Mathematischer Anhang

Wir definieren analog zu

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}, \qquad \text{(A; 1)}$$

$$n^*!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n\, n!. \qquad \text{(A; 2)}$$

Es ist

$$\frac{(2n)!}{n!!} = n^*!! = 2^n\, n!; \quad \frac{(2n+1)!}{n^*!!} = (n+1)!!, \qquad \text{(A; 3, 4)}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!!}{n^*!!}; \quad \binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{n!!}{n^*!!}. \qquad \text{(A; 5, 6)}$$

Da mit $\varphi = 2\pi - \varphi'$

$$\int_\pi^{2\pi} d\varphi = \int_0^\pi d\varphi', \quad \text{also} \quad \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi f(\varphi)\, d\varphi + \int_0^\pi f(2\pi - \varphi')\, d\varphi'$$

ist, so folgt:

Alle Integrale, für die $f(2\pi - \varphi') = -f(\varphi')$ ist, verschwinden in den Grenzen

$$\int_0^{2\pi} \qquad \text{(A; 7)}$$

während für $f(2\pi - \varphi') = +f(\varphi')$ sich ergibt:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 2\int_0^\pi f(\varphi)\, d\varphi. \qquad \text{(A; 8)}$$

Da ferner mit $\varphi = \pi - \varphi'$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi', \quad \text{also} \quad \int_0^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} f(\varphi)\, d\varphi + \int_0^{\pi/2} f(\pi - \varphi')\, d\varphi'$$

ist, so folgt:

Alle Integrale, für die $f(\pi - \varphi') = -f(\varphi')$ ist, verschwinden in den Grenzen

$$\int_0^{\pi} \qquad \text{(A; 9)}$$

während für $f(\pi - \varphi') = + f(\varphi')$ stets

$$\int_0^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} f(\varphi)\, d\varphi. \tag{A; 10}$$

Aus (8) und (9) zusammen folgt dann noch, daß

für $f(\pi - \varphi') = - f(\varphi')$ auch stets $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0$ (A; 11)

ist.

Das Integral

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi$$

verschwindet also sowohl, wenn

$$f(\pi - \varphi) = - f(\varphi),$$

als auch, wenn

$$f(2\pi - \varphi) = - f(\varphi), \tag{A; 12}$$

und: alle Integrale, die für $\int_0^{\pi}$ verschwinden, verschwinden auch für $\int_0^{2\pi}$.

Die Besselsche Funktion erster Art, n-ter Ordnung ist, wenn n ganzzahlig ist, definiert durch

$$J_n(\mathfrak{y}) = \left(\frac{\mathfrak{y}}{2}\right)^n \sum_0^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\left(\frac{\mathfrak{y}}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,(n+\nu)!} \tag{A; 13}$$

(Jahnke-Emde, S. 90).

Es ist

$$J_n(-\mathfrak{y}) = (-1)^n J_n(+\mathfrak{y}), \tag{A; 14}$$

$$\lim_{\mathfrak{y} \to 0} \frac{J_n(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^n} = \frac{1}{n^*!!} = \frac{1}{2^n n!}, \tag{A; 15}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i\mathfrak{y}\cos\varphi}\, e^{in\varphi}\, d\varphi = 2\pi i^n J_n(\mathfrak{y}), \tag{A; 16}$$

$$\int_0^{\pi} e^{i\mathfrak{y}\cos\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi = \pi i^n J_n(\mathfrak{y}), \tag{A; 17}$$

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\mathfrak{y}w} (1 - w^2)^{n - 1/2}\, dw = n!!\, \pi \frac{J_n(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^n} \tag{A; 18}$$

$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1).$$

Es ist (Jahnke-Emde, S. 171)

$$J_n(z) = \Xi \int_0^{2\pi} \cos(z\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\, d\varphi, \qquad (A;\ 19)$$

wo

$$\Xi = \frac{1}{2\pi}\frac{z^n}{n!!} \qquad n!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

und

$$\int_0^{2\pi} \sin(z\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\, d\varphi = 0,$$

so daß

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm iz\cos\varphi}\sin^{2n}\varphi\, d\varphi = 2\pi n!!\,\frac{J_n(z)}{z^n}. \qquad (A;\ 20)$$

Ferner ist wegen (7)

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm iz\cos\varphi}\sin^{2n+1}\varphi\cos^m\varphi\, d\varphi = 0, \qquad (A;\ 21)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm iz\cos\varphi}\cos n\varphi\,\sin m\varphi\, d\varphi = 0. \qquad (A;\ 22)$$

Durch fortgesetzte partielle Integration zeigt man leicht, daß

$$\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^{n+2m+1} J_n(\mathfrak{y}')\, d\mathfrak{y}'$$

$$= \mathfrak{y}^{n+2m+1}\sum_0^m (-2)^\nu \nu!\binom{m}{\nu}\frac{J_{n+\nu+1}(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^\nu}. \qquad (A;\ 23)$$

Also speziell:

$$\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^{2m+1} J_0(\mathfrak{y}')\, d\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}^{2m+1}\sum_0^m (-2)^\nu \nu!\binom{m}{\nu}\frac{J_{\nu+1}(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^\nu}. \qquad (A;\ 24)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}' J_0(\mathfrak{y}')\, d\mathfrak{y}' = \mathfrak{y} J_1(\mathfrak{y})\\
&\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^3 J_0(\mathfrak{y}')\, d\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}^3\left(J_1(\mathfrak{y}) - 2\frac{J_2(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}}\right)\\
&\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^5 J_0(\mathfrak{y}')\, d\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}^5\left(J_1(\mathfrak{y}) - 4\frac{J_2(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}} + 8\frac{J_3(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^2}\right)\\
&\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^7 J_0(\mathfrak{y}')\, d\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}^7\left(J_1(\mathfrak{y}) - 6\frac{J_2(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}} + 24\frac{J_3(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^2} - 48\frac{J_4(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^3}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (A;\ 25)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^2 J_1(\mathfrak{y}')\,d\mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}^2 J_2(\mathfrak{y}) \\
\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^4 J_1(\mathfrak{y}')\,d\mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}^4 \left(J_2(\mathfrak{y}) - 2\frac{J_3(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}}\right) \\
\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^6 J_1(\mathfrak{y}')\,d\mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}^6 \left(J_2(\mathfrak{y}) - 4\frac{J_3(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}} + 8\frac{J_4(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^2}\right) \\
\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^8 J_1(\mathfrak{y}')\,d\mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}^8 \left(J_2(\mathfrak{y}) - 6\frac{J_3(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}} + 24\frac{J_4(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^2} - 48\frac{J_5(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^3}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (A;\ 26)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^3 J_2(\mathfrak{y}')\,d\mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}^3 J_3(\mathfrak{y}) \\
\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^5 J_2(\mathfrak{y}')\,d\mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}^5 \left(J_3(\mathfrak{y}) - 2\frac{J_4(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}}\right) \\
\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^7 J_2(\mathfrak{y}')\,d\mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}^7 \left(J_3(\mathfrak{y}) - 4\frac{J_4(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}} + 8\frac{J_5(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^2}\right) \\
\int_0^{\mathfrak{y}} \mathfrak{y}'^9 J_2(\mathfrak{y}')\,d\mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}^9 \left(J_3(\mathfrak{y}) - 6\frac{J_4(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}} + 24\frac{J_5(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^2} - 48\frac{J_6(\mathfrak{y})}{\mathfrak{y}^3}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (A;\ 27)$$

Wir erwähnen noch besonders, daß die Zahlenkoeffizienten nur von m abhängen, von n also unabhängig sind.

Wir definieren

$$\left.\begin{aligned}
e_n(z) &= \sum_0^n \frac{z^\nu}{\nu!}; \qquad e_\infty(z) = e^z, \\
\hat{e}_n(z) &= \sum_n^\infty \frac{z^\nu}{\nu!}; \qquad \hat{e}_0(z) = e^z.
\end{aligned}\right\} \quad (A;\ 28)$$

Dann ist

$$e_\infty(z) = e^z = e_n(z) + \hat{e}_{n+1}(z).$$

Es sei

$$\hat{e}_n(\pm i z) = c_n(z) \pm i s_n(z) = \sum_0^n \frac{(i z)^\nu}{\nu!},$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} c_n(z) &= \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}; \qquad c_\infty(z) = \cos z, \\ s_n(z) &= \sum_{0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}; \quad s_\infty(z) = \sin z, \end{aligned}\right\} \tag{A; 29}$$

worin $[x]$ = größte ganze Zahl $\leqq x$ bedeutet. Wir definieren weiter

$$\cos z - c_n(z) = c_\infty(z) - c_n(z) = \hat{c}_{n+1}(z),$$
$$\sin z - s_n(z) = s_\infty(z) - s_n(z) = \hat{s}_{n+1}(z),$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} \hat{c}_n(z) &= \sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}; \qquad \hat{c}_0(z) = \cos z, \\ \hat{s}_n(z) &= \sum_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}; \quad \hat{s}_0(z) = \sin z. \end{aligned}\right\} \tag{A; 30}$$

Dann ist

$$\hat{e}_n(\pm iz) = \hat{c}_n(z) \pm i\,\hat{s}_n(z) = \sum_{n}^{\infty} \frac{(iz)^\nu}{\nu!},$$
$$e^{\pm iz} = e_n(\pm iz) + \hat{e}_{n+1}(\pm iz).$$

Es sei

$$\frac{1}{z^n}\,\hat{e}_n(z) = \frac{1}{z^n}\sum_{n}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!} = \sum_{0}^{\infty}\frac{z^\nu}{(n+\nu)!} = \hat{E}_n(z)$$

und

$$\hat{E}_n(\pm iz) = \hat{C}_n(z) \pm i\,\hat{S}_n(z),$$

so daß

$$\hat{C}_n(z) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(n+2\nu)!} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{\hat{c}_n(z)}{z^n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\[2ex] (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{\hat{s}_n(z)}{z^n} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\hat{S}_n(z) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(n+2\nu+1)!} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{\hat{s}_n(z)}{z^n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\[2ex] (-1)^{\frac{n+1}{2}} \dfrac{\hat{c}_n(z)}{z^n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{A; 31}$$

Es ist

$$\hat{S}_n(z) = z\,\hat{C}_n(z); \quad \hat{C}_n(0) = \frac{1}{n!}; \quad \hat{S}_n(0) = 0. \tag{A; 32}$$

Ausführlich geschrieben ist

$$\left.\begin{array}{rcl} & \hat{C}_0 = \hat{c}_0 & = \cos z \\ \hat{S}_0 = & z\,\hat{C}_1 = \hat{s}_0 = \hat{s}_1 & = \sin z \\ -z\,\hat{S}_1 = & -z^2\hat{C}_2 = \hat{c}_1 = \hat{c}_2 & = \cos z - 1 \\ -z^2\hat{S}_2 = & -z^3\hat{C}_3 = \hat{s}_2 = \hat{s}_3 & = \sin z - z \\ z^3\hat{S}_3 = & z^4\hat{C}_4 = \hat{c}_3 = \hat{c}_4 & = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2!} \\ z^4\hat{S}_4 = & z^5\hat{C}_5 = \hat{s}_4 = \hat{s} & = \sin z - z + \frac{z^3}{3!} \\ -z^5\hat{S}_5 = & -z^6\hat{C}_6 = \hat{c}_5 = \hat{c}_6 & = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \end{array}\right\} \quad (A;\ 33)$$

$$c_0 = c_1 = 1;\quad c_2 = c_3 = 1 - \frac{z^2}{2!};\quad c_3 = c_4 = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!};\ \cdots$$

$$s_0 = 0;\ s_1 = s_2 = z;\quad s_3 = s_4 = z - \frac{z^3}{3!};$$

$$s_5 = s_6 = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!};\ \cdots, \qquad (A;\ 34)$$

wo bei $\hat{C}_n$, $\hat{S}_n$, $\hat{c}_n$, $\hat{s}_n$, c_n, s_n das Argument z zu ergänzen ist.

Mit diesen Definitionen ergibt sich:

$$\int_0^z e^{-i\zeta}\zeta^n\,d\zeta = (-i)^{n+1}\,n!\,\{1 - e^{-iz}\,e_n(+iz)\} \qquad (A;\ 35)$$

$$= (-i)^{n+1}\,n!\;e^{-iz}\,\hat{e}_{n+1}(+iz) \qquad (A;\ 36)$$

$$= -(-i)^n \cdot n!\,\{[\hat{c}_{n+1}(z)\cdot\sin z - \hat{s}_{n+1}(z)\cdot\cos z] + i\,[\hat{c}_{n+1}(z)\cdot\cos z + \hat{s}_{n+1}(z)\cdot\sin z]\} \qquad (A;\ 37)$$

$$= (-i)^n \cdot n!\,\{[c_n(z)\cdot\sin z - s_n(z)\cdot\cos z] - i\,[1 - c_n(z)\cdot\cos z - s_n(z)\cdot\sin z]\} \qquad (A;\ 38)$$

$$= n!\,z^{n+1}\,\{[\hat{C}_{n+1}(z)\cdot\cos z + \hat{S}_{n+1}(z)\cdot\sin z] - i\,[\hat{C}_{n+1}(z)\cdot\sin z - \hat{S}_{n+1}(z)\cdot\cos z]\}. \qquad (A;\ 39)$$

Es ist noch

$$\left.\begin{array}{l} n!\cdot c_n(z) = \displaystyle\sum_0^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{n}{n-2\nu}(n-2\nu)!\,z^{2\nu}, \\ n!\cdot s_n(z) = \displaystyle\sum_0^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{n}{n-2\nu-1}(n-2\nu-1)!\,z^{2\nu+1}, \end{array}\right\} \quad (A;\ 40)$$

wo

$$\binom{n}{m} m! = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Es ist

$$\int_0^z e^{i\zeta^2}\zeta^{2n}\,d\zeta = \frac{n!!}{2^n}\,i^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[C_u\left(z\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)+i\,S_u\left(z\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right] + \frac{n!!}{2^{n+1}}\,i^{n-1}\frac{e^{iz^2}}{z}f_n(-2iz^2), \qquad \text{(A; 41)}$$

$$f_n(z) = \sum_1^n \frac{z^\nu}{\nu!!};\quad f_0(z) = 0 \quad \nu!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1),$$

$$\nu!! = \frac{(2\nu)!}{2^\nu\,\nu!}$$

$$f_n(iz) = g_n(z) + i\,h_n(z), \qquad \text{(A; 42)}$$

$$\left.\begin{aligned} g_n(z) &= \sum_1^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!!}; \qquad g_0(z) = 0,\\ h_n(z) &= \sum_0^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!!}; \quad h_0(z) = 0,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A; 43)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^z e^{i\zeta^2}\zeta^{2n}\,d\zeta\\ &= \frac{n!!}{2^n}\,i^n\left\{\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,C_u\left(z\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)+\sin z^2\cdot g_n(2z^2)-\cos z^2\cdot h_n(2z^2)\right]\right.\\ &\left.\quad + i\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,S_u\left(z\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)-\cos z^2\cdot g_n(2z^2)-\sin z^2\cdot h_n(2z^2)\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A; 44)}$$

Hier und in (41) sind S_u und C_u die Fresnelschen Integrale

$$C_u(s) = \int_0^s \cos\frac{\pi}{2}u^2\,du;\quad S_u(s) = \int_0^s \sin\frac{\pi}{2}u^2\,du. \qquad \text{(A; 45)}$$

Da

$$\int_0^z e^{i\zeta^2}\zeta^{2n+1}\,d\zeta = \frac{1}{2}\int_0^{z^2} e^{i\zeta}\zeta^n\,d\zeta, \qquad \text{(A; 46)}$$

läßt sich

$$\int_0^z e^{i\zeta^2}\zeta^{2n+1}\,d\zeta$$

nach (35) u. f. auswerten!

Sach- und Namenverzeichnis

Auf den Seiten 164, 207 und 230 wurden Arbeiten des Verfassers zitiert, die bei Drucklegung dieses Buches noch nicht erschienen sind, sondern erst in Korrektur vorliegen. Es handelt sich um die Arbeiten:

Seite 164: Zur sphärischen Aberration optischer Systeme.

Seite 207: Zur wellentheoretischen Behandlung des Astigmatismus optischer Systeme [1]).

Seite 230: Zur wellen- und beugungstheoretischen Behandlung des Komafehlers optischer Systeme.

Die Arbeiten erscheinen Anfang 1931 in der Zeitschrift für Instrumentenkunde.

[1]) Inzwischen erschienen: Zeitschr. f. Instrkde. **51**, 19, 1931.

44. **Elektrobiologie.** Die Lehre von den elektrischen Vorgängen im Organismus auf moderner Grundlage dargestellt. Von Prof. Dr. Julius **Bernstein.** Mit 62 Abbildungen. Geh. 6,50 RM, geb. 8,— RM

45. **Die Physik der Röntgenstrahlen.** Von Dr. Robert **Pohl.** Vergriffen.

46. **Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik.** I. Band. Von Prof. Dr. F. F. **Martens.** Vergriffen.

47. **Mimikry und verwandte Erscheinungen.** Von Prof. Dr. Arnold **Jacobi.** Mit 31 zum Teil farbigen Abbildungen. Geh. 8,50 RM, geb. 10,— RM

48. **Die Entwickelung des Temperaturbegriffs im Laufe der Zeiten sowie dessen Zusammenhang mit den wechselnden Vorstellungen von der Natur der Wärme.** Von Kirstine **Meyer.** Aus dem Dänischen übersetzt von Irmgard Kolde und mit einem Vorwort von E. Wiedemann. Mit 21 Abbildungen. Geh. 4,50 RM, geb. 6,— RM

49. **Das Leuchten der Gase und Dämpfe mit besonderer Berücksichtigung der Gesetzmäßigkeiten in Spektren.** Von Prof. Dr. H. **Konen.** Mit 33 Abbildungen im Text und einer Tafel. Geh. 13,— RM

50. **Die Ökologie der Pflanzen.** Von Prof. Dr. O. **Drude.** Mit 80 eingedruckten Abbildungen. Geh. 10,— RM, geb. 12,— RM

51. **Der heutige Stand der Synthese von Pflanzenalkaloiden.** Von Dr. Hugo **Bauer.** Geh. 4,50 RM, geb. 6,— RM

52. **Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen.** Von Dr. G. L. **de Haas-Lorentz.** Von der Verfasserin ins Deutsche übersetzt. Geh. 3,50 RM

53. **Die tierische Immunität.** Von Prof. Dr. Werner **Rosenthal.** Mit einer Abbildung im Text. Geh. 8,— RM, geb. 10,— RM

54. **Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume.** Geometrie, Anschauung und Erfahrung. 1. Teil: Das Problem der Außenwelt. Von Prof. Dr. E. **Study.** 2. umgearbeitete Auflage. Geh. 3,50 RM, geb. 5,—RM

55. **Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik.** II. Band: Dynamomaschinen, Transformatoren und Apparate für drahtlose Telegraphie. Von Dr. F. F. **Martens.** Mit 289 Abbild. Geh. 15,— RM, geb. 17,25 RM

56. **Die Analyse des Zufalls.** Von Prof. Dr. H. E. **Timerding.** Mit 10 Abbildungen. Geh. 5,50 RM

57. **Allgemeine Physiologie des Todes.** Von Dr. Alexander **Lipschütz.** Mit 38 Abbildungen. Geh. 6,— RM, geb. 7,50 RM

58. **Parasitismus im Tierreich.** Von Prof. Dr. Gräfin **von Linden.** Mit 102 Abbildungen und 7 Tafeln. Geh. 8,— RM, geb. 9,75 RM

59. **Die Entstehung der deutschen Kalisalzlager.** Von Prof. Dr. Ernst Jänecke. 2. veränderte Aufl. Mit 30 Abbild. Geh. 4,— RM, geb. 5,50 RM

60. **Wind- und Wasserhosen in Europa.** Von Prof. Dr. Alfred **Wegener.** Mit 1 Titelbild und 85 Abbildungen. Geh. 10,— RM, geb. 12,— RM

61. **Geologischer Bau und Landschaftsbild.** Von Prof. Dr. Karl **Sapper.** 2. Auflage. Mit 15 Abbildungen. Geh. 8,— RM, geb. 9,75 RM

62. **Die Referenzflächen des Himmels und der Gestirne.** Von Dr. Aloys **Müller.** Mit 20 Abbildungen. Geh. 5,50 RM, geb. 7,— RM

63. **Physik der Sonnen- und Himmelsstrahlung.** Von Prof. Dr. C. **Dorno.** Vergriffen.

64. **Optische Umkehrerscheinungen (Waldensche Umkehrung).** Von Prof. Dr. P. **Walden.** Mit 6 Abbildungen. Geh. 7,— RM, geb. 8,50 RM