

Literaturverzeichnis

- [1] Samuel R. Buss (editor). *Handbook of proof theory*, volume 137 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1998.
- [2] Georg Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.*, 46:481–512, 1895.
- [3] A. Church. A note on the Entscheidungsproblem. *J. Symbolic Logic*, 1:40–41, 1936.
- [4] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 50:1143–1148, 1963.
- [5] Stephen Cook. The importance of the P versus NP question. *J. ACM*, 50(1):27–29 (electronic), 2003.
- [6] S. Barry Cooper. *Computability theory*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [7] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, second edition, 2001.
- [8] Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen. I. *Math. Z.*, 39:176–210, 1934.
- [9] Gerhard Gentzen. *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie*. (Forsch. z. Logik u. z. Grundlegung d. exakt. Wiss. N. F., 4) Leipzig: S. Hirzel. S. 19–44., 1938.
- [10] Kurt Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatsh. Math. Phys.*, 37(1):349–360, 1930.
- [11] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatsh. Math.*, 38:173–198, 1931.
- [12] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 24:556–557, 1938.
- [13] R. L. Goodstein. On the restricted ordinal theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 9(2):33–41, 1944.

- [14] J. Herbrand. Sur le problème fondamental de la logique mathématique. *Sprawozd. Towarz. Nauk. Warszaw., Wydz. III*, 24:12–56, 1931.
- [15] K. Jänich. *Topologie. 8. Aufl.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2005.
- [16] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.
- [17] Laurie Kirby and Jeff Paris. Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bull. London Math. Soc.*, 14(4):285–293, 1982.
- [18] Sabine Koppelberg. *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet.
- [19] Kenneth Kunen. *Set theory*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. An introduction to independence proofs, Reprint of the 1980 original.
- [20] David Marker. *Model theory*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002. An introduction.
- [21] J. A. Robinson. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *J. ACM*, 12(1):23–41, 1965.
- [22] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical Logic*. Addison–Wesley Series in Logic. Addison–Wesley Publishing Company, 1973.
- [23] Robert M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel J. Math.*, 25:287–304, 1976.
- [24] K. Tent and M. Ziegler. *Model Theory*. 2010. In preparation.

Index

- \mathcal{R}_r , 67
- $\alpha + 1$, 55
- $\forall x < t$, 93
- \forall -Einführung, 18
- \forall -Quantorenaxiome, 17
- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, 10
- $\mathfrak{A} \models \phi$, 10
- $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$, 8
- $a \leq b$, 58
- $a \sim b$, 58
- $a \times b$, 45
- $a \times b \times c$, 45
- $|a|$, 58
- \leftrightarrow , 5
- \forall , 5
- $\exists x_1, x_2, \dots, x_n$, 5
- \mathcal{A}^* , 68
- β_x^a , 9
- $\beta(a, b, i)$, 87, 101
- $\beta'(a, i)$, 102
- $\vdash \phi$, 17
- $\vdash_L \phi$, 17
- C_0^0 , 69
- C_m^n , 70
- Δ_a , 90
- $\text{dom}(R)$, 45
- Δ_1^P -Formel, 102
- \vee , 5
- $\vee \dots \vee$, 5
- $\bigvee_{i=1}^N$, 35
- $\exists!$, 46
- \exists -Einführung, 15
- \exists -Quantorenaxiome, 14
- ε_0 , 61
- \exists , 4
- $F_{\mathcal{M}}^n$, 68
- $\phi(x_1, \dots, x_n)$, 9
- ϕ_x^s , 10
- $\lceil \phi \rceil$, 62, 83
- $f(x) = y$, 45
- $f: a \rightarrow b$, 46
- $f[c]$, 46
- $f \upharpoonright c$, 46
- φ^n , 82
- φ_e^n , 82
- $\dot{=}$, 4
- I_i^n , 69
- $\text{Im}(R)$, 45
- \rightarrow , 5
- $<$, 53
- $\mathcal{K}_h^{r,s}$, 70
- K_R , 74
- κ^+ , 59
- $x \leq y$, 53
- \wedge , 4
- $\bigwedge_{i=1}^N$, 35
- $\wedge \dots \wedge$, 5
- L_N , 2
- L_R , 2
- L_{Me} , 2, 41
- $\lg(x)$, 76
- \mathcal{L}^r , 70
- $\mathcal{M}(\mathcal{K})$, 68
- $\models \phi$, 13
- \mathbb{N} , 2
- $N(x, y)$, 77
- \underline{n} , 51
- \mathfrak{N} , 2
- \neg , 4
- On , 55
- ω , 52
- \emptyset , 43
- $\mathfrak{P}(y)$, 45
- p_n , 76
- P , 99
- Π_n^0 -Relation, 91

- Q, 92
- Q^* , 92
- R^{-1} , 46
- S, 2, 69
- $s(x)$, 51
- Σ_1 -Formel, 93
 - im engeren Sinn, 93
- Σ_n^0 -Relation, 91
- Σ_1^p -Funktion, 100
- Sub, 62, 95
- $T \vdash_L \phi$, 21
- $\text{Th}(\)$, 26, 90
- $T_n(m, x_1, \dots, x_n, g)$, 79
- $t^{\frac{s}{x}}$, 10
- $t^{\frac{\beta}{x}}[\beta]$, 8
- $T \vdash \phi$, 23
- $T \models \phi$, 23
- $t(x_1, \dots, x_n)$, 8
- $\bigcup y$, 44
- V, 43
- W_e , 80
- $(x)_i$, 76
- (x, y) , 44
- $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$, 76
- $\{x, y\}$, 44
- x ist frei für s in ϕ , 11
- $x \cap y$, 43
- $x \cup y$, 44
- $x \dot{-} y$, 74
- $x \setminus y$, 43
- $x \subset y$, 43
- (x, y, z) , 45
- $\{z \mid \phi(z, y_1, \dots, y_n)\}$, 42

- Abbildung
 - ordnungstreue, 57
- abgeleitete Axiome und Regeln, 17
- abzählbare Menge, 59
- Ackermann, 73
- Ackermannfunktion, 73
- Addition, 54, 60
- Äquivalenz
 - elementare Ä. von Strukturen, 10
 - Junktor, 5
 - von aussagenlogischen Formeln, 16
 - von Formeln, 33
 - von Theorien, 49
- allgemeingültige
 - aussagenlogische Formel, 13
 - Formel, 13
- Allquantor, 5
 - \forall -Einführung, 18
 - \forall -Quantorenaxiome, 17
 - beschränkter, 93
- Anfangskonfiguration, 68
- archimedischer Körper, 12
- arithmetische Hierarchie, 91
- arithmetische Relation, 89
- atomare Formel, 4
- Aussage, 10
- Aussagenlogik, 13
- aussagenlogische Formel, 13
- Aussagenvariable, 13
- Aussonderungsaxiom, 43
- Auswahlaxiom, 49
- Auswahlfunktion, 57
- Automorphismus, 7
- Axiome des Hilbertkalküls, 17
 - \exists -Quantorenaxiome, 14
 - abgeleitete Axiome
 - \forall -Quantorenaxiome, 17
 - Gleichheit, 14
 - Tautologie, 14
- Axiome von ZFC, 43
 - Aussonderung, 43
 - Auswahl, 49
 - Ersetzung, 46
 - Extensionalität, 42, 43
 - Fundierung, 48
 - Paarmenge, 44
 - Potenzmenge, 45
 - Unendlichkeit, 49
 - Vereinigung, 44
- Belegung, 8
- berechenbare Funktion, 68
- beschränkter Allquantor, 93
- Betafunktion, *siehe* Gödels β -Funktion
- Beth, 32
 - Satz von, 32
- Beweis, 19, 83
- beweisbare Formel, 17
- Beweisbarkeit, 17, 23
- Beweisbarkeitsprädikat
 - von P, 105
 - von ZFC, 63
- bijektive Funktion, 46

- Bildbereich, 45
- Bindungsstärke, 5
- Boolesche Algebra, 15
- CON_p, 106
- CON_{ZFC}, 64
- Cantor, 59
 - Satz von, 59
- Cantorsche Normalform, 61
- CH, 59
- charakteristische Funktion, 74
- Church, 79, 94
 - Satz von, 94
- Churchsche These, 79
- Cobhams Theorie, 92
- Craig, 30
- Craigscher Interpolationssatz, 30
- de Morgan, 16
- de Morgansche Regeln, 16
- Deduktionslemma, 104
- deduktiv abgeschlossene Theorie, 21
- definierbare
 - Menge, 10
 - Relation, 10
- Definitionsbereich, 45
- definitorische Erweiterung, 47
- Diagramm, 19
- Differenzmenge, 43
- Disjunktion, 5
- disjunktive Normalform, 16, 39
- Distributivgesetz, 15
- Durchschnitt, 43
- effektiv axiomatisierbare Theorie, 83
- Eindeutige Lesbarkeit
 - von Formeln, 6
 - von Termen, 4
- Einführung
 - \forall -Einführung, 18
 - \exists -Einführung, 15
 - neuer Funktionszeichen, 47
 - neuer Konstanten, 47
 - neuer Relationszeichen, 47
- Einschränkung
 - einer Funktion, 46
 - einer Struktur, 13
- Einsetzung, 69
- elementare Äquivalenz, 10
- elementare Klasse, 26
- endliche Axiomatisierbarkeit, 26
- endliche Menge, 59
- entscheidbare Theorie, 83
- erblich endliche Menge, 56
- erfüllen, 10
- Ersetzungsaxiom, 46
- Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz, 65, 91
- Erweiterung
 - definitorische, 47
 - konservative, 47
- erzeugte Unterstruktur, 7
- existentielle Formel, 33
- Existenz Einführung, 15
- Existenzquantor, 4
 - \exists -Quantorenaxiome, 14
 - \forall -Einführung, 15
- Expansion, 13
- Exponentiation, 60
- Extensionalitätsaxiom, 42, 43
- Fixpunktsatz
 - Q^* , 95
 - ZFC, 62
 - Kleenescher, 82
- Flußdiagramm, 70
- Formel
 - L -Formel, 4
 - äquivalente, 16, 33
 - allgemeingültige, 13
 - atomare, 4
 - aussagenlogische, 13
 - beweisbare, 17
 - existentielle, 33
 - modallogische, 106
 - quantorenfreie, 33
 - universelle, 33
 - zweitstufige, 97, 103
- Δ_1^P -Formel, 102
- Σ_1 -Formel, 93
 - im engeren Sinn, 93
- Fränkel, 42
 - Zermelo-Fränkel-Mengenlehre, 42
- freies Vorkommen, 9
- fundierte Menge, 48
- Fundierungsaxiom, 48
- Funktion, 45
 - primitiv rekursive, 70
 - berechenbare, 68
 - bijektive, 46

- charakteristische, 74
 - injektive, 46
 - partiell rekursive, 81
 - rekursive, 69
 - surjektive, 46
- Σ_1^P -Funktion, 100
- Funktional, 46, 55
- Funktionszeichen, 2

- Gentzen, 27, 89
- geordnetes Paar, 44
- Gleichheitsaxiome, 14
- Gleichheitszeichen, 4, 25, 34
- gleichmächtige Mengen, 58
- Gödel, 17
 - 1. Unvollständigkeitssatz, 65, 91
 - 2. Unvollständigkeitssatz, 64, 106
 - Vollständigkeitssatz, 17
- Gödelisierung, 77
- Gödelnummer, 76, 77, 83
- Gödels β -Funktion, 87, 101
- Goodstein, 61
 - Satz von, 61
- $\text{GOTO}(r, c_0, \dots, c_L)$, 68
- Graph, 25
- Graph einer Funktion, 45, 89
- Grundmenge, 3
- Gültigkeit, 10

- Halteproblem, 81
- Henkin, 19
- Henkintheorie, 19
- Herbrand, 34
 - Satz von, 35
- Herbrand-Normalform, 34
- Hilbert, 17
- Hilbertkalkül, 17

- Implikation, 5
- Induktion, 55
- Induktionsschema, 99
- injektive Funktion, 46
- Interpolationssatz, 30
- inverse Relation, 46
- irreflexive Relation, 51
- Isomorphie, 3
- Isomorphismus, 3

- Junktor, 4, 16

- Kardinalzahl, 59
- Klammern, 4, 5
- Klasse, 55
- Klausel, 39
- Kleene, 79
 - Fixpunktsatz, 82
 - Normalform, 79
 - Prädikat, 79
- Körperaxiome, 5
- Kompaktheitssatz, 24
 - der Aussagenlogik, 25
- Komprehensionsaxiom, 42
- Konfiguration, 68
- Kongruenzrelation, 14
- Konjunktion, 4
- konjunktive Normalform, 16
- konservative Erweiterung, 47
- konsistente Theorie, 19
- Konstante, 2
- konstante Funktion, 69
- Konstantenzeichen, 2
- konstanter Term, 22
- Kontinuumshypothese, 59
- Kopiermaschine, 70
- Krivine, 13
- Kuratowski, 44
- Kuratowski-Paar, 41, 44

- leere Menge, 43
- L -Formel, 4
- Limeszahl, 55
- lineare Ordnung, 51
- Literal, 39
- Loeb, 63
 - Satz von, 106
- Loeb-Axiome, 63, 105
- Löschmaschine, 70
- Löwenheim, 24
 - Satz von Löwenheim-Skolem, 24
- logische Folgerung, 23, 104
- logische Zeichen, 4
- L -Struktur, 3
- L -Term, 3

- Mächtigkeit, 58
- maximales Element, 58
- Menge
 - abzählbare, 59
 - endliche, 59
 - erblich endliche, 56

- fundierte, 48
 - leere, 43
 - transitive, 51
- modallogische Formel, 106
- Modell, 10, 19
- Modus Ponens, 15
- Morgan, *siehe* de Morgan
- μ -Rekursion, 69
- Multiplikation, 54, 60

- Nachfolgekonfiguration, 68
- Nachfolger, 51, 69
- Nachfolgerkardinalzahl, 59
- Nachfolgeroperation, 2
- Nachfolgerzahl, 55
- Naive Mengenlehre, 42
- natürliche Zahl, 52
- Negation, 4
- Neumann, *siehe* von Neumann
- nichtstandard natürliche Zahl, 54
- Normalform
 - disjunktive, 16, 39
 - Herbrand-Normalform, 34
 - konjunktive, 16
 - pränex, 33
 - Skolem-Normalform, 33

- obere Schranke, 58
- Ordinalzahl, 55
- Ordnung
 - lineare, 51
 - partielle, 51
- ordnungstreue Abbildung, 57

- $P=NP$, 39
- Paar, *siehe* geordnetes Paar
- Paarmenge, 44
- Paarmengenaxiom, 44
- partiell rekursive Funktion, 81
- partielle Ordnung, 51
- Peanoarithmetik, 99
 - zweiter Stufe, 103
- Potenzmenge, 45
- Potenzmengenaxiom, 45
- Prädikat, 2, 74
- pränex Normalform, 33
- Primformel, 4
- primitiv rekursive
 - Arithmetik, 102
 - Funktion, 70
 - Relation, 74
- primitive Rekursion, 69
- Produkt, 45
- Projektionsfunktion, 69
- $PUSH(r, l)$, 68

- Quantor, 4, 5
- quantorenfreie Formel, 33
- Quine, 42

- r.a., *siehe* rekursiv aufzählbar
- Reduktionssatz, 82
- Regeln des Hilbertkalküls, 17
 - abgeleitete Regeln
 - \forall -Einführung, 18
 - Aussagenlogik, 17
 - Existenzeinführung, 15
 - Modus Ponens, 15
- Registermaschine, 67
- Rekursion
 - μ -Rekursion, 69
 - primitive, 69
- Rekursionsatz, 56
- rekursiv
 - aufzählbar, 80
 - trennbar, 91
- rekursive
 - Bijektion, 77
 - Funktion, 69
 - Relation, 74
- Relation, 45
 - primitiv rekursive, 74
 - arithmetische, 89
 - rekursiv aufzählbare, 80
 - rekursive, 74
- Relationszeichen, 2
- Repräsentierung
 - einer Funktion, 94
 - einer Relation, 95
- Resolutionsmethode, 39
- Resultante, 39
- Ring-Sprache, 2
- Rosser, 65
- Rosser'satz, 65
- Russell, 42
- Russellsche Antinomie, 42

- Schlußregeln, *siehe* Regeln des Hilbertkalküls
- Schnittregel, 31

- Schranke
 - obere, 58
- Sequenz, 27
 - allgemeingültige, 27
- Sequenzkalkül, 27
- Shefferscher Strich, 16
- Skolem, 24
 - Normalform, 33
 - Satz von Löwenheim-Skolem, 24
 - Skolemfunktion, 34
- s-m-n-Satz, 82
- Sprache, 2
 - rekursive, 83
- stark rekursive Struktur, 85
- Stelligkeit, 2
- STOP, 68
- Stopkonfiguration, 68
- Struktur, 3
 - stark rekursive, 85
- Substitutionslemma, 11
- Supremum, 60
- surjektive Funktion, 46

- L-Theorie, 19
- Tarski, 25
 - Satz über die Wahrheitsdefinition, 63, 97, 105
 - Tarski-Kriterium, 25
- Tautologie, 14
- Teilmenge, 43
- Term, 3
 - konstanter, 22
- Theorie, 19
 - äquivalente, 49
 - deduktiv abgeschlossene, 21
 - effektiv axiomatisierbare, 83
 - entscheidbare, 83
 - konsistente, 19
 - vollständige, 20, 84
 - widerspruchsfreie, 19
- transitive
 - Menge, 51
 - Relation, 51
- Tripel, 45
- Turing, 73
- Turingmaschine, 73, 79

- Unendlichkeitsaxiom, 49
- Unifikationssatz, 36
- Uniformisierungssatz, 81
- universelle
 - rekursiv aufzählbare Relation, 80
 - Formel, 33
 - partiell rekursive Funktion, 82
- unmittelbarer Nachfolger, 53
- Unterstruktur, 7
 - elementare, 25
- Unvollständigkeitssatz, 64, 65, 91, 106

- Variable, 3
- Vereinigung, 44
- Vereinigungsmengenaxiom, 44
- Volles Komprehensionsaxiom, *siehe* Komprehensionsaxiom
- vollständige Theorie, 20, 84
- vollständiges Diagramm, *siehe* Diagramm
- Vollständigkeitssatz, 17, 28
- von Neumann, 56
 - von Neuman-Hierarchie, 56

- wahre L_N -Theorie, 92
- Wahrheit, 10
- Wahrheitsdefinition, 63, 97, 105
- Wahrheitstafel, 13
- Wahrheitswert, 13
- widerspruchsfreie Theorie, 19
- Wohlordnung, 53
- Wohlordnungssatz, 57
- Wohlordnungstyp, 56
- Wort, 68

- Zeichenreihe, 4
- Zermelo, 42
 - Zermelo-Fränkel-Mengenlehre, 42
- ZFC, 42
- Zorn, 58
- Zornsches Lemma, 58
- zutreffen, 8
- Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz, 64, 106
- zweitstufige Formeln, 84, 97, 103