Anhang. Das Erlanger Programm von Felix Klein

Die Frage „Was ist Geometrie?“ – oder herausfordernder „Ist das noch Geometrie?“ – ist ein beliebter Gegenstand für hitzige Diskussionen unter Mathematikern. Lange Zeit war die Geometrie durch *Euklids* „Elemente“ [31] klar umrissen gewesen. Aber die Entwicklung und Verwendung neuer Methoden – besonders von Analysis und Algebra – machte eine klare Abgrenzung immer unmöglicher. Selbst unter Forschungen, die unbestritten zur Geometrie gehörten, war die Vielfältigkeit verwirrend.

Im Jahre 1872 griff *Felix Klein* zur Feder. Anläßlich seiner Berufung nach Erlangen veröffentlichte er ein *Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrichs-Alexanders-Universität zu Erlangen* mit dem Titel *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [26]. Darin schilderte er, daß „es gilt, in der Geometrie das Gemeinsame und das Unterscheidende unabhängig voneinander unternommener Forschungen hervorzuheben.“ Es „sollen darunter mit verstanden sein die Untersuchungen über beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sich, unter Abstreifung des für die rein mathematische Betrachtungsweise unwesentlichen Bildes, aus der Geometrie entwickelt haben.“

Felix Klein schlug vor, in jedem Teilgebiet nach den Transformationen der „Räume“ zu suchen, die die interessierenden Aussagen invariant lassen. Von den Transformationen war verlangt, daß sie eine Gruppe bilden.

Auf die subtilen Untersuchungen von *Felix Klein* können wir hier nicht näher eingehen. Es sei lediglich an einigen sehr einfachen und allgemeinen Beispielen für solche Räume und Gruppen das Prinzip der Unterscheidung erläutert:

1) X *beliebige Menge.* Unter der *symmetrischen Gruppe* **S** (X) bleiben Aussagen über die Anzahl der Punkte von Teilmengen (allgemeiner „Mächtigkeiten“) erhalten.
2) X *topologischer Raum.* Unter der Gruppe Top (X) aller *Homöomorphismen* (d. h. bijektiven in beiden Richtungen stetigen Abbildungen) bleiben die Eigenschaften „offen, abgeschlossen, kompakt“ von Teilmengen invariant.
3) X *differenzierbare Mannigfaltigkeit* (vgl. [23]). Unter der Gruppe Diff (X) aller *Diffeomorphismen* (d. h. der bijektiven in beiden Richtungen differenzierbaren Abbildungen) bleibt etwa die Eigenschaft „Untermannigfaltigkeit“ einer Teilmenge erhalten.
4) X *projektiver Raum.* Unter der Gruppe Proj (X) aller *Projektivitäten* bleiben etwa Doppelverhältnisse, Unterräume und Quadriken invariant.
5) X *affiner Raum.* Unter der Gruppe Aff (X) aller *Affinitäten* bleiben Teilverhältnisse, Unterräume, Parallelität, Quadriken etc. invariant.

   Die Untergruppe $T(X) \subset \mathrm{Aff}(X)$ der *Translationen* läßt auch Richtungen unverändert.
6) X *euklidischer affiner Raum.* Hier haben wir die Untergruppen

   $$\mathrm{Kon}(X) \subset \mathrm{\ddot{A}hn}(X) \subset \mathrm{Aff}(X)$$

   der *Kongruenzen* und *Ähnlichkeiten,* die Abstände bzw. Winkel erhalten.

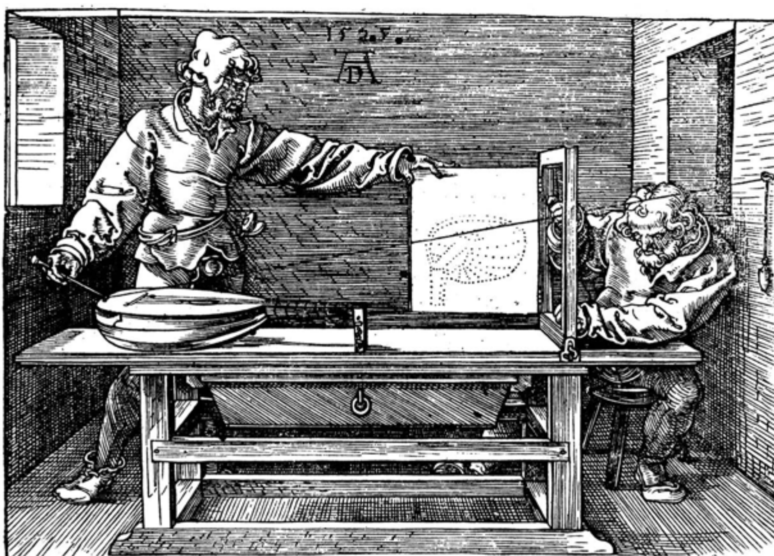
Der affine Raum $X := \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ und der projektive Raum $\overline{X} := \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sind auch differenzierbare Mannigfaltigkeiten. In diesem Fall stehen die oben angegebenen Gruppen in folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & \mathrm{Proj}(\overline{X}) & \subset & \mathrm{Diff}(\overline{X}) & \subset & \mathrm{Top}(\overline{X}) & \subset & \mathbf{S}(\overline{X}) \\ & & & & & & \cup & & & & & & \cup \\ T(X) & \subset & \mathrm{Kon}(X) & \subset & \mathrm{\ddot{A}hn}(X) & \subset & \mathrm{Aff}(X) & \subset & \mathrm{Diff}(X) & \subset & \mathrm{Top}(X) & \subset & \mathbf{S}(X) \end{array}$$

Man beachte dabei, daß man sowohl Affinitäten als auch beliebige bijektive Abbildungen von X nach $\overline{X}$ fortsetzen kann, daß dies aber bei Diffeomorphismen oder Homöomorphismen im allgemeinen nicht möglich ist.

Ganz allgemein kann man sagen, daß es umso mehr Invarianten gibt, je kleiner die Gruppe gewählt wird.

Seit Felix Kleins Aufruf sind über hundert Jahre vergangen. Inzwischen haben strukturelle Gesichtspunkte den letzten Winkel mathematischer Forschung erreicht, und man ist geneigt zu fragen, welches Programm der Geometrie heute not täte.



Vnd damit günstiger lieber Herr will ich meinem schreyben end geben / vnd so mir Got genad verleycht die bücher so ich von menschlicher proporcion vñ anderen darzů gehörend geschryben hab mit der zeyt in druck pringen/vnd darpey meniglich gewarnet haben/ob sich yemand vndersteen wurd mir diß außgangen büchlein wider nach zů drucken /das ich das selb auch wider drucken will / vñ auß lassen geen mit meren vnd grösserem zůsatz dañ ietz beschehen ist/darnach mag sich ein yetlicher richtē/Got dem Herren sey lob vnd eer ewigklich.

Literaturhinweise

Einführungen

[1] *Frenkel, J.:* Géométrie pour l'élève professeur. Hermann, Paris 1973.

[2] *Guber, S.:* Lineare Algebra und analytische Geometrie I. Merkel, Erlangen 1973.

[3] *Hermes, H.:* Vorlesungen über lineare Transformationen. Aschendorff, Münster 1948.

[4] *Klein, F.:* Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Zweiter Band, Geometrie. Springer, Berlin 1925.

[5] *Koecher, M.:* Lineare Algebra. Vorlesungsausarbeitung, München 1967.

[6] *Nef, W.:* Lehrbuch der linearen Algebra. Birkhäuser, Basel 1966.

[7] *Schaal, H.:* Lineare Algebra und Analytische Geometrie I. Vieweg, Braunschweig 1976.

Weiterführende Texte

[8] *Artin, E.:* Geometric Algebra. Interscience, New York 1957.

[9] *Bieberbach, L.:* Projektive Geometrie. Teubner, Leipzig 1931.

[10] *Blaschke, L.:* Projektive Geometrie. Wolfenbüttler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel 1947.

[11] *Collatz, L.* und *W. Wetterling:* Optimierungsaufgaben. Springer, Berlin 1966.

[12] *Dantzig, G. B.:* Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer, Berlin 1966.

[13] *Dieudonné, J.:* Cours de géométrie algébrique 1, 2. Presses Universitaires de France, Paris 1974.

[14] *Hartshorne, R.:* Foundations of Projective Geometry. Benjamin, New York 1967.

[15] *Kunz, E.:* Ebene Geometrie. vieweg studium 26, Vieweg Braunschweig 1976.

[16] *Kunz, E.:* Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie. Vieweg, Braunschweig 1980.

[17] *Lenz, H.:* Vorlesungen über projektive Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.

[18] *Shafarevich, I. R.:* Basic Algebraic Geometry. Springer, Berlin 1974.

Ergänzungen

[19] *Banach, S.:* Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.

[20] *Borchers, H. J.* und *G. Hegerfeld:* Über ein Problem der Relativitätstheorie: Wann sind Punktabbildungen des $\mathbb{R}^n$ linear? Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, **10** (1972), 205–229.

[21] *Fischer, G.* und *R. Sacher:* Einführung in die Algebra. Teubner, Stuttgart 1974.

[22] *Forster, O.:* Analysis 2. Vieweg Studium **31**, Vieweg, Braunschweig 4. Aufl. 1981.

[23] *Führer, L.:* Allgemeine Topologie mit Anwendungen. Vieweg, Braunschweig 1977.

[24] *Haack, W.:* Darstellende Geometrie, Band III (Axonometrie und Perspektive). Sammlung Göschen. De Gruyter, Berlin 1957.

[25] *Hämmerlin, G.:* Numerische Mathematik I. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.

[26] *Klein, F.:* Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Andreas Deichert, Erlangen 1872. Gesammelte Werke, Band I, pp. 400–497.

[27] *Klein, F.:* Räumliche Kollineationen bei optischen Instrumenten. Zeitschr. Math. Phys. **46** (1901). Gesammelte Werke, Band II, pp. 607–612.

[28] *Minkowski, H.:* Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. Gesammelte Abhandlungen, zweiter Band. Leipzig und Berlin, Teubner 1911.

[29] *Samuel, P.:* Qu'est-ce qu'une quadrique? L'Enseignement Math., Sér. II, **13** (1967), 129–130.

[30] *Valentine, F. A.:* Konvexe Mengen. Bibliographisches Institut, Mannheim 1968.

[31] *Willers, F. A.:* Methoden der praktischen Analysis. De Gruyter, Berlin 1957.

Historische Werke

[32] *Dürer, A.:* Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebnen und ganzen corporen. Nürnberg 1525. Faksimile Nachdruck Josef Stocker/Schmid, Dietikon 1966.

[33] *Euklid:* Die Elemente, Buch I–XIII. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1975.

Mathematische Poesie

[34] *Cremer, H.:* carmina mathematica. I. A. Mayer, Aachen 1977.

Ergänzungen

[35] *Apéry, F.:* Models of the Real Projective Plane. Vieweg, Braunschweig 1987.

[36] *Hilbert, D.* und *S. Cohn-Vossen:* Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin 1932.

[37] *Klein, F.:* Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Springer, Berlin 1928.

[38] *Pinkall, U.:* Modelle der reellen projektiven Ebene. In: *G. Fischer* (Hrsg.): Mathematische Modelle. Vieweg, Braunschweig 1986.

Gerd Fischer wurde 1939 in Nürnberg geboren. Er studierte Mathematik und Physik in Erlangen, München und Baltimore (USA). 1964 wurde er an der Universität Erlangen promoviert, 1969 an der Universität München habilitiert. Von 1971 bis 1975 war er Wissenschaftlicher Rat und Professor in Regensburg und danach apl. Professor an der Universität München. Seit 1979 ist er ord. Professor an der Universität Düsseldor Er war zu Gastaufenthalten an mehreren in- und ausländischen Universitäten. Seine wissenschaftlichen Arbeiten befassen sich mit Fragen der komplexen Analysis.

Sachregister

Namensregister

Symbolverzeichnis

$T(X)$	Translationsvektorraum zu X, 1
$S(X)$	Symmetrische Gruppe der Menge X, 2
$\mathbb{A}_n(K)$	kanonischer affiner Raum, 4
$\overrightarrow{pq}$	Translation von p nach q, 5
$T(f)$	zu f gehörige lineare Abbildung, 9
$\dim X$	Dimension von X, 4
$\bigvee_{i \in I} Y_i$	Verbindungsraum, 13, 138
$p \vee q$	Verbindungsgerade, 13
$\mathrm{char}(K)$	Charakteristik von K, 13
$TV(p_0, p_1, p)$	Teilverhältnis, 24
A'	erweiterte Matrix A, 54
x'	erweiterter Spaltenvektor x, 54
$\overline{Q_A}$	projektiver Abschluß von Q bezüglich A', 64
Q_∞	unendlich ferner Teil von Q, 67
$C(Q)$	Asymptotenkegel von Q, 68
$\measuredangle(Y, Y')$	Winkel zwischen den Geraden Y und Y', 74
$d(p, q)$	Abstand zwischen p und q, 74
$Y \perp Y'$	Y steht senkrecht auf Y', 80
$[p, q]$	Verbindungsstrecke, 95
$\mathrm{kon}(M)$	konvexe Hülle von M, 94
X_+	Strahl, 113
χ_j	charakteristischer Quotient, 114
$\overline{X}$	projektiver Abschluß des affinen Raumes X, 128, 141
X_∞	unendlich ferner Teil von X, 128
$\mathbb{P}(V)$	projektiver Raum zum Vektorraum V, 134
$\mathbb{P}_n(K)$	kanonischer projektiver Raum, 134
$(x_0 : \ldots : x_n)$	homogene Koordinaten, 135
$\mathbb{P}(F)$	zur linearen Abbildung F gehörige projektive Abbildung, 13
$Z(f)$	Zentrum einer projektiven Abbildung, 139
$DV(p_0, p_1, p_2, p)$	Doppelverhältnis, 152
Z_p	Polare zum Punkt p, 170
$\mathcal{P}(V)$	Menge der projektiven Unterräume von $\mathbb{P}(V)$, 171
$\mathbb{P}(V^*)$	zu $\mathbb{P}(V)$ dualer projektiver Raum, 172
$\mathbb{P}_n(K)^*$	zu $\mathbb{P}_n(K)$ dualer projektiver Raum, 174
$\mathcal{B}_T$	Hypernebenbüschel mit Träger T, 177
$\mathbb{P}(C)$	zum Kegel C gehörige Quadrik, 180
$T_p(Q)$	Tangentialhyperebene an die Quadrik Q in p, 201