Lösungshinweise

1. Wir denken uns die Frauen Leipzigs in Klassen eingeteilt, und zwar nach der Haaranzahl. Da es in Leipzig mehr als 120 000 Frauen gibt, ist die Existenz von Frauen mit gleicher Haaranzahl nach dem Schubfachprinzip bewiesen.

2. Angenommen, es wurde eine „6" gewürfelt. Die insgesamt $2a$ Schritte kann man dann wie folgt einteilen: 18 Schritte (der erste auf Feld 93) bis zum Erreichen des Blumenkopfes (Feld 82), $a-18$ Schritte entgegen dem Uhrzeigersinn, $a-18$ Schritte im Uhrzeigersinn (man ist dann beinahe wieder bei Feld 82, nämlich bei Feld 16), 18 weitere Schritte in Uhrzeigerrichtung (Feld 89). Beim Würfeln einer „6" wird also unabhängig von a stets Feld 89 erreicht.
Entsprechend kommt man bei jeder Augenzahl zu einem ganz bestimmten Feld. Die sechs Seitenzahlen sind unter den acht „roten" von Abb. 9.

3. Wegen

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2} && >\frac{1}{2},\\
&\frac{1}{3}+\frac{1}{4} && >\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\\
&\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} && >\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

usw., können wir immer wieder aufeinanderfolgende Summanden zusammenfassen, deren Summe größer als $\frac{1}{2}$ ist.

4. Bei sehr genauem Zeichnen und Schneiden stellen wir fest, daß die „Diagonale" des Rechtecks gar keine Gerade ist (der Strahlensatz bestätigt dies), daß sich die beiden Hälften des Rechtecks geringfügig überlappen. Im zweiten Fall bleibt zwischen den Hälften eine Lücke. Beides beruht auf der Beziehung

$$F_{n+1}\cdot F_{n-1}=F_n^2+(-1)^n, \quad n=2,3,\ldots,$$

die Sie mittels vollständiger Induktion bestätigen können.

5. Die Knoten werden fast wie in der Aufgabe „Wolf, Ziege, Kohlkopf" gewählt. Sie beschreiben stets die beiden Anzahlen der Katzen bzw. Hunde am Ausgangsufer. Außerdem wird unterschieden, ob sich das Boot gerade dort befindet oder nicht. Die unzulässigen Zustände werden gestrichen und die Nachbarschaftsbeziehungen eingezeichnet. Dann erhält man den Graphen von Abb. 75. (Einer der gesuchten Wege ist bereits rot markiert.)

6. Wir müssen untersuchen, ob der Graph in Abb. 22 eben ist oder nicht. Angenommen, er wäre eben und wir hätten eine entsprechende Darstellung gefunden, dann stellen wir uns die Flä-

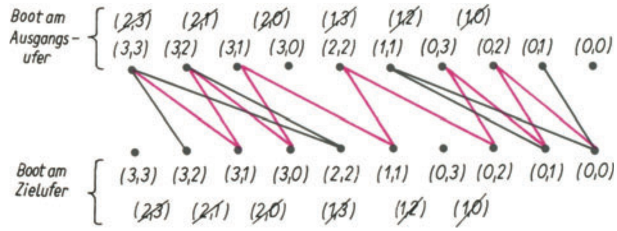

Abb. 75

chen als Länder und die Kanten als deren Grenzen vor. Wegen $e=6$, $k=9$ ist nach der Eulerschen Polyederformel $f=k+2-e=5$. Wenn nun jedes Land an jeder seiner Grenzen genau einen Posten aufstellt, ist deren Gesamtzahl $p=2k=18$. Andererseits hat jedes Land mindestens 4 Grenzen (da zwischen den Häusern bzw. Werken keine Leitungen verlaufen). Also ist $p\geqq 4f=20$. Aus diesem Widerspruch folgt, daß der Graph nicht eben sein kann.

7. An jeder Ecke stellen wir die Anzahl aller Grenzen fest, die von ihr ausgehen. Dann bilden wir die Summe dieser Anzahlen. Nun machen wir noch einmal dasselbe, wobei wir aber nur Grenzen berücksichtigen, die je zwei Ecken miteinander verbinden – jede solche Grenze wird dabei zweimal gezählt. Beide Summen sind gerade. Ihre Differenz ergibt genau die Anzahl der unbeschränkten Grenzen. Sie ist folglich ebenfalls gerade.

8. Die Primzahlzerlegung von 900 lautet:

$$900=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5.$$

Stellen Sie sich eine Tabelle zusammen, in der alle Möglichkeiten für die drei verschiedenen Faktoren von 900 auftreten. Gehen Sie nun so vor: Franziska kennt die drei Zahlen nach der ersten Frage nicht; streichen Sie also jene Varianten, die ihr eine sofortige Entscheidung ermöglicht hätten, z.B. $900=3\cdot 4\cdot 75$.
Die zweite Frage ist an Katja gerichtet. Auch sie kennt die Zahlen noch nicht; folglich streichen Sie nun alle Varianten, die Katja eine Entscheidung nach dieser Frage ermöglicht hätten, z.B. $900=2\cdot 5\cdot 90$.
So verfahren Sie noch zweimal. Nun kennt aber Franziska die drei Zahlen. Suchen Sie sich also aus dem Rest der Tabelle diejenige Zerlegung von 900 aus, mit der Franziska jetzt auf die beiden anderen Faktoren schließen kann. Sie erhalten die Lösung: $900=3\cdot 10\cdot 30$.

9. Bezeichnen wir die beiden gesuchten Zahlen mit x und y, so muß $xy+x+y=79$ gelten. Wir erhalten dafür die in Tab. 11 angegebenen fünf Lösungsmöglichkeiten.

Tab. 11

x	0	1	3	4	7
y	79	39	19	15	9

10. Die Zahl der Pferde sei x und die der Ochsen y. Dann muß $31x + 21y = 1\,770$ gelten. Die möglichen Anzahlen sind in Tab. 12 angegeben.

Tab. 12

x	9	30	51
y	71	40	9

11. In eine Ecke gelangt die Kugel nur, wenn sie auf einer der Linien lag, die von den Ecken im Winkel von 45° zu den anliegenden Seiten ausgehen, und von dort in Richtung dieser Linie gestoßen wird. In allen anderen Fällen kehrt sie nach sechs Reflexionen wieder an den Ausgangspunkt zurück. Man kann das z. B. in Abb. 76 verfolgen, wo an Stelle einer Reflexion die Kugel ihren Weg geradlinig auf einer stets an der Auftreffseite gespiegelten Fläche fortsetzt.

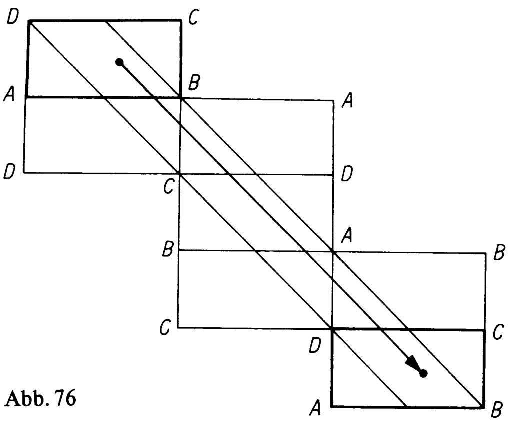

Abb. 76

12. Ein Flachwürfel hat 4 Ecken. Grund- und Deckfläche eines dreidimensionalen Würfels sind Flachwürfel, die keine gemeinsamen Ecken haben; die Ecken der Seitenflächen gehören entweder zur Grund- oder Deckfläche. Also hat ein Würfel $2 \cdot 4 = 8$ Ecken. Analog erhält man, daß ein Hyperwürfel $2 \cdot 8 = 16$ Ecken hat.
13. Steht vor einer Spiegelung auf einem Feld F eine Dame D_1 und danach eine Dame D_2, dann konnten sich D_1 und D_2 vor der Spiegelung gegenseitig schlagen. Die Ausnahme davon, daß F Diagonalfeld ist und an dieser Diagonale gespiegelt wird, kann nur für eine Dame gelten.
14. Siehe Abb. 77.

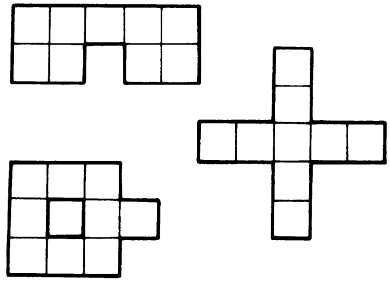

Abb. 77

15. Das regelmäßige Polygon mit n Seiten kann man sich als unregelmäßiges Polygon vorstellen, indem man eine Seite noch einmal halbiert und jede Hälfte als Seite zählt. Damit ist klar, daß das Polygon mit n Seiten den kleineren Flächeninhalt hat.
16. Rot muß mit c3 beginnen. Auf a4 oder e2 (diese Züge sind wegen der Symmetrie des Brettes gleichwertig) muß Rot b2 bzw. d4 antworten. Der Zug b3 muß mit b4 beantwortet werden und umgekehrt (analog d3 mit d4 und umgekehrt). Auf alle anderen Züge von Schwarz spielt Rot im zweiten Zug a4 (oder e2). Die beste Verteidigung von Schwarz besteht in a4 und nachfolgendem e2. Dann ist Rot zu b2 und d4 genötigt, und zum Ausfüllen der Lücken zwischen seinen Steinen sind noch vier weitere Züge erforderlich.
17. Es werden $n^2 - n + 1$ rote und $n^2 - n$ schwarze Brücken benötigt (zumindest theoretisch, im praktischen Spiel kommt man mit weniger aus).
18. $3 \cdot 2 \cdot 1$ Stellungen, davon 3 in die Grundstellung überführbar.
19. Bei Wanderung des Leerfeldes nach oben oder unten ändert sich die Anzahl „verkehrter" Paare um eine gerade Zahl. Der Unmöglichkeitssatz gilt also entsprechend für das 3×3-Feld. Er gilt sogar für alle $n \times n$-Felder.
20. Es gibt die Möglichkeiten von Abb. 78 mit drei Schranken (zwei davon sind jeweils Spiegelbilder voneinander) sowie diejenigen mit zwei bzw. einer, die daraus durch Weglassen von Schranken hervorgehen.

Abb. 78

21. $K = (VM)^4 = VOU^{-1}LOU^{-1}HOU^{-1}ROU^{-1}$.
22. Da sowohl Peter als auch Karin einen von 3 möglichen Wegen auswählen, gibt es insgesamt $m = 3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten. Davon sind diejenigen für das Ereignis E = „Begegnung" günstig, bei denen sich beide für denselben Weg entscheiden, also $g = 3$. Somit gilt $P(E) = \frac{g}{m} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
23. Um mit jeder Wägung möglichst nahe an die maximale Informationsmenge von 1,58 bit heranzukommen, muß man $P(L)$, $P(R)$, $P(G) \approx \frac{1}{3}$ anstreben und dazu die Menge der jeweils „verdächtigen" Kugeln so gut wie möglich dritteln. Deshalb werden

bei der ersten Wägung auf jede Schale sieben Kugeln gelegt, während sieben als Rest bleiben. Nach der Wägung sind nun nur noch sieben Kugeln „verdächtig“. Von diesen legt man bei der zweiten Wägung je zwei auf jede Schale, drei bleiben als Rest. Von den dann noch „verdächtigen“ zwei bzw. drei Kugeln legt man bei der dritten Wägung je eine auf jede Schale, dabei bleibt evtl. eine Kugel übrig. Auf jeden Fall liefert aber die dritte Wägung die falsche Kugel. Es kann sogar vorkommen, daß die falsche Kugel kein einziges Mal auf der Waage gelegen hat!

24. Es sind 6 (12, n) Mischvorgänge notwendig.

Literatur

[1] AHRENS, W.: Mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2., verm. u. verb. Aufl., Bd. 1, 2. Leipzig, Berlin: Teubner-Verlag 1910, 1918.

[2] Autorenkollektiv: Mathematisches Mosaik (Übers. a. d. Ung.). Hrsg. d. ungar. Bd.: HÓDI, E. 2. Aufl. Leipzig, Jena, Berlin: Urania-Verlag 1980.

[3] Autorenkollektiv: Kleine Enzyklopädie Mathematik. Hrsg.: GELLERT, W., u. a. 13. Aufl. Leipzig: Bibliographisches Institut 1986.

[4] BECKER, J.: Über die Anzahl der verschiedenen Gesichter von Rubiks Cube. Praxis der Mathematik **23** (1981) 9.

[5] BERGE, C.; GHOUILA-HOURI, A.: Programme, Spiele, Transportnetze (Übers. a. d. Franz.). 2., verb. Aufl. Leipzig: Teubner-Verlag 1969.

[6] BIZÁM, G.; HERCZEG, J.: Logik macht Spaß (Übers. a. d. Ung.). Budapest: Akadémiai Kiàdó 1976.

[7] BLASCHKE, W.: Kreis und Kugel. 2., durchges. u. verb. Aufl. Berlin: W. de Gruyter 1956.

[8] DYNKIN, E. B., USPENSKI, W. A.: Mathematische Unterhaltungen (Übers. a. d. Russ.). Bd. 1.–3. 2. Aufl. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982.

[9] EULER, L.: Vollständige Anleitung zur Algebra. Leipzig: Reclam 1920 (in rev. Fassung neu herausgeg. v. HOFMANN, J. E., Stuttgart: Reclam 1959).

[10] FERSCHL, F.: Markovketten. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1970.

[11] GARDNER, M.: Mathematische Rätsel und Probleme (Übers. a. d. Engl.). 5. Aufl. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1980.

[12] GARDNER, M.: Mathematische Knobeleien (Übers. a. d. Engl.). 3. Aufl. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1984.

[13] GARDNER, M.: Mathematisches Labyrinth (Übers. a. d. Engl.). Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1979.

[14] GARDNER, M.: Matematičeskije dosugi (Übers. a. d. Engl.). Moskau: Mir 1972.

[15] GARDNER, M.: Mathemagische Tricks (Übers. a. d. Engl.). Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1981.

[16] GELFOND, A. O.: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954.

[17] HARBORTH, H.: Polyominos. Vortrag zum 27. Internat. Kolloquium d. TH Ilmenau 1982.

[18] HINTZE, W.: Der ungarische Zauberwürfel. 3. Aufl. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1985.

[19] HINTZE, W.: Modernes logisches Spielzeug. Wiss. u. Fortschr. **33** (1983) 7.

[20] IGNATJEW, E. I.: Mathematische Spielereien (Übers. a. d. Russ.). Moskau; Leipzig, Jena, Berlin: Mir; Urania-Verlag 1982.

[21] JAGLOM, A. M.; JAGLOM, I. M.: Wahrscheinlichkeit und Information (Übers. a. d. Russ.). 4., bearb. u. erw. Aufl. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1984.

[22] KÄSTNER, H.; GÖTHNER, P.: Algebra – aller Anfang ist leicht. Leipzig: 3. Aufl. Teubner-Verlag 1987.

[23] KITAIGORODSKI, A. I.: Unwahrscheinliches, möglich oder unmöglich? (Übers. a. d. Russ.). 2. Aufl. Moskau; Leipzig: Mir; Fachbuchverlag 1977.

[24] KORDEMSKI, B. A.: Köpfchen, Köpfchen! (Übers. a. d. Russ.). 13. Aufl. Leipzig, Jena, Berlin: Urania-Verlag 1983.

[25] LEAVITT, J.; UNGAR, P.: Circle supports the largest sandpile. Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 35–37.

[26] LIETZMANN, W.: Wo steckt der Fehler? 5. überarb. u. erg. Aufl. Leipzig: Teubner-Verlag 1969.

[27] MROWKA, M.; WEBER, W. J.: Der Ungarische Würfel im Unterricht. Praxis der Mathematik **23** (1981) 5.

[28] MÜLLER, K. P.; WÖLPERT, H.: Anschauliche Topologie. Stuttgart: Teubner-Verlag 1976.

[29] PERELMAN, I. J.: Unterhaltsame Aufgaben und Versuche (Übersetzung a. d. Russ.). 2. Aufl. Moskau: Mir 1977.

[30] PETIGK, J.: Mathematik in der Freizeit. 3., durchges. Aufl. Berlin: Verlag Tribüne 1980.

[31] PÓLYA, G.: Mathematik und plausibles Schließen (Übers. a. d. Engl.). Bd. 1, 2. 2. Aufl. Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1969, 1975.

[32] SCHOLTYSSEK, M.: Hexeneinmaleins. 3. Aufl. Berlin: Kinderbuchverlag 1984.

[33] SCHOLTYSSEK, M.: ESP-Mental. Zauberkunst (1980) 3.

[34] SCHWEICKERT, W. K.: Der Señor und die Punkte. Leipzig: Friedrich Hofmeister 1962.

[35] STEINHAUS, H.: Kaleidoskop der Mathematik (Übers. a. d. Poln.). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.

[36] STEINHAUS, H.: 100 Aufgaben (Übers. a. d. Poln.). Leipzig, Jena, Berlin: Urania-Verlag 1968.

[37] WOROBJOW, N. N.: Die Fibonaccischen Zahlen (Übers. a. d. Russ.). 3. Aufl. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1977.

[38] WOROBJOW, N. N.: Grundfragen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung (Übers. a. d. Russ.). 3., ber. Aufl. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1969.

[39] ZICH, O.; KOLMAN, A.: Unterhaltsame Logik (Übers. a. d. Tschech.). 3. Aufl. Leipzig: Teubner-Verlag 1975.

Sachverzeichnis