Sulla formulazione intrinseca della dinamica dei continui alla Cosserat (*).

GIORGIO FERRARESE (Roma)

A DARIO GRAFFI nel suo 70° compleanno

Summary. – *In analogy with ordinary continuous Media* [6], *a intrinsical lagrangean formulation is given for the dynamics of hyperelastic Cosserat's oriented bodies. The* 1° *order Cauchy Problem, in terms of actuals variables*: shifters d_r^{α}, deformation rate $k_{\alpha\beta}$ *and* spin (constrained $\omega_{\alpha\beta}$ *and* free $b_{\alpha\beta}$), *insures the geometric-cinematic compatibility conditions for the metric* $g_{\alpha\beta}$ *and directors* $\boldsymbol{d}_r$.

Introduzione.

Ai continui alla Cosserat (cfr. [1], nonchè [11], Sez. 98) per i quali siano precisate le equazioni costitutive (ad es. continui iperelastici) si possono facilmente estendere, attraverso l'introduzione di tensori tipo Piola-Kirchhoff per gli sforzi e i momenti di sforzo, i metodi della teoria ordinaria dei continui, nonchè le modalità di passaggio da deformazioni infinitesime a deformazioni finite. Si tratta, in sostanza, di esprimere le « caratteristiche » della deformazione (*diretta* o *inversa* a seconda che si adotti il punto di vista lagrangiano ovvero euleriano), cioè gli analoghi dei tensori di Cauchy-Green, mediante lo *spostamento* locale e il *vettore caratteristico* di rotazione del triedro di Cosserat; ciò che presuppone, per il continuo, la scelta di una configurazione di riferimento.

È chiaro che la formulazione corrispondente, in termini delle suddette variabili, risente in modo essenziale di tale scelta; indipendentemente dall'esistenza di configurazioni privilegiate, eventualmente sottintese per le equazioni costitutive (caso di isotropia, ereditarietà, ecc.). Pertanto la formulazione stessa, pur essendo perfettamente legittima, non è la più significativa, e per il tipo di variabili impiegate, generalmente di scarsa rilevanza, e per la presenza di elementi non essenziali.

In realtà, il problema differenziale di evoluzione del continuo fa capo *direttamente* alla configurazione attuale e al comportamento del sistema nell'intorno di questa; onde appaiono preferibili formulazioni che facciano intervenire *variabili di tipo attuale* come la velocità di deformazione e la velocità angolare, libera o vincolata, senza

(*) Entrata in Redazione il 23 aprile 1975.

l'intervento di elementi estranei al problema (1). In questo senso, in stretta analogia con quanto fatto recentemente per i continui ordinari [6], viene presentata una *formulazione intrinseca* della dinamica dei continui alla Cosserat iperelastici, che fa intervenire esclusivamente variabili collegate alla configurazione attuale del sistema e aventi un preciso significato geometrico-cinematico.

Si tratta, anche qui, di una formulazione lagrangiana (locale) che si traduce sostanzialmente in un *problema di Cauchy del 1° ordine*, con ben determinati *dati iniziali* i quali assicurano la «compatibilità» del moto; in particolare il *carattere euclideo* della metrica attuale. L'unicità della soluzione è diretta conseguenza di teoremi classici.

La formulazione gode naturalmente di *tutti i requisiti di invarianza* rispetto alla scelta, e delle coordinate lagrangiane (carattere tensoriale), e del triedro di Cosserat; come si conviene, nell'ambito della Meccanica classica, ad una formulazione relativa ad un generico riferimento fisico.

Questo primo studio, tuttavia, non va oltre la suddetta formulazione, in vista di fissare soltanto alcune direttive di carattere generale per i continui alla Cosserat. Rimangono aperte varie questioni fondamentali e, tra queste, il problema centrale della scelta del potenziale termodinamico, la teoria linearizzata subordinatamente ad opportune ipotesi di stabilità per i dati, le estensioni relativistiche; ciò che sarà oggetto di future ricerche.

1. – Premesse e generalità sui continui alla Cosserat.

Dal punto di vista geometrico, un continuo alla Cosserat è un sistema materiale la cui configurazione generica è definita da un continuo di punti C e da una distribuzione regolare di triedri indeformabili $\{\boldsymbol{d}_r\}$.

Si tratta di uno schema atto a rappresentare, sia pure come comportamento limite, un corpo naturale a molecole rigide, per il quale la struttura locale interna è definita da una terna solidale al generico «elemento» del continuo e dal relativo *tensore d'inerzia specifico* σ_{rs}, *invariabile* per definizione.

Si suole anche dire che, *localmente*, il sistema ha *sei* gradi di libertà: tre per definire la posizione P del generico «elemento» del continuo, e tre per fissare l'orientamento della terna associata $\{\boldsymbol{d}_r\}$, che supporremo, senza restrizione, trirettangola e levogira.

Naturalmente penseremo prefissato un ben determinato riferimento fisico R (solido e scala dei tempi) prescindendo, a priori, da eventuali configurazioni privilegiate per il continuo.

---

(1) Le equazioni stereodinamiche di Eulero, ad esempio, sono generalmente più significative di quelle che fanno capo agli angoli di Eulero o al vettore caratteristico di rotazione [3]; specie nei casi in cui esse costituiscono un sistema *autonomo* del 1° ordine.

Assunto un generico sistema di coordinate lagrangiane (y^α) $(\alpha = 1, 2, 3)$, il moto del continuo, relativo ad R, sarà definito dalle *quattro* funzioni vettoriali

$$OP = OP(t/y)\,, \qquad \boldsymbol{d}_r = \boldsymbol{d}_r(t/y) \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{1}$$

per le quali, oltre alle ipotesi di regolarità in un opportuno campo quadridimensionale, intenderemo soddisfatte le condizioni

$$\boldsymbol{d}_r \cdot \boldsymbol{d}_s = \delta_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, 3). \tag{2}$$

È chiaro che, nell'ambito del prefissato riferimento fisico R, non sono univocamente definite, nè le coordinate y^α, nè le terne $\{\boldsymbol{d}_r\}$. Più precisamente, le y^α sono determinate a meno di una *arbitraria trasformazione invertibile e indipendente dal tempo*:

$$y^\alpha = y^\alpha(y') \qquad \text{con} \qquad \det\left\|\frac{\partial y^\alpha}{\partial y^{\alpha'}}\right\| > 0\,; \tag{3}$$

laddove le funzioni $\boldsymbol{d}_r$ sono definite a meno di una *arbitraria rotazione spaziale* $O_r^{r'}(y)$:

$$\boldsymbol{d}_r = O_r^{r'}(y)\,\boldsymbol{d}_{r'}\,, \qquad \text{con } O_r^{r'}\,O_s^{s'}\,\delta_{r's'} = \delta_{rs}\,, \ \det\|O_r^{r'}\| = 1\,. \tag{4}$$

In ogni caso, in relazione alla configurazione attuale C di cui alle equazioni parametriche $(1)_1$, indicheremo con: $\boldsymbol{e}_\alpha(t/y)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ la *base* localmente associata alle coordinate prescelte y^α; $g_{\alpha\beta}(t/y)$ le componenti del *tensore metrico*; $\Gamma_{\alpha\beta,\varrho}$ e $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\sigma \equiv g^{\sigma\varrho}\Gamma_{\alpha\beta,\varrho}$ i *simboli di Christoffel* di 1ª e 2ª specie rispettivamente; $k_\varrho{}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu}\partial_t g_{\varrho\nu}$ la *velocità di deformazione* e $\omega_\varrho{}^\sigma$ la *velocità angolare* (vincolata); $\boldsymbol{a} = a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ l'*accelerazione lagrangiana.*

Dal punto di vista cinematico, la determinazione delle linee di corrente, cioè della funzione vettoriale $(1)_1$, può essere ricondotta alla risoluzione del seguente sistema differenziale alle derivate totali, *separato*, nelle incognite $\boldsymbol{e}_\alpha$ e $\boldsymbol{v}$ (velocità lagrangiana):

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{e}_\varrho = (k_\varrho{}^\sigma + \omega_\varrho{}^\sigma)\,\boldsymbol{e}_\sigma\,, \qquad \partial_\alpha \boldsymbol{e}_\varrho = \Gamma_{\alpha\varrho}{}^\sigma \boldsymbol{e}_\sigma\,, \\ \partial_t \boldsymbol{v} = a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha\,, \qquad \partial_\alpha \boldsymbol{v} = (k_\alpha{}^\varrho + \omega_\alpha{}^\varrho)\,\boldsymbol{e}_\varrho \qquad (\alpha, \varrho = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{5}$$

Ciò presuppone che i coefficienti $\Gamma_{\alpha\varrho}{}^\sigma$, $k_\varrho{}^\sigma$, $\omega_\varrho{}^\sigma$ e $a_\alpha = g_{\alpha\beta}a^\beta$, oltre ad essere funzioni note di t e delle y^α, soddisfino le seguenti *condizioni di compatibilità* (cfr. [6], n. 2):

$$\begin{cases} \partial_t k_{\varrho\sigma} = \nabla_{(\varrho} a_{\sigma)} + (k_\varrho{}^\nu + \omega_\varrho{}^\nu)(k_{\sigma\nu} + \omega_{\sigma\nu})\,, \qquad \partial_t \omega_{\varrho\sigma} = \nabla_{[\varrho} a_{\sigma]}\,, \\ A_{\alpha\varrho\sigma} \equiv \nabla_\alpha \omega_{\varrho\sigma} - \nabla_\varrho k_{\sigma\alpha} + \nabla_\sigma k_{\varrho\alpha} = 0 \\ R_{\beta\alpha\varrho}{}^\sigma \equiv \partial_\beta \Gamma_{\alpha\varrho}{}^\sigma - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\varrho}{}^\sigma + \Gamma_{\alpha\varrho}{}^\nu \Gamma_{\beta\nu}{}^\sigma - \Gamma_{\beta\varrho}{}^\nu \Gamma_{\alpha\nu}{}^\sigma = 0\,, \end{cases} \tag{6}$$

ove ∇_α indica la *derivazione covariante.*

Queste, a loro volta, suggeriscono di fissare l'attenzione sul sistema differenziale

$$(7)\qquad \partial_t g_{\varrho\sigma}=2k_{\varrho\sigma}\,,\qquad \partial_t k_{\varrho\sigma}=\nabla_{(\varrho}a_{\sigma)}+(k_\varrho{}^\nu+\omega_\varrho{}^\nu)(k_{\sigma\nu}+\omega_{\sigma\nu})\,,\qquad \partial_t\omega_{\sigma\varrho}=\nabla_{[\varrho}a_{\sigma]}\,,$$

il quale *implica le seguenti condizioni del I° ordine per i due tensori* $R_{\beta\alpha\varrho}{}^\sigma$ e $A_{\alpha\varrho\sigma}$, *di tipo lineare ed omogeneo* (cfr. [6], n. 4):

$$(8)\qquad \begin{cases} \partial_t R_{\beta\alpha\varrho}{}^\sigma=-R_{\beta\alpha\varrho}{}^\nu(k_\nu{}^\sigma+\omega_\nu{}^\sigma)+R_{\beta\alpha\nu}{}^\sigma(k_\varrho{}^\nu+\omega_\varrho{}^\nu)-2\nabla_{[\beta}A_{\alpha]\varrho}{}^\sigma\,,\\ \partial_t A_{\alpha\varrho\sigma}=R_{\varrho\sigma\alpha}{}^\nu a_\nu+2(k_{[\varrho}{}^\nu+\omega_{[\varrho}{}^\nu)A_{\sigma]\alpha\nu}-2(k_\alpha{}^\nu+\omega_\alpha{}^\nu)A_{[\varrho\sigma]\nu}\,. \end{cases}$$

Ne consegue che, almeno nel caso analitico, le (6) si possono riassumere nel sistema (7) e nelle *condizioni iniziali* $R_{\beta\alpha\varrho}{}^\sigma=0$, $A_{\alpha\varrho\sigma}=0$ per $t=t_0$; ciò che consente di ricondurre la dinamica dei continui ordinari (iperelastici o con equazioni costitutive più generali) alla risoluzione di un ben determinato problema di Cauchy del 1° ordine di tipo (7).

OSSERVAZIONE. – Si rilevi esplicitamente che il sistema $(5)_1$, assegnati i coefficienti $\Gamma_{\alpha\varrho}{}^\sigma$, $k_\varrho{}^\sigma$ e $\omega_\varrho{}^\sigma$ compatibilmente con le (6), determina univocamente i vettori $\boldsymbol{e}_\alpha$, non appena dette funzioni siano note in un punto O di C_0. D'altra parte, in relazione alle coordinate lagrangiane scelte, in tutto C_0 figurano come dati la metrica $\mathring{g}_{\varrho\sigma}(y)$, nonchè la base locale $\mathring{\boldsymbol{e}}_\varrho(y)$, soddisfacente le limitazioni

$$\partial_\alpha\,\mathring{\boldsymbol{e}}_\varrho=\mathring{\Gamma}_{\alpha\varrho}{}^\sigma(y)\,\mathring{\boldsymbol{e}}_\sigma\,;$$

sì che le condizioni iniziali $\Gamma_{\alpha\varrho}{}^\sigma=\mathring{\Gamma}_{\alpha\varrho}{}^\sigma$ in tutto C_0 ed $\boldsymbol{e}_\varrho=\mathring{\boldsymbol{e}}_\varrho$ in un punto O di C_0, assicurano di fatto, per il teorema di unicità del sistema ai differenziali totali $\partial_\alpha\boldsymbol{e}_\varrho=\mathring{\Gamma}_{\alpha\varrho}{}^\sigma\boldsymbol{e}_\sigma$, che la precedente uguaglianza varrà *dappertutto* in C_0.

2. – Condizioni di compatibilità per il triedro di Cosserat.

Quanto precede riguarda esclusivamente la configurazione puntuale C, cioè le linee di corrente, e non i *direttori* $\boldsymbol{d}_r$, i quali costituiscono una struttura supplementare per il campo C.

È chiaro che anche la determinazione dei suddetti direttori può essere ricondotta a quella di variabili cinematicamente più significative, eventualmente soggette ad ulteriori condizioni di compatibilità.

Più precisamente, introdotte, per il triedro di Cosserat $\{\boldsymbol{d}_r\}$, le *velocità angolari temporale* e *spaziali* rispettivamente:

$$(9)\qquad \boldsymbol{b}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{d}^r\times\partial_t\boldsymbol{d}_r\,,\qquad \boldsymbol{b}_\alpha=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{d}^r\times\partial_\alpha\boldsymbol{d}_r\qquad(\alpha=1,2,3),$$

i vettori $\boldsymbol{d}_r$ saranno subordinati al sistema ai differenziali totali

$$\partial_t \boldsymbol{d}_r = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}_r\,, \qquad \partial_\alpha \boldsymbol{d}_r = \boldsymbol{b}_\alpha \times \boldsymbol{d}_r \qquad (\alpha, r = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Ne consegue, a differenza del caso rigido, che i vettori (9) non possono essere fissati a piacere, in quanto, almeno dal punto di vista locale, devono soddisfare le limitazioni

$$(\partial_t \boldsymbol{b}_\alpha - \partial_\alpha \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\alpha) \times \boldsymbol{d}_r = 0\,, \qquad (\partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha - \partial_\alpha \boldsymbol{b}_\beta - \boldsymbol{b}_\beta \times \boldsymbol{b}_\alpha) \times \boldsymbol{d}_r = 0\;;$$

cioè, in definitiva, le seguenti *condizioni di illimitata* [2] *integrabilità*:

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{b}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\alpha \\ \boldsymbol{B}_{\beta\alpha} \equiv \partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha - \partial_\alpha \boldsymbol{b}_\beta - \boldsymbol{b}_\beta \times \boldsymbol{b}_\alpha = 0\,, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{11}$$

D'altra parte, subordinatamente alle (10), si ha identicamente

$$\partial_t \boldsymbol{b}_\alpha = \partial_t b^r{}_\alpha \boldsymbol{d}_r + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\alpha\,; \qquad \partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha = \partial_\beta b^r{}_\alpha \boldsymbol{d}_r + \boldsymbol{b}_\beta \times \boldsymbol{b}_\alpha\,,$$

nonchè

$$\begin{cases} \partial_\beta \partial_t \boldsymbol{b}_\alpha = \partial_{\beta t} b^r{}_\alpha \boldsymbol{d}_r + \boldsymbol{b}_\beta \times (\partial_t \boldsymbol{b}_\alpha - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\alpha) + \partial_\beta \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\alpha + \boldsymbol{b} \times \partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha \\ \partial_t \partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha = \partial_{t\beta} b^r{}_\alpha \boldsymbol{d}_r + \boldsymbol{b} \times (\partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha - \boldsymbol{b}_\beta \times \boldsymbol{b}_\alpha) + \partial_t \boldsymbol{b}_\beta \times \boldsymbol{b}_\alpha + \boldsymbol{b}_\beta \times \partial_t \boldsymbol{b}_\alpha\,. \end{cases}$$

Di qui, tenuto conto dell'identità $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b}_\beta \times \boldsymbol{b}_\alpha) - \boldsymbol{b}_\beta \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\alpha) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}_\alpha \boldsymbol{b}_\beta - \boldsymbol{b}_\beta \cdot \boldsymbol{b}_\alpha \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\beta) \times \boldsymbol{b}_\alpha$, la seguente formula di commutazione:

$$(\partial_\beta \partial_t - \partial_t \partial_\beta) \boldsymbol{b}_\alpha = (\partial_\beta \boldsymbol{b} - \partial_t \boldsymbol{b}_\beta + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\beta) \times \boldsymbol{b}_\alpha\,. \tag{12}$$

Ciò premesso, è agevole riconoscere che, subordinatamente alla sola $(6)_3$, *le condizioni di compatibilità* (11) per i vettori $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{b}_\alpha$ *si possono riassumere nella* $(11)_1$ *e nella condizione iniziale* $\boldsymbol{B}_{\beta\alpha} = 0$ per $t = t_0$.

Invero la $(11)_1$ implica innanzitutto, avuto riguardo alla (12), la condizione di permutabilità $\partial_\beta \partial_t \boldsymbol{b}_\alpha = \partial_t \partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha$. Al tempo stesso dà luogo, per derivazione diretta rispetto ad y^β, alla seguente espressione della anzidetta derivata seconda:

$$\partial_t \partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha = \partial_\beta \partial_\alpha \boldsymbol{b} + (\partial_t \boldsymbol{b}_\beta - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}_\beta) \times \boldsymbol{b}_\alpha + \boldsymbol{b} \times \partial_\beta \boldsymbol{b}_\alpha\,. \tag{13}$$

Di qui, con l'intervento del tensore $\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}$ di cui alla $(11)_2$, segue la condizione

$$\partial_t \boldsymbol{B}_{\beta\alpha} = (\partial_\beta \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta) \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{B}_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

[2] Come è naturale, se si riflette che la terna $\{\boldsymbol{d}_r\}$ è definita, per ogni «particella» del continuo, a meno di una rotazione spaziale, in conformità della (4).

ovvero, tenuto conto del teorema di Ricci:

$$(\partial_\beta \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta)\boldsymbol{b} \equiv [(\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) b^\gamma]\, \boldsymbol{e}_\gamma = -R_{\beta\alpha}{}^{\gamma\delta} b_\delta \boldsymbol{e}_\gamma\,,$$

il legame differenziale

$$\partial_t \boldsymbol{B}_{\beta\alpha} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{B}_{\beta\alpha} - R_{\beta\alpha}{}^{\gamma\delta} b_\delta \boldsymbol{e}_\gamma\,; \tag{14}$$

ciò che prova l'asserto.

Si rilevi esplicitamente che, in termini di componenti, introdotti i coefficienti (*shifters*) $d_r{}^\varrho \equiv \boldsymbol{d}_r \cdot \boldsymbol{e}^\varrho$, nonchè gli *elementi reciproci* $d^r{}_\varrho$:

$$d^r{}_\varrho d_r{}^\sigma = \delta_\varrho{}^\sigma \sim d^r{}_\varrho d_s{}^\varrho = \delta^r{}_s\,, \tag{15}$$

con che le formule di trasformazione

$$\begin{cases} \boldsymbol{d}_r = d_r{}^\varrho \boldsymbol{e}_\varrho \sim \boldsymbol{e}^\varrho = d_r{}^\varrho \boldsymbol{d}^r\,, \\ \boldsymbol{e}_\varrho = d^r{}_\varrho \boldsymbol{d}_r \sim \boldsymbol{d}^r = d^r{}_\varrho \boldsymbol{e}^\varrho\,, \end{cases} \tag{16}$$

la (14) si traduce nel seguente legame tra la derivata temporale delle $B^r{}_{\beta\alpha} \equiv \boldsymbol{d}^r \cdot \boldsymbol{B}_{\beta\alpha}$ e il tensore di curvatura:

$$\partial_t B^r{}_{\beta\alpha} = -R_{\beta\alpha}{}^{\gamma\delta} b_\delta d^r{}_\gamma \qquad (r, \beta, \alpha = 1, 2, 3). \tag{14'}$$

3. – Compatibilità geometrico-cinematica.

I coefficienti $d_r{}^\varrho$ (ovvero i reciproci $d^r{}_\varrho$) hanno, almeno direttamente, il significato geometrico di cui alla (16). Più precisamente, essi valgono a determinare il triedro di Cosserat $\{\boldsymbol{d}_r\}$ a partire dalla base locale $\{\boldsymbol{e}_\varrho\}$, e viceversa.

In questa accezione, per quanto riguarda le equazioni intrinseche, si potranno considerare due punti di vista, almeno a priori diversi, a seconda che la determinazione dei vettori $\boldsymbol{d}_r$ si riconduca a quella della terna $\{\boldsymbol{e}_\varrho\}$, ovvero la subordini. In realtà, i due casi fanno sostanzialmente capo ad un medesimo problema di Cauchy, e pertanto fisseremo l'attenzione sul primo punto di vista che appare, del resto, il più naturale. Si tratta di assumere come fondamentale il sistema (5), e come subordinato il sistema (10) per la determinazione, non già del triedro $\{\boldsymbol{d}_r\}$, ma dei coefficienti $d_r{}^\varrho$ (ovvero $d^r{}_\varrho$), da cui la metrica di C:

$$g^{\varrho\sigma} = d_r{}^\varrho d_s{}^\sigma \delta^{rs} \sim g_{\varrho\sigma} = d^r{}_\varrho d^s{}_\sigma \delta_{rs}\,. \tag{17}$$

Pertanto, introducendo per brevità il tensore

$$h_\varrho{}^\sigma \equiv k_\varrho{}^\sigma + \omega_\varrho{}^\sigma \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, 3), \tag{18}$$

il sistema (10) si trasforma al modo seguente:

$$\begin{cases} \partial_t d_r{}^{\varrho} \boldsymbol{e}_{\varrho} + d_r{}^{\varrho} h_{\varrho}{}^{\sigma} \boldsymbol{e}_{\sigma} = d_r{}^{\varrho} \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{e}_{\varrho} \\ (\partial_\alpha d_r{}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} d_r{}^{\varrho}) \boldsymbol{e}_{\sigma} = d_r{}^{\varrho} \boldsymbol{b}_\alpha \times \boldsymbol{e}_{\varrho} \qquad (r, \alpha = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Di qui i legami espliciti

$$(19) \qquad \partial_t d_r{}^{\sigma} = d_r{}^{\varrho} (b_{\varrho}{}^{\sigma} - h_{\varrho}{}^{\sigma}) , \qquad \partial_\alpha d_r{}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} d_r{}^{\varrho} = d_r{}^{\varrho} b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} ,$$

ove si è posto

$$(20) \qquad b_{\varrho}{}^{\sigma} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_{\varrho} \times \boldsymbol{e}^{\sigma} , \qquad b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = \boldsymbol{b}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_{\varrho} \times \boldsymbol{e}^{\sigma} \qquad (\alpha, \varrho, \sigma = 1, 2, 3).$$

La $(19)_1$ è suscettibile di varie forme, tutte equivalenti. In particolare può essere tradotta mediante i coefficienti reciproci $d^r{}_{\varrho}$, posto che vale l'identità $d^r{}_{\varrho} \partial_t d_r{}^{\sigma} = - d_r{}^{\sigma} \partial_t d^r{}_{\varrho}$. Si ha pertanto indifferentemente

$$(21) \qquad \partial_t d_r{}^{\sigma} = d_r{}^{\varrho} (b_{\varrho}{}^{\sigma} - h_{\varrho}{}^{\sigma}) \sim \partial_t d^r{}_{\sigma} = d^r{}_{\varrho} (h_{\sigma}{}^{\varrho} - b_{\sigma}{}^{\varrho}) ;$$

ciò che precisa il significato cinematico della derivata temporale dei coefficienti $d^r{}_{\sigma}$:

$$(22) \qquad d_{r\varrho} \partial_t d^r{}_{\sigma} = h_{\sigma\varrho} - b_{\sigma\varrho} \sim k_{\varrho\sigma} = d_{r(\varrho} \partial_t d^r{}_{\sigma)} , \qquad b_{\varrho\sigma} - \omega_{\varrho\sigma} = d_{r[\varrho} \partial_t d^r{}_{\sigma]} .$$

Per quanto invece riguarda la $(19)_2$, essa vale ad esprimere direttamente la connessione $\Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma}$ mediante le $b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma}$ e le $d^r{}_{\varrho}$. Più precisamente si ha, moltiplicando per $d^r{}_{\varrho}$,

$$(23) \qquad \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} + d_r{}^{\sigma} \partial_\alpha d^r{}_{\varrho} ;$$

ciò che corrisponde alla legge di trasformazione dei coefficienti di connessione, nel passaggio dalla base *anolonoma* $\{\boldsymbol{d}_r\}$ a quella *naturale* $\{\boldsymbol{e}_{\varrho}\}$.

In altri termini, i *coefficienti di rotazione di Ricci* $\Gamma_{ar}{}^{s}$ di cui alla derivazione pfaffiana $\delta_a \equiv d_a{}^{\alpha} \partial_\alpha$:

$$(24) \qquad \delta_a \boldsymbol{d}_r = \Gamma_{ar}{}^{s} \boldsymbol{d}_s ; \qquad \delta_a \equiv d_a{}^{\alpha} \partial_\alpha ,$$

non differiscono dalle componenti anolonome del tensore $b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma}$. Si ha cioè

$$(25) \qquad \Gamma_{ar}{}^{s} = b_{ar}{}^{s} \equiv d_a{}^{\alpha} d_r{}^{\varrho} d^s{}_{\sigma} b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} \sim b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = d^a{}_{\alpha} d^r{}_{\varrho} d_s{}^{\sigma} \Gamma_{ar}{}^{s} .$$

Invero, dalla $(10)_2$ segue l'identità $\Gamma_{ar}{}^{s} \boldsymbol{d}_s = d_a{}^{\alpha} \boldsymbol{b}_\alpha \times \boldsymbol{d}_r$, nonchè successivamente

$$\Gamma_{ar}{}^{s} = d_a{}^{\alpha} \boldsymbol{b}_\alpha \times \boldsymbol{d}_r \cdot \boldsymbol{d}^s = d_a{}^{\alpha} d_r{}^{\varrho} d^s{}_{\sigma} \boldsymbol{b}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_{\varrho} \times \boldsymbol{e}^{\sigma} = d_a{}^{\alpha} d_r{}^{\varrho} d^s{}_{\sigma} b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} ,$$

cioè proprio la (25).

D'altra parte il tensore $b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma}$, il cui significato geometrico è stato ora precisato, è in corrispondenza biunivoca con il *tensore di anolonomia* (cfr. [8], p. 100) $a_{\alpha\varrho}{}^{\sigma}$ del riferimento $\{\boldsymbol{d}_r\}$:

$$a_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} \equiv (\partial_\varrho d^r{}_\alpha - \partial_\alpha d^r{}_\varrho)\, d_r{}^{\sigma} . \tag{26}$$

Più precisamente valgono i legami invertibili

$$b_{\alpha\varrho\sigma} = \tfrac{1}{2}(a_{\sigma\alpha,\varrho} + a_{\alpha\varrho,\sigma} - a_{\varrho\sigma,\alpha}) \sim a_{\alpha\varrho,\sigma} = b_{\alpha\varrho\sigma} - b_{\varrho\alpha\sigma} ; \tag{27}$$

come risulta direttamente dalla (23), esplicitando i simboli di Christoffel in termini delle $d^r{}_\varrho$ e derivate prime, mediante la (17).

Del resto, il tensore di anolonomia è collegato direttamente alle parentesi di Poisson relative alle derivate pfaffiane δ_a:

$$[\delta_a, \delta_r] \equiv \delta_a \delta_r - \delta_r \delta_a = a_{ar}{}^{s} \delta_s \qquad (a, r = 1, 2, 3) \tag{28}$$

e, come tale, è subordinato alle tre identità differenziali di Jacobi

$$\delta_b a_{ar}{}^{s} + \delta_a a_{rb}{}^{s} + \delta_r a_{ba}{}^{s} = a_{cb}{}^{s} a_{ar}{}^{c} + a_{ca}{}^{s} a_{rb}{}^{c} + a_{cr}{}^{s} a_{ba}{}^{c} . \tag{29}$$

Analogamente vale l'identità

$$\delta_a \boldsymbol{d}_r - \delta_r \boldsymbol{d}_a = a_{ar}{}^{s} \boldsymbol{d}_s \equiv a_{ar,s} \boldsymbol{d}^s , \tag{28'}$$

da cui i legami invertibili [3]

$$\Gamma_{ars} = \tfrac{1}{2}(a_{sa,r} + a_{ar,s} - a_{rs,a}) \sim a_{ar,s} = \Gamma_{ars} - \Gamma_{ras} , \tag{27'}$$

equivalenti alla (27), in virtù della (25).

In definitiva, insieme alle condizioni iniziali

$$R_{\beta\alpha\varrho}{}^{\sigma} = 0 , \qquad A_{\alpha\varrho\sigma} = 0 \qquad \text{per } t = t_0 , \tag{30}$$

la compatibilità geometrico-cinematica si riassume nell'insieme delle equazioni $(7)_{2,3}$ e (21)-(23). Queste, a loro volta, con l'intervento del tensore $h_\varrho{}^{\sigma} \equiv k_\varrho{}^{\sigma} + \omega_\varrho{}^{\sigma}$, riassuntivo della velocità di deformazione e della velocità angolare vincolata, equivalgono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \partial_t d^r{}_\varrho = d^r{}_\sigma (h_\varrho{}^{\sigma} - b_\varrho{}^{\sigma}) \\ \partial_t h_\varrho{}^{\sigma} = \nabla_\varrho a^{\sigma} - h_\varrho{}^{\nu} h_\nu{}^{\sigma} \qquad (r, \varrho, \sigma = 1, 2, 3), \end{cases} \tag{31}$$

---

[3] Cfr. ad es. [2] p. 69, tenendo conto che la base $\{\boldsymbol{d}_r\}$ è *ortonormale*: $\boldsymbol{d}_r \cdot \boldsymbol{d}_s = \delta_{rs}$.

con l'intesa che sia

$$(32)\qquad \begin{cases} \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} + d_r{}^{\sigma}\,\partial_\alpha d^r{}_\varrho \\ b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = \frac{1}{2} d^{r\sigma} d_r{}^{\beta}(a_{\beta\alpha,\varrho} + a_{\alpha\varrho,\beta} - a_{\varrho\beta,\alpha})\ ; \qquad a_{\beta\alpha,\varrho} = (\partial_\alpha d^r{}_\beta - \partial_\beta d^r{}_\alpha)\, d_{r\varrho}\ . \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. – Si noti, incidentalmente, che anche il tensore di cui alla $(11)_2$ ha un significato geometrico preciso. Innanzitutto, posto che vale l'identità $\boldsymbol{b}_\alpha \times \boldsymbol{b}_\beta = b_{\alpha\varepsilon\mu} b_\beta{}^{\varepsilon}{}_\nu \boldsymbol{e}^\mu \times \boldsymbol{e}^\nu$ [4], esso non differisce da $B_{\beta\alpha\varrho}{}^{\sigma} = \nabla_\beta b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} - \nabla_\alpha b_{\beta\varrho}{}^{\sigma} + b_{\alpha\varepsilon\varrho} b_\beta{}^{\varepsilon\sigma} - b_{\beta\varepsilon\varrho} b_\alpha{}^{\varepsilon\sigma}$. D'altra parte, a meno di termini simmetrici rispetto agli indici α e β, si ha successivamente, in virtù del legame (23),

$$\begin{aligned} \nabla_\beta b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} &= \partial_\beta(\Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} - d_r{}^{\sigma}\,\partial_\alpha d^r{}_\varrho) - \Gamma_{\beta\varrho}{}^{\nu}(\Gamma_{\alpha\nu}{}^{\sigma} - d_r{}^{\sigma}\,\partial_\alpha d^r{}_\nu) + (b_{\beta\nu}{}^{\sigma} + d_r{}^{\sigma}\,\partial_\beta d^r{}_\nu)\, b_{\alpha\varrho}{}^{\nu} = \\ &= \partial_\beta \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} - \partial_\beta d_r{}^{\sigma}\,\partial_\alpha d^r{}_\varrho - \Gamma_{\beta\varrho}{}^{\nu}\Gamma_{\alpha\nu}{}^{\sigma} + \Gamma_{\beta\varrho}{}^{\nu} d_r{}^{\sigma}\,\partial_\alpha d^r{}_\nu + b_{\beta\nu}{}^{\sigma} b_{\alpha\varrho}{}^{\nu} + \\ &+ d_r{}^{\sigma}\,\partial_\beta d^r{}_\nu(\Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\nu} - d_s{}^{\nu}\,\partial_\alpha d^s{}_\varrho) = \partial_\beta \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} - \partial_\beta d_r{}^{\sigma}\,\partial_\alpha d^r{}_\varrho - \Gamma_{\beta\varrho}{}^{\nu}\Gamma_{\alpha\nu}{}^{\sigma} + \\ &+ b_{\beta\nu}{}^{\sigma} b_{\alpha\varrho}{}^{\nu} + d^r{}_\nu d_s{}^{\nu}\,\partial_\beta d_r{}^{\sigma}\,\partial_\alpha d^s{}_\varrho = \partial_\beta \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} - \Gamma_{\beta\varrho}{}^{\nu}\Gamma_{\alpha\nu}{}^{\sigma} + b_{\beta\nu}{}^{\sigma} b_{\alpha\varrho}{}^{\nu}\ , \end{aligned}$$

in modo che $B_{\beta\alpha\varrho}{}^{\sigma}$ *si identifica con il tensore di curvatura.*

In altri termini, *per ogni riferimento anolonomo ortonormale* $\{\boldsymbol{d}_r\}$, il tensore $b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma}$, associato alla connessione $\Gamma_{ar}{}^{s}$ (coefficienti di rotazione di Ricci) in conformità della (25), dà luogo alla seguente espressione del tensore di curvatura:

$$(33)\qquad R_{\beta\alpha\varrho}{}^{\sigma} \equiv B_{\beta\alpha\varrho}{}^{\sigma} = \nabla_\beta b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} - \nabla_\alpha b_{\beta\varrho}{}^{\sigma} - b_{\alpha\varrho}{}^{\nu} b_{\beta\nu}{}^{\sigma} + b_{\beta\varrho}{}^{\nu} b_{\alpha\nu}{}^{\sigma}\ .$$

Di qui, direttamente, la forma anolonoma:

$$\begin{aligned} (33')\qquad R_{bar}{}^{s} &= \nabla_b \Gamma_{ar}{}^{s} - \nabla_a \Gamma_{br}{}^{s} - \Gamma_{ar}{}^{k}\Gamma_{bk}{}^{s} + \Gamma_{br}{}^{k}\Gamma_{ak}{}^{s} \equiv \delta_b \Gamma_{ar}{}^{s} - \delta_a \Gamma_{br}{}^{s} + \\ &+ \Gamma_{ar}{}^{k}\Gamma_{bk}{}^{s} - \Gamma_{br}{}^{k}\Gamma_{ak}{}^{s} - a_{ba}{}^{k}\Gamma_{kr}{}^{s}\ . \end{aligned}$$

4. – Generalità sulla dinamica dei continui alla Cosserat.

Dal punto di vista dinamico, per un continuo alla Cosserat valgono le seguenti equazioni indefinite, conseguenza diretta del sistema cardinale della Meccanica (cfr.

---

[4] Invero si ha successivamente

$$\boldsymbol{b}_\alpha \times \boldsymbol{b}_\beta = \tfrac{1}{4}(b_{\alpha\varrho\varepsilon}\eta^{\varrho\varepsilon\mu}\boldsymbol{e}_\mu) \times (b_\beta{}^{\tau\sigma}\eta_{\tau\sigma\nu}\boldsymbol{e}^\nu) = \tfrac{1}{4} b_{\alpha\varrho\varepsilon} b_\beta{}^{\tau\sigma}\eta^{\varrho\varepsilon\mu}\eta_{\tau\sigma\nu}\boldsymbol{e}_\mu \times \boldsymbol{e}^\nu\ ,$$

con $\nu \neq \mu$ e pertanto

$$\eta^{\varrho\varepsilon\mu}\eta_{\tau\sigma\nu} = \delta^\varrho{}_\nu(\delta^\varepsilon{}_\tau\delta^\mu{}_\sigma - \delta^\varepsilon{}_\sigma\delta^\mu{}_\tau) - \delta^\varepsilon{}_\nu(\delta^\varrho{}_\tau\delta^\mu{}_\sigma - \delta^\varrho{}_\sigma\delta^\mu{}_\tau)\ ,$$

da cui l'asserto.

ad es. [4], p. 242):

$$(34) \qquad \begin{cases} \mu(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{a}) - \dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\sigma(\sqrt{g}\,\boldsymbol{\Phi}^\sigma) = 0\,, \\ \mu(\boldsymbol{M}-\partial_t\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{e}_\sigma \times \boldsymbol{\Phi}^\sigma - \dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\sigma(\sqrt{g}\,\boldsymbol{\Psi}^\sigma) = 0\,, \end{cases}$$

essendo $\boldsymbol{k}$ il *momento intrinseco* specifico (5) delle quantità di moto; $\boldsymbol{\Phi}^\sigma$ e $\boldsymbol{\Psi}^\sigma$ i vettori caratteristici degli sforzi e dei momenti di sforzo:

$$(35) \qquad \boldsymbol{k} = \sigma_{rs} b^s \boldsymbol{d}^r\,, \qquad \boldsymbol{\Phi}^\sigma = \Phi_r{}^\sigma \boldsymbol{d}^r\,, \qquad \boldsymbol{\Psi}^\sigma = \Psi_r{}^\sigma \boldsymbol{d}^r\,.$$

Alle (34) vanno naturalmente aggiunte le equazioni lagrangiane di conservazione della massa e dell'inerzia intrinseca:

$$\mu = \mu_0\sqrt{g_0/g}\,, \qquad \sigma_{rs} = \sigma^0{}_{rs}\,.$$

Si avrà pertanto

$$\partial_t \boldsymbol{k} = \sigma_{rs}(\partial_t b^s \boldsymbol{d}^r + b^s \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}^r)\,,$$

con $\partial_t b^s \equiv \partial_t(d^s{}_\nu b^\nu) = d^s{}_\nu \partial_t b^\nu + \partial_t d^s{}_\nu b^\nu$, ovvero, come dalla $(21)_2$, posto che $b_\nu{}^\sigma b^\nu \equiv$ $\equiv \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{e}^\sigma \cdot \boldsymbol{b} = 0$: $\partial_t b^s = d^s{}_\sigma(\partial_t b^\sigma + h_\nu{}^\sigma b^\nu)$. Ne consegue, introdotte le componenti naturali del tensore d'inerzia:

$$(37) \qquad \sigma_{\varrho\sigma} \equiv d^r{}_\varrho d^s{}_\sigma \overset{0}{\sigma}_{rs}\,,$$

a forma esplicita di $\partial_t \boldsymbol{k}$:

$$(38) \qquad \partial_t \boldsymbol{k} = [\sigma_{\varrho\sigma}(\partial_t b^\sigma + h_\nu{}^\sigma b^\nu) + \sigma_{\nu\sigma} b^\sigma b^\nu{}_\varrho]\,\boldsymbol{e}^\varrho\,.$$

Ciò posto, proiettando le equazioni (34) sulla base $\{\boldsymbol{e}_\varrho\}$, si ottengono i seguenti legami scalari:

$$(39) \qquad \begin{cases} \mu(F_\varrho - a_\varrho) - \nabla_\sigma \Phi_\varrho{}^\sigma = 0 \\ \mu[M_\varrho - \sigma_{\varrho\sigma}(\partial_t b^\sigma + h_\nu{}^\sigma b^\nu) - \sigma_{\nu\sigma} b^\sigma b^\nu{}_\varrho] + \Phi_\nu{}^\sigma \eta^\nu{}_{\sigma\varrho} - \nabla_\sigma \Psi_\varrho{}^\sigma = 0 \end{cases} \qquad (\varrho = 1, 2, 3).$$

È chiaro che le equazioni lagrangiane (39), pur non riferendosi alla base $\{\boldsymbol{d}_r\}$, sono di *tipo intrinseco*, come nel caso dei continui ordinari; in quanto fanno capo ad un triedro $\{\boldsymbol{e}_\varrho\}$ dipendente, per ogni « particella » del sistema, dal tempo t, e come tale incognito. Ne consegue che esse non equivalgono alle (34), ma vanno associate alle equazioni per la determinazione del triedro stesso.

(5) Si vuol dire riferito all'unità di massa di C.

In ogni caso, per quanto riguarda la *potenza nominale* delle forze intime, vale l'espressione

$$W_n^{(i)} = \int_C (\boldsymbol{\Phi}^\sigma \cdot \partial_\sigma \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{e}_\sigma \times \boldsymbol{\Phi}^\sigma \cdot \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Psi}^\sigma \cdot \partial_\sigma \boldsymbol{\eta})\, dC\,, \tag{40}$$

essendo $\boldsymbol{\xi}$ ed $\boldsymbol{\eta}$ due campi vettoriali arbitrari, regolari nella chiusura di C.

In particolare, in corrispondenza ad un qualunque moto $\mathcal{M}$ del continuo e al generico istante, la potenza effettiva sarà data dall'integrale

$$W^{(i)} = \int_C (\boldsymbol{\Phi}^\sigma \cdot \partial_\sigma \boldsymbol{v} - \boldsymbol{e}_\sigma \times \boldsymbol{\Phi}^\sigma \cdot \boldsymbol{b} + \Psi^\sigma \cdot \partial_\sigma \boldsymbol{b})\, dC\,. \tag{41}$$

Come è naturale, la potenza $W^{(i)}$ non dipende dalla scelta delle coordinate lagrangiane e dipende, viceversa, dal triedo di Cosserat $\{\boldsymbol{d}_r\}$ solo attraverso la sua velocità angolare $\boldsymbol{b}$. Pertanto, detta potenza è *invariantiva* per trasformazioni del tipo (3)-(4) (*principio di obiettività*). Inoltre essa è invariante per una trasformazione dell'atto di moto del tipo $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times OP$, $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\omega}$, con $\boldsymbol{v}_0$ ed $\boldsymbol{\omega}$ *costanti* (in C); cioè non dipende dalla scelta del solido di riferimento (*principio di indifferenza materiale*).

In ogni modo, dalla (41) si ricava agevolmente (cfr. [4], p. 244, nonchè [5]) la seguente espressione generale della potenza specifica $w^{(i)}$:

$$w^{(i)} = \Phi_r{}^\sigma \partial_t d^r{}_\sigma + \Psi_r{}^\sigma \partial_t b^r{}_\sigma\,, \tag{42}$$

la quale precisa il significato dinamico delle *diciotto* variabili di tipo *attuale* $d^r{}_\sigma \equiv \boldsymbol{d}^r \cdot \boldsymbol{e}_\sigma$ e $b^r{}_\sigma \equiv \boldsymbol{d}^r \cdot \boldsymbol{b}_\sigma$ precedentemente introdotte.

5. – Continui alla Cosserat di tipo iperelastico.

Nel seguito, per fissare l'attenzione su di una classe concreta di continui alla Cosserat, supporremo che il sistema sia a *trasformazioni reversibili, isoterme o adiabatiche, esente da vincoli* (interni e in superficie). Si vuol dire, brevemente, un sistema iperelastico libero. In questo caso, essendo le $d^r{}_\sigma$ e $b^r{}_\sigma$ *variabili libere*, e valendo la (42) per ogni trasformazione del continuo e a ciascun istante (si vuol dire per ogni scelta delle variabili $\partial_t d^r{}_\sigma$ e $\partial_t b^r{}_\sigma$), i principi della termodinamica assicurano l'esistenza di una «funzione potenziale» $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y/d/b)$ tale che sia, in C,

$$\Phi_r{}^\sigma = -\mu \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma}\,, \qquad \Psi_r{}^\sigma = -\mu \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b^r{}_\sigma} \qquad (r, \sigma = 1, 2, 3)\,. \tag{43}$$

Ne conseguono, in particolare, le espressioni omogenee

$$\Phi_\varrho{}^\sigma = -\mu d^r{}_\varrho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma}\,, \qquad \Psi_\varrho{}^\sigma = -\mu d^r{}_\varrho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b^r{}_\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, 3)\,, \tag{43'}$$

che consentono di eliminare nelle (39) gli sforzi e i momenti di sforzo, con l'intervento delle variabili $d^r{}_\sigma$ e $b^r{}_\sigma$.

Più precisamente si ha, tenuto conto dell'equazione di continuità,

$$\begin{cases} a_\varrho = F_\varrho + d^r{}_\varrho \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma}\left(\dfrac{1}{\mu_0}\partial_\sigma \mu_0 + \mathring{\Gamma}_{\sigma\alpha}{}^\alpha - \Gamma_{\sigma\alpha}{}^\alpha\right) + \nabla_\sigma\left(d^r{}_\varrho \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma}\right), \\ \sigma_{\varrho\sigma}(\partial_t b^\sigma + h_\nu{}^\sigma b^\nu) + \sigma_{\nu\sigma} b^\sigma b^\nu{}_\varrho = M_\varrho - \eta^\nu{}_{\sigma\varrho} d^r{}_\nu \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma} + \\ \qquad + d^r{}_\varrho \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial b^r{}_\sigma}\left(\dfrac{1}{\mu_0}\partial_\sigma\mu_0 + \mathring{\Gamma}_{\sigma\alpha}{}^\alpha - \Gamma_{\sigma\alpha}{}^\alpha\right) + \nabla_\sigma\left(d^r{}_\varrho \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial b^r{}_\sigma}\right) \qquad (\varrho = 1, 2, 3)\,. \end{cases} \tag{44}$$

Il sistema (44) si può utilmente trasformare, eliminando i coefficienti di connessione $\Gamma_{\alpha\varrho}{}^\sigma$ mediante la (23), ovvero la $(19)_2$. Invero, sviluppando la derivata covariante ∇_σ, posto che si ha $\nabla_\sigma d^r{}_\varrho = -d^r{}_\nu b_{\sigma\varrho}{}^\nu$, la (44) si scrive al modo seguente:

$$\begin{cases} a_\varrho = F_\varrho + d^r{}_\varrho\left[\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma}\left(\dfrac{1}{\mu_0}\partial_\sigma\mu_0 + \mathring{\Gamma}_{\sigma\alpha}{}^\alpha\right) + \partial_\sigma\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma}\right)\right] - d^r{}_\nu b_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma}\,, \\ \sigma_{\varrho\sigma}(\partial_t b^\sigma + h_\nu{}^\sigma b^\nu) + \sigma_{\nu\sigma} b^\sigma b^\nu{}_\varrho = M_\varrho - \eta^\nu{}_{\sigma\varrho} d^r{}_\nu \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial d^r{}_\sigma} + \\ \qquad + d^r{}_\varrho\left[\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial b^r{}_\sigma}\left(\dfrac{1}{\mu_0}\partial_\sigma\mu_0 + \mathring{\Gamma}_{\sigma\alpha}{}^\alpha\right) + \partial_\sigma\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial b^r{}_\sigma}\right)\right] - d^r{}_\nu b_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial b^r{}_\sigma}\,. \end{cases}$$

Di qui, in definitiva, la *forma tensoriale*

$$\begin{cases} a_\varrho = F_\varrho + \dfrac{1}{\mu_0} d^r{}_\nu\left[\nabla^0{}_\sigma\left(\dfrac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma}\right)\delta_\varrho{}^\nu - b_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma}\right], \\ \sigma_{\varrho\sigma}(\partial_t b^\sigma + h_\nu{}^\sigma b^\nu) + \sigma_{\nu\sigma} b^\sigma b^\nu{}_\varrho = \\ \qquad = M_\varrho - \dfrac{1}{\mu_0} d^r{}_\nu\left[\eta_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma} + b_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial W}{\partial b^r{}_\sigma} - \nabla^0{}_\sigma\left(\dfrac{\partial W}{\partial b^r{}_\sigma}\right)\delta_\varrho{}^\nu\right] \qquad (\varrho = 1, 2, 3)\,, \end{cases} \tag{44'}$$

ove si è posto

$$W = \mu_0 \mathcal{F}\,, \qquad \nabla^0{}_\sigma\left(\frac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma}\right) \equiv \partial_\sigma\left(\frac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma}\right) + \mathring{\Gamma}_{\sigma\alpha}{}^\alpha \frac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\partial_\sigma\left(\sqrt{g_0}\frac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma}\right). \tag{45}$$

6. – Problema di Cauchy.

In vista di formulare il problema (locale) di Cauchy per i sistemi alla Cosserat iperelastici, considereremo due casi.

a) Forze e momenti di massa dipendenti dalla velocità lagrangiana.

In questo caso, tra le variabili è necessario far intervenire la velocità lagrangiana stessa, tenendo conto dei legami identici

$$\begin{cases} a_\varrho \;= \partial_t v_\varrho - v^\sigma \nabla_\varrho v_\sigma \sim a^\varrho = \partial_t v^\varrho + v^\sigma \nabla_\sigma v^\varrho \\ h_\varrho{}^\sigma = \nabla_\varrho v^\sigma \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, 3)\,. \end{cases} \tag{46}$$

Vale allora la seguente formulazione (6), costituita dal *problema di Cauchy del 1° ordine*, nelle incognite $d^r{}_\varrho$, v_ϱ e b^σ:

$$\begin{cases} \partial_t d^r{}_\varrho = d^r{}_\sigma(\nabla_\varrho v^\sigma - b_\varrho{}^\sigma) \sim \partial_t d_r{}^\varrho = d_r{}^\sigma(b_\sigma{}^\varrho - \nabla_\sigma v^\varrho)\,, \\ \partial_t v_\varrho = \partial_\varrho\left(\dfrac{1}{2}v^2\right) + F_\varrho - \dfrac{1}{\mu_0} d^r{}_\nu \left[b_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma} - \nabla^0{}_\sigma\left(\dfrac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma}\right)\delta_\varrho{}^\nu\right], \\ \sigma_{\varrho\sigma}\,\partial_t b^\sigma = -\,b^\nu[\sigma_{\varrho\sigma}\nabla_\nu v^\sigma + \sigma_{\sigma\nu} b^\sigma{}_\varrho] + \\ \qquad + M_\varrho - \dfrac{1}{\mu_0} d^r{}_\nu \left[\eta_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma} + b_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial W}{\partial b^r{}_\sigma} - \nabla^0{}_\sigma\left(\dfrac{\partial W}{\partial b^r{}_\sigma}\right)\delta_\varrho{}^\nu\right] \qquad (\varrho = 1, 2, 3)\,, \end{cases} \tag{47}$$

con l'intesa che, insieme alle (17) e (32), si abbia

$$\begin{cases} b_\varrho{}^\sigma \;= b^\nu \eta_{\nu\varrho}{}^\sigma \sim b^\nu = \frac{1}{2} b_\varrho{}^\sigma \eta^{\nu\varrho}{}_\sigma\,, \\ b_{\alpha\varrho\sigma} = d_r{}^\nu b^r{}_\alpha \eta_{\nu\varrho\sigma} \sim b^r{}_\alpha = \frac{1}{2} d^r{}_\nu\, \eta^{\nu\varrho\sigma} b_{\alpha\varrho\sigma}\,; \end{cases} \tag{48}$$

e dai *dati iniziali*:

1) configurazione iniziale C_0 con relativa metrica $\mathring{g}_{\varrho\sigma}(y)$, subordinata alle coordinate lagrangiane scelte e alle condizioni $\mathring{R}_{\beta\alpha\varrho}{}^\sigma = 0$;

2) densità di massa $\mu_0(y)$ e di inerzia intrinseca $\sigma^0{}_{rs}(y)$;

3) direttori $\mathring{d}^r{}_\varrho(y)$ con tre gradi di libertà, in quanto vincolati alle limitazioni

$$\mathring{d}^r{}_\varrho\, \mathring{d}^s{}_\sigma\, \delta_{rs} = \mathring{g}_{\varrho\sigma}\,; \tag{49}$$

4) velocità lineare $\mathring{v}_\varrho(y)$ e velocità angolare (libera) $b_0{}^\sigma(y)$ *arbitrarie.*

---

(6) Per il caso dei continui ordinari cfr. [9].

Le condizioni imposte (*problema principale*) assicurano, almeno nel caso analitico, l'unicità della soluzione e la compatibilità del sistema ai differenziali totali $(5)_1$; in particolare, come nel caso ordinario, la congruenza della metrica $g_{\varrho\sigma}(t/y) \equiv \equiv d^r{}_\varrho d^s{}_\sigma \delta_{rs}$. La successiva determinazione di $\boldsymbol{e}_\varrho$ (*problema secondario*) presuppone naturalmente che sia $\boldsymbol{e}_\varrho = \boldsymbol{e}^0{}_\varrho$ almeno in un punto di C_0.

b) Forze e momenti di massa indipendenti dalla velocità lagrangiana.

Il non intervento delle velocità lagrangiane v_ϱ nelle (44) consente, come nel caso classico [6], di sostituire le v_ϱ con la velocità angolare (vincolata) e di deformazione, cioè col tensore $h_\varrho{}^\sigma$.

Il problema dell'evoluzione locale del continuo fa capo pertanto al seguente sistema differenziale del 1° ordine (rispetto al tempo) nelle incognite $d^r{}_\varrho$, $h_\varrho{}^\sigma$ e b^σ (7):

$$(50)\qquad \begin{cases} \partial_t d^r{}_\varrho = d^r{}_\sigma(h_\varrho{}^\sigma - b_\varrho{}^\sigma) \sim \partial_t d_r{}^\varrho = d_r{}^\sigma(b_\sigma{}^\varrho - h_\sigma{}^\varrho)\,, \\ \partial_t h_\varrho{}^\sigma = \nabla_\varrho a^\sigma - h_\varrho{}^\nu h_\nu{}^\sigma \sim \partial_t h_{\varrho\sigma} = \nabla_\varrho a_\sigma + h_\varrho{}^\nu h_{\sigma\nu}\,, \\ \sigma_{\varrho\sigma}\partial_t b^\sigma = -b^\nu[\sigma_{\varrho\sigma}h_\nu{}^\sigma + \sigma_{\sigma\nu}b^\sigma{}_\varrho] + \\ \qquad + M_\varrho - \dfrac{1}{\mu_0} d^r{}_\nu\left[\eta_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial W}{\partial d^r{}_\sigma} + b_{\sigma\varrho}{}^\nu \dfrac{\partial W}{\partial b^r{}_\sigma} - \nabla^0{}_\sigma\left(\dfrac{\partial W}{\partial b^r{}_\sigma}\right)\delta_\varrho{}^\nu\right] \qquad (\varrho = 1, 2, 3)\,; \end{cases}$$

con l'intesa che valgano i legami (17), (32), (37) e (48), nonchè, in conformità della $(44')_1$,

$$(51)\qquad \nabla_\varrho a_\sigma \equiv \nabla_\varrho F_\sigma + \frac{1}{\mu_0} d^r{}_\nu\left\{\left(\frac{1}{\mu_0}\partial_\varrho\mu_0 b_{\mu\sigma}{}^\nu + b_{\mu\sigma}{}^\lambda b_{\varrho\lambda}{}^\nu - \nabla_\varrho b_{\mu\sigma}{}^\nu\right)\frac{\partial W}{\partial d^r{}_\mu} + \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{\mu_0}\partial_\varrho\mu_0\delta_\sigma{}^\nu + b_{\varrho\sigma}{}^\nu\right)\nabla^0{}_\mu\left(\frac{\partial W}{\partial d^r{}_\mu}\right) - b_{\mu\sigma}{}^\nu\nabla_\varrho\left(\frac{\partial W}{\partial d^r{}_\mu}\right) + \partial_\varrho\left[\nabla^0{}_\mu\left(\frac{\partial W}{\partial d^r{}_\mu}\right)\delta_\sigma{}^\nu\right]\right\}.$$

Per quanto poi riguarda i *dati iniziali*, essi comprenderanno ancora i precedenti punti 1), 2) e 3). Viceversa, il punto 4) andrà sostituito con il seguente:

4') velocità angolare (libera) $b_0{}^\sigma(y)$ *arbitraria*, e invece velocità di deformazione $k^0{}_{\varrho\sigma}(y) \equiv h^0{}_{(\varrho\sigma)}$ e velocità angolare (vincolata) $\omega^0{}_{\varrho\sigma}(y) \equiv h^0{}_{[\varrho\sigma]}$ soddisfacenti, in C_0, le condizioni

$$(52)\qquad A^0{}_{\alpha\varrho\sigma} \equiv \nabla^0{}_\alpha\omega^0{}_{\varrho\sigma} - \nabla^0{}_\varrho k^0{}_{\alpha\sigma} + \nabla^0{}_\sigma k^0{}_{\alpha\varrho} = 0 \qquad (\alpha, \varrho, \sigma = 1, 2, 3);$$

ciò che assicura, come nel caso ordinario, la compatibilità del sistema (5), nonchè la univoca determinazione delle funzioni vettoriali $\boldsymbol{e}_\varrho(t/y)$ e $\boldsymbol{v}(t/y)$ a partire dalle loro determinazioni iniziali in un punto di C_0 (*problema secondario*).

(7) La condizione det $\|\sigma_{\varrho\sigma}\| \neq 0$ assicura che si tratta di un sistema *normale*.

7. – Formulazioni intrinseche di tipo anolonomo.

Il *carattere tensoriale* delle formulazioni (47) e (50) consente, direttamente, la loro traduzione in termini anolonomi, anche se ciò non corrisponde ad un sostanziale vantaggio, per l'intervento sistematico della derivazione pfaffiana di cui alla $(24)_2$. In ogni caso, da questo punto di vista, può costituire un progresso effettivo, specie per la formulazione (50) [8], l'inclusione del tensore $b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma}$ tra le incognite del problema.

Si tratterà di utilizzare il legame $(11)_1$, ovvero esplicitamente [cfr. nota [4]]:

$$\partial_t b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} - \boldsymbol{b}_{\alpha} \cdot \partial_t(\boldsymbol{e}_{\varrho} \times \boldsymbol{e}^{\sigma}) = \nabla_{\alpha} b_{\varrho}{}^{\sigma} + b_{\nu\varrho} b_{\alpha}{}^{\nu\sigma} - b_{\alpha\nu\varrho} b^{\nu\sigma} ,$$

nonchè, tenuto conto della $(5)_1$,

$$\partial_t b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = \nabla_{\alpha} b_{\varrho}{}^{\sigma} + (h_{\varrho}{}^{\nu} - b_{\varrho}{}^{\nu}) b_{\alpha\nu}{}^{\sigma} - (h_{\nu}{}^{\sigma} - b_{\nu}{}^{\sigma}) b_{\alpha\varrho}{}^{\nu} . \tag{53}$$

Più precisamente, è agevole riconoscere che l'aggiunta della (53) e della ulteriore condizione iniziale

$$b^0{}_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = - d^0{}_r{}^{\sigma} \nabla^0{}_{\alpha} d^{0r}{}_{\varrho} \ldots C_0 , \tag{54}$$

implica l'identità

$$b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} \equiv - d_r{}^{\sigma} \nabla_{\alpha} d^r{}_{\varrho} ; \tag{55}$$

cioè la validità della $(32)_1$ durante tutto il moto.

Invero, la $(50)_1$ dà luogo innanzitutto alla identità

$$\nabla_{\alpha}(\partial_t d^r{}_{\varrho}) \equiv \partial_t(\nabla_{\alpha} d^r{}_{\varrho}) + \partial_t \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\nu} d^r{}_{\nu} = \nabla_{\alpha} d^r{}_{\sigma}(h_{\varrho}{}^{\sigma} - b_{\varrho}{}^{\sigma}) + d^r{}_{\sigma} \nabla_{\alpha}(h_{\varrho}{}^{\sigma} - b_{\varrho}{}^{\sigma}) ,$$

e di qui, posto per brevità $\hat{b}_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} \equiv d_r{}^{\sigma} \nabla_{\alpha} d^r{}_{\varrho}$, il legame

$$\partial_t \hat{b}_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = (b_{\nu}{}^{\sigma} - h_{\nu}{}^{\sigma}) \hat{b}_{\alpha\varrho}{}^{\nu} + (h_{\varrho}{}^{\nu} - b_{\varrho}{}^{\nu}) \hat{b}_{\alpha\nu}{}^{\sigma} - \partial_t \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} + \nabla_{\alpha}(h_{\varrho}{}^{\sigma} - b_{\varrho}{}^{\sigma}) .$$

D'altra parte, come nel caso classico, la $(50)_1$ implica la seguente relazione tra i coefficienti della connessione e la velocità di deformazione $k_{\varrho\sigma} \equiv h_{(\varrho\sigma)}$:

$$\partial_t \Gamma_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = H_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} \equiv g^{\sigma\nu}(\nabla_{\alpha} k_{\varrho\nu} + \nabla_{\varrho} k_{\nu\alpha} - \nabla_{\nu} k_{\alpha\varrho}) . \tag{56}$$

---

[8] Oltre all'intervento diretto delle *costanti* $\sigma^0{}_{rs}$, in luogo delle $\sigma_{\varrho\sigma}$, si ha il vantaggio che *la connessione e il tensore* $b_{\alpha\varrho}{}^{\sigma}$, legati dalla $(32)_1$, *si riassumono nei coefficienti di rotazione di Ricci*: $\Gamma_{ar}{}^{s} \equiv b_{ar}{}^{s}$.

Inoltre, disponendo, per ciascuna particella, di una rotazione arbitraria, come dalla (4), si può supporre che il triedro $\{\overset{0}{\boldsymbol{d}}_r\}$ sia *invariabile* (in C_0). Questa condizione, tuttavia, non sarà generalmente compatibile con quella che $\sigma^0{}_{rs}$ si riduca a forma diagonale.

Pertanto, con l'intervento del tensore $A_{\alpha\varrho\sigma}$ di cui alla $(6)_2$, la precedente diviene

$$\partial_t \hat{b}_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} = (b_\nu{}^\sigma - h_\nu{}^\sigma)\, \hat{b}_{\alpha\varrho}{}^\nu + (h_\varrho{}^\nu - b_\varrho{}^\nu)\, \hat{b}_{\alpha\nu}{}^\sigma + A_{\alpha\varrho}{}^\sigma - \nabla_\alpha b_\varrho{}^\sigma \ ;$$

cosicchè, in definitiva, la somma

$$C_{\alpha\varrho}{}^\sigma \equiv b_{\alpha\varrho}{}^\sigma + \hat{b}_{\alpha\varrho}{}^\sigma \tag{57}$$

verifica le condizioni differenziali

$$\partial_t C_{\alpha\varrho}{}^\sigma = (b_\nu{}^\sigma - h_\nu{}^\sigma)\, C_{\alpha\varrho}{}^\nu + (h_\varrho{}^\nu - b_\varrho{}^\nu)\, C_{\alpha\nu}{}^\sigma + A_{\alpha\varrho}{}^\sigma \, . \tag{58}$$

Di qui l'asserto: $C_{\alpha\varrho}{}^\sigma \equiv 0$, posto che il tensore $A_{\alpha\varrho}{}^\sigma$ è identicamente nullo e si suppone verificata la condizione iniziale (54), ovvero $C^0{}_{\alpha\varrho}{}^\sigma = 0$.

Formulazioni analoghe a quelle indicate valgono naturalmente anche per i continui alla Cosserat con *rotazioni vincolate* ([7], [10]): $b_{\varrho\sigma} = \omega_{\varrho\sigma}$.

Tuttavia, la presenza del vincolo interno, di tipo *anolonomo lineare*:

$$\delta_{rs} d^r{}_{[\varrho} \partial_t d^s{}_{\sigma]} = 0 \ , \tag{59}$$

comporta inevitabilmente, per lo schema associato (a tre parametri), *un grado di indeterminazione*.

In altri termini, la teoria ignora del tutto il termine isotropo del tensore dei momenti di sforzo e, di riflesso, la parte antisimmetrica degli sforzi, oltre ad avere carattere reattivo, è determinata (9) (a posteriori) a meno di un gradiente.

---

(9) Cfr. [5] p. 166 e segg. Naturalmente nell'ipotesi che il vincolo sia sostenuto dalle sole forze intime e non da momenti di massa reattivi.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. F. COSSERAT, *Théorie des Corps Déformables*, Paris, Herman (1909).

[2] G. FERRARESE, *Proprietà di secondo ordine di un generico riferimento fisico in Relatività generale*, Rend. Matem. Roma, **24** (1965), pp. 57-100.

[3] G. FERRARESE, *Sulla dinamica del corpo rigido*, Rend. Acc. Lincei, **38** (1965), pp. 649-654.

[4] G. FERRARESE, *Lezioni di Meccanica superiore*, Roma, Veschi (1968).

[5] G. FERRARESE, *Sulla compatibilità dei continui alla Cosserat*, Rend. Matem. Roma, **4**, no. 1 (1971), pp. 151-174.

[6] G. FERRARESE, *Sulla formulazione intrinseca della Meccanica dei continui iperelastici*, Rend. Matem. Roma, **8**, no. 1 (1975).

[7] G. GRIOLI, *Elasticità asimmetrica*, Ann. Matem. Pura Appl., **50** (1960), pp. 389-417.

[8] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, 2ª ed., Springer-Verlag (1954).

[9] L. STAZI, *Sulla meccanica intrinseca dei continui iperelastici*, in corso di stampa nei Rend. Circ. Matem. Palermo.

[10] R. A. TOUPIN, *Elastic materials with couple-stresses*, Arch. Rational, Mech. Anal., **11** (1962), pp. 385-414.

[11] C. TRUESDELL - W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, vol. III/3, Springer-Verlag (1965).