Für $c \in C$ und $u \in P$ gilt ferner $\sigma_u(c) = {}^u c$, woraus insbesondere

$$\sigma_u(c\,c') = \sigma_u(c)\,\sigma_u(c') \qquad \text{für} \qquad c, c' \in C$$

folgt. Da k' von den Elementen c erzeugt wird, schließt man hieraus, daß die σ_u *Automorphismen* der Erweiterung k'/k sind. Man verifiziert sogleich, daß $u \mapsto \sigma_u$ ein Homomorphismus $\sigma \cdot P \to \mathrm{Gal}\,(k'/k)$ ist. Der Modul V ist also zu k' isomorph, auf dem C durch Multiplikationen operiert, und P operiert durch Vermittlung von σ. Ein solcher Modul läßt sich unmittelbar *liften*: in der Tat sei K' die der Restklassenkörpererweiterung k'/k (die offensichtlich galoissch ist) entsprechende unverzweigte Erweiterung von K und A' der Ring der ganzen Zahlen von K'. Mittels des kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(K'/K) \to \mathrm{Gal}\,(k'/k)$$

kann man P auf K' und A' (unter Vermittlung von σ) operieren lassen. Andererseits liftet sich C (mittels multiplikativer Repräsentanten) in eine Untergruppe von A'^*, die man auf A' durch Multiplikationen operieren lassen kann. Man verifiziert unmittelbar, daß sich die Wirkungen von C und von P auf A' in einen Homomorphismus $\tilde{\varrho}\colon G \to \mathrm{Aut}_A\,(A')$ fortsetzen, woraus die gesuchte Anhebung folgt.

Anhang

Modulare Charaktere

Die eben dargelegten Resultate gehen in der Hauptsache auf Brauer zurück, der sie in einer etwas anderen Sprache ausgesprochen hat, derjenigen der *modularen Charaktere*. Wir wollen rasch angeben, was es mit diesen Charakteren auf sich hat.

Der Einfachheit halber wollen wir K als hinreichend groß voraussetzen. E sei ein $k[G]$-Modul und G_{reg} die Menge der p-regulären Elemente von G. Wenn $s \in G_{\mathrm{reg}}$ ist, so ist der durch s definierte Endomorphismus s_E von E *diagonalisierbar*. Ist h die Ordnung von s, so sind die Eigenwerte $(\lambda_i)_{i \in I}$ von s_E h-te Einheitswurzeln. Zu jedem $i \in I$ gibt es eine eindeutig bestimmte h-te Einheitswurzel λ_i^* von A, die λ_i als Reduktion besitzt. Wir setzen

$$\varphi_E(s) = \sum_{i \in I} \lambda_i^* \,.$$

Die Funktion φ_E ist eine *zentrale Funktion* auf G_{reg} *mit Werten in* K (und sogar in A); sie heißt *modularer Charakter* von E. (Eine analoge Definition könnte man für jede *lineare algebraische Gruppe* G geben: der modulare Charakter einer linearen Darstellung von G ist eine zentrale Funktion auf der Menge der *halbeinfachen* Elemente von G; sie wird mittels *multiplikativer Repräsentanten* der Eigenwerte von s_E definiert.)

(E_α) seien die verschiedenen einfachen $k[G]$-Moduln (bis auf Isomorphie); φ_α sei der modulare Charakter von E_α.

Satz (Brauer [1]). *Die* φ_α *bilden eine Basis des Raumes der zentralen Funktionen auf* G_{reg}.

(Mit anderen Worten, die Abbildung $[E] \mapsto \varphi_E$ läßt sich linear zu einem *Isomorphismus* von $K \otimes R_k(G)$ auf die Algebra der zentralen Funktionen auf G_{reg} mit Werten in K fortsetzen.)

Korollar. *Die Anzahl der Klassen einfacher* $k[G]$-*Moduln ist gleich der Anzahl der* p-*regulären Klassen von* G.

Beweis des Satzes.

a) Zunächst sind die φ_α über K *linear unabhängig*. Angenommen nämlich, es bestehe eine Relation $\sum a_\alpha \varphi_\alpha = 0$ mit $a_\alpha \in K$, in der die a_α nicht sämtlich Null sind. Indem man die a_α nötigenfalls mit einem Element von K multipliziert, kann man annehmen, daß sie A angehören und daß eines von ihnen nicht zu $\mathfrak{m}$ gehört. Durch Reduktion mod. $\mathfrak{m}$ erhält man

$$\sum \bar{a}_\alpha \bar{\varphi}_\alpha(s) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad s \in G_{\text{reg}}\,,$$

wobei der Strich die Restklassenbildung mod. $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Offensichtlich ist aber

$$\bar{\varphi}_\alpha(s) = Tr_\alpha(s)$$

die Spur von s im $k[G]$-Modul E_α. Ferner sieht man sogleich, daß $Tr_\alpha(x) = Tr_\alpha(s)$ ist, wenn $x \in G$ s als p-reguläre Komponente besitzt. Die obige Formel läßt sich also umschreiben zu

$$\sum \bar{a}_\alpha Tr_\alpha(x) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in G\,,$$

also auch für alle $x \in k[G]$. Nun ist bekanntlich (Dichtigkeitssatz) der Homomorphismus

$$k[G] \to \prod \operatorname{End}(E_\alpha)$$

surjektiv. α sei so gewählt, daß $a_\alpha \neq 0$ ist, ferner sei $u \in \mathrm{End}\,(E_\alpha)$ ein Element der Spur 1 (beispielsweise ein Projektor auf eine Gerade) und x ein Element von $k[G]$, das als Bild u in $\mathrm{End}\,(E_\alpha)$ und 0 in $\mathrm{End}\,(E_\beta)$ für $\beta \neq 0$ besitzt. Dann ergibt sich der Widerspruch $\bar{a}_\alpha \cdot 1 = 0$.

(Dieser Teil des Beweises ist gleichermaßen auf die *algebraischen Gruppen* anwendbar.)

b) Es ist zu zeigen, daß die φ_α den Raum der zentralen Funktionen auf G_{reg} *erzeugen*. Das könnte man aus den Sätzen 1 und 2 schließen. Einfacher ist es, direkt ein Element $E \in K \otimes R_k(G)$ zu konstruieren, dessen modularer Charakter φ_E in einem gegebenen Element $s \in G_{\mathrm{reg}}$ nicht verschwindet und für die nicht zu s konjugierten Elemente von G_{reg} Null ist: man bildet dazu die von s erzeugte zyklische Untergruppe S, nimmt ein Element F von $K \otimes R_k(S) = K \otimes R_K(S)$, dessen Charakter in s gleich 1 und außerhalb s gleich 0 ist, und wählt als E das induzierte Element $E = \mathrm{Ind}\,(F)$. Es ist unmittelbar klar, daß es das Gewünschte leistet.

Die Matrizen C, D, E von § 2 lassen sich in der Sprache der modularen Charaktere folgendermaßen deuten:

χ_i seien die verschiedenen irreduziblen Charaktere von G, φ_α die oben definierten irreduziblen modularen Charaktere und Φ_α die (gewöhnlichen) Charaktere der projektiven Hüllen der E_α über $A[G]$. Die χ_i sind auf G definiert, die Φ_α gleichfalls (sind aber außerhalb von G_{reg} Null, vgl. Satz 2), und die φ_α sind nur auf G_{reg} definiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_\beta(s) &= \textstyle\sum c_{\alpha\beta}\, \varphi_\alpha(s) && \text{für alle} && a \in G_{\mathrm{reg}}\,, \\ \chi_i(s) &= \textstyle\sum d_{\alpha i}\, \varphi_\alpha(s) && \text{für alle} && s \in G_{\mathrm{reg}}\,, \\ \Phi_\beta(s) &= \textstyle\sum d_{\beta i}\, \chi_i(s) && \text{für alle} && s \in G\,. \end{aligned}$$

(Die hier verwendete Matrizenschreibweise ist zu der von Brauer *transponiert.*)

Das Dreieck *cde* geht nach Tensorproduktbildung mit K über in:

$$\begin{tikzcd} \text{Zentr. Funkt. auf } G\text{, die außerhalb } G_{\mathrm{reg}} \text{ verschwinden} \arrow[rr, "c\otimes K"] \arrow[dr, "e\otimes K"'] & & \text{Zentrale Funkt. auf } G_{\mathrm{reg}} \\ & \text{Zentr. Funkt. auf } G \arrow[ur, "d\otimes K"'] & \end{tikzcd}$$

dabei sind die Abbildungen $c \otimes K$, $d \otimes K$, $e \otimes K$ die evidenten Abbildungen (Einschränkung, Einschränkung, Inklusion). Man beachte, daß $c \otimes K$ in Einklang mit Satz 1 ein *Isomorphismus* ist.

Nachtrag

Einige Definitionen

Artinsche *Ringe*

Ein Ring A heißt artinsch, wenn er den folgenden äquivalenten Bedingungen genügt (vgl. Bourbaki, Alg., Chap. VIII, § 2):

a) Jede absteigende Kette von Linksidealen von A bricht ab.

b) Der A-Linksmodul A ist von endlicher Länge.

c) Jeder endlich-erzeugbare A-Linksmodul ist von endlicher Länge.

Wenn A artinsch ist, so ist das Radikal $\mathfrak{r}$ von A nilpotent, und der Ring $S = A/\mathfrak{r}$ ist halbeinfach. Man kann S in ein Produkt $S = \Pi S_i$ einfacher Ringe zerlegen; jedes S_i ist zu einem Matrizenring $M_{n_i}(D_i)$ über einem Körper D_i isomorph und besitzt (bis auf Isomorphie) einen und nur einen einfachen Modul E_i. Jeder halbeinfache A-Modul wird durch $\mathfrak{r}$ annulliert, entspricht also einem S-Modul; wenn er einfach ist, so ist er zu einem der E_i isomorph.

Beispiel. Jede Algebra endlichen Ranges über einem Körper k ist ein artinscher Ring; das gilt insbesondere für die Gruppenalgebra $k[G]$ einer endlichen Gruppe G.

Grothendieck-Gruppen

Es sei A ein Ring und $\mathfrak{F}$ eine Familie von A-Linksmoduln. Grothendieck-Gruppe von $\mathfrak{F}$ (bezeichnet mit $K(\mathfrak{F})$) heißt die abelsche Gruppe, die folgendermaßen durch Erzeugende und Relationen definiert wird:

Erzeugende — Jedem $E \in \mathfrak{F}$ wird eine Erzeugende $[E]$ zugeordnet.

Relationen — Jeder exakten Sequenz

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0 \quad \text{mit} \quad E, E', E'' \in \mathfrak{F}$$

wird die Relation

$$[E] = [E'] + [E'']$$

zugeordnet.

Ist H eine abelsche Gruppe, so entsprechen die Homomorphismen $f\colon K(\mathfrak{F}) \to H$ eineindeutig den Abbildungen $\varphi\colon \mathfrak{F} \to H$, die „additiv" sind, d. h. für jede exakte Sequenz des obigen Typs der Bedingung $\varphi(E) = \varphi(E') + \varphi(E'')$ genügen.

Die beiden meistgebrauchten Beispiele sind die, daß man für $\mathfrak{F}$ alle endlich-erzeugbaren A-Moduln oder alle endlich-erzeugbaren projektiven A-Moduln nimmt.

Projektive Moduln

Es sei A ein Ring und P ein A-Linksmodul. Dann heißt P projektiv, wenn er die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt (vgl. BOURBAKI, Alg., Kap. II, 3. Aufl., § 2):

a) Es gibt einen freien A-Modul, von dem P direkter Faktor ist.

b) Zu jedem surjektiven Homomorphismus $f: E \to E'$ von A-Linksmoduln und jedem Homomorphismus $g': P \to E'$ gibt es einen Homomorphismus $g: P \to E$ mit $g' = f \circ g$.

c) Der Funktor $E \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, E)$ ist exakt.

Dafür, daß ein Linksideal $\mathfrak{a}$ von A direkter Faktor von A als Modul ist, ist notwendig und hinreichend, daß ein $e \in A$ mit $e^2 = e$ und $\mathfrak{a} = A e$ existiert; ein solches Ideal ist ein projektiver A-Modul.

Diskrete Bewertungen

Es sei K ein Körper und K^* die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente von K. Diskrete Bewertung von K (vgl. z. B. [10]) heißt jeder surjektive Homomorphismus $v: K^* \to \boldsymbol{Z}$ mit $v(x + y) \geqq \mathrm{Inf}\,(v(x), v(y))$.

v läßt sich auf K fortsetzen, indem man $v(0) = + \infty$ setzt.

Die Menge A der Elemente $x \in K$ mit $v(x) \geqq 0$ ist ein Unterring von K, der Bewertungsring von v heißt. Er besitzt als einziges maximales Ideal die Menge $\mathfrak{m}$ der $x \in K$ mit $v(x) > 0$. Der Körper $k = A/\mathfrak{m}$ heißt der Restklassenkörper von A (oder von v).

Literaturverzeichnis

Teil I

Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen wird in zahlreichen Werken behandelt. Wir wollen nur zwei von ihnen nennen:

[1] H. WEYL, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leizig 1928 (engl. Übers.: The theory of groups and quantum mechanics, Dover Publications 1931).
(Ein Klassiker — sehr vollständig, enthält insbesondere ein Kapitel über die Darstellungen der symmetrischen Gruppen —. Ein wenig weitschweifig.)

[2] M. HALL, The theory of groups, Macmillan, New-York 1959. (Ein sehr klares Nachschlagwerk über Gruppentheorie — das Kapitel über die Darstellungen enthält die Theorie der „induzierten“ Darstellungen sowie verschiedene interessante Beispiele.)
Hinsichtlich der kompakten Gruppen siehe [1] sowie:

[3] A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris 1940.
(Sehr komprimiert — schwer zu lesen.)

[4] L. LOOMIS, An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand, New-York 1953.
(„Algebraischer“ — und zugänglicher — als das Vorstehende.)
Hinsichtlich der Bewegungsgruppen, ihrer Standardbezeichnungen und ihrer Charakterentafeln siehe:

[5] H. EYRING, J. WALTER and G. KIMBALL, Quantum chemistry, John Wiley and Sons, New-York 1944.
(Die fraglichen Tafeln befinden sich im Anhang VII, S. 376—388.)

[6] W. BURNSIDE, Theory of groups of finite order (2. Aufl., Cambridge 1911) — Nachdruck von Dover Publ. 1955.
(Ein Klassiker — enthält viele Beispiele und Anwendungen der Theorie der Charaktere auf die Struktur endlicher Gruppen.)

[7] S. LANG, Algebra (Chap. XVIII), Addison-Wesley 1965 (russ. Übers.: С. Ленг, Алгебра, Москва 1968).
(Knapp, aber angenehm zu lesen — alle wesentlichen Ergebnisse werden auf 35 Seiten behandelt.)

[8] C. CURTIS and I. REINER, Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience Publ., New-York 1962 (russ. Übers.: Ч. Кэртис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва 1969).
(Ein Nachschlagwerk — schwer, aber sehr vollständig.)

[9] R. BRAUER, Representations of finite groups (in „Lectures on Modern Mathematics“, vol. I, ed. by T. Saaty, John Wiley and Sons, 1963).
(Eine Darstellung der Hauptprobleme der Theorie.)

Hinsichtlich der Theorie der *modularen Darstellungen* siehe Teil II, 1–4, Kap. XII von [8] sowie die (in [8] zitierten) Originalarbeiten von BRAUER.

Für die verschiedenen, den endlichen Gruppen zugeordneten GROTHENDIECK-*Gruppen* siehe die Arbeiten von R. SWAN (Ann. of Math. **71** (1960) und **76** (1962) sowie Topology **2** (1963)).

Teil II

[1] R. BRAUER, Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern, Act. Sci. Ind. 195 (1935), Hermann, Paris.

[2] —, A characterization of the characters of groups of finite order, Ann. of Math. **57** (1953), 357–377.

[3] —, Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, Math. Z. **63** (1956), 406–444.

[4] R. BRAUER and J. TATE, On the characters of finite groups, Ann. of Math. **62** (1955), 1–7.

[5] C. CURTIS and I. REINER, Representation theory of finite groups and associative algebras, Intersc. Publ., New York 1962.

[6] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, **90** (1962), 323–448.

[7] I. GIORGIUTTI, Groupes de Grothendieck, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **26** (1962), 151–207.

[8] I. SCHUR, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, Sitz. Pr. Akad. Wiss. (1906), 164–184.

[9] J.-P. SERRE, Sur la rationalité des représentations d'Artin, Ann. of Math. **72** (1960), 406–420.

[10] —, Corps Locaux, Act. Sci. Ind. 1296 (1962), Hermann, Paris.

[11] J. STROOKER, Faithfully projective modules and clean algebras, Groen et Zoon, Leyden 1965.

[12] R. SWAN, Induced representations and projective modules, Ann. of Math. **71** (1960), 552–578.

[13] —, The Grothendieck group of a finite group, Topology **2** (1963), 85–110.

Sachverzeichnis