Anhang

A. Mengen:

Eine *Menge* M entsteht durch Zusammenfassung von Dingen x, für die eine Aussage (Prädikat) $P(x)$ über diese x wahr ist, in Zeichen

$$M = \{x \mid P(x)\}\,.$$

x ist ein *Element* von M ($x \in M$) genau dann, wenn $P(x)$ wahr ist:

$$x \in M \Leftrightarrow P(x)\,.$$

Das Zeichen $\Leftrightarrow$ bedeutet also logisch so viel wie „genau dann wenn"; ähnlich bedeuten:

$$\begin{aligned} &P_1(x) \Rightarrow P_2(x):\ \text{„wenn } P_1(x), \text{ so } P_2(x)\text{"},\\ &P_1(x) \wedge P_2(x):\ P_1(x) \quad \text{und} \quad P_2(x),\\ &P_1(x) \vee P_2(x):\ P_1(x) \quad \text{oder} \quad P_2(x)\,. \end{aligned}$$

Es bezeichnet z. B. $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen, $\mathbf{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

Ist M eine *Teilmenge* von N, so schreibt man $M \subset N$. Ferner sind

$$\begin{aligned} &M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\} \quad \text{und}\\ &M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} \end{aligned}$$

die *Vereinigung* und der *Durchschnitt* von M und N. Haben M und N keine gemeinsamen Elemente – sind M und N *disjunkt* –, so schreibt man

$$M \cap N = \emptyset$$

und nennt $\emptyset$ *leere Menge*.

Die *Operationen* $\cup$ und $\cap$ können auf beliebig viele Mengen ausgedehnt werden, z. B.

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup M_2 \cdots \cup M_n$$
$$= \{x \mid \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \wedge x \in M_i\}.$$

Durch Zusammenfassung von Mengen M erhält man *Mengensysteme* $\boldsymbol{M}$; insbesondere bezeichnet

$$\boldsymbol{M}_1 = \mathfrak{P}(M) = \{X \mid X \subset M\}$$

die *Menge aller Teilmengen* von M (*Potenzmenge*) und

$$\boldsymbol{M}_2 = \pi(M) = M/\pi$$

eine *Zerlegung* (*Partition*) von M in nichtleere und disjunkte Teilmengen (*Klassen*), deren Vereinigung M ergibt. Die Klasse von M/π, in der $x \in M$ liegt, wird mit $[x]$ bezeichnet. x heißt *Repräsentant* der Klasse $[x]$.

Faßt man n Dinge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in einer bestimmten Reihenfolge zusammen, so erhält man ein *geordnetes n-Tupel* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Unter dem *kartesischen Produkt* der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ versteht man dann die Menge

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$
$$= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in M_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ist $M_1 = M_2 = \cdots = M_n$, so schreibt man auch M^n (*Mengenpotenz*).

B. Relationen:

Steht $x \in M$ in einer bestimmten Beziehung (*Relation*) σ zu $y \in N$ (z. B. $\sigma \Leftrightarrow$ „x ist kleiner als y"), so schreiben wir

$$x \sigma y.$$

Die Menge aller *geordneten Paare* $(x, y) \in M \times N$, für die die durch $x\sigma y$ gegebene Aussage $P(x, y)$ wahr ist, wird ebenfalls mit σ bezeichnet:

$$\sigma = \{(x, y) \mid x\sigma y\} \subset M \times N \, .$$

σ heißt genauer *zweistellige Relation* und kann als Teilmenge von $M \times N$ definiert werden. Unter einer *n-stelligen Relation* versteht man analog eine Teilmenge von $M_1 \times \cdots \times M_n$.

Man definiert für zweistellige Relationen:

1. *Vorbereich* (*Definitionsbereich*) $V(\sigma)$: Menge aller $x \in M$, die mit einem $y \in N$ in der Relation σ stehen.
2. *Nachbereich* (*Wertebereich*) $N(\sigma)$: Menge aller $y \in N$, die mit einem $x \in M$ in der Relation σ stehen.
3. σ ist *rechtseindeutig*: $x \in M$ kann nicht mit mehreren $y \in N$ in der Relation σ stehen.
4. σ ist *linkseindeutig*: $y \in N$ kann nicht mit mehreren $x \in M$ in der Relation σ stehen.
5. Eine rechtseindeutige Relation mit $V(\sigma) = M$ heißt *Abbildung* (*Funktion, Operator*).
6. Eine Relation $\sigma \subset M^2$ (Relation *auf M*) heißt:
   reflexiv $\Leftrightarrow x\sigma x$ für alle $x \in M$,
   symmetrisch $\Leftrightarrow x_1\sigma x_2 \Rightarrow x_2\sigma x_1$,
   transitiv $\Leftrightarrow x_1\sigma x_2 \wedge x_2\sigma x_3 \Rightarrow x_1\sigma x_3$,
   identitiv $\Leftrightarrow x_1\sigma x_2 \wedge x_2\sigma x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$.
7. $\sigma \subset M^2$ heißt *Äquivalenzrelation* $\Leftrightarrow \sigma$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (Symbol π oder $\sim$). $\sigma \subset M^2$ heißt *Ordnungsrelation* $\Leftrightarrow \sigma$ ist reflexiv, transitiv und identitiv (Symbol $<$ oder $\leqq$).

Satz: *Jede Äquivalenzrelation π auf M erzeugt eine Klasseneinteilung M/π und umgekehrt* $(x_1\pi x_2 \Leftrightarrow [x_1] = [x_2])$.

C. Abbildungen

Ist speziell $\sigma \subset M \times N$ eine Abbildung, so ist eine besondere Terminologie und Symbolik üblich. Man schreibt (mit dem Symbol φ anstelle von σ) bzw. sagt:

$$(\varphi : M \rightarrow N \quad (\text{bisher } \varphi \subset M \times N)$$

(Abbildungen *von* M *in* N)

$x \mapsto y$ oder $\varphi(x) = y$ (bisher $x\varphi y$ oder $(x, y) \in \varphi$)

φ ist *injektiv*, wenn φ linkseindeutig ist.

φ ist *surjektiv*, wenn $N(\varphi) = N$ ist.

(Abbildung *von* M *auf* N)

φ ist *bijektiv*, wenn φ injektiv und surjektiv ist.

Satz: *Jede Abbildung* $\varphi: M \to N$ *erzeugt eine Äquivalenzrelation* π_φ *auf* M:

$$x_1 \pi_\varphi x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2).$$

Weiter bezeichnet man $(\varphi: M \to N)$:

$\varphi^{-1}: N \to P(M)$: Zu φ gehörende *Urbildfunktion* φ^{-1}

$\varphi^{-1}(y) = \{x \mid \varphi(x) = y\}$: *Urbild* von $y \in N$.

Ist $M' \subset M$, so ist $\varphi \mid M'$ diejenige Abbildung, die für alle $x \in M'$ mit φ übereinstimmt (*Einschränkung* $\varphi \mid M$ von φ auf M').

Zwei Abbildungen $\varphi_1: M \to N$ und $\varphi_2: N \to P$ ergeben eine neue Abbildung $\varphi_1\varphi_2$ oder $\varphi_1 \circ \varphi_2: M \to P$ (*Produkt* von φ_1 und φ_2), die durch

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x) = \varphi_2[\varphi_1(x)]$$

definiert ist. Es gilt der wichtige

Satz: *Jede Abbildung* $\varphi: M \to N$ *ist das Produkt der Abbildungen* $\varkappa$ *und* ζ:

$$\varphi = \varkappa \circ \zeta$$

mit

$\varkappa: M \to M/\pi_\varphi$ *mit* $\varkappa(x) = [x]$ (*kanonische Abbildung*)

$$\zeta: M/\pi_\varphi \to N \quad \textit{mit} \quad \zeta([x]) = y = \varphi(x).$$

$\varkappa$ ist surjektiv und ζ injektiv (ist φ surjektiv, so ist ζ bijektiv).

Die Menge aller Abbildungen $\varphi: M \to N$ wird mit $\mathfrak{F}(M, N)$ oder N^M bezeichnet.

Eine Abbildung $\varphi: \mathbf{N} \to M$ heißt *Folge*; man schreibt

$$\varphi = (y_i)_{i \in \mathbf{N}}.$$

Dabei heißt $\mathbf{N}$ *Indexmenge* der Folge. Insbesondere ist für *Mengenfolgen*

$$\varphi = (Y_i)_{i \in \mathbf{N}}$$

definiert die Folgenmenge

$$\times\varphi = \{(y_i)_{i \in \mathbf{N}} \mid y_i \in Y_i\}.$$

Speziell für $Y_i = Y$ für alle $i \in \mathbf{N}$ erhält man

$$\begin{aligned}\times\varphi &: \text{Menge aller Folgen } \varphi : \mathbf{N} \to Y \\ &= \text{Abb.}\,(\mathbf{N}, Y) = \mathfrak{F}(\mathbf{N}, Y) = Y^{\mathbf{N}}.\end{aligned}$$

D. Operationen und Strukturen

Eine Abbildung

$$\varphi : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to A : \varphi[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = y$$

heißt *n-stellige* (*algebraische*) *Operation.* Speziell für $n = 2$ schreibt man

$$\varphi[(x_1, x_2)] = x_1 \varphi x_2 = x_1 * x_2 ,$$

wobei natürlich für $*$ auch irgendeine andere geometrische Figur gewählt werden kann ($\circ$, $\diamond$, $+$, $\cdot$ usw.).

Im wichtigsten Fall handelt es sich um *innere algebraische Operationen* ($A_i = A$ für alle i). Eine Menge A mit auf A definierten, n-stelligen algebraischen Operationen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ ($n = 0, 1, \ldots, k$) heißt *algebraische Struktur*, in Zeichen

$$\mathfrak{A} = (A, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m).$$

Einstellige Operationen sind Abbildungen $\varphi : A_1 \to A$, *nullstellige Operationen* sind *Auswahlfunktionen* (Auswahl eines Elementes x aus A).

Die Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen Strukturen werden durch den Begriff des (Homo-)Morphismus beschrieben:

Sind (im einfachsten Fall) $(A, *)$ und (B, Δ) algebraische Strukturen (mit einer zweistelligen Operation $*$ bzw. Δ), so heißt $\psi: A \to B$ *(Homo-)Morphismus,* wenn gilt:

$$\psi\,(x_1 * x_2) = \psi(x_1)\,\Delta\,\psi(x_2)\,.$$

Speziell kann ψ surjektiv (*Epimorphismus*), injektiv (*Monomorphismus*) oder bijektiv (*Isomorphismus*) sein.

Existiert ein Isomorphismus für $(A, *)$ und (B, Δ), so spricht man von *isomorphen Strukturen.* Solche Strukturen werden algebraisch nicht unterschieden.

Eine Äquivalenzrelation π auf der Menge A mit der Operation $*$ heißt *Kongruenzrelation,* wenn gilt ($[x_1]$, $[x_2] \in A/\pi$)

$$x' \in [x_1] \wedge x'' \in [x_2] \Rightarrow (x' * x'') \in [x_1 * x_2]\,.$$

Ist π Kongruenzrelation, so kann man also widerspruchsfrei auf A/π die Operation $\diamond$ durch

$$[x_1] \diamond [x_2] = [x_1 * x_2]$$

definieren.

$(A/\pi, \diamond)$ heißt *Faktorstruktur* von $(A, *)$.

Ist π_ψ die zu einem Morphismus

$$\psi: A \to B$$

gehörende Äquivalenzrelation auf A, so ist π_ψ immer eine Kongruenzrelation. Es gilt der

Satz: *Ist $\psi: A \to B$ ein Morphismus für $(A, *)$ und (B, Δ), so ist in der Zerlegung*

$$\psi = \varkappa \circ \zeta$$

die Abbildung $\varkappa: A \to A/\pi_\psi$ ein (kanonischer) Epimorphismus und $\zeta: A/\pi_\psi \to B$ ein Monomorphismus.

Ist ψ surjektiv (Epimorphismus), so ist ζ ein Isomorphismus. Daraus folgt der fundamentale

Satz: *Jede zu* $(A, *)$ *epimorphe Struktur* (B, Δ) *ist einer Faktoralgebra* $(A/\pi, \diamond)$ *von* $(A, *)$ *isomorph.*

Entsprechende Sätze gelten für allgemeinere Strukturen.

E. Spezielle Strukturen

Mengen G mit einer zweistelligen Operation $*$ werden als *Gruppoid* bezeichnet. Ist $*$ *assoziativ* $[x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3]$, so spricht man von *Halbgruppen.*

Eine *Gruppe* $(G, *)$ ist eine Halbgruppe mit (genau) einem *neutralen Element* $e\,(e * x = x * e = x$ für alle $x \in G)$ und (genau) einem jeden $x \in G$ zugeordneten *inversen Element* x^{-1} $(x * x^{-1} = x^{-1} * x = e)$.

Mengen R mit zwei zweistelligen Operationen $*$ und Δ werden als *Ring* bezeichnet, wenn die *Teilstruktur* $(R, *)$ eine *kommutative Gruppe* ($*$ ist *kommutativ*), die Teilstruktur (R, Δ) ein (assoziatives) Gruppoid bildet und wenn Δ bez. $*$ *distributiv* ist $(x_1 \Delta (x_2 * x_3) = (x_1 \Delta x_2) * (x_1 \Delta x_3))$. Ist $R \setminus \{e_*\}$ (e_* neutrales Element von $(R, *)$) bez. Δ eine Gruppe, so heißt $(R, *, \Delta)$ *Körper*.

In einem Ring ist immer

$$x_1 \Delta e_* = e_* \Delta x = e_* ,$$

aber es kann auch gelten

$$x_1 \Delta x_2 = e_* \quad (x_1, x_2 \neq e_*) .$$

In diesem Fall heißen x_1, x_2 *Nullteiler.*

Ein assoziativ-kommutativer Ring ohne Nullteiler (Δ ist assoziativ und kommutativ) heißt *Integritätsring.*

Jeder Integritätsring kann durch Hinzunehmen weiterer Elemente zu einem Körper (*Quotientenkörper*) erweitert werden.

Dazu führt man für die Quotienten $\frac{x_1}{x_2}$ $(x_1, x_2 \in R)$ eine Äquivalenzrelation

$$\frac{x_1}{x_2}\,\pi\,\frac{x_1'}{x_2'} \Leftrightarrow x_1 \Delta x_2' = x_2 \Delta x_1' \quad (x_2, x_2' \neq e_*)$$

ein und definiert für die Repräsentanten der Klassen $\left[\frac{x_1}{x_2}\right]$ eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$, deren Regeln mit denen für die Quotienten ganzer Zahlen übereinstimmen (π ist dann eine Kongruenzrelation).

Insbesondere ist

$$\left[\frac{x}{x}\right] = e. \quad \text{(neutrales Element bez. }\cdot\text{)}$$

$$\left[\frac{e_*}{x}\right] = e_+ \quad \text{(neutrales Element bzw. }+\text{)}$$

$$x \Leftrightarrow \left[\frac{x\Delta x_1}{x_1}\right].$$

Symbole

X	Eingabe-	$x \in X$
Y	Ausgabe- Alphabet	$y \in Y$
Z	Zustands-	$z \in Z$
R	zellularer Raum, $r \in R$	
T	Zeitskala, $t \in T$	
$\boldsymbol{X}$	Wort- bzw. Signalraum, $(\boldsymbol{x}\colon T \to X) \in \boldsymbol{X}$ $\boldsymbol{x}(t) = x^t = x$	
$\dot{\boldsymbol{X}}$	Eingabe-Raum, $(\dot{\boldsymbol{x}}\colon R \to \boldsymbol{X}) \in \dot{\boldsymbol{X}}$, $\dot{\boldsymbol{x}}(r) = \boldsymbol{x}^r = \boldsymbol{x}$	
$\dot{X}$	Konfigurationsraum, $(\dot{x}\colon R \to X) \in \dot{X}$	
$(\dot{X})$	Propagationsraum, $((\dot{x})\colon T \to \dot{X}) \in (\dot{X}))$ Entsprechende Bezeichnungen gelten für die aus Z und Y in der gleichen Weise abgeleiteten Mengen.	
$\dot{Z}^\tau$, $\dot{Z}^*$	Zustands-Konfigurationsraum	
$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$\mathbf{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\tau \in \mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}$
$\mathbf{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	
$\boldsymbol{x} \mid T_{\tau_1,\tau_2}$	Einschränkung von $\boldsymbol{x}$ auf T_{τ_1,τ_2} $= T \cap [\tau_1, \tau_2)$	
$\mathfrak{F}(X, Y)$	Menge aller Abbildungen $X \to Y$	
$\mathfrak{P}(X)$	Potenzmenge von X	
$\boldsymbol{S}$	Menge von globalen Systemabbildungen $S\colon \dot{\boldsymbol{X}} \to \dot{\boldsymbol{Y}}$	
$\boldsymbol{S}^\tau$	Menge aller $S_{\dot{\boldsymbol{x}},\tau}$ $(\dot{\boldsymbol{x}} \in \dot{\boldsymbol{X}},\ S \in \boldsymbol{S})$	
$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{S})$	von $\boldsymbol{S}$ erzeugte ω-abgeschlossene Menge von Systemabbildungen	
$\mathfrak{S}$	zellulares System	
$\bar{\boldsymbol{S}}^*$	Klasseneinteilung von $\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{S}^* = \bigcup_\tau \boldsymbol{S}^\tau$	

$\bar{\mathbf{S}}^\tau$	Klasseneinteilung von $\mathbf{S}^\tau$, $\bar{S}\in\bar{\mathbf{S}}^\tau$
$\boldsymbol{F}(F, F_r)$	Überführungsoperator, global (lokal)
$\boldsymbol{g}(g, g_r)$	Ergebnisoperator, global (lokal)
U, $U_{r,t}$	Umgebung
$\varphi_{r,t}(r')$, $[\varphi(r, t, r')]$	Strukturfunktion, lokal (global)
$\dot{X}/U\dot{X}/r, t$,	Klasseneinteilung, $[\dot{x}]_U\in\dot{X}/U$, $[x]_{r,t}\in X/r, t$
S_r^φ, $S_{r,t}^\varphi$, $H_{r,t}$	lokale Systemabbildung
Φ, $(\Phi_{r,t})$	Ausbreitungsfunktion, global (lokal)
$\boldsymbol{\mu}$	Umgebungsfunktion
μ	Nachbarschaftsfunktion der Eingabe (N: Nachbarschaft)
μ_0	Nachbarschaftsfunktion der Ausgabe (N_0: Nachbarschaft)
λ	Nachbarschaftsfunktion des Zustandes (N^* Nachbarschaft)
$\bigtriangledown$	Translationsoperator
A', B', C', D'	lineare Operatoren (lineares System)
f	Überführungsfunktion (diskrete Zeit)
$\bar{f}$	Überführungsfunktion (zeitinvariante Systeme)
$\bar{g}$	Ergebnisoperator (lokal, zeitinvariante Systeme)
μ_1, λ_1, μ_0	Nachbarschaftsfunktionen (diskrete Zeit)
$\bar{\mu}, \bar{\lambda}$	geordnete Nachbarschaftsfunktionen (diskreter Raum)
δ_r	Elementarkonfiguration (lineares System)
$\tilde{f}$	Überführungsoperator (lineares System)
$\tilde{g}$	Ergebnisoperator (lineares System)
T_ζ	Zeta-Transformation
$\mathbf{\Phi}$	Fundamentalmatrix (lineares System)
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$	Systemmatrizen (lineares System)
$\mathbf{H}(\eta, t)$	Gewichtsmatrix (lineares System); Elemente: $h(\eta, t)$
$\mathbf{H}(\eta, \zeta)$	Überführungsmatrix (lineares System), Elemente $h(\eta, \zeta)$
Δ^k	k-te Differenz

Literatur

[1] NEUMANN, J. v.: The theory of self-reproducing automata. In BURKS: Essays on cellular automata. University of Illinois Press, Urbana 1970.
[2] REICHARDT, W., u. GINITIE, G. M.: Zur Theorie der lateralen Inhibition. Kybernetik **1** (1962) S. 155–165.
[3] MARKO, H.: Die Systemtheorie der homogenen Schichten. Kybernetik **5** (1969) S. 221–240.
[4] PRANGISCHWILI, I. W.: Neue Prinzipien der Realisierung von Logik- und Rechenanlagen auf der Grundlage homogener mikroelektronischer Strukturen. Automatika i Telemechanika **10** (1965) S. 1781–1792.
[5] ZUSE, K.: Rechnender Raum. Verlag Vieweg, Braunschweig 1969.
[6] ZADEH, L. A., u. POLAK, E.: System Theory. McGraw-Hill Book Company, New York 1969.
[7] WUNSCH, G.: Systemtheorie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1975.
[8] MERZENICH, W.: Algebraische Charakterisierung additiver Automaten-Arrays. Gesellschaft für Mathematik u. Datenverarbeitung. St. Augustin **1** (1974).
[9] JUGEL, A., u. KARL, I.: Beitrag zur Theorie zellularer Systeme. Dissertation TU Dresden, Dresden 1975.
[10] SZYNKA, G.: Analyse und Synthese zellularer Systeme. Dissertation TU Dresden, Dresden 1976.
[11] CODD, E. F.: Cellular Automata. Academic Press, New York 1968.

Sachwortverzeichnis