

# References

1. Adams, R., Fournier, J.: Sobolev Spaces, 2nd edn. Elsevier, Oxford (2003)
2. Alberti, G.: Some remarks about a notion of rearrangement. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **29**, 457–472 (2000)
3. Baernstein, A., II, Taylor, B.A.: Spherical rearrangements, subharmonic functions, and  $*$ -functions in  $n$ -space. *Duke Math. J.* **43**, 245–268 (1976)
4. Baker, J.A.: Integration over spheres and the divergence theorem for balls. *Am. Math. Mon.* **104**, 36–47 (1997)
5. Banach, S.: Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund. Math.* **3**, 133–181 (1922)
6. Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Monografie matematyczne, Varsovie (1932)
7. Bradley, R., Sandifer, E.: Cauchy’s Cours d’analyse. An Annotated Translation. Springer, New York (2009)
8. Brezis, H.: Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson, Paris (1983)
9. Brezis, H., Browder, F.: Partial differential equations in the 20th century. *Adv. Math.* **135**, 76–144 (1998)
10. Brezis, H., Lieb, E.: A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Am. Math. Soc.* **88**, 486–490 (1983)
11. Choquet, G.: Theory of capacities. *Annales de l’Institut Fourier* **5**, 131–295 (1953)
12. Daniell, P.: A general form of integral. *Ann. Math.* **19**, 279–294 (1918)
13. Degiovanni, M., Magrone, P.: Linking solutions for quasilinear equations at critical growth involving the “1-Laplace” operator. *Calc. Var. Part. Differ. Equat.* **36**, 591–609 (2009)
14. De Giorgi, E.: Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)* **14**, 390–393 (1953)
15. De Giorgi, E.: Riflessioni su matematica e sapienza. Accademia Pontaniana, Naples (1996)
16. De Giorgi, E.: Semicontinuity Theorems in the Calculus of Variations. Accademia Pontaniana, Naples (2008)
17. de la Vallée Poussin, C.: Sur l’intégrale de Lebesgue. *Trans. Am. Math. Soc.* **16**, 435–501 (1915)
18. Deny, J., Lions, J.L.: Les espaces du type de Beppo Levi. *Annales de l’Institut Fourier* **5**, 305–370 (1954)
19. Dugac, P.: Histoire de l’analyse. Vuibert, Paris (2003)
20. Ekeland, I.: On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl.* **47**, 324–353 (1974)
21. Ekeland, I.: Nonconvex minimization problems. *Bull. Am. Math. Soc.* **1**, 443–474 (1979)
22. Favard, J.: Cours d’analyse de l’Ecole Polytechnique, tome, vol. I. Gauthier-Villars, Paris (1960)
23. Fréchet, M.: Sur quelques points du Calcul Fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22**, 1–74 (1906)

24. Fréchet, M.: Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait. *Bull. Soc. Math. de France* **43**, 248–265 (1915)
25. Fréchet, M.: Sur le prolongement des fonctions semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes. *Fund. Math.* **7**, 210–224 (1925)
26. Gagliardo, E.: Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **27**, 284–305 (1957)
27. Gagliardo, E.: Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ric. Mat.* **7**, 102–137 (1958)
28. Garnir, H.G., De Wilde, M., Schmets, J.: *Analyse Fonctionnelle*. Birkhäuser, Basel, vol. I (1968), vol. II (1972), vol. III (1973)
29. Giusti, E.: *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Bollati-Boringhieri, Torino (2000)
30. Golse, F., Laszlo, Y., Viterbo, C.: *Analyse Réelle et Complexe*. Ecole Polytechnique, Palaiseau (2010)
31. Guiraldenq, P.: *Émile Borel, 1871–1956. L'espace et le temps d'une vie sur deux siècles*. Librairie Albert Blanchard, Paris (1999)
32. Hadamard, J.: Sur les opérations fonctionnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris* **136**, 351–354 (1903)
33. Hajłasz, P.: Note on Meyers–Serrin's theorem. *Exposition. Math.* **11**, 377–379 (1993)
34. Hanner, O.: On the uniform convexity of  $L^p$  and  $\ell^p$ . *Arkiv för Matematik* **3**, 239–244 (1955)
35. James, R.C.: Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. *Trans. Am. Math. Soc.* **61**, 265–292 (1947)
36. Jensen, J.L.: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math.* **30**, 175–193 (1905)
37. Jordan, C.: Sur la série de Fourier. *C. R. Acad. Sci. Paris* **92**, 228–230 (1881)
38. Kaluza, R., Kostant A., Woyczynski, W.: *The Life of Stefan Banach*. Birkhäuser, Boston (1996)
39. Kahane, J.P.: Naissance et postérité de l'intégrale de Lebesgue. *Gazette des Mathématiciens* **89**, 5–20 (2001)
40. Krantz, S.G., Parks, H.R.: *The Geometry of Domains in Space*. Birkhäuser, Boston (1999)
41. Krantz, S.G., Parks, H.R.: *The Implicit Function Theorem. History, Theory and Applications*. Birkhäuser, Boston (2002)
42. Lebesgue, H.: Sur une généralisation de l'intégrale définie. *C. R. Acad. Sci. Paris* **132**, 1025–1028 (1901)
43. Lebesgue, H.: Intégrale, longueur, aire. *Ann. Mat. Pura Appl.* **7**, 231–359 (1902)
44. Lebesgue, H.: Remarques sur la définition de l'intégrable. *Bull. Sci. Math.* **29**, 272–275 (1905)
45. Lebesgue, H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2nd edn. Gauthier-Villars, Paris (1928)
46. Lebesgue, H.: *Notices d'histoire des mathématiques. L'Enseignement Mathématique*, Genève (1958)
47. Lebesgue, H.: *Measure and the Integral*. Holden-Day, San Francisco (1966)
48. Leray, J.: Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.* **63**, 193–248 (1934)
49. Mawhin, J.: *Analyse, fondements techniques, évolution*, 2nd edn. De Boeck, Paris-Bruxelles (1997)
50. Mawhin, J.: Henri Poincaré et les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. In: *L'héritage scientifique de Poincaré*, pp. 278–301. Belin, Paris (2006)
51. Maz'ya, V.: *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*. Springer, Berlin (2011)
52. Maz'ya, V., Shaposhnikova, T.: *Jacques Hadamard, a Universal Mathematician*. AMS, Providence (1998)
53. Meyer, Y.: Comment mesurer les surfaces? *Gaz. Math.* **109**, 23–36 (2006)
54. Milnor, J.: *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia, Charlottesville (1965)
55. Naumann, J.: *Remarks on the Prehistory of Sobolev Spaces*, prépublication (2002)
56. Nirenberg, L.: On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **13**, 116–162 (1959)

57. Pier, J.P.: Histoire de l'intégration. Masson, Paris (1996); Mathématiques entre savoir et connaissance. Vuibert, Paris (2006)
58. Pietsch, A.: Ein elementarer Beweis des Darstellungssatzes für Distributionen. *Math. Nachr.* **22**, 47–50 (1960)
59. Poincaré, H.: Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. *Am. J. Math.* **12**, 211–294 (1890)
60. Poincaré, H.: Sur les équations de la physique mathématique. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **8**, 57–155 (1894)
61. Riesz, F.: Sur les opérations fonctionnelles linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris* **149**, 974–977 (1909)
62. Riesz, F., Nagy, B.S.: *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 3rd edn. Gauthier-Villars, Paris (1955)
63. Riesz, M.: Sur les ensembles compacts de fonctions sommables. *Acta Szeged Sect. Math.* **6**, 136–142 (1933)
64. Roselli, P., Willem, M.: A convexity inequality. *Am. Math. Mon.* **109**, 64–70 (2002)
65. Roselli, P., Willem, M.: The Lebesgue integral immediately after calculus. *Travaux Mathématiques* **13**, 61–70 (2002)
66. Royden, H.: Aspects of constructive analysis. *Contemp. Math.* **39**, 57–64 (1983)
67. Saks, S.: *Theory of the Integral*. Warsaw–Lvov (1937)
68. Sard, A.: The measure of the critical values of differentiable maps. *Bull. Am. Math. Soc.* **48**, 883–890 (1942)
69. Schwartz, L.: Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques. *Annales de l'Univ. de Grenoble* **21**, 57–74 (1945)
70. Schwartz, L.: Théorie des distributions et transformation de Fourier. *Annales de l'Univ. de Grenoble* **23**, 7–24 (1947)
71. Schwartz, L.: *Théorie des distributions*. Hermann, Paris (1966)
72. Sierpinski, W.: *Leçons sur les nombres transfinis*. Gauthier-Villars, Paris (1928)
73. Smets, D., Willem, M.: Partial symmetry and asymptotic behavior for some elliptic variational problems. *Calc. Var. Part. Differ. Equat.* **18**, 57–75 (2003)
74. Sobolev, S.L.: Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.* **3**, 291–294 (1935)
75. Sobolev, S.L.: Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. *Recueil Mathématique* **43**, 39–71 (1936)
76. Sobolev, S.L.: Sur quelques évaluations concernant les familles de fonctions ayant des dérivées à carré intégrable. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.* **1(X)**, 279–282 (1936)
77. Sobolev, S.L.: Sur un théorème de l'analyse fonctionnelle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.* **XX**, 5–9 (1938)
78. Sobolev, S.L.: *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. American Mathematical Society, Providence (1991)
79. Steiner, J.: Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze. *J. Reine Angew. Math.* **18**, 281–296 (1838)
80. Stieltjes, T.: Recherches sur les fractions continues. *Annales Fac. Sci. Toulouse* **8**, 1–122 (1894)
81. Taylor, A.E.: A study of Maurice Fréchet. *Arch. Hist. Exact Sci.* **27**, 233–235 (1982); **34**, 279–280 (1985); **37**, 25–76 (1987)
82. Tonelli, L.: Sulla rettificazione delle curve. *Atti R. Accad. delle Sci. di Torino* **63**, 783–800 (1908)
83. Tonelli, L.: Sur la quadrature des surfaces. *C. R. Acad. Sci. Paris* **182**, 1198–1200 (1926)
84. Van Schaftingen, J.: Explicit approximation of the symmetric rearrangement by polarizations. *Arch. Math.* **93**, 181–190 (2009)
85. Van Schaftingen, J., Willem, M.: Symmetry of solutions of semilinear elliptic problems. *J. Eur. Math. Soc.* **10**, 439–456 (2008)
86. Vitali, G.: Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta. *Bologna* (1905)
87. Wolontis, V.: Properties of conformal invariants. *Am. J. Math.* **74**, 587–606 (1952)

# Index of Notation

$u^+$  : 2.2.2  
 $u^-$  : 2.2.2  
 $\omega_u$  : 1.3.1  
 $\text{spt } u$  : 2.1.1  
 $\mu_u$  : 2.2.32  
 $m_u$  : 8.3.1  
 $\text{spt } u$  : 2.1.1  
 $u * v$  : 4.3.5  
 $\tau_y u$  : 4.3.5  
 $u^*$  : 8.3.1  
 $u^H$  : 8.3.5  
 $\nabla u$  : 6.1.6  
 $\text{div } u$  : 6.1.6  
 $\Delta u = \text{div } \nabla u$   
 $\|u\|_{L^p(\Omega, \mu)}$  : 4.2.1  
 $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  : 6.1.6  
 $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$  : 6.1.8  
 $\|Du\|_{\mathcal{Q}}$  : 7.3.1  
 $\|u\|_{BV(\mathcal{Q})}$  : 7.3.4  
 $\|\mu\|_{\mathcal{Q}}$  : 5.1.11  
 $|\mu|$  : 5.1.6  
 $\rho_n$  : 4.3.3  
 $\chi_A$  : 1.3.14  
 $\mu(A)$  : 2.2.25  
 $m(A)$  : 2.2.35  
 $p(A)$  : 7.4.2  
 $A^*$  : 8.3.1  
 $A^H$  : 8.3.5  
 $\omega \subset\subset \Omega$  : 4.3.4  
 $V_N$  : 2.4.9  
 $C(\Omega)$  : 2.1.1

$\mathcal{K}(\Omega) : 2.1.1$   
 $\mathcal{D}(\Omega) : 4.3.1$   
 $C_0(\Omega) : 5.1.9$   
 $\mathcal{L}(\Omega, \mu) : 2.2.1$   
 $\mathcal{L}^+(\Omega, \mu) : 2.2.8$   
 $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu) : 2.2.12$   
 $\mathcal{M}(\Omega, \mu) : 2.2.19$   
 $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) : 4.1.8$   
 $L^p(\Omega, \mu) : 4.2.1$   
 $L^p_{\text{loc}}(\Omega) : 4.3.4$   
 $W^{k,p}(\Omega) : 6.1.8$   
 $H^k(\Omega) : 6.1.8$   
 $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) : 6.1.8$   
 $W^{k,p}_0(\Omega) : 6.1.8$   
 $H^k_0(\Omega) : 6.1.8$   
 $W^{s,p}(\Omega) : 6.4.11$   
 $W^{-k,p'}(\Omega) : 8.4.17$   
 $H^{-k}(\Omega) : 8.4.17$   
 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) : 7.2.1$   
 $BV(\Omega) : 7.3.4$   
 $\mathcal{D}^*(\Omega) : 8.4.2$   
 $\mathcal{L}(X, Y) : 3.2.2$   
 $X^* : 5.1.1$   
 $1/p + 1/p' = 1$   
 $p^* = p^*(N) = Np/(N - p)$

*Fundamental Theorem of Calculus*

Let  $u \in C([a, b])$ . For all  $a \leq x \leq b$ , we have

$$\frac{d}{dx} \int_a^x u(t) dt = u(x).$$

Let  $u \in C^1([a, b])$ . For all  $a \leq x \leq b$ , we have

$$\int_a^x \frac{du}{dx}(t) dt = u(x) - u(a).$$

# Index

## C

capacity 7.1.1  
— of degree  $p$  7.2.4  
closed subset 1.2.9  
closure 1.2.11  
coarea formula 7.4.5  
cone 4.1.1  
continuity 1.3.1  
—, uniform 1.3.1  
convergence  
—, simple 1.4.1  
—, uniform 1.4.1  
convex set 4.1.1  
convolution 4.3.5  
covering 1.2.14  
criterion  
—, de la Vallée Poussin 3.1.10  
—, Fréchet 1.2.16  
—, Vitali 3.1.9  
—, Vitali–Dazzell 3.3.15

## D

diffeomorphism 2.4.1, 9.1.1  
distance 1.2.1  
distribution 8.4.2

## E

eigenfunction 8.2.1  
eigenvalue 3.4.1  
—, multiplicity 3.4.1  
—, simple 3.4.1  
eigenvector 3.4.1

elementary solutions 8.4.9  
exponent  
—, conjugate 4.1.8  
—, critical 6.4.2  
exterior normal 9.2.1

## F

frontier 1.2.11  
function  
—, admissible 2.2.32, 8.3.1  
—, bounded variation 7.3.4, 8.4.15  
—, characteristic 1.3.14  
—, concave 4.1.1  
—, convex 4.1.1  
—, distribution 2.2.32, 8.3.1  
—, distance 1.3.16  
—,  $G$ -invariant 8.2.5  
—, harmonic 8.1.4  
—, integrable 2.2.12  
—, locally integrable 4.3.4  
—, lower semicontinuous 1.3.6  
—, measurable 2.2.19  
—, positively homogeneous 4.1.1  
—, quasicontinuous 7.2.11  
—, subharmonic 8.1.4  
—, superharmonic 8.1.4  
—, test 4.3.1  
—, upper semicontinuous 1.3.6

## H

Hilbert basis 3.3.9

**I**

## Identity

- , Parseval 3.3.10
- , parallelogram 3.3.3
- , polarization 3.3.3
- , Pythagorean 3.3.3

## Inequality

- , Bessel 3.3.7
- , capacity 7.2.10
- , Cauchy–Schwarz 3.3.4
- , convexity 4.1.6
- , Faber–Krahn 8.3.20
- , Gagliardo 6.4.1
- , Gagliardo–Nirenberg 7.3.7, 8.3.18
- , Hanner 4.1.9
- , Hardy 6.4.10
- , Hilden 8.3.15
- , Hölder 4.1.9
- , Hölder generalized 4.2.3
- , interpolation 4.2.4
- , isoperimetric 8.3.16
- , Kato 8.4.12
- , mean-value 8.1.5
- , Markov 2.2.33
- , Minkowski 3.1.1, 3.3.4, 4.1.9
- , Morrey 6.4.3
- , Poincaré 6.4.7, 6.4.9
- , Pólya–Szegő 8.3.14
- , Sobolev 6.4.2, 7.2.2
- , trace 6.2.2
- , triangular 1.2.1

## integral

- , elementary 2.2.1
- , Cauchy 2.1.2
- , Lebesgue 2.2.12

## interior 1.2.11

**L**

## lemma

- , Brezis–Lieb 4.2.7
- , closing 6.1.5
- , continuity of translations 4.3.8
- , Degiovanni–Magrone 4.2.8
- , Du Bois-Reymond 6.1.4
- , extension by reflection 6.2.1
- , Fatou 2.2.16
- , von Neumann 5.3.12

**M**

## mapping

- , bounded 1.4.4

- , compact 3.4.5
  - , continuous 1.3.1
  - , uniformly continuous 1.3.1
- measure 5.1.6
- , finite 5.1.11
  - , Lebesgue 2.2.35
  - , outer 7.1.11
  - , positive 2.2.28
  - , scalar 5.1.6
  - of a subset 2.2.25
  - , surface 2.4.6, 9.2.2
  - , vectorial 5.1.6
- modules of continuity 1.3.1

**N**

- norm 3.1.1, 3.2.2

**O**

- orthogonal 5.3.3
- orthonormal 3.3.6
- open subset 1.2.9
- of class  $C^m$  9.2.1
- , cylindrical 6.2.1
- ,  $G$ -invariant 8.2.5

**P**

- partition of unity 4.3.13, 6.1.16
- perimeter 7.4.2
- polarization 8.3.5
- principle
- , Cavalieri 2.2.34
  - , Ekeland's variational 1.3.8
  - , maximum 8.1.6
  - , max-inf 8.2.7
  - , Poincaré 3.4.7, 8.2.2
- product of elementary integrals 2.3.4

**S**

- scalar product 3.3.1
- Schwarz's symmetrization 8.3.1
- sequence
- , bounded 1.2.2

—, Cauchy 1.2.2  
 —, convergent 1.2.2  
 —, fundamental 2.2.4  
 —, minimizing 1.3.4  
 —, regularizing 4.3.3  
 —, truncation 6.1.10  
 —, weakly convergent 5.1.1, 5.3.6, 5.4.4  
 series  
 —, convergent 1.1.12, 3.1.3  
 —, normally convergent 3.1.3  
 set  
 —, closed 1.2.9  
 —, convex 4.1.1  
 —, dense 1.2.10  
 —, measurable 2.2.25  
 —, negligible 2.2.5  
 —, open 1.2.9  
 space  
 —, Banach 3.1.4  
 —, compact 1.2.5  
 —, complete 1.2.5  
 —, dual 5.1.1  
 —, fractional Sobolev 6.4.11  
 —, Hilbert 3.3.13  
 —, Lebesgue 2.2.12, 4.1.8, 4.2.1  
 —, metric 1.2.1  
 —, normed 3.1.1  
 —, precompact 1.2.5  
 —, pre-Hilbert 3.3.1  
 —, separable 1.2.17  
 —, smooth 5.2.1  
 —, Sobolev 6.1.8, 7.2.1  
 —, uniformly convex 5.2.2  
 subsequence 1.2.4  
 support 2.1.1  
 symmetric operator 3.4.2

**T**

theorem

—, annulation 4.3.10  
 —, Ascoli 4.4.1  
 —, Baire 1.2.13  
 —, Banach 5.1.4  
 —, Banach–Steinhaus 3.2.6, 5.1.3, 5.3.8, 5.4.6,  
 8.4.19

—, change of variables 2.4.2, 6.1.11, 9.1.2  
 —, Clarkson 5.4.2  
 —, comparison 2.2.18  
 —, de la Vallée Poussin 5.1.12  
 —, density 4.2.11, 4.3.11  
 —, density in Sobolev spaces 6.3.2  
 —, Deny–Lions 6.1.18  
 —, Dini 1.4.2  
 —, divergence 6.3.4, 9.2.4  
 —, elementary spectral 3.4.8  
 —, extension in Sobolev spaces 6.3.1  
 —, Fréchet–Riesz 5.3.1  
 —, Fubini 2.3.7  
 —, Hahn–Banach 4.1.4, 5.2.7  
 —, Hajtász 6.1.17  
 —, James representation 5.2.6  
 —, Lebesgue’s decomposition 5.3.13  
 —, Lebesgue’s dominated convergence 2.2.17  
 —, Levi 2.2.15  
 —, Morse–Sard 7.4.3, 9.3.1  
 —, partition of unity 4.3.13, 6.1.16  
 —, polar decomposition of vector measures  
 5.3.14  
 —, regularization 4.3.9  
 —, Rellich–Kondrachov 6.4.6  
 —, Riesz representation 5.4.3  
 —, F. Riesz 4.2.9  
 —, M. Riesz 4.4.2  
 —, Riesz–Fischer 3.3.14  
 —, separability 4.2.12  
 —, Sobolev 6.4.4  
 —, trace 6.3.3  
 total variation 7.3.1, 5.1.11  
 trace 6.2.3, 6.3.3

**U**

uniformly integrable 3.1.8  
 upper envelope 1.3.9

**W**

weak derivative 6.1.2  
 Weierstrass test 1.4.6