteilungen*. in: *Multivariate statistische Verfahren* [30], Kapitel 2.
30. L. Fahrmeir und A. Hamerle, (Hrsg.). *Multivariate statistische Verfahren*. de Gruyter, Berlin, New York, 1984.
31. L. Fahrmeir und A. Hamerle. *Varianz- und Kovarianzanalyse*. in: *Multivariate statistische Verfahren* [30], Kapitel 5.
32. L. Fahrmeir, W. Häußler und G. Tutz. *Diskriminanzanalyse*. in: Fahrmeir and Hamerle [30], Kapitel 8.
33. L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot und G. Tutz. *Statistik*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
34. W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Band 1. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 3. Auflage, 1968.
35. W. Feller. *An Inroduction to Probability Theory and Its Applications*, Band 2. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 2. Auflage, 1971.
36. F. Ferschl. *Deskriptive Statistik*. Physica, Würzburg, Wien, 3., korrigierte Auflage, 1985.
37. I. Fisher. *The Making of Index Numbers*. Kelley, Reprint, New York, 3., rev. Auflage, 1967.
38. M. Fisz. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. Akademie Verlag, Berlin, 8. Auflage, 1976.
39. W. A. Fuller. *Introduction to statistical time series*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 1976.
40. Bundesministerium für Arbeit und Sozialordnung, (Hrsg.). *Statistisches Taschenbuch 2001*. Clausen & Bosse, Leck, 2001.
41. Bundesministerium für Wirtschaft und Arbeit, (Hrsg.). *Die wirtschaftliche Lage in der Bundesrepublik Deutschland*, Monatsbericht, 12 2002.
42. W. Glaser. *Varianzanaylse*. UTB 584, Fischer Verlag, Stuttgart, New York, 1978.
43. F. Goronzy. *A Numerical Taxonomy of Business Enterprises*. in: A. J. Cole, (Hrsg.), *Numerical Taxonomie*, Seiten 42–52, London, New York, 1969. Academic Press. Proceedings of the Colloquium in Numerical Taxonomy held in the University of St. Andrews, Sept. 1968.

44. C. W. Granger und P. Newbold. *Forecasting Economis Time Series*. Academic Press, San Diego, New York, 2. Auflage, 1986.
45. P. E. Green, R. E. Frank und P. J. Robinson. *Cluster Analysis in Test Market Selection*. *Management Science*, 13:387–400, 1967.
46. O. Hafermalz. *Schriftliche Befragung: Möglichkeiten und Grenzen*. Gabler, Wiesbaden, 1976.
47. A. Handl. *Multivariate Analysemethoden*. Springer, Berlin, New York, Heidelberg, 2002.
48. G. Hansen. *Quantitative Wirtschaftsforschung*. Vahlen, München, 1993.
49. J. Hartung. *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenbourg, München, Wien, 8., durchges. Auflage, 1991.
50. G. E. Haynam und F. C. Leone. *Analysis of categorical data*. *Biometrika*, 52:654–660, 1965.
51. S. Heiler und M. Michels. *Deskriptive und Explorative Datenanalyse*. Oldenbourg, München, Wien, 1994.
52. K. Holm (Hrsg.). *Die Befragung: Datenaufbereitung, Tabellenanalyse, Korrelationsmatrix*, Band 2. Francke: Unitaschenbücher, München, 1975.
53. K. Holm (Hrsg.). *Die Befragung: Der Fragebogen – Die Stichprobe*, Band 1. Francke: Unitaschenbücher, München, 4. Auflage, 1991.
54. M. Hüttner. *Grundzüge der Marktforschung*. de Gruyter, Berlin, New York, 4., völlig neubearb. u. erw. Auflage, 1989.
55. Institut der deutschen Wirtschaft Köln, (Hrsg.). *Zahlen zur wirtschaftlichen Entwicklung der Bundesrepublik Deutschland*. Deutscher Instituts-Verlag, Köln, 2000.
56. International Energy Agency, (Hrsg.). *End-User Oil Product Prices and Average Crude Oil Import Costs*, April 2001. http://www.iea.org.
57. E. T. Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. fragmentierte Edition (1996) aus dem Internet (http://omega.albany.edu:8008/JaynesBook).
58. R. A. Johnson und G. K. Bhattacharyya. *Statistics:Principles and Methods*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 3. Auflage, 1996.
59. R. A. Johnson und D. W. Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 4. Auflage, 1999.
60. S. C. Johnson. *Hierarchical clustering schemes*. *Psychometrika*, 32:241–254, 1967.
61. J. Johnston und J. Dinardo. *Econometric Methods*. McGraw-Hill, New York, St. Louis, Brisbane, 4. reprint with corrections Auflage, 1997.
62. G. G. Judge, R. C. Hill, W. E. Griffiths, H. Lütkepohl und T.-C. Lee. *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 2. Auflage, 1988.
63. M. J. Karson. *Multivariate Statistical Methods: An Introduction*. Iowa State University Press, Ames, 1982.
64. H. Kaufmann und H. Pape. *Clusteranalyse*. in: Fahrmeir and Hamerle [30], Kapitel 9.
65. B. F. King. *Market and industry factors in stock price behaviour*. *Journal of Business*, 39:139–190, 1966.
66. B. F. King. *Step wise clustering procedures*. *Journal of the American Statistical Association*, 62:86–101, 1967.
67. W. Kohn. *Informationsentropie: Streuung für nominalskalierte Merkmale*. *WiSt*, Seiten 161–164, März 2002.
68. W. Kowalczyk und K. Ottich. *Schülern auf die Sprünge helfen*. rororo, Reinbeck, 1995.
69. W. Krämer. *So lügt man mit Statistik*. Campus, Frankfurt am Main, New York, 6., überarb. u. erw. Auflage, 1994.

70. W. Krämer. *Denkste!: Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen*. Campus, Frankfurt am Main, New York, 1995.
71. U. Krengel. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 2000.
72. W. Krug, M. Nourney und J. Schmidt. *Wirtschafts- und Sozialstatistik: Gewinnung von Daten*. Oldenbourg, München, Wien, 4., durchges. Auflage, 1996.
73. P. A. Lachenbruch. *Discriminant Analysis*. Hafner Press, London, 1975.
74. J. M. Lambert und W. T. Williams. *Multivariate methods in plant ecology, IV. Nodal Analysis*. *Journal of Ecology*, 50:775–802, 1962.
75. J. M. Lambert und W. T. Williams. *Multivariate methods in plant ecology, IV. Comparison of information analysis and association analysis*. *Journal of Ecology*, 54:635–664, 1966.
76. H. B. Lawal und G. J. G. Upton. *Comparisons of some chi-squared tests for the test of independence in sparse two-way contingency tables*. *Biometrical Journal*, 32:59–72, 1990.
77. B. W. Lindgren. *Statistical Theory*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 4. Auflage, 1924.
78. P. von der Lippe. *Kritik internationaler Empfehlungen zur Indexformel für Preisindizes in der amtlichen Statistik*. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 218/3+4:385–414, 1999.
79. H. B. Mann und A. Wald. *On the Choice of the Number of Class Intervals in the Application of the Chi Square Test*. *Annals of Mathematical Statistics*, 13:306–317, 1942.
80. K. V. Mardia, J. T. Kent und J. M. Bibby. *Multivariate Anaylsis*. Academic Press, London, New York, Toronto, 1979.
81. G. Marinell. *Multivariate Verfahren*. Oldenbourg, München, Wien, 4., erw. Auflage, 1995.
82. P. McNaughton-Smith, W. T. Williams, N. B. Dale und L. G. Mockett. *Dissimilarity Analysis*. *Nature*, 202:1034–1035, 1964.
83. A. M. Mood, F. A. Graybill und D. C. Boes. *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill, Auckland, Bogota, London, 3. Auflage, 1974.
84. D. S. Moore und G. P. McCabe. *Introduction to the Practice of Statistics*. W. H. Freeman and Company, New York, 3. Auflage, 1998.
85. W. Neubauer. *Preisindex versus Lebenshaltungskostenindex: Substitutionseffekte und ihre Messung*. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 217/1:49–60, 1998.
86. S. Newcomb. *Note on the frequency of the use of different digits in natural numbers*. *American Journal of Mathematics*, 4:39–40, 1881.
87. M. Nigrini. *Digital Analysis Using Benford's Law: Tests and Statistics for Auditors*. Global Audit Publications, Vancouver, 2. Auflage, 2000.
88. D. Ohse. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Analysis*. Vahlen, München, 3., verb. Auflage, 1993.
89. O. Opitz. *Numerische Taxonomie*. Fischer Verlag, Stuttgart, 1980.
90. O. Opitz. *Mathematik: Lehrbuch für Ökonomen*. Oldenbourg, München, Wien, 6. Auflage, 1997.
91. A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, St. Louis, San Francisco, 3. Auflage, 1991.
92. J. Pearl. *Causality*. Cambridge University Press, New York, 2000.
93. W. Piesch. *Statistische Konzentrationsmaße*. J. C. B. Mohr, Tübingen, 1975.
94. R. S. Pindyck und D. L. Rubinfeld. *Econometric Models and Economic Forecasts*. McGraw-Hill, Auckland, Bogota, 2. Auflage, 1981.

95. F. Pokropp. *Einführung in die Statistik*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1977.
96. J. A. Rice. *Mathematical Statistics and Data Analysis*. Wadsworth & Brooks, Pacific Grove, 2. Auflage, 1995.
97. H. Rinne. *Taschenbuch der Statistik*. Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 2., überar. und erw. Auflage, 1997.
98. B. Rüger. *Induktive Statistik*. Oldenbourg, München, Wien, 3., überar. Auflage, 1996.
99. L. Sachs. *Angewandte Statistik: Anwendung statistischer Methoden*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 8., völlig neu berab. u. erw. Auflage, 1997.
100. T. Schildbach. *Entscheidungen*. in: Michael Bitz, Klaus Dellmann, Michel Domsch und Henning Egner, (Hrsg.), *Kompendium der Betriebswirtschaftslehre*, Band 2, Kapitel C: Führungstechniken. Vahlen, München, 3. Auflage, 1992.
101. R. Schlittgen. *Einführung in die Statistik: Analyse und Modellierung von Daten*. Oldenbourg, München, Wien, 5., verbesserte Auflage, 1995.
102. R. Schlittgen und B. H. J. Streitberg. *Zeitreihenanalyse*. Oldenbourg, München, Wien, 1984.
103. W. Schneider, J. Kornrumpf und W. Mohr. *Statistische Methodenlehre: Definitions- und Formelsammlung mit Erläuterungen*. Oldenbourg, München, Wien, 2. Auflage, 1995.
104. J. Schwarze. *Grundlagen der Statistik II: Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik*. Neue Wirtschafts-Briefe, Herne, Berlin, 5. Auflage, 1993.
105. J. Schwarze. *Grundlagen der Statistik I: Beschreibende Verfahren*. Neue Wirtschafts-Briefe, Herne, Berlin, 7. Auflage, 1994.
106. S. R. Searl. *Linear Models*. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1971.
107. C. E. Shannon. *A Mathematical Theory of Communication*. *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423, July 1948.
108. C. E. Shannon. *A Mathematical Theory of Communication*. *The Bell System Technical Journal*, 27:623–656, October 1948.
109. C. E. Shannon und W. Waever. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana, Chicago, 1963.
110. S. Siegel. *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, Düsseldorf, Johannesburg, 1956.
111. B. W. Silverman. *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman and Hall, London, New York, 1986.
112. P. H. A. Sneath. *The application of computers to taxonomy*. *Journal of general Microbiology*, 17:201–226, 1957.
113. R. R. Sokal und C. D. Michener. *A statistical method for evaluating systematic relationships*. *University Kansas Science Bulletin*, 38:1409–1438, 1958.
114. A. Spanos. *Probability Theory and Statistical Inference: Econometric Modeling with Observational Data*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
115. Statistisches Bundesamt, (Hrsg.). *Preisindex der Lebenshaltung*, Fachserie 17, Preise, Reihe 7, Dezember 2002.
116. Statistisches Bundesamt, (Hrsg.). *Statistisches Jahrbuch für die Bundesrepublik 2002*. Metzler-Poeschel, Stuttgart, 2002.
117. Statistisches Bundesamt, (Hrsg.). *Zahlenkompass 2002*. Metzler-Poeschel, Stuttgart, 2002.
118. D. Steinhausen und K. Langer. *Clusteranalyse*. de Gruyter, Berlin, 1977.
119. D. Steinhausen und J. Steinhausen. *Clusteranalyse als Instrument der Zielgruppendefinition in der Marktforschung*. in: H. Späth, (Hrsg.), *Fallstudien Clusteranalyse*, Kapitel 1, Seiten 9–36. Oldenbourg, München, 1977.
120. N. H. Timm. *Multivariate Analysis with Applications in Education ans Psychology*. Brooks / Cole Publishing Company, Monterey, Califorina, 1975.

121. M.-T. Tinnefeld und E. Ehmann. *Einführung in das Datenschutzrecht*. Oldenbourg, München, Wien, 3., neu bearb. und erw. Auflage, 1998.
122. F. Vogel. *Beschreibende und schliessende Statistik*. Oldenbourg, München, Wien, 10., vollst. überarb. und erw. Auflage, 1997.
123. F. Vogel und R. Dobbener. *Ein Streuungsmaß für komparative Merkmale*. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 197:145–157, 1982.
124. Friedrich Vogel. *Probleme und Verfahren der numerischen Klassifikation*. Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.
125. W. Voß, (Hrsg.). *Taschenbuch der Statistik*. Fachbuchverlag Leipzig, München, Wien, 2000.
126. J. H. Ward. *Hierarchical grouping to optimize an objective function*. *Journal of the American Statistical Association*, 58:236–244, 1963.
127. Günter Wöhe. *Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. Vahlen, München, 12. Auflage, 1976.

Sachverzeichnis