

## Anhang Der Primzahlsatz von Dirichlet

### § 1 L-Reihen und der Primzahlsatz

#### L-Reihen

Sei im Folgenden  $m \in \mathbb{N}$  fest gewählt. Sei  $\bar{\chi}: (\mathbb{Z}/m)^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  ein Homomorphismus (der  $(\mathbb{Z}/m)^{\times}$  in die Gruppe der Einheitswurzeln abbildet).

**Definition.** Die Abbildung  $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , die definiert ist durch

$$\chi(z) := \begin{cases} \bar{\chi}(\bar{z}) & ; \quad \text{ggT}(z, m) = 1, \\ 0 & ; \quad \text{ggT}(z, m) > 1. \end{cases}$$

heißt *Zahlcharakter* mod  $m$ .

Es gilt: Für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$  ist  $\chi(z_1 \cdot z_2) = \chi(z_1) \cdot \chi(z_2)$ .

Sei  $s$  eine reelle Variable.

**Definition.** Für alle  $s$ , für die die Reihe  $L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$  konvergiert, heißt  $L(s, \chi)$  der Wert der L-Funktion zu  $\chi$  in  $s$ .

**Lemma 1.** Für  $s > 1$  ist  $\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$  absolut konvergent.

*Beweis.* Es ist  $|\chi(n)| = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{ggT}(n, m) > 1 \\ 1 & ; \quad \text{ggT}(n, m) = 1 \end{cases}$ , also ist

$$\sum_n \left| \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq \sum_n \frac{1}{n^s}, \text{ und diese Reihe ist bekanntlich konvergent für } s > 1. \square$$

Ein Zahlcharakter ist besonders ausgezeichnet: Sei  $\bar{\chi}_0$  der Homomorphismus, der  $(\mathbb{Z}/m)^{\times}$  konstant auf 1 abbildet. Dann heißt  $\chi_0$  der *Einscharakter*. Es ist

$$L(s, \chi_0) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{ggT}(n, m) = 1}} \frac{1}{n^s}.$$

Euler-Produkt-Darstellung von  $L(s, \chi)$ :

**Lemma 2.** Es ist  $L(s, \chi) = \prod_{p \in \mathbf{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$  für  $s > 1$ .

*Beweis.* Für  $s > 1$  und  $k \in \mathbb{N}$  ist

$$\prod_{p < k} \left( \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right) = \prod_{p < k} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^i}{p^{is}} \right)$$

Indem wir ausmultiplizieren und die Multiplikativität von  $\chi$  ausnützen, folgt:

$$\prod_{p < k} \left( \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right) = \sum_{n'} \frac{\chi(n')}{n'^s},$$

wobei  $n'$  alle natürlichen Zahlen durchläuft, die durch keine Primzahl größer als  $k$  teilbar sind. (Verwende den Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primzahlpotenzen in  $\mathbb{N}$ .) Indem man  $k$  gegen  $\infty$  gehen läßt, folgt das Lemma.  $\square$

**Korollar.** Für  $s > 1$  ist  $L(s, \chi) \neq 0$ , und es ist

$$\log L(s, \chi) = \sum_p -\log \left( 1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m \cdot p^{m \cdot s}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + g(s, \chi)$$

$$\text{mit } g(s, \chi) = \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m \cdot p^{m \cdot s}}.$$

Die Betrachtung der Reihe  $\sum_p \left( \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m \cdot p^{m \cdot s}} \right)$  ergibt, daß sie sogar für  $s > \frac{1}{2}$

konvergiert, und daß somit  $g(s, \chi)$  durch diese Reihe als reguläre Funktion für  $s > \frac{1}{2}$  dargestellt werden kann.

### Der Primzahlsatz von Dirichlet

Wir wollen als Hauptsatz in diesem Anhang den Primzahlsatz von Dirichlet beweisen:

**Satz.** Sei  $\text{ggT}(a, m) = 1$ . Dann gibt es unendlich viele Primzahlen in der Klasse von  $a \pmod{m}$ .

Wir haben diesen Satz sicher bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$\sum_{\substack{p \equiv a \pmod{m} \\ p \in \mathbf{P}}} \frac{1}{p}$$

divergent ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{s \rightarrow 1+0} \sum_{p \equiv a \pmod{m}} \frac{1}{p^s} = \infty$$

ist. Sei  $b \in \mathbb{Z}$  mit  $a \cdot b \equiv 1 \pmod{m}$ . Dann ist für  $s > 1$  und bei Summation über alle Zahlcharaktere mod  $m$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\chi} \chi(b) \cdot \log L(s, \chi) &= \sum_{\chi} \chi(b) \left( \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \right) + \sum_{\chi} \chi(b) \cdot g(s, \chi) \\ &= \sum_p \left( \sum_{\chi} \frac{\chi(b \cdot p)}{p^s} \right) + \sum_{\chi} \chi(b) \cdot g(s, \chi). \end{aligned}$$

Wir werden nun beweisen:

**Lemma 3.** *Es ist*

$$\sum_{\chi} \chi(b \cdot p) = \begin{cases} \varphi(m) & ; \quad b \cdot p \equiv 1 \pmod{m}, \\ 0 & ; \quad b \cdot p \not\equiv 1 \pmod{m}. \end{cases}$$

Dann folgt:

$$\sum_{\chi} \chi(b) \cdot \log L(s, \chi) = \varphi(m) \cdot \sum_{p \equiv a \pmod{m}} \frac{1}{p^s} + \sum_{\chi} \chi(b) \cdot g(s, \chi)$$

Wir zeigen weiter:

**Lemma 4.**  $\lim_{s \rightarrow 1+0} L(s, \chi_0) = \infty$ , und für  $\chi \neq \chi_0$  ist  $L(s, \chi)$  regulär für  $s > 0$  mit  $L(1, \chi) \neq 0$ .

Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1+0} \left( \varphi(m) \cdot \sum_{p \equiv a \pmod{m}} \frac{1}{p^s} \right) + \sum_{\chi} \chi(b) \cdot g(1, \chi) &= \\ = \lim_{s \rightarrow 1+0} (\log L(s, \chi_0)) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(b) \cdot \log(L(1, \chi)) &= \infty, \end{aligned}$$

und daher ist  $\sum_{p \equiv a \pmod{m}} \frac{1}{p}$  divergent, der Dirichletsche Primzahlsatz folgt also aus Lemma 3 und Lemma 4.

## § 2 Beweis von Lemma 3 und Lemma 4

Alle Bezeichnungen sind aus § 1 des Anhangs übernommen. Die Menge der Zahlcharaktere bildet eine endliche abelsche Gruppe:

Seien  $\chi_1, \chi_2$  zwei Zahlcharaktere mod  $m$ . Dann sei

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(z) := \chi_1(z) \cdot \chi_2(z).$$

Das Einselement bzgl. dieser Verknüpfung ist der Zahlcharakter  $\chi_0$ , und zu  $\chi$  ist  $\chi^{-1}$ , gegeben durch

$$\chi^{-1}(z) = \begin{cases} \chi(z)^{-1}; & \text{ggT}(z, m) = 1 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

das Inverse. Folglich gilt für einen festen Zahlcharakter  $\chi_1$ :

$$\sum_{\substack{\chi \text{ Zahlcharakter} \\ \text{mod } m}} \chi(z) = \sum_{\chi} \chi(z) \cdot \chi_1(z).$$

Nach dem Hauptsatz über abelsche Gruppen ist

$$(\mathbf{Z}/m)^{\times} = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_s \rangle \quad \text{mit } x_i \in (\mathbf{Z}/m)^{\times}.$$

Seien  $\zeta_1, \dots, \zeta_s \in \mathbf{Q}^{\times}$  Einheitswurzeln der Ordnung  $n_i = \text{ord}(x_i)$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Sei  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \mathbf{Z}^s$  beliebig. Dann ist

$$\bar{\chi}_{\beta}: (\mathbf{Z}/m)^{\times} \rightarrow \mathbf{C}^{\times},$$

gegeben durch

$$y = x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s} \rightarrow \bar{\chi}_{\beta}(y) = \zeta_1^{\alpha_1 \beta_1} \dots \zeta_s^{\alpha_s \beta_s}$$

ein Homomorphismus, und es ist  $\bar{\chi}_{\beta} = \bar{\chi}_{\beta'}$  genau dann, wenn

$$\beta - \beta' \in n_1 \mathbf{Z} \times \dots \times n_s \mathbf{Z}.$$

### Folgerungen

1. Es gibt  $|(\mathbf{Z}/m)^{\times}| = \varphi(m)$  verschiedene Zahlcharaktere mod  $m$ .
2. Sei  $x \in (\mathbf{Z}/m)^{\times}$ ,  $x \neq \bar{1}$ , etwa  $x = x_1^{m_1} \dots x_s^{m_s}$ , und sei (etwa)  $m_1 \not\equiv 0 \pmod{n_1}$ .

Betrachte

$$\bar{\chi}_1: (\mathbf{Z}/m)^{\times} \rightarrow \mathbf{C}^{\times},$$

gegeben durch

$$y = x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s} \rightarrow \bar{\chi}_1(y) = \zeta_1^{\alpha_1}.$$

Dann ist  $\bar{\chi}_1(x) = \zeta_1^{m_1} \neq 1$ . Sei  $\chi_1$  der entsprechende Zahlcharakter mod  $m$ . Dann ist auch  $\chi_1(z) \neq 1$  für alle  $z \in x$ .

*Nun sind wir in der Lage, Lemma 3 zu beweisen.*

Sei  $b \cdot p \equiv 1 \pmod{m}$ . Dann ist  $\chi(b \cdot p) = 1$ , und damit

$$\sum_x \chi(b \cdot p) = \sum_x 1 = \varphi(m).$$

Sei  $b \cdot p \not\equiv 1 \pmod{m}$ . Falls  $\text{ggT}(bp, m) > 1$  ist, ist für alle  $\chi$   $\chi(b \cdot p) = 0$ , also:

$$\sum_{\chi} \chi(b \cdot p) = 0.$$

Falls  $\text{ggT}(bp, m) = 1$  und  $bp \not\equiv 1 \pmod{m}$ , sei  $\chi_1$  so, daß  $\chi_1(b \cdot p) \neq 1$  ist. Dann ist

$$\sum_{\chi} \chi(b \cdot p) = \sum_{\chi} \chi_1(b \cdot p) \chi(b \cdot p) = \chi_1(b \cdot p) \sum_{\chi} \chi(b \cdot p),$$

also muß  $\sum_{\chi} \chi(b \cdot p) = 0$  sein, und Lemma 3 ist bewiesen.  $\square$

*Beweis von Lemma 4.*

Für  $s > 1$  ist

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0) &= \prod_p \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) \left(\prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{s \rightarrow 1+0} L(s, \chi_0) = \left(\lim_{s \rightarrow 1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) \left(\prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \infty.$$

Sei nun  $\chi \neq \chi_0$ . Sei  $V \subset \mathbb{Z}$  ein Vertretersystem mod  $m$ . Sei  $z_0 \in V$ , so daß  $\chi(z_0) \neq 0, 1$  ist (dann ist  $\bar{z}_0 \in (\mathbb{Z}/m)^{\times}$ ). Dann ist

$$\sum_{z \in V} \chi(z) = \sum_{z \in V} \chi(z_0) \cdot \sum_{z \in V} \chi(z),$$

also:

$$\sum_{z \in V} \chi(z) = 0.$$

Sei nun  $n = q \cdot m + r$  mit  $0 \leq r < m$ . Dann ist

$$\left| \sum_{i=i_0}^{i_0+n} \chi(i) \right| = \left| \sum_{i=i_0}^{qm+i_0-1} \chi(i) + \sum_{i=qm+i_0}^{i_0+n} \chi(i) \right| = \left| \sum_{i=qm+i_0}^{i_0+n} \chi(i) \right| < m.$$

Daher ist für  $n_2 > n_1, s > 0$ :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{\chi(i)}{i^s} \right| &= \left| \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{\sum_{n=1}^i \chi(n) - \sum_{n=1}^{i-1} \chi(n)}{i^s} \right| \\
 &= \left| \frac{\sum_{n=1}^{n_2} \chi(n)}{n_2^s} - \frac{\sum_{n=1}^{n_1} \chi(n)}{(n_1+1)^s} + \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1} \left( \sum_{n=1}^i \chi(n) \right) \left( \frac{1}{i^s} - \frac{1}{(i+1)^s} \right) \right| \\
 &\leq \frac{m}{n_2^s} + \frac{m}{(n_1+1)^s} + m \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_2-1} \left( \frac{1}{i^s} - \frac{1}{(i+1)^s} \right) \\
 &\leq \frac{m}{n_2^s} + \frac{m}{(n_1+1)^s} + m \cdot s \sum_{i=n_1}^{n_2} \frac{1}{i^{s+1}}.
 \end{aligned}$$

Da für  $s > 0$   $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{s+1}}$  konvergiert, folgt die Konvergenz von

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi(i)}{i^s} = L(s, \chi) \quad \text{für } s > 0.$$

Um Lemma 4 vollständig zu beweisen, müssen wir noch zeigen:

$$L(1, \chi) \neq 0 \quad \text{für } \chi \neq \chi_0.$$

Wir wissen, daß  $L(s, \chi_0)$  gegen  $\infty$  geht für  $s \rightarrow 1$ .

**Behauptung.**  $\lim_{s \rightarrow 1+0} (s-1) L(s, \chi_0) \neq \infty$ .

*Beweis.* Es ist  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = 1 + \int_1^N \frac{1}{x^s} dx - s \int_1^N (x - [x]) \cdot \frac{1}{x^{s+1}} dx$ , wobei  $[x]$  die

größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$  bedeutet. (Verwende partielle Integration für  $\int_1^N \frac{1}{x^s} dx$  und die Tatsache, daß

$$\begin{aligned}
 -s \int_1^N [x] \cdot \frac{1}{x^{s+1}} dx &= s \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^{N-1} n \left( \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right) \\
 &= -1 - \frac{1}{2^s} - \dots - \frac{1}{(N-1)^s} + \frac{N-1}{N^s} \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

**Definition.** Für  $s > 1$  sei  $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ .

Nach oben ist also

$$\zeta(s) = 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx \quad \text{für } s > 1.$$

Also ist  $(s-1)\zeta(s)$  zu einer regulären Funktion für  $s > 0$  fortsetzbar (durch

die Definition  $(s-1)\zeta(s) := (s-1) + 1 - (s-1)s \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx$  mit  $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) \neq \infty$ , und daher ist auch

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)L(s, \chi_0) \neq \infty.$$

Wäre nun für  $\chi_1 \neq \chi_0$   $L(1, \chi_1) = 0$ , dann wäre  $\prod_x L(s, \chi)$  regulär für  $s > 0$

(dabei ist das Produkt über alle Zahlcharaktere mod  $m$  zu nehmen), da die einzige Polstelle für  $s = 1$  von  $L(s, \chi_0)$  herkommt und die Ordnung 1 hat.

Wir bilden

$$\begin{aligned} Q(s) &= \sum_x \log L(s, \chi) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot p^{n \cdot s}} \sum_x \chi(p^n) \\ &= \varphi(m) \sum_{p^n \equiv 1 \pmod{m}} \frac{1}{n \cdot p^{n \cdot s}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^s} \end{aligned}$$

$$\text{mit } a_i = \begin{cases} \frac{\varphi(m)}{n} & \text{für } i = p^n \equiv 1 \pmod{m}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$Q(s)$  konvergiert sicher für  $s > 1$ . Es ist

$$\prod_x L(s, \chi) = e^{Q(s)} = 1 + Q(s) + \dots + \frac{Q(s)^k}{k!} + \dots$$

Nun ist

$$Q(s)^k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,k}}{i^s} \quad \text{mit } a_{i,k} \geq 0,$$

und diese Reihe hat nur positive Glieder. Man kann also umordnen und erhält für alle  $s > 0$ , für die  $Q(s)$  konvergiert:

$$\prod_x L(s, \chi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^s} \quad \text{mit } b_i \geq 0.$$

Sei  $s_0 = \inf \{s, Q(s) \text{ ist konvergent}\}$ . Dann ist

$$s_0 = \inf \left\{ s, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^s} \text{ ist konvergent} \right\}.$$

**Behauptung.**

$$s_0 \geq \frac{1}{\varphi(m)} > 0,$$

da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^s} = \varphi(m) \cdot \sum_{p^n \equiv 1 \pmod{m}} \frac{1}{n \cdot p^{ns}}$$

$$\text{für } s = \frac{1}{\varphi(m)} \text{ divergiert.}$$

*Beweis.*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^s} > \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p^{\varphi(m) \cdot s}}$$

also folgt für  $s = \frac{1}{\varphi(m)}$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^s} > \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p} = \sum_p \frac{1}{p} - \sum_{p \nmid m} \frac{1}{p}.$$

Es ist

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} > 1 + \frac{1}{p} + \dots + \left(\frac{1}{p}\right)^n,$$

also:

$$\prod_{p < M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > \prod_{p < M} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^n}\right).$$

Wähle  $n$  so groß, daß  $2^n > M$  ist; daraus folgt:

$$\prod_{p < M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > \sum_{i < M} \frac{1}{i},$$

also divergiert

$$\prod_{p < M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \quad \text{für } M \rightarrow \infty.$$



Es ist

$$\begin{aligned} & \log\left(\prod_{p < M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right) - \sum_{p < M} \frac{1}{p} \\ &= \sum_{p < M} \left(-\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}\right) < \sum_{p < M} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)} < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also divergiert auch

$$\sum_{p < M} \frac{1}{p} \quad \text{für } M \rightarrow \infty.$$

Um Lemma 4 zu beweisen, müssen wir jetzt noch zeigen:  $\prod_x L(s, \chi)$  hat in  $s_0$  eine Polstelle.

Es ist für  $s > s_0$

$$f(s) := \prod_x L(s, \chi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^s}$$

differenzierbar, und man kann die Ableitung gliedweise berechnen:

$$f^{(k)}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i (-\log i)^k}{i^s}.$$

Für  $s > s_1 > s_0$  hat man also die Taylorentwicklung

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s - s_1)^n}{n!} \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{(-\log i)^n}{i^{s_1}} \right).$$

Falls  $f(s)$  in  $s_0$  regulär wäre, müßte diese Entwicklung für geeignetes  $s_1$  auch für  $s < s_0$  konvergieren, also müßte

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (s_1 - s)^k \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{(\log i)^k}{i^{s_1}} \right)$$

konvergieren. Dabei sind alle Glieder der Doppelreihe positiv, man darf also umordnen, und daher wäre auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^{s_1}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (s_1 - s)^k (\log i)^k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^{s_1}} e^{(s_1 - s) \log i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^s}$$

konvergent, was wegen  $s < s_0$  ein Widerspruch ist.  $\square$

## Literaturverzeichnis

- [1] *A. Aigner*: Zahlentheorie, de Gruyter, Berlin und New York 1975.
- [2] *T. M. Apostel*: Introduction to Analytic Number Theory; Springer, Heidelberg 1976.
- [3] *P. Bachmann*: Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung; Reprint. Springer, Berlin 1976.
- [4] *Z. I. Borevič – I. R. Šafarevič*: Zahlentheorie; Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1966.
- [5] *K. Chandrasekharan*: Einführung in die Analytische Zahlentheorie; Lecture Notes in Math. 29, Springer, Berlin und Heidelberg 1966.
- [6] *K.-B. Gundlach*: Einführung in die Zahlentheorie; Bibliographisches Institut, Mannheim 1972.
- [7] *H. Hasse*: Zahlentheorie; Akademie Verlag, Berlin 1963. Engl. Ausgabe: Number Theory; Grundlehren 229, Springer, Berlin und Heidelberg 1980.
- [8] *E. Hecke*: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen; Reprint. Chelsea, New York 1970.
- [9] *H. Koch – H. Pieper*: Zahlentheorie; Berlin 1976.
- [10] *E. Landau*: Foundations of Analyses; Reprint. Chelsea, New York 1951.
- [11] *F. Lorenz*: Quadratische Formen über Körpern; Lectures Notes in Math. 130, Springer, Berlin und Heidelberg 1970.
- [12] *P. Roquette*: p-adische Zahlen; Manuskript
- [13] *J. P. Serre*: Cours d'Arithmétique; Hermann, Paris 1970.
- [14] *W. Sierpiński*: Elementary Theory of Numbers; Verlag der Akademie, Warschau 1964.
- [15] *B. L. v. d. Waerden*: Algebra I; Heid. Taschenbuch 12, Springer, Berlin und Heidelberg 1971.
- [16] *H. G. Zimmer*: Computational Problems, Methods, and Results in Algebraic Number Theory; Lecture Notes in Math. 262, Springer, Berlin und Heidelberg 1972.

# Namen- und Sachverzeichnis

- Äquivalenz von Bewertungen 61
- anisotrop 84
- Approximationssatz 66
- archimedisch 60
- assoziiertes Element 5
- Bewertung 60
- Cauchy-Folge 32
- Chinesischer Restsatz 24
- dargestellt 84
- direkte Summe 19
- Dreiecksungleichung 60
- Einheit 5
- Einscharakter 109
- Einheitswurzel 57
- Ergänzungssätze 70
- Euklidischer Algorithmus 10
- Euklidischer Ring 14
- Euler-Produkt 12; 109
- Eulersche  $\varphi$ -Funktion 25
- Eulersches Kriterium 68
- $g$ -adische Ziffernentwicklung 36
- ganze  $p$ -adische Zahl 48
- Ganzheitsbasis 98
- Gaußsches Lemma 69
- größter gemeinsamer Teiler 102
- Grundeinheit 91
- Hassescher Normsatz 93
- Hasse-Minkowski 13
- Hauptideal 22
- Hauptsatz über simultane Kongruenzen 24
- Henselsches Lemma 76
- Hilbert-Symbol 76
- Ideal 13
- imaginärquadratisch 98
- Index 28
- irreduzibel 6
- isotrop 84
- Jacobi-Symbol 72
- Kettenbruchentwicklung 42
- kleinstes gemeinsames Vielfaches 10
- komplett 33
- Kongruenzklasse 16
- Legendre-Symbol 67
- L-Funktion 109
- Lokale Körper, Lokalisierungen 59
- Lokal-Global-Prinzip (Hasse-Prinzip) 59
- Newtons Lemma 55
- Newton-Operator 56
- Newton-Verfahren 55
- nichtarchimedisch 60
- Norm 90; 97
- Normsatz 91
- Nullfolge 32
- Nullteiler 3
- Ordnung einer Gruppe 18
- Ordnung eines Elementes 18
- Ostrowski (Satz von  $-$ ) 63
- $p$ -adische Bewertung 9
- $p$ -adische Entwicklung 48
- $p$ -adische Zahlen 50
- Pellsche Gleichung 101
- Periode 37
- Produktformel 65
- Produktformel für Hilbert-Symbole 81
- Primelement 6
- Primideal 13
- Primitivwurzel 28
- Primzahl 8
- Primzahlsatz von Dirichlet 92, 110
- quadratisch 74
- Quadratklasse 74
- Quadratklassengruppe 74
- Quadratische Form 84
- Quadratische Irrationalzahlen 40
- Quadratischer Nichtrest 67
- Quadratischer Rest 67
- Quadratisches Reziprozitätsgesetz 70
- Quadratischer Zahlkörper 96
- reellquadratisch 98
- Spurabbildung 97
- Teiler 5
- transzendent 39
- unzerlegbares Element 6
- Vertreter 16
- Vertretersystem 16
- vollkommene Zahlen 13
- vollständige Induktion 2
- Zahlcharakter 109
- Zetafunktion 12
- ZPE-Ring 103
- Ziffern 36
- zyklische Gruppen 18

## Grund- und Aufbaukurs Mathematik

Gerhard Frey, **Elementare Zahlentheorie**

1983. IX, 120 S. 12,5 X 19 cm. Pb.

Gerd Fischer, **Analytische Geometrie**

Mit 123 Abb. 3., neu bearb. Aufl. 1983. VIII, 212 S. 12,5 X 19 cm. Pb.

Gerd Fischer, **Lineare Algebra**

Unter Mitarbeit von Richard Schimpl. Mit 37 Abb. 7., durchges. Aufl. 1981. VI, 248 S. 12,5 X 19 cm. Pb.

Otto Forster, **Analysis**

**Band 1:** Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Mit 44 Abb. 4., durchges. Aufl. 1983. VI, 208 S. 12,5 X 19 cm. Pb.

**Band 2:** Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$ , Gewöhnliche Differentialgleichungen. Mit 29 Abb. 4., durchges. Aufl. 1981, IV, 163 S. 12,5 X 19 cm. Pb.

**Band 3:** Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$  mit Anwendungen.

Hrsg. von Gerd Fischer. 2. überarb. Aufl. 1983. VIII, 288 S. DIN C 5. Pb.

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, **Funktionentheorie**

Hrsg. von Gerd Fischer. Mit 47 Abb. 3., ber. Aufl. 1983, IX, 258 S. DIN C 5. Pb.

Ernst Kunz, **Ebene Geometrie**

Axiomatische Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Mit 15 Abb. und 97 Figuren. 1976. 160 S. 12,5 X 19 cm. Pb.

Ernst Kunz, **Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie**

Hrsg. von Gerd Fischer. Mit 18 Abb. und 185 Übungsaufgaben. 1980. X, 239 S. DIN C 5. Pb.

Joseph Maurer, **Mathemecum – Mathematisches Lexikon**

Begriffe – Definitionen – Sätze – Beispiele. Mit 7 Abb. 1981. VIII, 268 S. 12,5 X 19 cm. Pb.

Manfredo P. do Carmo, **Differentialgeometrie von Kurven und Flächen**

Hrsg. von Gerd Fischer. Mit 170 Abb. 1983. IX, 263 S. DIN C 5. Pb.



VIEWEG

Egbert Brieskorn

## **Lineare Algebra und Analytische Geometrie I**

Noten zu einer Vorlesung mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz.  
1983. VIII, 636 S. 17 X 24 cm. Gbd.

Inhalt: Wovon handelt die Mathematik? – Gruppen – Wovon handelt die lineare Algebra? – Wovon handelt die analytische Geometrie? – Körper – Vektorräume – Matrizen – Affine Geometrie – Lineare Gleichungssysteme – Determinanten.

Dies ist eine unkonventionell geschriebene Einführung in die „Lineare Algebra und Analytische Geometrie“. Das zweibändig angelegte Lehrbuch gibt dem Studenten unmittelbar einen Einblick in das Wesen und die Gedankengänge der Mathematik. Die abstrakten Begriffe werden motiviert, indem sie sehr anschaulich eingeführt werden und ihre Entstehungsgeschichte beschrieben wird. Neben historischen Gesichtspunkten stellt der Autor außerdem die Beziehung zu anderen Wissenschaften, besonders zur Biologie und Kristallographie, heraus. Zahlreiche schöne Abbildungen und Fotografien ergänzen den Text. Für den Studenten ein gut lesbares Lehrbuch, für den Dozenten ein anregendes Nachschlagewerk.