9. **Ist $\mathfrak{m}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und $\mathfrak{d}$ der größte gemeinschaftliche Teiler der beiden Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so ist**

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{a}', \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{d}\mathfrak{b}', \quad \mathfrak{m}\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{m} = \mathfrak{d}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\mathfrak{a}',$$

wo $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ relative Primideale bedeuten. Ist ferner $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ teilbar durch $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{c}$ teilbar durch $\mathfrak{a}'$.

Denn weil $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{d}$ teilbar sind, so kann man (nach 6.) $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}\mathfrak{b}'$ setzen; bedeutet nun $\mathfrak{d}'$ den größten gemeinschaftlichen Teiler der Ideale $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, so ist (nach § 170, 1.) das Produkt $\mathfrak{d}\mathfrak{d}'$ ein gemeinschaftlicher Teiler von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, also auch ein Teiler von $\mathfrak{d}$, woraus (nach 6.) $\mathfrak{d}' = \mathfrak{o}$ folgt; mithin sind $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ relative Primideale. Ist nun $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ teilbar durch $\mathfrak{a}$, also $\mathfrak{d}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}$ teilbar durch $\mathfrak{d}\mathfrak{a}'$, so muß (nach 6.) $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}$, mithin (nach § 171, 5.) auch in $\mathfrak{c}$ aufgehen. Hieraus folgen sofort die Behauptungen über $\mathfrak{m}$; da nämlich $\mathfrak{m}$ teilbar durch $\mathfrak{b}$, also (nach 6.) von der Form $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, zugleich aber auch teilbar durch $\mathfrak{a}$ ist, so ist $\mathfrak{c}$ teilbar durch $\mathfrak{a}'$, also $\mathfrak{m}$ teilbar durch $\mathfrak{b}\mathfrak{a}'$ (nach § 170, 1.); da aber umgekehrt dieses letztere Ideal $\mathfrak{b}\mathfrak{a}' = \mathfrak{d}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}\mathfrak{b}'$ ein gemeinschaftliches Vielfaches von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist, so muß es durch $\mathfrak{m}$ teilbar und folglich $= \mathfrak{m}$ sein, was zu beweisen war.

Erläuterungen zu den vorstehenden Abhandlungen XLVI bis XLIX

Im vorangehenden ist das „Elfte Supplement" in den verschiedenen Fassungen gegeben, vollständig in der letzten, während von den früheren nur jeweils das dort nicht Übernommene gebracht wurde. Es zeigt sich, daß die Entwicklungen zur analytischen Zahlentheorie — Dedekindsche ζ-Funktion, transzendente Bestimmung der Klassenzahl — fast unverändert in alle Auflagen übernommen wurden, ebenso die Theorie der Einheiten. Dagegen hat das, was als Dedekinds ureigene Schöpfung zu bezeichnen ist, Körpertheorie und Idealtheorie, von Auflage zu Auflage neue Formen angenommen.

Die erste Begründung der Körpertheorie (in der 2. Auflage, XLVII) ruht vollständig auf hyperkomplexer Grundlage, einer Grundlage, die Dedekind später verlassen hat, weil sie für die hier vorliegenden Zwecke entbehrlich war, wohl auch um das Verständnis zu erleichtern; die hyperkomplexe Theorie war noch sehr kompliziert und formal. Die hyperkomplexe Auffassung, deren Wichtigkeit in neuester Zeit immer mehr hervortritt, steht aber auch hinter den späteren Fassungen; sie findet sich wieder ziemlich stark in Dedekind-Weber (vgl. die Erläuterungen zu XVIII). Die weiteren hyperkomplexen Arbeiten schließen direkt an die ursprüngliche Begründung der Körpertheorie an (vgl. die Erläuterungen zu XX).

Die ausführliche Entwicklung der Galoisschen Theorie in der heutigen Form findet sich erst in der 4. Auflage (XLVI), Andeutungen davon schon in der ersten Begründung der Körpertheorie (vgl. Anm. *) S. 228), weiter ausgeführte in den folgenden Darstellungen. Dedekind geht aus von der Betrachtung der Iso-

morphismen beliebiger Körper und ihrer Zusammensetzung, Betrachtungen, die erst in neuester Zeit wieder aufgenommen wurden; durch Spezialisierung auf Galoissche Körper kommt er zur Automorphismengruppe. Diese Auffassung der Galoisschen Gruppe als Automorphismengruppe ist einer der Ausgangspunkte in der neueren Entwicklung der Algebra geworden; Dedekind hat sie schon in seinen Göttinger Vorlesungen 1857/58 entwickelt (vgl. Anm. *) S. 52). Dabei arbeitet Dedekind bei dem Fortsetzungssatz der Isomorphismen ohne Benutzung eines primitiven Elements, ein Umstand, der ihm die Übertragung auf unendliche Körper ermöglichte (XXXI); auch das ist erst in neuester Zeit allgemein in die Algebra eingedrungen.

Die Entwicklung der Idealtheorie läuft ganz ähnlich wie die der Körpertheorie; die ersten Fassungen sind allgemeiner, aber noch sehr kompliziert. Die erste Begründung der 2. Auflage (XLVII) spaltet den Zerlegungssatz in zwei Teile: das Ideal wird als kl. gem. Vielf. (Durchschnitt) von symbolischen Primidealpotenzen dargestellt; erst dann wird der Produktbegriff eingeführt und zu der üblichen Zerlegungsform übergegangen. Dabei wird aber schon bei der Durchschnittsdarstellung benutzt, daß es sich um die Hauptordnung handelt; die ganze Abgeschlossenheit wird wesentlich herangezogen.

Die 3. Auflage enthält ein Stück allgemeine Idealtheorie, die eindeutige Zerlegung der Ideale einer Ordnung in Primärideale (einartige Ideale). Der ausgeführte Beweis fand sich im Nachlaß mit dem Vermerk „für die dritte Auflage kassiert, doch wichtig“ und ist jetzt an der betreffenden Stelle wieder eingefügt (XLIX). Daß nur in der Hauptordnung die ausnahmslose Darstellung der Primärideale als Potenzen von Primidealen gilt, ist dort (XLIX, § 172) klar ausgesprochen, ebenso, daß nur in der Hauptordnung ausnahmslos aus Teilbarkeit Produktdarstellung folgt; auch auf die Bedeutung der allgemeineren Idealtheorie ist hingewiesen. Bis auf diese Zufügungen ist der Aufbau aus der französischen Darstellung (XLVIII) übernommen, die im übrigen stärker als die übrigen Fassungen durch zahlreich eingefügte Beispiele den Charakter einer elementaren Einführung trägt.

Die 4. Auflage (XLVI) steht auf neuer Grundlage: sie stellt die Gruppeneigenschaft der ganzen und gebrochenen Ideale in den Vordergrund, indem auf Grund der ganzen Abgeschlossenheit — formal eingekleidet in einen allgemeinen Modulsatz — gezeigt wird, daß jedes Ideal ein eigentlicher (umkehrbarer) Modul ist. Diese Auffassung wollte Dedekind in einer nicht mehr zur Ausführung gekommenen 5. Auflage noch unterstreichen, dadurch, daß er von vornherein ganze und gebrochene Ideale seinen Definitionen zugrunde legte. Im übrigen plante er nach den vorgefundenen Notizen keine wesentliche Änderung des 11. Supplements, nur ein noch etwas stärkeres Hervorheben der formalen Modulidentitäten, im Anschluß an XXX.

Über die axiomatische Begründung der Idealtheorie, die überall durch Dedekindsche Gedankengänge beeinflußt ist, ist in den Erläuterungen zu XXV berichtet; die Begriffsbildungen des 11. Supplements durchziehen heute die ganze abstrakte Algebra.