Anhang Der Primzahlsatz von Dirichlet

§ 1 L-Reihen und der Primzahlsatz

L-Reihen

Sei im Folgenden $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Sei $\overline{\chi}$: $(\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Homomorphismus (der $(\mathbb{Z}/m)^\times$ in die Gruppe der Einheitswurzeln abbildet).

Definition. Die Abbildung χ: $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, die definiert ist durch

$$\chi(z) := \begin{cases} \overline{\chi}(\overline{z}) \ ; & \operatorname{ggT}(z, m) = 1, \\ 0 \ ; & \operatorname{ggT}(z, m) > 1 \end{cases}$$

heißt *Zahlcharakter* mod m.

Es gilt: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ ist $\chi(z_1 \cdot z_2) = \chi(z_1) \cdot \chi(z_2)$.

Sei s eine reelle Variable.

Definition. Für alle s, für die die Reihe $L(x, \chi) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)}{n^s}$ konvergiert, heißt $L(s, \chi)$ der Wert der L-Funktion zu χ in s.

Lemma 1. *Für* $s > 1$ ist $\sum\limits_n \dfrac{\chi(n)}{n^s}$ *absolut konvergent.*

Beweis. Es ist $|\chi(n)| = \begin{cases} 0 \ ; & \operatorname{ggT}(n, m) > 1 \\ 1 \ ; & \operatorname{ggT}(n, m) = 1 \end{cases}$, also ist

$\sum\limits_n \left| \dfrac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq \sum\limits_n \dfrac{1}{n^s}$, und diese Reihe ist bekanntlich konvergent für $s > 1$. □

Ein Zahlcharakter ist besonders ausgezeichnet: Sei $\overline{\chi}_0$ der Homomorphismus, der $(\mathbb{Z}/m)^\times$ konstant auf 1 abbildet. Dann heißt χ_0 der *Einscharakter.* Es ist

$$L(s, \chi_0) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \operatorname{ggT}(n,m) = 1}} \frac{1}{n^s} .$$

Euler-Produkt-Darstellung von $L(s, \chi)$:

Lemma 2. *Es ist* $L(s, \chi) = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \dfrac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$ *für* $s > 1$.

Beweis. Für $s > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\prod_{p<k} \left(\frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right) = \prod_{p<k} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\chi(p)}{p^s} \right)^i \right)$$

Indem wir ausmultiplizieren und die Multiplikativität von χ ausnützen, folgt:

$$\prod_{p<k} \left(\frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right) = \sum_{n'} \frac{\chi(n')}{n'^s},$$

wobei n' alle natürlichen Zahlen durchläuft, die durch keine Primzahl größer als k teilbar sind. (Verwende den Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primzahlpotenzen in $\mathbb{N}$.) Indem man k gegen ∞ gehen läßt, folgt das Lemma. □

Korollar. *Für* $s > 1$ *ist* $L(s, \chi) \neq 0$, *und es ist*

$$\log L(s, \chi) = \sum_p -\log \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m \cdot p^{m \cdot s}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + g(s, \chi)$$

$$\textit{mit } g(s, \chi) = \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m \cdot p^{m\, s}} .$$

Die Betrachtung der Reihe $\sum_p \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m \cdot p^{m \cdot s}} \right)$ ergibt, daß sie sogar für $s > \frac{1}{2}$ konvergiert, und daß somit $g(s, \chi)$ durch diese Reihe als reguläre Funktion für $s > \frac{1}{2}$ dargestellt werden kann.

Der Primzahlsatz von Dirichlet

Wir wollen als Hauptsatz in diesem Anhang den Primzahlsatz von Dirichlet beweisen:

Satz. *Sei* $\operatorname{ggT}(a, m) = 1$. *Dann gibt es unendlich viele Primzahlen in der Klasse von* $a \bmod m$.

Wir haben diesen Satz sicher bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$\sum_{\substack{p \equiv a \bmod m \\ p \in \mathbb{P}}} \frac{1}{p}$$

divergent ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{s \to 1+0} \sum_{p \equiv a \bmod m} \frac{1}{p^s} = \infty$$

ist. Sei $b \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot b \equiv 1 \bmod m$. Dann ist für $s > 1$ und bei Summation über alle Zahlcharaktere mod m:

$$\sum_{\chi} \chi(b) \cdot \log L(s, \chi) = \sum_{\chi} \chi(b) \left(\sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s}\right) + \sum_{\chi} \chi(b) \cdot g(s, \chi)$$

$$= \sum_{p} \left(\sum_{\chi} \frac{\chi(b \cdot p)}{p^s}\right) + \sum_{\chi} \chi(b) \cdot g(s, \chi).$$

Wir werden nun beweisen:

Lemma 3. *Es ist*

$$\sum_{\chi} \chi(b \cdot p) = \begin{cases} \varphi(m)\,; & b \cdot p \equiv 1 \bmod m\,, \\ 0\,; & b \cdot p \not\equiv 1 \bmod m\,. \end{cases}$$

Dann folgt:

$$\sum_{\chi} \chi(b) \cdot \log L(s, \chi) = \varphi(m) \cdot \sum_{p \equiv a \bmod m} \frac{1}{p^s} + \sum_{\chi} \chi(b) \cdot g(s, \chi)$$

Wir zeigen weiter:

Lemma 4. $\lim\limits_{s \to 1+0} L(s, \chi_0) = \infty$, *und für* $\chi \neq \chi_0$ ist $L(s, \chi)$ *regulär für* $s > 0$ *mit* $L(1, \chi) \neq 0$.

Also ist

$$\lim_{s \to 1+0} \left(\varphi(m) \cdot \sum_{p \equiv a \bmod m} \frac{1}{p^s}\right) + \sum_{\chi} \chi(b) \cdot g(1, \chi) =$$

$$= \lim_{s \to 1+0} (\log L(s, \chi_0)) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(b) \cdot \log(L(1, \chi)) = \infty,$$

und daher ist $\sum\limits_{p \equiv a \bmod m} \frac{1}{p}$ divergent, der Dirichletsche Primzahlsatz folgt also aus Lemma 3 und Lemma 4.

§ 2 Beweis von Lemma 3 und Lemma 4

Alle Bezeichnungen sind aus § 1 des Anhangs übernommen. Die Menge der Zahlcharaktere bildet eine endliche abelsche Gruppe:
Seien χ_1, χ_2 zwei Zahlcharaktere mod m. Dann sei

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(z) := \chi_1(z) \cdot \chi_2(z).$$

Das Einselement bzgl. dieser Verknüpfung ist der Zahlcharakter χ_0, und zu χ ist χ^{-1}, gegeben durch

$$\chi^{-1}(z) = \begin{cases} \chi(z)^{-1}; & \text{ggT}(z, m) = 1 \\ 0 \quad ; & \text{sonst} \end{cases}$$

das Inverse. Folglich gilt für einen festen Zahlcharakter χ_1:

$$\sum_{\substack{\chi \text{ Zahlcharakter} \\ \text{mod } m}} \chi(z) = \sum_{\chi} \chi(z) \cdot \chi_1(z).$$

Nach dem Hauptsatz über abelsche Gruppen ist

$$(\mathbb{Z}/m)^\times = \langle x_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_s \rangle \quad \text{mit} \quad x_i \in (\mathbb{Z}/m)^\times.$$

Seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_s \in \mathbb{Q}^\times$ Einheitswurzeln der Ordnung $n_i = \text{ord}(x_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$. Sei $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathbb{Z}^s$ beliebig. Dann ist

$$\bar{\chi}_\beta \colon (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times,$$

gegeben durch

$$y = x_1^{\alpha_1} \ldots x_s^{\alpha_s} \to \bar{\chi}_\beta(y) = \zeta_1^{\alpha_1 \beta_1} \ldots \zeta_s^{\alpha_s \beta_s}$$

ein Homomorphismus, und es ist $\bar{\chi}_\beta = \bar{\chi}_{\beta'}$ genau dann, wenn

$$\beta - \beta' \in n_1 \mathbb{Z} \times \ldots \times n_s \mathbb{Z}.$$

Folgerungen

1. Es gibt $|(\mathbb{Z}/m)^\times| = \varphi(m)$ verschiedene Zahlcharaktere mod m.
2. Sei $x \in (\mathbb{Z}/m)^\times$, $x \neq \bar{1}$, etwa $x = x_1^{m_1} \ldots x_s^{m_s}$, und sei (etwa) $m_1 \not\equiv 0 \mod n_1$.

Betrachte

$$\bar{\chi}_1 \colon (\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times,$$

gegeben durch

$$y = x_1^{\alpha_1} \ldots x_s^{\alpha_s} \to \bar{\chi}_1(y) = \zeta_1^{\alpha_1}.$$

Dann ist $\bar{\chi}_1(x) = \zeta_1^{m_1} \neq 1$. Sei χ_1 der entsprechende Zahlcharakter mod m. Dann ist auch $\chi_1(z) \neq 1$ für alle $z \in x$.

Nun sind wir in der Lage, Lemma 3 zu beweisen.

Sei $b \cdot p \equiv 1 \mod m$. Dann ist $\chi(b \cdot p) = 1$, und damit

$$\sum_{\chi} \chi(b \cdot p) = \sum_{\chi} 1 = \varphi(m).$$

Sei $b \cdot p \not\equiv 1 \bmod m$. Falls $\mathrm{ggT}(bp, m) > 1$ ist, ist für alle χ $\chi(b \cdot p) = 0$, also:

$$\sum_{\chi} \chi(b \cdot p) = 0.$$

Falls $\mathrm{ggT}(bp, m) = 1$ und $bp \not\equiv 1 \bmod m$, sei χ_1 so, daß $\chi_1(b \cdot p) \neq 1$ ist. Dann ist

$$\sum_{\chi} \chi(b \cdot p) = \sum_{\chi} \chi_1(b \cdot p)\, \chi(b \cdot p) = \chi_1(b \cdot p) \sum_{\chi} \chi(b \cdot p),$$

also muß $\sum\limits_{\chi} \chi(b \cdot p) = 0$ sein, und Lemma 3 ist bewiesen. □

Beweis von Lemma 4.
Für $s > 1$ ist

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0) &= \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{s \to 1+0} L(s, \chi_0) = \left(\lim_{s \to 1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \infty.$$

Sei nun $\chi \neq \chi_0$. Sei $V \subset \mathbb{Z}$ ein Vertretersystem mod m. Sei $z_0 \in V$, so daß $\chi(z_0) \neq 0, 1$ ist (dann ist $\bar{z}_0 \in (\mathbb{Z}/m)^\times$). Dann ist

$$\sum_{z \in V} \chi(z) = \sum_{z \in V} \chi(z_0) \cdot \sum_{z \in V} \chi(z),$$

also:

$$\sum_{z \in V} \chi(z) = 0.$$

Sei nun $n = q \cdot m + r$ mit $0 \leq r < m$. Dann ist

$$\left|\sum_{i=i_0}^{i_0+n} \chi(i)\right| = \left|\sum_{i=i_0}^{qm+i_0-1} \chi(i) + \sum_{i=qm+i_0}^{i_0+n} \chi(i)\right| = \left|\sum_{i=qm+i_0}^{i_0+n} \chi(i)\right| < m.$$

Daher ist für $n_2 > n_1, s > 0$:

$$\left|\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{\chi(i)}{i^s}\right| = \left|\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{\sum\limits_{n=1}^{i} \chi(n) - \sum\limits_{n=1}^{i-1} \chi(n)}{i^s}\right|$$

$$= \left|\frac{\sum\limits_{n=1}^{n_2} \chi(n)}{n_2^s} - \frac{\sum\limits_{n=1}^{n_1} \chi(n)}{(n_1+1)^s} + \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1}\left(\sum_{n=1}^{i} \chi(n)\right)\left(\frac{1}{i^s} - \frac{1}{(i+1)^s}\right)\right|$$

$$\leq \frac{m}{n_2^s} + \frac{m}{(n_1+1)^s} + m \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1}\left(\frac{1}{i^s} - \frac{1}{(i+1)^s}\right)$$

$$\leq \frac{m}{n_2^s} + \frac{m}{(n_1+1)^s} + m \cdot s \sum_{i=n_1}^{n_2} \frac{1}{i^{s+1}}\,.$$

Da für $s > 0$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{s+1}}$ konvergiert, folgt die Konvergenz von

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi(i)}{i^s} = L(s, \chi) \quad \text{für} \quad s > 0.$$

Um Lemma 4 vollständig zu beweisen, müssen wir noch zeigen:

$$L(1, \chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad \chi \neq \chi_0.$$

Wir wissen, daß $L(s, \chi_0)$ gegen ∞ geht für $s \to 1$.

Behauptung. $\lim\limits_{s \to 1+0} (s-1)\, L(s, \chi_0) \neq \infty$.

Beweis. Es ist $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = 1 + \int\limits_1^N \frac{1}{x^s}\,dx - s \int\limits_1^N (x - [x]) \cdot \frac{1}{x^{s+1}}\,dx$, wobei [x] die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x bedeutet. (Verwende partielle Integration für $\int\limits_1^N \frac{1}{x^s}\,dx$ und die Tatsache, daß

$$-s \int_1^N [x] \cdot \frac{1\,dx}{x^{s+1}} = s \sum_{n=1}^{N-1} - \int_n^{n+1} n \cdot \frac{1\,dx}{x^{s+1}} = \sum_{n=1}^{N-1} n\left(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s}\right)$$

$$= -1 - \frac{1}{2^s} - \ldots - \frac{1}{(N-1)^s} + \frac{N-1}{N^s} \text{ ist.}$$

Definition. Für $s > 1$ sei $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Nach oben ist also

$$\zeta(s) = 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx - s\int_1^{\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx \quad \text{für} \quad s > 1.$$

Also ist $(s-1)\,\zeta(s)$ zu einer regulären Funktion für $s > 0$ fortsetzbar (durch die Definition $(s-1)\,\zeta(s) := (s-1) + 1 - (s-1)\,s \int_1^{\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx$) mit $\lim_{s\to 1} (s-1)\,\zeta(s) \neq \infty$, und daher ist auch

$$\lim_{s\to 1} (s-1)\,L(s,\chi_0) \neq \infty.$$

Wäre nun für $\chi_1 \neq \chi_0$ $L(1,\chi_1) = 0$, dann wäre $\prod_{\chi} L(s,\chi)$ regulär für $s > 0$ (dabei ist das Produkt über alle Zahlcharaktere mod m zu nehmen), da die einzige Polstelle für $s = 1$ von $L(s,\chi_0)$ herkommt und die Ordnung 1 hat. Wir bilden

$$Q(s) = \sum_{\chi} \log L(s,\chi) = \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot p^{n\cdot s}} \sum_{\chi} \chi(p^n)$$

$$= \varphi(m) \sum_{p^n \equiv 1 \bmod m} \frac{1}{n \cdot p^{n\cdot s}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^s}$$

$$\text{mit} \quad a_i = \begin{cases} \dfrac{\varphi(m)}{n} & \text{für} \quad i = p^n \equiv 1 \bmod m, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$Q(s)$ konvergiert sicher für $s > 1$. Es ist

$$\prod_{\chi} L(s,\chi) = e^{Q(s)} = 1 + Q(s) + \ldots + \frac{Q(s)^k}{k!} + \ldots .$$

Nun ist

$$Q(s)^k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,k}}{i^s} \quad \text{mit} \quad a_{i,k} \geq 0,$$

und diese Reihe hat nur positive Glieder. Man kann also umordnen und erhält für alle $s > 0$, für die $Q(s)$ konvergiert:

$$\prod_{\chi} L(s,\chi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^s} \quad \text{mit} \quad b_i \geq 0.$$

Sei $s_0 = \inf\{s, Q(s)$ ist konvergent$\}$. Dann ist

$$s_0 = \inf\left\{s, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^s} \text{ ist konvergent}\right\}.$$

Behauptung.

$$s_0 \geq \frac{1}{\varphi(m)} > 0,$$

da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^s} = \varphi(m) \cdot \sum_{p^n \equiv 1 \bmod m} \frac{1}{n \cdot p^{ns}}$$

für $s = \dfrac{1}{\varphi(m)}$ divergiert.

Beweis.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^s} > \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p^{\varphi(m) \cdot s}}$$

also folgt für $s = \dfrac{1}{\varphi(m)}$:

$$\sum \frac{a_i}{i^s} > \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p} = \sum_{p} \frac{1}{p} - \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p}.$$

Es ist

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} > 1 + \frac{1}{p} + \ldots + \left(\frac{1}{p}\right)^n,$$

also:

$$\prod_{p<M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > \prod_{p<M} \left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^n}\right).$$

Wähle n so groß, daß $2^n > M$ ist; daraus folgt:

$$\prod_{p<M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > \sum_{i<M} \frac{1}{i},$$

also divergiert

$$\prod_{p<M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \quad \text{für} \quad M \to \infty.$$

Es ist

$$\log\left(\prod_{p<M}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right)-\sum_{p<M}\frac{1}{p}$$

$$=\sum_{p<M}\left(-\log\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}\right)<\sum_{p<M}\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{p}\right)}<\frac{1}{2},$$

also divergiert auch

$$\sum_{p<M}\frac{1}{p} \quad \text{für} \quad M\to\infty.$$

Um Lemma 4 zu beweisen, müssen wir jetzt noch zeigen: $\prod_{\chi} L(s,\chi)$ hat in s_0 eine Polstelle.

Es ist für $s>s_0$

$$f(s):=\prod_{\chi} L(s,\chi)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i^s}$$

differenzierbar, und man kann die Ableitung gliedweise berechnen:

$$f^{(k)}(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i(-\log i)^k}{i^s}\quad .$$

Für $s>s_1>s_0$ hat man also die Taylorentwicklung

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s-s_1)^k}{k!}\left(\sum_{i=1}^{\infty}b_i\frac{(-\log i)^k}{i^{s_1}}\right).$$

Falls $f(s)$ in s_0 regulär wäre, müßte diese Entwicklung für geeignetes s_1 auch für $s<s_0$ konvergieren, also müßte

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(s_1-s)^k\left(\sum_{i=1}^{\infty}b_i\frac{(\log i)^k}{i^{s_1}}\right)$$

konvergieren. Dabei sind alle Glieder der Doppelreihe positiv, man darf also umordnen, und daher wäre auch

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i^{s_1}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(s_1-s)^k(\log i)^k\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i^{s_1}}e^{(s_1-s)\log i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i^s}$$

konvergent, was wegen $s<s_0$ ein Widerspruch ist. □

Literaturverzeichnis

[1] *A. Aigner:* Zahlentheorie, de Gruyter, Berlin und New York 1975.

[2] *T. M. Apostel:* Introduction to Analytic Number Theory; Springer, Heidelberg 1976.

[3] *P. Bachmann:* Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung; Reprint. Springer, Berlin 1976.

[4] *Z. I. Borevič – I. R. Šafarevič:* Zahlentheorie; Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1966.

[5] *K. Chandrasekharan:* Einführung in die Analytische Zahlentheorie; Lecture Notes in Math. 29, Springer, Berlin und Heidelberg 1966.

[6] *K.-B. Gundlach:* Einführung in die Zahlentheorie; Bibliographisches Institut, Mannheim 1972.

[7] *H. Hasse:* Zahlentheorie; Akademie Verlag, Berlin 1963. Engl. Ausgabe: Number Theory; Grundlehren 229, Springer, Berlin und Heidelberg 1980.

[8] *E. Hecke:* Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen;Reprint. Chelsea, New York 1970.

[9] *H. Koch – H. Pieper:* Zahlentheorie; Berlin 1976.

[10] *E. Landau:* Foundations of Analyses; Reprint. Chelsea, New York 1951.

[11] *F. Lorenz:* Quadratische Formen über Körpern; Lectures Notes in Math. 130, Springer, Berlin und Heidelberg 1970.

[12] *P. Roquette:* p-adische Zahlen; Manuskript

[13] *J. P. Serre:* Cours d'Arithmétique; Hermann, Paris 1970.

[14] *W. Sierpiński:* Elementary Theory of Numbers; Verlag der Akademie, Warschau 1964.

[15] *B. L. v. d. Waerden:* Algebra I; Heid. Taschenbuch 12, Springer, Berlin und Heidelberg 1971.

[16] *H. G. Zimmer:* Computational Problems, Methods, and Results in Algebraic Number Theory; Lecture Notes in Math. 262, Springer, Berlin und Heidelberg 1972.

Namen- und Sachverzeichnis