

Zusammenstellung der Axiome der reellen Zahlen

Körperaxiome: Es sind zwei Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) definiert, so dass folgende Axiome erfüllt sind:		Körper	angeordneter Körper	archimedisch angeordneter Körper	vollständiger archimedisch angeordneter Körper
Axiome der Addition Assoziativgesetz Kommutativgesetz Existenz der Null Existenz des Negativen	Axiome der Multiplikation Assoziativgesetz Kommutativgesetz Existenz der Eins ($\neq 0$) Existenz des Inversen (zu Elementen $\neq 0$)				
Distributivgesetz					
Anordnungsaxiome: Es sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet ($x > 0$), so dass folgende Axiome erfüllt sind:					
Für jedes Element x gilt genau eine der Beziehungen $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$					
$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$					
$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$					
Archimedisches Axiom: Zu $x > 0$, $y > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $nx > y$.					
Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge konvergiert.					

Literaturhinweise

Einführungen in die Analysis

- [BF] M. Barner und F. Flohr: Analysis I. De Gruyter, 4. Aufl. 1991.
- [Bl] Ch. Blatter: Analysis 1. Springer, 4. Aufl. 1991.
- [Brö] Th. Bröcker: Analysis 1. Spektrum, Akad. Verl. 1992.
- [FW] O. Forster und R. Wessoly: Übungsbuch zur Analysis 1. Vieweg 1995.
- [He] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, 1. Teubner 1998.
- [Ho] H.S. Holdgrün: Analysis, Band 1. Leins Verlag Göttingen 1998.
- [Ka] W. Kaballo: Einführung in die Analysis I. Spektrum, Akad. Verl. 1995
- [Kö] K. Königsberger: Analysis 1. Springer 1991.
- [Wa] W. Walter, Analysis I. Springer 1997.

Weitere im Text zitierte Literatur

- [AH] J. Arndt und Ch. Haenel: Pi. Algorithmen, Computer, Arithmetik. Springer 1998.
- [BM] R. Braun und R. Meise: Analysis mit Maple. Vieweg 1995.
- [Br] D.S. Bridges: Computability. A Mathematical Sketchbook. Springer 1994.
- [Fi] G. Fischer: Lineare Algebra. Vieweg, 11. Aufl. 1997.
- [Fo] O. Forster: Algorithmische Zahlentheorie. Vieweg 1996.
- [H] D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, Teubner, 12. Aufl. 1987.
- [HU] J.E. Hopcroft und J.D. Ullman: Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie. Oldenbourg 1994.
- [L] E. Landau: Grundlagen der Analysis. Teubner 1930. Nachdruck Chelsea.
- [SG] H. Stoppel und B. Griese: Übungsbuch zur Linearen Algebra. Vieweg 1997.
- [Z] H.D. Ebbinghaus et al.: Zahlen. Springer 1992.

Namens- und Sachverzeichnis

- Abel, Niels Henrik* (1802–1829), 238
 Abelscher Grenzwertsatz, 238
 abgeschlossenes Intervall, 78
 Ableitung, 142
 Ableitung höherer Ordnung, 152
 absolut konvergent, 64
 Absolut-Betrag, 22
 abzählbar, 79
 Additionstheorem der Exponentialfunktion, 76
 Additionstheorem des Tangens, 141
 Additionstheoreme von Sinus und Cosinus, 128
 allgemeine Potenz, 112
 alternierende harmonische Reihe, 64
 alternierende Reihen, 62
 angeordneter Körper, 20
 Anordnungs-Axiome, 17
Archimedes (287?–212 v.Chr.), 23
 Archimedisches Axiom, 23
 Arcus-Cosinus, 136
 Arcus-Sinus, 137
 Arcus-Tangens, 137
 Arcus-Tangens-Reihe, 240
 Area cosinus hyperbolici, 118
 Area sinus hyperbolici, 118
 Argument einer komplexen Zahl, 139
 arithmetisches Mittel, 58
 Assoziativgesetz, 10, 12
 asymptotisch gleich, 212

b-adischer Bruch, 43
 Berührungspunkt, 92
 berechenbar, 81
Bernoulli, Jacob (1654–1705), 24
 Bernoulli-Polynome, 262
 Bernoulli-Zahlen, 262

 Bernoullische Ungleichung, 24
 beschränkt, 29
 beschränkte Folgen, 29
 beschränkte Funktion, 102
 beschränkte Menge, 83
Bessel, Friedrich Wilhelm (1784–1846), 254
 Besselsche Ungleichung, 254
 bestimmte Divergenz, 37
 Beta-Funktion, 217
 Betrag, 22
 Betrag einer komplexen Zahl, 121
 bewerteter Körper, 23
 Binär-Darstellung, 49
Binomi, Alessandro (1727–1643), 6
 Binomial-Koeffizienten, 5
 Binomische Reihe, 241
 Binomischer Lehrsatz, 6
Bohr, Harald (1887–1951), 210
 Bohr
 Satz von, 210
Bolzano, Bernhard (1781–1848), 46
 Bolzano
 Satz von Bolzano-Weierstraß, 46

Cantor, Georg (1845–1918), 82
 Cantorsche Diagonalverfahren, 82
Cauchy, Augustin Louis (1789–1857), 40
 Cauchy-Folge, 40
 Cauchy-Produkt von Reihen, 74
 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 161
 Cauchysches Konvergenz-Kriterium, 60
 ceil, 24
 Cosinus, 127

- Cosinus hyperbolicus, 97
 de l'Hospital, siehe Hospital, 163
 Definition durch vollständige Induktion, 2
 Dezimalbruch, 44
 periodischer, 36
 Differentialquotient, 142
 differenzierbar, 142
 von links, 145
 von rechts, 145
 Distributivgesetz, 12
 divergent, 28
 divergent, bestimmt, 37
 Doppelsummen, 14
 Dreiecks-Ungleichung, 22, 121

 Einheitswurzeln, 140
 Einselement, 12
Einstein, Albert (1879–1955), 244
 Einsteinsche Gleichung $E = mc^2$, 244
 ϵ -Umgebung, 27
 ϵ - δ -Definition der Stetigkeit, 103
 erweiterte Zahlengerade, 38
Euler, Leonhard (1707–1783), 71
 Euler-Mascheronische Konstante, 217
 Eulersche Beta-Funktion, 217
 Eulersche Formel, 127
 Eulersche Zahl, 71
 Exponentialfunktion zur Basis a , 111
 Exponentialreihe, 71
 Exponentialreihe im Komplexen, 124

 Fakultät, 3
 fast alle, 28
Fibonacci (Leonardo von Pisa) (180?–1250?), 27
 Fibonacci-Zahlen, 27, 39, 59
 Fixpunktsatz, 167

 Fließkomma, 49
 floating point, 49
 floor, 24
 Folge, 26
Fourier, Joseph (1768–1830), 251
 Fourier-Koeffizient, 251
 Fourier-Reihe, 251
 Freitag, der Dreizehnte, 9
 Fundamental-Folge, 40
 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, 191
 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, 76, 124
 Funktionalgleichung des Logarithmus, 109

 Gamma-Funktion, 208
Gauß, Carl Friedrich (1777–1855), 2, 9
 Gauß-Klammer, 24
 Gauß'sche Zahlenebene, 120
 geometrische Reihe, 8, 35
 geometrisches Mittel, 58
 gerade Funktion, 153
 gleichmäßig konvergent, 218
 gleichmäßig stetig, 104
 Gleitpunkt, 49
 goldener Schnitt, 59
 Graph einer Funktion, 89
Gregor XIII., Papst (Ugo Buoncompagni) (1502–1585), 9
 Gregorianischer Kalender, 9
 Grenzwert, 27
 Grenzwerte bei Funktionen, 92

Hadamard, Jacques S., (1865–1963), 231
 Hadamard'sche Formel, 231
 halboffenes Intervall, 79

- harmonische Reihe, 61
 Häufungspunkt, 47
 Hauptzweige der Arcus-Funktionen, 138
 Hexadezimalsystem, 51
Hölder, Otto (1859–1937), 160
 Höldersche Ungleichung, 160, 188
Hospital, Guillaume-François-Antoine de l'H. (1661–1704), 163
 Hospitalsche Regeln, 163

 IEEE-Standard, 50
 imaginäre Einheit, 120
 Imaginärteil, 120
 Indexverschiebung, 7
 Induktion, vollständige, 1
 Induktions-Axiom, 21
 Infimum, 83
 Integral-Vergleichskriterium, 207
 Intervall-Halbierungsmethode, 99
 Intervallschachtelungs-Prinzip, 41
 Inverses, 12
 irrationale Zahlen, 82

 Kettenbruch, 59
 Kettenregel, 150
 Kommutativgesetz, 10, 12
 kompaktes Intervall, 102
 komplexe Konjugation, 120
 komplexe Zahlen, 119
 Konjugation, komplexe, 120
 konkav, 158
 konvergent, 27
 konvergent, uneigentlich, 37
 Konvergenzradius, 224
 konvex, 158
 konvex, logarithmisch, 209
Kronecker, Leopold (1823–1891), 49

Lagrange, Joseph Louis (1736–1813), 233
 Lagrangesches Restglied, 233
Landau, Edmund (1877–1938), 115
 Landau-Symbole, 115
 leere Summe, 2
 leeres Produkt, 3
Legrende, Adrien Marie (1752–1833), 165
 Legendre-Polynome, 203
 Legendresche Differentialgleichung, 165
 Legrende-Polynom, 165
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), 62
 Leibniz'sche Reihe, 64
 Leibniz'sches Konvergenz-Kriterium, 62
 Limes, 27
 limes inferior, 85
 limes superior, 85
Lipschitz, Rudolf (1832–1903), 107
 Lipschitz-stetig, 107
 logarithmisch konvex, 209
 Logarithmus, 109
 Logarithmus zur Basis a , 117
 Logarithmus-Reihe, 237
 lokales Maximum, 154
 lokales Minimum, 154

Machin, John (1685–1751), 241
 Machinsche Formel, 241
 Majoranten-Kriterium, 65
 Mantisse, 50
Mascheroni, Lorenzo (1750–1800), 217
 Mascheroni
 Euler-Mascheronische Konstan-

- te, 217
 Maximum, 18, 85
 lokales, 154
 Minimum, 18, 85
 lokales, 154
Minkowski, Hermann (1864–1909),
 161
 Minkowskische Ungleichung, 161,
 188
 Mittelwertsatz, 155
 Mittelwertsatz der Integralrechnung,
 184
 Mittelwertsatz, verallgemeinerter, 166
 monoton wachsend, fallend, 48
 monotone Funktion, 107

 natürliche Zahlen, 20
 natürlicher Logarithmus, 109
 Nebenweige der Arcus-Funktionen,
 139
 Negatives, 10
Newton, Isaac (1643–1727), 171
 Newtonsches Verfahren, 171
 Norm, p -Norm, 160
 Nullelement, 10
 Nullfolge, 27

 Oberintegral, 179
 offenes Intervall, 79

 Partialbruchzerlegung, 194
 Partialsumme, 34
 Partielle Integration, 197
Pascal, Blaise (1623–1662), 7
 PASCAL-Programme, 81
 Pascalsches Dreieck, 7
Peano, Guiseppe (1858–1932), 21
 Peano-Axiome, 21
 periodische Funktion, 248

 periodischer b -adischer Bruch, 51
 periodischer Dezimalbruch, 36
 π , 131
Planck, Max (1858–1947), 169
 Plancksche Strahlungsfunktion, 169
 Polarkoordinaten, 139
 Potenz, 15
 Potenzreihe, 223
 primitive Funktion, 191
 Produkt, unendliches, 39
 Produktregel, 147
 punktweise konvergent, 218

 quadratische Konvergenz, 57, 172
 quadratisches Mittel, 254
 Quadratwurzel, 53
 Quotienten-Kriterium, 66
 Quotientenregel, 147

 Realteil, 120
 Reihen, unendliche, 34
 relatives Extremum, 154
Riemann, Bernhard (1826–1866), 179
 Riemann-integrierbar, 179
 Riemannsche Summe, 185
 Riemannsche Zetafunktion, 208
Rolle, Michel (1652–1719), 155
 Rolle, Satz von, 155

Schlömilch, Otto (1823–1901), 247
 Schlömilchsches Restglied, 247
 Schranke, 83
Schwarz, Hermann Amandus (1843–
 1921), 161
 Schwarz
 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung,
 161
 Sexagesimalsystem, 44
 Sinus, 127

- Sinus hyperbolicus, 97
Stammfunktion, 191
stetig, 94
stetig differenzierbar, 152
Stetigkeitsmodul, 107
Stirling, James (1692–1770), 212
Stirlingsche Formel, 212
streng monoton wachsend, fallend, 48
strenges lokales Extremum, 154
Substitutionsregel, 193
Summenzeichen, 2
Supremum, 83
Supremumsnorm, 221
Tangens, 136
Taylor, Brook (1685–1731), 232
Taylor-Reihe, 235
Taylorsche Formel, 232
Teilfolge, 46
Teleskop-Summe, 35
Trapez-Regel, 201
Treppenfunktion, 90
trigonometrische Funktionen, 127
trigonometrisches Polynom, 249
Turing, Alan Mathison (1912–1954), 81
Turing-Maschine, 81
überabzählbar, 79
Umkehrfunktion, 108
Umordnung von Reihen, 68
unbestimmtes Integral, 190
uneigentlich konvergent, 37
uneigentliches Integral, 204
uneigentliches Intervall, 79
unendlich, 37
unendliche geometrische Reihe, 35
unendliche Reihen, 34
unendliches Produkt, 39
ungerade Funktion, 153
Unterintegral, 179
unterliegende Menge einer Folge, 79
vollständige Induktion, 1
Vollständigkeits-Axiom, 41
Vollständigkeitsrelation, 254
Wallis, John (1616–1703), 199
Wallis'sches Produkt, 199
Weierstraß, Karl (1815–1897), 46
Weierstraß
 Konvergenzkriterium von Weierstraß, 222
 Satz von Bolzano-Weierstraß, 46
Weierstraßscher Approximationssatz, 261
Wurzeln, 109
Zahlenebene, Gauß'sche, 120
Zahlengerade, 19
Zahlengerade, erweiterte, 38
Zwischenwertsatz, 98

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ = Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ = Körper der rationalen Zahlen

\mathbb{R} = Körper der reellen Zahlen

\mathbb{R}^* = Menge der reellen Zahlen $\neq 0$

\mathbb{R}_+ = Menge der reellen Zahlen ≥ 0

\mathbb{R}_+^* = Menge der reellen Zahlen > 0

\mathbb{C} = Körper der komplexen Zahlen, 119

\mathbb{F}_2 = Körper mit zwei Elementen, 16

$[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[$ Intervalle, 78

$\lfloor x \rfloor$ = floor(x) = größte ganze Zahl $\leq x$, 24

$\lceil x \rceil$ = ceil(x) = kleinste ganze Zahl $\geq x$, 24

$[x]$ Gauß-Klammer, alte Bezeichnung für $\lfloor x \rfloor$

$|x|$ Betrag einer reellen oder komplexen Zahl, 22, 121

$\|x\|_p$ p -Norm für Vektoren, 160

$\|f\|_p$ p -Norm für Funktionen, 188

$\|f\|_K$ Supremumsnorm, 221

f_+, f_- positiver (negativer) Anteil einer Funktion, 183

f'_+, f'_- rechtsseitige (linksseitige) Ableitung, 145

$f|_A$ Beschränkung einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$

auf eine Teilmenge $A \subset X$

$a_n \sim b_n$ asymptotische Gleichheit von Folgen, 212

Die üblichen Bezeichnungen aus der Mengenlehre werden als bekannt vorausgesetzt, siehe etwa [Fi], Abschnitt 1.1. Insbesondere ist bei der Teilmengenrelation $A \subset X$ die Gleichheit $A = X$ zugelassen.

Inhaltsverzeichnis

Analysis 2

Kapitel I. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

- §1. Topologie metrischer Räume
- §2. Grenzwerte, Stetigkeit
- §3. Kompaktheit
- §4. Kurven im \mathbb{R}^n
- §5. Partielle Ableitungen
- §6. Totale Differenzierbarkeit
- §7. Taylor-Formel. Lokale Extrema
- §8. Implizite Funktionen
- §9. Integrale, die von einem Parameter abhängen

Kapitel II. Gewöhnliche Differentialgleichungen

- §10. Existenz- und Eindeigkeitssatz
- §11. Elementare Lösungsmethoden
- §12. Lineare Differentialgleichungen
- §13. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- §14. Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Analysis 3

- §1. Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger
- §2. Transformationsformel
- §3. Partielle Integration
- §4. Integral für halbstetige Funktionen
- §5. Berechnung einiger Volumina
- §6. Lebesgue-integrierbare Funktionen
- §7. Nullmengen
- §8. Rotationssymmetrische Funktionen
- §9. Konvergenzsätze
- §10. Die L_p -Räume
- §11. Parameterabhängige Integrale
- §12. Fourier-Integrale
- §13. Die Transformationsformel für Lebesgue-integrierbare Funktionen
- §14. Integration auf Untermannigfaltigkeiten
- §15. Der Gaußsche Integralsatz
- §16. Die Potentialgleichung
- §17. Distributionen
- §18. Pfaffsche Formen. Kurvenintegrale
- §19. Differentialformen höherer Ordnung
- §20. Integration von Differentialformen
- §21. Der Stokessche Integralsatz