

Anhang. Das Erlanger Programm von Felix Klein

Die Frage „Was ist Geometrie?“ – oder herausfordernder „Ist das noch Geometrie?“ – ist ein beliebter Gegenstand für hitzige Diskussionen unter Mathematikern. Lange Zeit war die Geometrie durch *Euklids* „Elemente“ [31] klar umrissen gewesen. Aber die Entwicklung und Verwendung neuer Methoden – besonders von Analysis und Algebra – machte eine klare Abgrenzung immer unmöglicher. Selbst unter Forschungen, die unbestritten zur Geometrie gehörten, war die Vielfältigkeit verwirrend.

Im Jahre 1872 griff *Felix Klein* zur Feder. Anlässlich seiner Berufung nach Erlangen veröffentlichte er ein *Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrichs-Alexanders-Universität zu Erlangen* mit dem Titel *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [26]. Darin schilderte er, daß „es gilt, in der Geometrie das Gemeinsame und das Unterscheidende unabhängig voneinander unternommener Forschungen hervorzuheben.“ Es „sollen darunter mit verstanden sein die Untersuchungen über beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sich, unter Abstreifung des für die rein mathematische Betrachtungsweise unwesentlichen Bildes, aus der Geometrie entwickelt haben.“

Felix Klein schlug vor, in jedem Teilgebiet nach den Transformationen der „Räume“ zu suchen, die die interessierenden Aussagen invariant lassen. Von den Transformationen war verlangt, daß sie eine Gruppe bilden.

Auf die subtilen Untersuchungen von *Felix Klein* können wir hier nicht näher eingehen. Es sei lediglich an einigen sehr einfachen und allgemeinen Beispielen für solche Räume und Gruppen das Prinzip der Unterscheidung erläutert:

- 1) *X beliebige Menge*. Unter der *symmetrischen Gruppe* $S(X)$ bleiben Aussagen über die Anzahl der Punkte von Teilmengen (allgemeiner „Mächtigkeiten“) erhalten.
- 2) *X topologischer Raum*. Unter der Gruppe $\text{Top}(X)$ aller *Homöomorphismen* (d. h. bijektiven in beiden Richtungen stetigen Abbildungen) bleiben die Eigenschaften „offen, abgeschlossen, kompakt“ von Teilmengen invariant.
- 3) *X differenzierbare Mannigfaltigkeit* (vgl. [23]). Unter der Gruppe $\text{Diff}(X)$ aller *Diffeomorphismen* (d. h. der bijektiven in beiden Richtungen differenzierbaren Abbildungen) bleibt etwa die Eigenschaft „Untermannigfaltigkeit“ einer Teilmenge erhalten.
- 4) *X projektiver Raum*. Unter der Gruppe $\text{Proj}(X)$ aller *Projektivitäten* bleiben etwa Doppelverhältnisse, Unterräume und Quadriken invariant.
- 5) *X affiner Raum*. Unter der Gruppe $\text{Aff}(X)$ aller *Affinitäten* bleiben Teilverhältnisse, Unterräume, Parallelität, Quadriken etc. invariant.
Die Untergruppe $T(X) \subset \text{Aff}(X)$ der *Translationen* läßt auch Richtungen unverändert.
- 6) *X euklidischer affiner Raum*. Hier haben wir die Untergruppen

$$\text{Kon}(X) \subset \text{Ähn}(X) \subset \text{Aff}(X)$$

der *Kongruenzen* und *Ähnlichkeiten*, die Abstände bzw. Winkel erhalten.

Der affine Raum $X := \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ und der projektive Raum $\bar{X} := \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sind auch differenzierbare Mannigfaltigkeiten. In diesem Fall stehen die oben angegebenen Gruppen in folgenden Beziehungen:

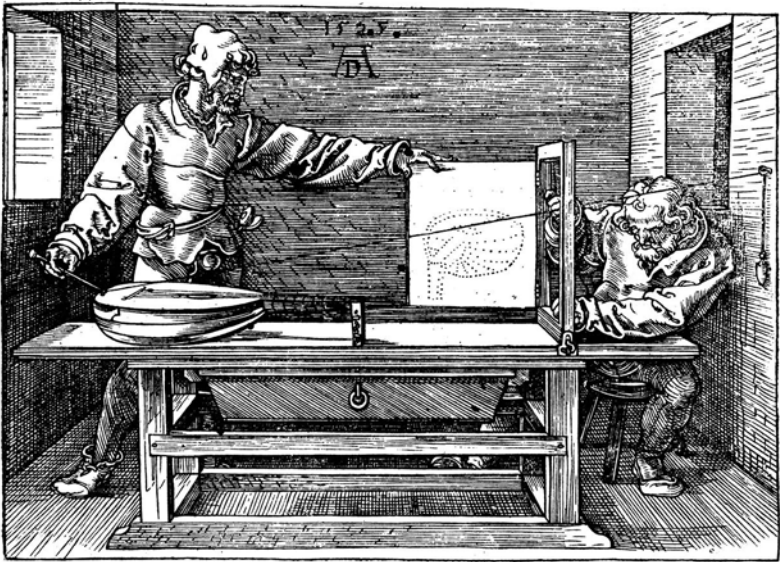
$$\text{Proj}(\bar{X}) \subset \text{Diff}(\bar{X}) \subset \text{Top}(\bar{X}) \subset \mathbf{S}(\bar{X})$$

$$\text{T}(X) \subset \text{Kon}(X) \subset \text{Ähn}(X) \subset \text{Aff}(X) \subset \text{Diff}(X) \subset \text{Top}(X) \subset \mathbf{S}(X)$$

Man beachte dabei, daß man sowohl Affinitäten als auch beliebige bijektive Abbildungen von X nach \bar{X} fortsetzen kann, daß dies aber bei Diffeomorphismen oder Homöomorphismen im allgemeinen nicht möglich ist.

Ganz allgemein kann man sagen, daß es umso mehr Invarianten gibt, je kleiner die Gruppe gewählt wird.

Seit Felix Kleins Aufruf sind über hundert Jahre vergangen. Inzwischen haben strukturelle Gesichtspunkte den letzten Winkel mathematischer Forschung erreicht, und man ist geneigt zu fragen, welches Programm der Geometrie heute not täte.



Und damit günstiger lieber Herr: will ich meinem schreyben end geben / vnd so mir Got genad ver-
 leyche die bücher so ich von menschlicher proportion vñ anderen darzü gehörend geschriben hab mit
 der zeit in druck pzingen vnd darpen meniglich gewarnet haben / ob sich yemand vnder-
 steen wurd mir dis außgangen büchlein wider nach zu drucken / das ich das
 selb auch wider drucken will / vñ außlassen geen mit meren vnd
 größerem zúfüg daß ies beschehen ist: darnach mag
 sich ein yetlicher richtig / & dem Herren
 sey lob vnd er ewiglich.

Literaturhinweise

Einführungen

- [1] *Frenkel, J.*: Géométrie pour l'élève professeur. Hermann, Paris 1973.
- [2] *Guber, S.*: Lineare Algebra und analytische Geometrie I. Merkel, Erlangen 1973.
- [3] *Hermes, H.*: Vorlesungen über lineare Transformationen. Aschendorff, Münster 1948.
- [4] *Klein, F.*: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Zweiter Band, Geometrie. Springer, Berlin 1925.
- [5] *Koecher, M.*: Lineare Algebra. Vorlesungsausarbeitung, München 1967.
- [6] *Nef, W.*: Lehrbuch der linearen Algebra. Birkhäuser, Basel 1966.
- [7] *Schaal, H.*: Lineare Algebra und Analytische Geometrie I. Vieweg, Braunschweig 1976.

Weiterführende Texte

- [8] *Artin, E.*: Geometric Algebra. Interscience, New York 1957.
- [9] *Bieberbach, L.*: Projektive Geometrie. Teubner, Leipzig 1931.
- [10] *Blaschke, L.*: Projektive Geometrie. Wolfenbüttler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel 1947.
- [11] *Collatz, L. und W. Wetterling*: Optimierungsaufgaben. Springer, Berlin 1966.
- [12] *Dantzig, G. B.*: Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer, Berlin 1966.
- [13] *Dieudonné, J.*: Cours de géométrie algébrique 1, 2. Presses Universitaires de France, Paris 1974.
- [14] *Hartshorne, R.*: Foundations of Projective Geometry. Benjamin, New York 1967.
- [15] *Kunz, E.*: Ebene Geometrie. vieweg studium 26, Vieweg Braunschweig 1976.
- [16] *Kunz, E.*: Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie. Vieweg, Braunschweig 1980.
- [17] *Lenz, H.*: Vorlesungen über projektive Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.
- [18] *Shafarevich, I. R.*: Basic Algebraic Geometry. Springer, Berlin 1974.

Ergänzungen

- [19] *Banach, S.*: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.
- [20] *Borchers, H. J. und G. Hegerfeld*: Über ein Problem der Relativitätstheorie: Wann sind Punktabbildungen des \mathbb{R}^n linear? Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, **10** (1972), 205–229.
- [21] *Fischer, G. und R. Sacher*: Einführung in die Algebra. Teubner, Stuttgart 1974.
- [22] *Forster, O.*: Analysis 2. Vieweg Studium **31**, Vieweg, Braunschweig 4. Aufl. 1981.
- [23] *Führer, L.*: Allgemeine Topologie mit Anwendungen. Vieweg, Braunschweig 1977.

- [24] *Haack, W.*: Darstellende Geometrie, Band III (Axonometrie und Perspektive). Sammlung Göschen. De Gruyter, Berlin 1957.
- [25] *Hämmerlin, G.*: Numerische Mathematik I. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.
- [26] *Klein, F.*: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Andreas Deichert, Erlangen 1872. Gesammelte Werke, Band I, pp. 400–497.
- [27] *Klein, F.*: Räumliche Kollineationen bei optischen Instrumenten. Zeitschr. Math. Phys. **46** (1901). Gesammelte Werke, Band II, pp. 607–612.
- [28] *Minkowski, H.*: Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. Gesammelte Abhandlungen, zweiter Band. Leipzig und Berlin, Teubner 1911.
- [29] *Samuel, P.*: Qu'est-ce qu'une quadrique? L'Enseignement Math., Sér. II, **13** (1967), 129–130.
- [30] *Valentine, F. A.*: Konvexe Mengen. Bibliographisches Institut, Mannheim 1968.
- [31] *Willers, F. A.*: Methoden der praktischen Analysis. De Gruyter, Berlin 1957.

Historische Werke

- [32] *Dürer, A.*: Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebenen und ganzen corporen. Nürnberg 1525. Faksimile Nachdruck Josef Stocker/Schmid, Dietikon 1966.
- [33] *Euklid*: Die Elemente, Buch I–XIII. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1975.

Mathematische Poesie

- [34] *Cremer, H.*: carmina mathematica. I. A. Mayer, Aachen 1977.

Ergänzungen

- [35] *Apéry, F.*: Models of the Real Projective Plane. Vieweg, Braunschweig 1987.
- [36] *Hilbert, D.* und *S. Cohn-Vossen*: Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin 1932.
- [37] *Klein, F.*: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Springer, Berlin 1928.
- [38] *Pinkall, U.*: Modelle der reellen projektiven Ebene. In: *G. Fischer* (Hrsg.): Mathematische Modelle. Vieweg, Braunschweig 1986.

Gerd Fischer wurde 1939 in Nürnberg geboren. Er studierte Mathematik und Physik in Erlangen, München und Baltimore (USA). 1964 wurde er an der Universität Erlangen promoviert, 1969 an der Universität München habilitiert. Von 1971 bis 1975 war er Wissenschaftlicher Rat und Professor in Regensburg und danach apl. Professor an der Universität München. Seit 1979 ist er ord. Professor an der Universität Düsseldorf. Er war zu Gastaufenthalten an mehreren in- und ausländischen Universitäten. Seine wissenschaftlichen Arbeiten befassen sich mit Fragen der komplexen Analysis.

Sachregister

- affin unabhängig 21
 affine Abbildung 7, 9, 29
 affine Basis 21
 affiner Raum 4
 affiner Unterraum 1, 11
 affines Koordinatensystem 23
 Affinität 10
 Affinkombination 27
 Ähnlichkeit 79
 Ähnlichkeitsfaktor 79
 algebraische Geometrie 207
 Asymptote 45
 Asymptotenkegel 68
 Ausgangsecke 117
 Austauschlemma 107
 Automobilist 7
 Automorphismus 33
 Axonometrie 84
- Bahn 3**
 baryzentrisch 98
 Basis einer Perspektivität 152
 benachbarte Ecken 106
 beschreibende Matrix 56
 Boysche Fläche 133
 Brennpunkt 37, 40, 42, 44
- Charakteristik 13**
 charakteristischer Quotient 114
- Dilatation 31, 144
 Dimension 4, 11, 98, 134
 Dimensionsformel 17, 138
 Direktrix 39
 Doppelverhältnis 152
 Drehspiegelung 77
 Drehung 77
 duale Konfiguration 175
 dualer projektiver Raum 172
 dualer Satz 172, 175
 Dualitätsprinzip 173, 176
 Durchschnitt 12, 28, 137
- Ebene 4, 6, 135
 Ecke 98
- Eckentableau 110
 einfach transitiv 3
 einfache Ecke 112
 Ellipse 36
 entartete Ecke 112
 Erlanger Programm 1, 208
 erweiterte Matrix 54
 euklidischer affiner Raum 74
 Eulersche Winkel 77
 Extrempunkt 98
 Exzentrizität 39, 44
- Fixpunkt 30, 80
 Fluchtebene 126
 Fluchtpunkt 126
 Fortsetzung von Affinitäten 141
 freier Vektor 6
 Freiheitsgrad 77
- gebrochen lineare Transformation 148
 geometrisch äquivalent 64, 186
 Gerade 4, 6, 135
 Gruppenhomomorphismus 2
- Halbraum 95
 harmonisch 157
 Hauptachse 37, 82
 Hauptachsenform 61, 186
 Hauptachsentransformation –
 – von Affinitäten 81
 – von Quadriken 61, 85, 196
 Hauptsatz –
 – der affinen Geometrie 35
 – der projektiven Geometrie 163
 homogene Koordinaten 134, 147
 homogenes Polynom 179
 Homogenisierung 64, 149
 Homomorphismus 2
 Hyperbel 44, 73, 182
 Hyperboloid 73, 90, 199
 Hyperebene 11, 132, 172
- Hyperebenenbüschel 177
 Hyperebenenkoordinaten 164
 Hyperfläche 54, 180, 207
- imaginäre Kreispunkte 137
 Invariante 21, 24, 64, 70
 involutiv 174
 Isometrie 75
 Isomorphismus 2
- kanonische Abbildung 114
 – Einbettung 136, 140
 – projektive Basis 145
 Kante 103, 106
 Kantenkriterium 106
 Karte 66
 Kegel 180
 Kegelschnitte 46, 181
 Klassifikation –
 – von Quadriken 70, 195
 – von orthogonalen Endomorphismen 77
- kollinear 31
 Kollineation 32, 163
 Kongruenz 76
 Konjugation 3, 32
 konjugierte Durchmesser 82
 Konstantenzählung 206
 konvex 95
 konvexe Funktion 125
 konvexe Hülle 96
 konvexe Optimierung 125
 konvexes Polyeder 97
 Konvexkombination 96
 Koordinaten –
 Koordinatenkörper 6, 127
 Koordinatensystem 23, 147
 Koordinatenvektor 23, 147
 Korrelation 171
 Kostenfunktional 94
 Kreis 36, 137, 170, 181, 198
Kreisen 125
 Kreuzhaube 130
 Kubik 207
 Kugel 198

- Leitlinie 39
 lexikographische Regel 125
 lineares Ungleichungssystem 94
 Linkstranslation 3
 Lösungsmenge 94

 Mantellinie 68, 180
 mehrfache Ecke 112, 122
 Metamathematik 176
 Mittelpunkt 14, 24
 Möbiusband 131

 Normalform 72, 186, 196

 Operation 3
 optimaler Punkt 92, 94, 99
 Ortsvektor 6

 Parabel 42, 73, 182
 Paraboloid 73, 90, 199
 parallel 6, 19
 Parallelogramm 6
 Parallelprojektion 18, 20
 Parallelverschiebung 1
 Parameterdarstellung 26, 28
 Pascalsche Gerade 203
 Perspektivität 162
 Pivot 108
 Pivotsuche 115
 Pol 170
 Polare 170, 201
 Polarisierung 186
 Polarität 174
 Polyeder 97
 Projektion 18
 projektiv unabhängig 145
 –e Abbildung 139
 –e Basis 145

 –er Abschluß 64, 128, 141, 144
 –er Raum 128, 134
 –es Unterraum 135
 –es Koordinatensystem 147
 Projektivität 139, 146
 Punkt 4, 6, 172

 quadratische Ergänzung 56
 quadratisches Polynom 53
 Quadrik 54, 180

 reflex 174
 Regelfläche 198
 regulär 201
 Restriktion 92

 Sattelfläche 91, 206
 Satz von –
 – Brianchon 176, 206
 – Carathéodory 198
 – Desargues 7, 159, 176
 – Minkowski 105
 – Pappos 7, 161, 176
 – Pascal 201
 – Steiner 207
 Scheitel 37
 Seitenhalbierende 25
 semiaffin 34
 semilinear 163
 semiprojektiv 163
 senkrecht 80
 Simplex 97
 Simplexverfahren 103
 Spiegelung 77
 stationärer Austausch 124
 Steinersche Römerfläche 132
 stereographische Projektion 129

 Störung der Konstanten 125
 Strahlensatz 26
 Suchstrahl 113
 synthetische Geometrie 6

 Tableau 108
 Tangente 201
 Tangentialhyperebene 194, 201
 Teilverhältnis 24, 157
 topologischer Abschluß 67
 Träger 177
 Translation 1, 4, 11
 transiationsinvariant 74
 Trennunglemma 103

 Unbestimmtheitsstelle 126
 unendlich ferne Hyperebene 136, 141
 – ferner Punkt 128
 Ungleichung 92
 Untergruppe 2

 Varietät 207
 Verbindungsgerade 13, 95
 Verbindungsraum 13, 16, 27, 138
 Verbindungsstrecke 95
 vierter harmonischer Punkt 158
 vollständiges Vierseit 158, 176
 Vorzeichenregel 191

 Winkel 74

 Zahlenkugel 129, 150
 Zentralprojektion 126, 150
 Zentrum 126, 139, 152
 zulässiger Punkt 92

Namensregister

- Alexandroff, Paul* (geb. 1896), 128
Appolonius (um 200 v. Chr.), 36
Artin, Emil (1898–1962), 168
Brianchon, Charles Julien (1783–1964), 176, 206
Carathéodory, Constantin (1873–1905), 95
Dandelin, G. P. (1794–1847), 50
Dantzig, George B. (geb. 1914), 92
de Brahe, Tycho (1546–1601), 51
Descargues, Gérard (1593–1662), 159
Descartes, René (1596–1650), 192
Dieudonné, Jean (geb. 1906), 207
Dürer, Albrecht (1471–1528), 46, 114
Euklid von Alexandria (etwa 365–300 v. Chr.), 36, 126, 208
Euler, Leonhard (1707–1783), 77
Kepler, Johannes (1571–1630), 38, 51
Klein, Felix (1849–1925), 1, 131, 208
Menächmus (um 350 v. Chr.), 46
Mazur, Stanislas (geb. 1905), 76
Minkowski, Hermann (1964–1909), 105
Möbius, August Ferdinand (1790–1868), 126, 131, 168
Monge, Gaspard (1746–1818), 126
Napoleon Bonaparte (1769–1821), 126
Pappos von Alexandria (etwa 300 n. Chr.), 7, 161
Pascal, Blaise (1623–1662), 202
Plücker, Julius (1801–1868), 126
Poncelet, Victor (1788–1867), 126
Riemann, Bernhard (1826–1866), 129
Rytz, David (1801–1869), 83
Samuel, Pierre (geb. 1921), 194
Schmidt, Erhard (1876–1959), 87
Shafarevich, Igor (geb. 1923), 207
Stadt, Christian von (1798–1867), 126
Steiner, Jacob (1796–1863), 126, 132, 207
Sturm, Jacques Charles François (1803–1855), 192
Thales von Milet (etwa 600 v. Chr.), 83
Ulam, Stanislaw (geb. 1909), 76
Vinci, Leonardo da (1452–1519), 126

Symbolverzeichnis

$T(X)$	Translationsvektorraum zu X , 1
$S(X)$	Symmetrische Gruppe der Menge X , 2
$\mathbb{A}_n(K)$	kanonischer affiner Raum, 4
\overrightarrow{pq}	Translation von p nach q , 5
$T(f)$	zu f gehörige lineare Abbildung, 9
$\dim X$	Dimension von X , 4
$\bigvee_{i \in I} Y_i$	Verbindungsraum, 13, 138
$p \vee q$	Verbindungsgerade, 13
$\text{char}(K)$	Charakteristik von K , 13
$TV(p_0, p_1, p)$	Teilverhältnis, 24
A'	erweiterte Matrix A , 54
x'	erweiterter Spaltenvektor x , 54
$\overline{Q_A}$	projektiver Abschluß von Q bezüglich A' , 64
Q_∞	unendlich ferner Teil von Q , 67
$C(Q)$	Asymptotenkegel von Q , 68
$\sphericalangle(Y, Y')$	Winkel zwischen den Geraden Y und Y' , 74
$d(p, q)$	Abstand zwischen p und q , 74
$Y \perp Y'$	Y steht senkrecht auf Y' , 80
$[p, q]$	Verbindungsstrecke, 95
$\text{kon}(M)$	konvexe Hülle von M , 94
X_+	Strahl, 113
X_j	charakteristischer Quotient, 114
\overline{X}	projektiver Abschluß des affinen Raumes X , 128, 141
X_∞	unendlich ferner Teil von X , 128
$\mathbb{P}(V)$	projektiver Raum zum Vektorraum V , 134
$\mathbb{P}_n(K)$	kanonischer projektiver Raum, 134
$(x_0 : \dots : x_n)$	homogene Koordinaten, 135
$\mathbb{P}(F)$	zur linearen Abbildung F gehörige projektive Abbildung, 13
$Z(f)$	Zentrum einer projektiven Abbildung, 139
$DV(p_0, p_1, p_2, p)$	Doppelverhältnis, 152
Z_p	Polare zum Punkt p , 170
$P(V)$	Menge der projektiven Unterräume von $\mathbb{P}(V)$, 171
$\mathbb{P}(V^*)$	zu $\mathbb{P}(V)$ dualer projektiver Raum, 172
$\mathbb{P}_n(K)^*$	zu $\mathbb{P}_n(K)$ dualer projektiver Raum, 174
B_T	Hypernebenbüschel mit Träger T , 177
$\mathbb{P}(C)$	zum Kegel C gehörige Quadrik, 180
$T_p(Q)$	Tangentialhyperebene an die Quadrik Q in p , 201

Grund- und Aufbaukurs Mathematik

Ulf Friedrichsdorf und Alexander Prestel,

Mengenlehre für den Mathematiker

1985. VI, 103 Seiten

Gerhard Frey, **Elementare Zahlentheorie**

1984. IX, 119 Seiten

Gerd Fischer, **Analytische Geometrie**

5., überarbeitete Auflage 1991, VIII, 215 Seiten

Gerd Fischer, **Lineare Algebra**

Unter Mitarbeit von Richard Schimpl. 9., durchgesehene Auflage 1986.

VI, 248 Seiten

Otto Forster, **Analysis**

Band 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. 4., durchgesehene Auflage 1983. VI, 208 Seiten

Band 2: Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , Gewöhnliche Differentialgleichungen. 5., durchgesehene Auflage 1984. IV, 164 Seiten.

Band 3: Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen. Herausgegeben von Gerd Fischer. 3., durchgesehene Auflage 1984. VIII, 285 Seiten

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, **Funktionentheorie**

Herausgegeben von Gerd Fischer. 5., neubearbeitete Auflage 1988. X, 266 Seiten

Ulrich Krengel,

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Herausgegeben von Gerd Fischer. 2., verbesserte Auflage 1990. X, 240 Seiten

Manfredo P. do Carmo,

Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Herausgegeben von Gerd Fischer. 2., durchgesehene Auflage 1992. X, 263 Seiten

Manfred Knebusch und Claus Scheiderer

Einführung in die reelle Algebra

Herausgegeben von Gerd Fischer. 1989. X, 184 Seiten

Ergänzend zur Reihe **vieweg studium**:

VIEWEG MATHEMATIK LEXIKON

Begriffe/Definitionen/Sätze/Beispiel für das Grundstudium.

Erarbeitet von Otto Kerner, Joseph Maurer, Jutta Steffens, Thomas Thode und Rudolf Voller. 1988. XII, 377 Seiten.