A Lebensdaten

Airy, Sir George Biddell	engl. Astronom ∗ 27.07.1801 in Alnwick (GB) † 04.01.1892 in London (GB)
d'Alembert, Jean Le Rond	frz. Philosoph, Mathematiker und Literat ∗ 17.11.1717 in Paris (F) † 29.10.1783 in Paris (F)
Ampère, André Marie	frz. Mathematiker und Physiker ∗ 20.01.1775 in Lyon (F) † 10.06.1836 in Marseille (F)
Babinet, Jacques	frz. Physiker ∗ 05.03.1784 in Lusignan (F) † 21.10.1872 in Paris (F)
Bessel, Friedrich Wilhelm	dt. Mathematiker ∗ 22.07.1784 in Minden (D) † 17.03.1846 in Königsberg (D)
Biot, Jean-Baptiste	frz. Physiker und Astronom ∗ 21.04.1774 in Paris (F) † 03.02.1862 in Paris (F)
Bohr, Niels Henrik David Nobelpreis 1922	dän. Physiker ∗ 07.10.1885 in Kopenhagen (DK) † 18.11.1962 in Kopenhagen (DK)
Bradley, James	engl. Astronom ∗ ?.03.1692 in Shireborn (GB) † 13.07.1762 in Chalford (GB)
Brewster, Sir David	engl. Physiker ∗ 11.12.1781 in Jedburgh (GB) † 10.02.1868 in Allerby (GB)

Cauchy, Augustin Louis	frz. Mathematiker ∗ 21.08.1789 in Paris (F) † 23.05.1857 in Sceaux (F)
Čerenkov, Pavel, Alexander Nobelpreis 1958	russ. Physiker ∗ 28.07.1904 in Novaia Chigla (RUS) † 06.01.1990 in Moskau (RUS)
de Coulomb, Charles Augustin	frz. Physiker ∗ 14.06.1736 in Angoulême (F) † 23.08.1806 in Paris (F)
Descartes, René (Renatus Cartesius)	franz. Philososoph und Mathematiker ∗ 31.03.1596 in La Haye (F) † 11.02.1650 in Stockholm (S)
Dirac, Paul Adrien Maurice Nobelpreis 1933	engl. Physiker ∗ 08.08.1902 in Bristol (GB) † 20.08.1984 in Tallahassee (USA)
Dirichlet, Johann Peter G. Lejeune	dt./frz. Mathematiker ∗ 13.02.1805 in Düren (D) † 05.05.1859 in Göttingen (D)
Einstein, Albert Nobelpreis 1921	dt. Physiker ∗ 14.03.1879 in Ulm (D) † 18.04.1955 in Princeton (USA)
Faraday, Michael	engl. Physiker ∗ 22.09.1791 in Newington Butts (GB) † 25.08.1867 in Hampton Court (GB)
Fizeau, Antoine Hippolyte Louis	frz. Physiker ∗ 23.09.1819 in Paris (F) † 18.09.1896 in Venteuil (F)
Fourier, Jean Baptiste Joseph	frz. Mathematiker ∗ 21.03.1768 in Auxerre (F) † 16.05.1830 in Paris (F)
Fraunhofer, Joseph	dt. Optiker und Physiker ∗ 06.03.1787 in Straubing (D) † 07.07.1826 in München (D)
Fresnel, Augustin Jean	frz. Physiker ∗ 20.05.1788 in Broglie (F) † 14.07.1827 in Ville d'Avray (F)

Gauß, Johann Carl Friedrich	dt. Mathematiker und Astronom ∗ 30.04.1777 in Braunschweig (D) † 23.02.1855 in Göttingen (D)
Green, George	engl. Mathematiker und Physiker ∗ 14.07.1793 in Nottingham (GB) † 31.03.1841 in Nottingham (GB)
Hall, Herbert	am. Physiker ∗ 07.11.1855 in Gorlan (Maine) (USA) † 20.11.1938 in Cambridge (Mass.) (USA)
Heaviside, Oliver	engl. Physiker und Elektrotechniker ∗ 18.5.1850 in London (GB) † 03.02.1925 in Homefield (GB)
von Helmholtz, Hermann L. F.	dt. Physiker und Physiologe ∗ 31.08.1821 in Potsdam (D) † 08.09.1894 in Berlin (D)
Heisenberg, Werner Karl Nobelpreis 1932	dt. Physiker ∗ 5.12.1901 in Würzburg (D) † 10.2.1976 in München (D)
Henry, Joseph	am. Physiker ∗ 17.12.1797 in Albany (USA) † 13.05.1878 in Washington (USA)
Hertz, Heinrich Rudolf	dt. Physiker ∗ 22.02.1857 in Hamburg (D) † 01.01.1894 in Bonn (D)
Huygens, Christiaan	niederl. Physiker und Mathematiker ∗ 14.04.1629 in den Haag (NL) † 08.07.1695 in den Haag (NL)
v. Jacobi, Moritz Hermann	dt. Physiker ∗ 21.9.1801 in Potsdam (D) † 10.3.1874 in St. Petersburg (RUS)
Joule, James Prescott	engl. Physiker ∗ 24.12.1818 in Salford (GB) † 11.10.1889 in Sale (GB)
Kirchhoff, Gustav Robert	dt. Physiker ∗ 12.03.1824 in Königsberg (D) † 17.10.1887 in Berlin (D)

Kohlrausch, Rudolf H.A.	dt. Physiker ∗ 06. 11. 1809 in Göttingen (D) † 09. 03. 1858 in Erlangen (D)
Laplace, Pierre Simon	frz. Mathematiker und Physiker ∗ 28.03.1749 in Beaumont-en Auge (F) † 05.03.1827 in Arceuil (F)
Larmor, Sir Joseph	ir. Physiker ∗ 11.07.1857 in Magheragall (IRL) † 19.05.1942 in Holywood (IRL)
Legendre, Adrien Marie	frz. Mathematiker ∗ 18.09.1752 in Paris (F) † 10.01.1833 in Paris (F)
Lenz, Heinrich Friedrich Emil	dt. Physiker ∗ 12.02.1804 in Dorpat (D) † 10.02.1865 in Rom (I)
Liénard, Alfred-Marie	frz. Physiker und Mathematiker ∗ 02.04.1869 in Amiens (F) † 29.04.1958 in Paris (F)
Lorentz, Hendrik Anton Nobelpreis 1902	niederl. Physiker ∗ 18.07.1853 in Arnheim (NL) † 04.02.1928 in Haarlem (NL)
Malus, Etienne Louis	frz. Physiker ∗ 23.06.1775 in Paris (F) † 23.02.1812 in Paris (F)
Maxwell, James Clark	engl. Physiker ∗ 13.06.1831 in Edinburgh (GB) † 05.11.1879 in Cambrigde (GB)
Michelson, Albert Abraham Nobelpreis 1907	am. Physiker ∗ 19.12.1852 in Strelno (PL) † 09.05.1931 in Pasadena (USA)
Millikan, Robert Andrew Nobelpreis 1923	am. Physiker ∗ 22.03 1868 in Morrison (USA) † 19.12.1953 in Pasadena (USA)
Minkowski, Hermann	dt. Mathematiker ∗ 22.06.1864 Alexotas (LT) † 12.01.1909 Göttingen (D)

Molyneux, Samuel	engl. Astronom und Physiker ∗ 18.07.1689 in Chester (GB) † 13.04.1728 in Kew (GB)
Morley, Edward William	am. Chemiker ∗ 29.01.1838 in Newark (USA) † 24.02.1923 in West Hartford (USA)
Neumann, Carl Gottfried	dt. Mathematiker ∗ 07.05.1832 in Königsberg (D) † 27.03.1925 in Leipzig (D)
Øerstedt, Hans Christian	dän. Physiker und Chemiker ∗ 14.08.1777 in Rudkøbing (DK) † 09.03.1851 in Kopenhagen (DK)
Ohm, Georg Simon	dt. Physiker ∗ 16.03.1789 in Erlangen (D) † 06.07.1854 in München (D)
Planck, Max Nobelpreis 1919	dt. Physiker ∗ 23.04.1858 in Kiel (D) † 04.10.1947 in Göttingen (D)
Poincarè, Henri Jules	frz. Mathematiker ∗ 29.04.1854 in Nancy (F) † 17.07.1912 in Paris (F)
Poisson, Siméon Denis	frz. Mathematiker und Physiker ∗ 21.06.1781 Pithiviers (F) † 25.04.1840 Sceaux (F)
Poynting, John Henry	engl. Physiker ∗ 09.09.1852 in Monton (GB) † 30.03.1914 in Birmingham (GB)
Rutherford, Ernest Nobelpreis 1908	engl. Physiker ∗ 30.08.1871 in Brightwater (NZ) † 10.10.1937 in Cambridge (GB)
Savart, Felix	frz. Arzt und Physiker ∗ 30.06.1791 in Mézière (F) † 16.03.1841 in Paris (F)
Schwartz, Laurent	frz. Mathematiker ∗ 05.03.1915 in Paris (F) † 04.07.2002 Paris (F)

von Siemens, Werner	dt. Elektrotechniker ∗ 13.12.1816 in Lenthe (D) † 06.12.1892 in Berlin (D)
Snell, Willebrord van Roijen (Snellius)	niederl. Physiker ∗ ? . ? .1580 in Leiden (NL) † 30.10.1626 in Leiden (NL)
Stokes, Sir George Gabriel	engl. Physiker und Mathematiker ∗ 13.08.1819 in Skreen (GB) † 01.02.1903 in Cambridge (GB)
Tesla, Nikola	am. Physiker und Elektrotechniker ∗ 10.07.1856 in Smiljan (HR) † 07.01.1943 in New York (USA)
Weber, Wilhelm Eduard	dt. Physiker ∗ 24.10.1804 in Wittenberg (D) † 23.06.1891 in Göttingen (D)
Wiechert, Johann Emil	dt. Physiker und Geophysiker ∗ 26.12.1861 in Tilsit (D) † 19.03.1928 in Göttingen (D)
Young, Thomas	engl. Physiker und Arzt ∗ 13.06.1773 in Milverton (GB) † 20.05.1829 in London (GB)

A Einheitensysteme der Elektrodynamik

A.1 Die Maßsysteme

Im Vakuum benötigt man zur Festlegung der Maßeinheiten aller Größen der Elektrodynamik drei, im Prinzip frei wählbare Konstanten. Durch diese Konstanten werden letztlich die Maßeinheiten des elektrischen Feldes E, der magnetischen Induktion B und die Verknüpfung dieser im Experiment zugänglichen Felder durch das Induktionsgesetz festgelegt. Als zuständige Gleichungen kann man wählen:

- Das elektrische Feld E einer Punktladung q im Abstand r von dieser Ladung

$$E(r) = k_e \frac{q}{r^2} \ .$$

- Die magnetische Induktion B eines langen, dünnen, geraden Leiters, der von einem (stationären) Strom i durchflossen wird. Im Abstand r von der Drahtachse gilt die Aussage

$$B(r) = 2k_m \frac{i}{r} \ .$$

  Die Herausnahme des Faktors 2 ist eine nützliche aber keine zwingende Option.
- Das Induktionsgesetz in der differentiellen Form

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + k_f \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \ .$$

Eine Einschränkung ergibt sich aus den Wellengleichungen für die zwei Felder im Vakuum. Aus den Maxwellgleichungen gewinnt man in diesem Fall

$$\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{k_m k_f}{k_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \ ,$$

und

$$\Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{k_m k_f}{k_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \ .$$

Da der Faktor vor den Zeitableitungen dem Inversen des Quadrates der Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht und diese für elektromagnetische Wellen im Vakuum mit

$$c = 2.997925... \cdot 10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 2.997925... \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

experimentell bestimmt wird, folgt

$$\left[\frac{k_e}{k_m k_f}\right]^{1/2} = c\ .$$

Diese Aussage impliziert, dass im Endeffekt nur zwei der drei Konstanten frei wählbar sind.

Die explizite, messtechnische Festlegung der zwei Konstanten (üblicherweise wählt man k_e und k_m) erfordert eine etwas längere Betrachtung. Die Konstante k_e wird zunächst durch das Coulombsche Kraftgesetz

$$F_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\ ,$$

das den Betrag der Kraftwirkung zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 im Abstand r_{12} beschreibt, eingeführt.

Durch die Wahl[1] der dimensionslosen Konstanten

$$k_{e,\text{CGS}} = 1$$

wird in dem CGS System die Maßeinheit der Ladung mit den mechanischen Maßeinheiten verknüpft

$$[q]_{\text{CGS}} = \frac{g^{1/2}\text{cm}^{3/2}}{\text{s}} = \text{statcoul}\ .$$

Die Maßeinheit des elektrischen Feldes ist wegen $E_{q_1} = F_{12}/q_2$ somit

$$[E]_{\text{CGS}} = \frac{g^{1/2}}{\text{cm}^{1/2}\,\text{s}} = \frac{\text{statvolt}}{\text{cm}}\ .$$

Die Vorschrift zur Ausmessung von Magnetfeldern (genauer der magnetischen Induktion) lautet

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}\ .$$

Diese Relation, die das magnetische Moment $\boldsymbol{m}$ eines Probedipols und die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ mit einem Drehmoment $\boldsymbol{D}$ verknüpft, zeigt, dass mit der Festlegung der Maßeinheiten der Induktion die Einheiten des magnetischen Momentes festgelegt sind. Im CGS System legt man die Konstante k_m auf den Wert

$$k_{m,\text{CGS}} = \frac{1}{c} = 0.333564... \cdot 10^{-10}\,\frac{\text{s}}{\text{cm}}$$

fest und es folgt

$$k_{f,\text{CGS}} = \frac{k_{e,\text{CGS}}}{c^2\,k_{m,\text{CGS}}} \qquad \Longrightarrow k_{f,\text{CGS}} = \frac{1}{c}\ .$$

[1] Es werden nur das Gaußsche CGS System und das rationalisierte MKSA System im Detail betrachtet. Für zwei der zusätzlichen Maßsysteme, die in dem Vorwort erwähnt wurden, werden die relevanten Konstanten in Tab. A.1 aufgeführt.

Die magnetische Induktion wird somit in den Einheiten

$$[B]_{\mathrm{CGS}} = \frac{g^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{s}} = [E]_{\mathrm{CGS}}\ ,$$

das magnetische Moment in den Einheiten

$$[m]_{\mathrm{CGS}} = \frac{g^{1/2}\mathrm{cm}^{5/2}}{\mathrm{s}} = [p]_{\mathrm{CGS}}$$

gemessen. Sowohl für die Felder als auch für die elektrischen und magnetischen Dipolmomente sind im CGS System die gleichen Einheiten zuständig.

Im rationalisierten MKSA System führt man als zusätzliche Einheit die Einheit der Stromstärke *Ampère* (Abkürzung A) ein. Mit der Definition des elektrischen Stroms kann man alternativ die Ladungseinheit *Coulomb* (Abkürzung C) benutzen

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1\ \mathrm{A} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}\ .$$

Die messtechnische Definition der Einheit *Ampère* zeigt, dass die Festlegung dieser Einheit durch die Aussage

> „Fließt in zwei langen, dünnen, geraden, parallelen Leitern (im Vakuum) Strom der gleichen Stärke, so beträgt die Stromstärke i 1 Ampère, wenn sich die Drähte bei einer Entfernung d von 1 Meter mit einer Kraft F von $2 \cdot 10^{-7}$ N pro Meter Drahtlänge anziehen."

die Betrachtung der magnetischen Kraftwirkungen erfordert. In D.tail 5.6 wird gezeigt, dass die zuständige Gleichung die Form

$$i^2 = \frac{|F|d}{2k_f\,k_m\,l}$$

hat. Setzt man die Werte $F = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$, $\quad i = 1\,\mathrm{A}$ und $d = l = 1\,\mathrm{m}$ ein, so erhält man

$$k_{f,\mathrm{SI}}\,k_{m,\mathrm{SI}} = 10^{-7}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C}^2}\ .$$

Die Konstante $k_{f,\mathrm{SI}}$ wird üblicherweise dimensionslos gewählt, so dass mit

$$k_{f,\mathrm{SI}} = 1$$

die Festlegung der Einheit *Ampère* der Aussage

$$k_{m,\mathrm{SI}} = 10^{-7}\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

entspricht. Die Konstante $k_{m,\mathrm{SI}}$ wird in der Praxis oft durch die Permeabilität des Vakuums

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C}^2} = 1.25663... \cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C}^2}$$

ersetzt. Aus der einschränkenden Bedingung für die Konstanten folgt dann

$$k_{e,\mathrm{SI}} = 10^{-7} c^2 \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C}^2} = 8.98755.. \cdot 10^9 \frac{\mathrm{kg\,m}^3}{\mathrm{C}^2\,\mathrm{s}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \ .$$

Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums hat den Wert

$$\varepsilon_0 = 8.85418... \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2 \mathrm{s}^2}{\mathrm{kg\,m}^3} \ .$$

Für die Maßeinheiten der zwei Felder und des magnetischen Moments findet man im SI System

$$[E]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C\,s}^2} = \frac{\mathrm{Volt}}{\mathrm{cm}}$$
$$[B]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C\,s}}$$
$$[m]_{\mathrm{SI}} = \frac{\mathrm{C\,m}^2}{\mathrm{s}} \ .$$

Es ist üblich, das magnetische Moment einer ebenen, stromdurchflossenen Leiterschleife im SI System in der Form

$$m_{\mathrm{Schleife,SI}} = i \cdot \text{Fläche}$$

anzugeben. Die Maßeinheit, die durch diese Definition impliziert wird, stimmt mit der oben angegebenen Maßeinheit des magnetischen Moments überein. Im Fall des CGS Systems trifft dies nicht zu. Schreibt man jedoch

$$m_{\mathrm{Schleife}} = k_f (i \cdot \text{Fläche}) \ ,$$

so ist die Definition für beide Einheitensysteme mit der allgemeinen Definition des magnetischen Momentes verträglich.

Die Diskussion der Feldsituation in Materie erfordert die Einbeziehung der Hilfsfelder $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{H}$, der dielektrischen Verschiebung und der magnetischen Feldstärke, sowie der Größen, die die gemittelten Eigenschaften des Materials wiedergeben, der Polarisation $\boldsymbol{P}$ und der Magnetisierung $\boldsymbol{M}$. Das $\boldsymbol{D}$-Feld wird durch die wahren Ladungen erzeugt. Lässt man die Frage der Maßeinheiten dieses Feldes offen, so impliziert dies die Relation

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi k_d \rho_w \ .$$

Die Polarisation wird durch die Verteilung der Polarisationsladungen bestimmt. In diesem Fall wird die explizite (jedoch nicht zwingende) Definition

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P} = -\rho_{\mathrm{pol}}$$

benutzt. Mit der Aussage, dass das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ durch die wahren und die Polarisationsladungen erzeugt wird, folgt die Relation

$$\boldsymbol{D} = \frac{k_d}{k_e} \boldsymbol{E} - 4\pi k_d \boldsymbol{P} \ .$$

Im CGS System wählt man die noch verfügbare Konstante dimensionslos mit dem Wert 1

$$k_{d,\mathrm{CGS}} = k_{e,\mathrm{CGS}} = 1 \ .$$

Die resultierende Gleichung

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} - 4\pi \boldsymbol{P}$$

besagt, dass alle drei Felder in den gleichen Einheiten gemessen werden. Im SI System wird die Konstante ebenfalls dimensionslos gewählt

$$k_{d,\mathrm{SI}} = \frac{1}{4\pi} \ ,$$

so dass man die Relation zwischen den drei Feldern explizit in der Form

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}$$

schreiben kann. Die Maßeinheiten der zwei zusätzlichen Felder sind gleich, sie unterscheiden sich jedoch von der des $\boldsymbol{E}$-Feldes[2].

Betrachtet man magnetische Materialien, so lauten die entsprechenden Aussagen: Das $\boldsymbol{H}$-Feld wird durch die wahren Ströme erzeugt

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = 4\,\pi k_h \boldsymbol{j}_w \ .$$

Die Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ entspricht einer Mittelung über die schleifenartigen Magnetisierungsströme entlang der Materialoberfläche

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} = k_f \boldsymbol{j}_w \ .$$

Die Aussage, dass das $\boldsymbol{B}$-Feld durch beide Stromdichten bestimmt wird, führt somit auf die Verknüpfung

$$\boldsymbol{H} = \frac{k_h}{k_m} \boldsymbol{B} - 4\pi \frac{k_h}{k_f} \boldsymbol{M} \ .$$

Möchte man wie im elektrischen Fall sicher stellen, dass im CGS System alle drei Magnetfelder in den gleichen Einheiten angegeben werden, so setzt man

$$k_{h,\mathrm{CGS}} = \frac{1}{c}$$

und erhält

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M} \ .$$

Im SI System führt die 'rationalisierte' Wahl

$$k_{h,\mathrm{SI}} = \frac{1}{4\pi}$$

auf

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \ .$$

[2] Die Bezeichnung *rationalisiertes* MKSA System nimmt Bezug auf die Elimination der Faktoren $4\,\pi$ in den Grundgleichungen.

Die einfachen Materialgleichungen für linear reagierende, isotrope Medien werden in beiden Einheitensystemen in der Form

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

benutzt, wobei der Vakuumlimes durch

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{\mathrm{CGS}} \\ \mu_{\mathrm{CGS}} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad 1$$

und

$$\varepsilon_{\mathrm{SI}} \longrightarrow \varepsilon_0 \qquad \mu_{\mathrm{SI}} \longrightarrow \mu_0$$

gegeben ist. Die relative Dielektrizitätskonstante und Permeabilität in dem SI System stimmen mit der Dielektrizitätskonstante und Permeabilität in dem CGS System überein

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)_{\mathrm{SI}} = \varepsilon_{\mathrm{CGS}} \qquad \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_{\mathrm{SI}} = \mu_{\mathrm{CGS}} \; .$$

In den folgenden Tabellen sind

- die Koeffizienten

  $$k_e,\, k_m,\, k_f,\, k_d,\, k_h$$

  für die zwei wichtigsten Einheitensysteme, sowie das elektrostatische (electrostatic units - esu) und das elektromagnetische Einheitensystem (electromagnetic units - emu) zusammengestellt (Tab. A.1). Die zugehörigen Zahlenwerte werden in Tab. A.2 aufgeführt.
- Die Tabellen (A.3) und (A.4) enthalten eine Liste der physikalischen Größen, die in der Elektrodynamik eine Rolle spielen. Neben den Maßeinheiten im SI und im CGS System findet man, zur besseren Orientierung, die Formeln, anhand derer diese Größen eingeführt wurden.
- In den Tabellen (A.5) und (A.6) werden die Umrechnungsfaktoren (zwischen dem SI System und dem CGS System) für die physikalischen Größen in den Tabellen (A.3) und (A.4) angegeben. Die Berechnung dieser Faktoren wird zum Teil in den Aufgaben nachvollzogen.

A.2 Tabellen

Tabelle A.1. Definition der Konstanten

Bezeichnung	SI	CGS	esu	emu
k_e	$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$	1	1	c^2
k_d	$\frac{1}{4\pi}$	1	1	1
k_m	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c^2}$	1
k_f	1	$\frac{1}{c}$	1	1
k_h	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{c}$	1	1

Tabelle A.2. Zahlenwerte zu Tab. A.1

Bezeichnung		Wert (SI)			
c	$=$	2.997925	$\cdot$	10^{8}	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
e_0	$=$	1.602192	$\cdot$	10^{-19}	C
ε_0	$=$	8.85418	$\cdot$	10^{-12}	$\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$
μ_0	$=$	4π	$\cdot$	10^{-7}	$\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C}^2}$
$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$	$=$	8.98755	$\cdot$	10^{9}	$\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}^2}$
$\frac{1}{4\pi}$	$=$	7.957747	$\cdot$	10^{-2}	
$\frac{\mu_0}{4\pi}$	$=$	1	$\cdot$	10^{-7}	$\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C}^2}$

$e_{0,\mathrm{CGS}} = 4.803250 \cdot 10^{-10}$ esu

Tabelle A.3. Einheitensysteme: Definition und Dimension physikalischer Größen I

Name			SI	CGS
Ladung	q	$q = r\sqrt{\frac{F}{k_e}}$	C (Coulomb)	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{statcoul} = \mathrm{esu}$
E-Feld	E	$E = \frac{F}{q}$	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{statcoul}} = \frac{\mathrm{statvolt}}{\mathrm{cm}}$
elektr. Fluss	Φ_e	$\Phi_e = \iint \boldsymbol{E}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{f}$	$\frac{\mathrm{kg\,m}^3}{\mathrm{s}^2\mathrm{C}} = \mathrm{V\,m}$	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{statcoul}$
elektr. Dipolmoment	p	$p = 2aq$	$\mathrm{C\,m}$	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{5/2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{statcoul\,cm}$
Potential	V	$V = \int \boldsymbol{E}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{s}$	$\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2\mathrm{C}} = \mathrm{V}$	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{1/2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{statvolt} = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{statcoul}}$
Spannung	U	$U = V_2 - V_1$	V (Volt)	$\mathrm{statvolt}$

Tabelle A.3. Einheitensysteme: Definition und Dimension physikalischer Größen I (Fortsetzung)

Name		Definition	SI		CGS	
Kapazität	C	$C = \dfrac{q}{U}$	$\dfrac{\mathrm{C}^2\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg\,m}^2}$	$= \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}$ (Farad)	cm	
Dielektr. Verschiebung	$\boldsymbol{D}$	$\oint\!\!\oint \boldsymbol{D}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{f} = 4\pi\, k_d q_w$	$\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$		$\dfrac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}}$	$= \dfrac{\mathrm{statvolt}}{\mathrm{cm}}$
Polarisation	$\boldsymbol{P}$	$\oint\!\!\oint \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{f} = q_{\mathrm{pol}}$	$\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$		$\dfrac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}}$	$= \dfrac{\mathrm{statvolt}}{\mathrm{cm}}$
Energiedichte	w_{el}	$w_{\mathrm{el}} = \dfrac{1}{8\pi k_d}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$	$\dfrac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{m}^3}$	$= \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$	$\dfrac{\mathrm{dyn\,cm}}{\mathrm{cm}^3}$	$= \dfrac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^3}$
Strom	i	$i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	$\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$	$= \mathrm{A}$ (Ampère)	$\dfrac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}}{\mathrm{s}^2}$	$= \mathrm{statamp}$
Stromdichte	$\boldsymbol{j}$	$i = \iint \boldsymbol{j}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{f}$	$\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}}$	$= \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	$\dfrac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}^2}$	$= \dfrac{\mathrm{statamp}}{\mathrm{cm}^2}$

Tabelle A.4. Einheitensysteme: Definition und Dimension physikalischer Größen II

Name		Herkunft	SI	CGS
magnetische Induktion	$\boldsymbol{B}$	$\int \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = 4\pi\, i\, k_m$	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C\,s}} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{T}$ (Tesla)	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}} = \mathrm{G}$ (Gauß)
magn. Moment	m	$m = \frac{F \cdot r}{B}$	$\frac{\mathrm{C\,m}^2}{\mathrm{s}} = \mathrm{A\,m}^2$	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{5/2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{G\,cm}^3 = \mathrm{emu}$
Vektorpotential	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$	$\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C\,s}} = \mathrm{T\,m}$	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{1/2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{G\,cm}$
magn. Fluss	Φ_m	$\Phi_m = \iint \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{f}$	$\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{C\,s}} = \mathrm{V\,s} = \mathrm{Wb}$ (Weber)	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{G\,cm}^2 = \mathrm{Mx}$ (Maxwell)
Magnetisierung	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{j}_{\mathrm{M}} = \frac{1}{k_f}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M})$	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m\,s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}} = \mathrm{Oe}$ (Ørstedt)
magn. Feldstärke	$\boldsymbol{H}$	$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = 4\pi k_h \boldsymbol{j}_{\mathrm{w}}$	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m\,s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	$\frac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}} = \mathrm{Oe}$
Induktionskoeffizient	L	$U = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{C}^2} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = \mathrm{H}$ (Henry)	$\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{cm}} = \frac{\mathrm{statvolt\,s}}{\mathrm{statamp}}$
magn. Energiedichte	w_m	$w_m = \frac{k_f}{8\pi\, k_h}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm\,s}^2} = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^3}$
Poyntingvektor	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi k_h}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}^3} = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^2\mathrm{s}}$
Widerstand	R	$U = R \cdot i$	$\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s\,C}^2} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega$ (Ohm)	$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{cm}} = \frac{\mathrm{statvolt}}{\mathrm{statamp}}$
Leistung	P	$P = U\, I$	$\frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}$ (Watt)	$\frac{\mathrm{cm}^2\mathrm{g}}{\mathrm{s}^3}$

Tabelle A.5. Umrechnungsfaktoren I

Name	Bez.	SI		=	Faktor	·	CGS
Ladung	q	$1\,\mathrm{C}$			$\frac{\tilde{c}}{10}$	·	statcoul
E-Feld	E	$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$	$= 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$		$\frac{10^6}{\tilde{c}}$	·	$\frac{\text{statvolt}}{\text{cm}}$
elektr. Fluss	Φ_e	$1\,\mathrm{V\,m}$			$\frac{\tilde{c}}{10}$	·	statcoul
elektr. Dipolmoment	p	$1\,\mathrm{C\,m}$			$10\,\tilde{c}$	·	statcoul cm
Potential	V	$1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}$	$= 1\,\mathrm{V}$ (Volt)		$\frac{10^8}{\tilde{c}}$	·	statvolt
Spannung	U	$1\,\mathrm{V}$			$\frac{10^8}{\tilde{c}}$	·	statvolt
Kapazität	C	$1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$	$= 1\,\mathrm{F}$ (Farad)		$\frac{\tilde{c}^2}{10^9}$	·	cm
Dielektr. Verschiebung	$\boldsymbol{D}$	$1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$			$\frac{4\pi\,\tilde{c}}{10^5}$	·	$\frac{\text{statvolt}}{\text{cm}}$
Polarisation	$\boldsymbol{P}$	$1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$			$\frac{\tilde{c}}{10^5}$	·	$\frac{\text{statvolt}}{\text{cm}}$
Energiedichte	w_{el}	$1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{m}^3}$	$= 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$		10	·	$\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$
Strom	i	$1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$	$= 1\,\mathrm{A}$ (Ampère)		$\frac{\tilde{c}}{10}$	·	statamp
Stromdichte	$\boldsymbol{j}$	$1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}}$	$= 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$		$\frac{\tilde{c}}{10^5}$	·	$\frac{\text{statamp}}{\text{cm}^2}$

$\tilde{c}$ ist der Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit im CSG System

$\tilde{c} = 2.997925 \cdot 10^{10}$

Tabelle A.6. Umrechnungsfaktoren II

Name	Bez.	SI	=	Faktor · CGS
magnetische Induktion	$\boldsymbol{B}$	$1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C\,s}}$	$= 1\,\mathrm{T}$	$10^4 \cdot \mathrm{G}$
magn. Moment	m	$1\,\mathrm{A\,m}^2$		$10^3 \cdot \mathrm{G\,cm}^3 = \mathrm{emu}$
Vektorpotential	$\boldsymbol{A}$	$1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C\,s}}$	$= 1\,\mathrm{T\,m}$	$10^6 \cdot \mathrm{G\,cm}$
magn. Fluss	Φ_m	$1\,\mathrm{V\,s}$	$= 1\,\mathrm{Wb}$	$10^8 \cdot \mathrm{G\,cm}^2 = \mathrm{Mx}$
Magnetisierung	$\boldsymbol{M}$	$1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$		$\frac{\tilde{c}}{10^3} \cdot \mathrm{Oe}$
magn. Feldstärke	$\boldsymbol{H}$	$1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$		$\frac{4\pi}{10^3} \cdot \mathrm{Oe}$
Induktionskoeffizient	L	$1\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}$	$= 1\,\mathrm{H}$	$\frac{10^9}{\tilde{c}^2} \cdot \frac{\mathrm{statvolt\,s}}{\mathrm{statamp}}$
magn. Energiedichte	w_m	$1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$		$10 \cdot \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^3}$
Poyntingvektor	$\boldsymbol{S}$	$1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}}$		$10^3 \cdot \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^2\mathrm{s}}$
Widerstand	R	$1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$	$= 1\,\Omega$	$\frac{10^9}{\tilde{c}^2} \cdot \frac{\mathrm{statvolt}}{\mathrm{statamp}}$
Leistung	P	$1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$	$= 1\,\mathrm{W}$	$10^7 \cdot \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s}}$

$\tilde{c}$ ist der Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit im CSG System

$\tilde{c} = 2.997925 \cdot 10^{10}$

B Formelsammlung: Formeln der Vektoranalysis

In dieser Formelsammlung sind einige Mehrfachprodukte mit Vektoren (B.1), ein Satz von Formeln für die Anwendung des $\boldsymbol{\nabla}$ -Operators auf Produkte von Skalar- und Vektorfunktionen (in formaler und expliziter Schreibweise, B.2), Ausdrücke für die Mehrfachanwendung des $\boldsymbol{\nabla}$ -Operators (B.3) und die vier Differentialoperatoren $\boldsymbol{\nabla}$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot$, $\boldsymbol{\nabla}\times$ und Δ in Kugel- und Zylinderkoordinaten (B.4) zu finden. Weitere Formeln für die Darstellung der vier Differentialoperatoren in krummlinigen, orthogonalen Koordinaten kann man anhand der Mathematischen Ergänzungen, Math.Kap. 5.2, gewinnen. In Math.Kap. 5.2 wird auch die Herleitung der zitierten Formeln für die zwei Koordinatensätze erläutert.

Im Folgenden bezeichnet

$\boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{b}\,,\ \ldots$	Vektoren
$\varphi(\boldsymbol{r})$	eine Skalarfunktion
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,,\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$	Vektorfunktionen.

B.1 Mehrfachprodukte von Vektoren

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} \\
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})
\end{aligned}
$$

B.2 Produktregeln für die Anwendung des $\boldsymbol{\nabla}$ -Operators

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\boldsymbol{A}) &= \varphi(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\boldsymbol{A} \\
\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{A}) &= \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\boldsymbol{A}) &= \varphi(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{\nabla}\varphi\times\boldsymbol{A} \\
\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A}) &= \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\\ \operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}\\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}(\operatorname{div}\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{grad})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{grad})\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

B.3 Zweifache Anwendung von $\boldsymbol{\nabla}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})=0\\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) &= \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0\\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}\\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})-(\operatorname{div}\operatorname{grad})\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

(Die letzte Formel gilt nur für eine Darstellung von $\boldsymbol{A}$ in kartesischen Koordinaten!)

B.4 Differentialoperatoren in Kugel- und Zylinderkoordinaten

Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{\nabla}V=\frac{\partial V}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=&\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r\\ &+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right]\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Delta}V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}$$

Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\,(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = {}& \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\,\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\,\boldsymbol{e}_\varphi \\ & + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\,(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\,\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Delta} V = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

C Winkelfunktionen

Dieser Nachschlageteil des Anhangs unter dem Motto

Kompendium
diverser und nützlicher Winkelfunktionen
so man bei der Lösung der
Laplaceschen Gleichung
als auch der
Schrödingerschen Gleichung
antreffen und vermittelst deren man eine gut
Zahl von Problemen der hohen Physik behende, kurz,
leicht und gleichsam spielend resolvieren und be-
antworten möge

enthält eine Zusammenstellung von oft benutzten Formeln mit den Legendre Polynomen, den Legendrefunktionen und den Kugelflächenfunktionen. Eine Begründung dieser Formeln gibt das Math.Kap. 4.3 der Mathematischen Ergänzungen.

C.1 Legendrepolynome

- Differentialgleichung:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 S_l(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}S_l(x)}{\mathrm{d}x} + l(l+1)S_l(x) = 0$$

$$x = \cos\theta \qquad l = 0,\, 1\, 2,\, \ldots$$

- Fundamentalsystem:

$$S_l(x) \longrightarrow P_l(x) = \sum_{n=0}^{l/2} a_{2n,l}\, x^{2n} \quad l = \text{gerade}$$

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{(l-1)/2} a_{2n+1,l}\, x^{2n+1} \quad l = \text{ungerade}$$

$$Q_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1,l}\, x^{2n+1} \quad l = \text{gerade}$$

$$Q_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n,l}\, x^{2n} \quad l = \text{ungerade}$$

- Rekursionsformel für die Entwicklungskoffizienten:

$$a_{n+2,l} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_{n,l}$$

C.1.1 Eigenschaften der Polynome P_l

- Symmetrie:

$$P_l(x) = (-1)^l P_l(-x)$$

- Polynome niedriger Ordnung, Normierung $P_l(1) = 1$:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3\,x^2 - 1\right)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5\,x^3 - 3\,x\right)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35\,x^4 - 30\,x^2 + 3\right)$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63\,x^5 - 70\,x^3 + 15x\right)$$

- Erzeugende Funktion:

$$\frac{1}{[1 - 2hx + h^2]^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x)$$

- Rekursionsformeln, Auswahl:

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

$$x\frac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P_{l-1}(x)}{\mathrm{d}x} + lP_l(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}P_{l+1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P_{l-1}(x)}{\mathrm{d}x} + (2l+1)P_l(x)$$

- Die Formel von Rodriguez:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left[(x^2-1)^l\right]$$

- Integrale mit Legendre Polynomen, Auswahl:
  Eine Grundformel:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, f(x)\, P_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l\, l!}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}^l f(x)}{\mathrm{d}x^l}\, (x^2-1)^l$$

Einige Spezialfälle:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x)\, P_m(x) = \delta_{l,m} \frac{2}{(2l+1)}$$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^m\, P_l(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & l > m & \\ 2\dfrac{m!}{(m-l)!} \dfrac{(m-l-1)!!}{(m+l+1)!!} & & (m-l)\,\text{gerade} \\ & m \geq l & \\ 0 & & (m-l)\,\text{ungerade} \end{array} \right.$$

$$\int_{0}^{1} \mathrm{d}x\, P_0(x) = 1 \qquad \int_{0}^{1} \mathrm{d}x\, P_1(x) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & l > 0\,,\ \text{gerade} \\ (-1)^{(l-1)/2} \dfrac{(l-2)!!}{2^{l+1)/2}(l+1)/2)!} & l > 1\,,\ \text{ungerade} \end{array} \right.$$

- Legendrereihe:
  $\longrightarrow$ Darstellung einer Funktion $f(x)$ in dem Intervall $[-1, 1]$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \qquad A_l = \frac{(2l+1)}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x)\, \mathrm{d}x$$

C.1.2 Die Funktionen $Q_l(x)$

- Funktionen mit niedriger Ordnung:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

- Rekursionsformeln:
  Die Funktionen Q_l erfüllen die gleichen Rekursionsformeln wie die Polynome P_l, z.B.

$$Q_{l+1}(x) = (2l+1) x Q_l(x) - l Q_{l-1}(x)$$

C.2 Zugeordnete Legendrefunktionen

- Differentialgleichung:

$$(1-x^2) \frac{\mathrm{d}^2 P_l^m(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x \frac{\mathrm{d}P_l^m(x)}{\mathrm{d}x} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right) P_l^m(x) = 0$$

- Fundamentalsystem:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \qquad m \geq 0$$

$$Q_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m Q_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \qquad m \geq 0$$

- Funktionen niedriger Ordnung:

$$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2} = -\sin\theta$$

$$P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2} = -\frac{3}{2}\sin 2\theta$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$P_3^1(x) = -\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = -\frac{3}{8}(\sin\theta + 5\cos 3\theta)$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

$$P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2} = -\frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$$

Außerdem ist:

$$P_l^0(x) = P_l(x)$$

- Rekursionsformeln, Auswahl:

$$(l+1)P_{l+1}^m(x) = (2l+1)[x\,P_l^m(x) - m\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x)] - lP_{l-1}^m(x)$$

$$xP_l^m(x) = P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x)$$

$$(l-m+1)P_{l+1}^m(x) - (2l+1)x\,P_l^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x) = 0$$

- Die Formel von Rodriguez:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left((x^2-1)^l\right)$$

Diese Formel ist für $-l \leq m \leq l$ gültig, doch sind die Funktionen mit $+|m|$ und $-|m|$ linear abhängig. Es gilt die Symmetrierelation

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \qquad m > 0$$

- Ein Integral mit P_l^m:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l^m(x)\, P_{l'}^m(x) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x)\, P_{l'}(x)$$
$$= \delta_{l,l'} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{(2l+1)}$$

Beachte:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l^m(x)\, P_{l'}^{m'}(x) \neq \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} I(l,m)$$

C.3 Kugelflächenfunktionen

- Definition:

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) \equiv Y_{l,m}(\Omega) = \left[\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,m\varphi}$$

mit dem Definitionsbereich

$$0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Beachte: Reelle Form mit

$$P_l^m(\cos\theta)\cos m\,\varphi \quad \text{und} \quad P_l^m(\cos\theta)\cos m\,\varphi\,, \quad m \ge 0$$

möglich

- Spezialfälle:

$$Y_{l,0}(\theta,\varphi) = \left[\frac{(2l+1)}{4\pi}\right]^{1/2} P_l(\cos\theta)$$

$$Y_{l,m}(0,\varphi) = \left[\frac{(2l+1)}{4\pi}\right]^{1/2} \delta_{m,0}$$

- Symmetrierelation:

$$Y_{l,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta,\varphi)$$

Die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) \quad \text{und} \quad Y_{l,-m}(\theta,\varphi)$$

sind linear unabhängig!

- Grundintegral:

$$\iint \mathrm{d}\Omega\, Y_{l,m}^*(\theta,\varphi)Y_{l',m'}(\theta,\varphi) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\;\mathrm{d}\theta\, Y_{l,m}^*(\theta,\varphi)Y_{l',m'}(\theta,\varphi)$$

$$= \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$$

- Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{l,m}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{l,m}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}$$

$$+\, l(l+1)Y_{l,m}(\theta,\varphi) = 0$$

- Funktionen niedriger Ordnung:

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{2,-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \qquad Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad Y_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$$

- Additionstheorem:

$$\begin{aligned} P_l(\cos\alpha) &= \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta,\varphi) Y^*_{l,m}(\theta',\varphi') \\ &= \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\theta,\varphi) Y_{l,m}(\theta',\varphi') \end{aligned}$$

mit dem Winkel α zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$

$$\cos\alpha = \cos(\varphi - \varphi') \sin\theta \sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'$$

Index