Trasporto di neutroni con sezioni d'urto dipendenti dalla temperatura (*).

A. BELLENI-MORANTE (Firenze)

A DARIO GRAFFI nel suo 70° compleanno

Riassunto. – *Si studia un problema non lineare di trasporto di neutroni in un muro omogeneo con sezioni d'urto dipendenti dalla temperatura. Facendo uso di alcune tecniche standard della teoria delle equazioni non lineari di evoluzione, si prova l'esistenza e l'unicità di una soluzione forte* $u = u(t)$, *per ogni* $t \in [0, \bar{t}]$, *ove* $\bar{t}$ *è scelto in modo opportuno. Infine, si indica un procedimento per determinare una funzione continua e non negativa* $b = b(t)$, *tale che* $\|u(t)\| \leqslant b(t)$ *per ogni* $t \in [0, \bar{t}]$.

Summary. – *We study a non-linear neutron transport problem in a homogeneous slab with temperature feedback. By using some standard techniques from the theory of non-linear evolution equations, we prove existence and uniqueness of a strong solution* $u = u(t)$ *at any* $t \in [0, \bar{t}]$. *Finally, we indicate a procedure to find a non-negative continuous* $b = b(t)$, *such that* $\|u(t)\| \leqslant b(t)$, *at any* $t \in [0, \bar{t}]$.

1. – Introduzione.

L'effetto di una controreazione, dovuta alle variazioni di temperatura, sul comportamento di un reattore nucleare è stato esaminato in diversi lavori di recente pubblicazione, [1], [2], ..., [10].

Nelle note citate, il fenomeno del trasporto dei neutroni è esaminato nell'ambito della teoria (approssimata) della diffusione e il meccanismo di controreazione agisce unicamente tramite il coefficiente di moltiplicazione, che compare nell'equazione di diffusione dei neutroni, [1].

In questo lavoro, ci proponiamo di studiare gli effetti dell'accoppiamento trasporto di neutroni-temperatura in un muro di spessore $2a$, facendo uso della teoria monoenergetica del trasporto. La scelta della teoria monoenergetica e della simmetria piana del mezzo materiale è dovuta unicamente a ragioni di semplicità formale. In effetti, i metodi di cui faremo uso nel seguito possono essere generalizzati senza difficoltà al caso in cui il mezzo non ha simmetria piana e la diffusione dei neutroni viene esaminata nell'ambito della teoria del trasporto con dipendenza dall'energia.

(*) Entrata in Redazione il 15 marzo 1975.

Nei due paragrafi seguenti si espone il problema fisico e si indicano gli strumenti analitici necessari per trasformare il sistema di equazioni, che regola il fenomeno fisico, in un problema astratto (non lineare) di evoluzione in un opportuno spazio di Banach. Il paragrafo 4 è appunto dedicato ad un breve esame di tale problema astratto, mentre, nel paragrafo 5, si prova l'esistenza e l'unicità di una soluzione forte $u = u(t)$, definita per ogni $t \in [0, \bar{t}]$ con $\bar{t}$ scelto in modo opportuno. Infine, nel paragrafo 6, si deduce una limitazione per $\|u(t)\|$.

2. – Posizione del problema.

Indicate con $N(x, y, t)$ e con $T(t)$ rispettivamente la densità neutronica e la temperatura media nel muro di spessore $2a$, valgono le seguenti equazioni di bilancio, [1], [19],[20]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - vy \frac{\partial N}{\partial x} - v\Sigma N + \frac{1}{2} v\gamma \int_{-1}^{+1} N(x, y', t)\, dy' , \qquad |x| < a , \ |y| \leq 1 , \ t > 0 ; \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dt} = - h[T(t) - T_f] + K \int_{-a}^{+a} \int_{-1}^{+1} N(x', y', t)\, dx'\, dy' , \qquad |x| < a , \ t > 0 , \tag{2}$$

ove:

v = velocità dei neutroni; Σ = sezione macroscopica d'urto totale; $\gamma = \Sigma_s + \nu\Sigma_f$, con Σ_s sezione d'urto di «scattering», Σ_f sezione d'urto di fissione e ν numero medio di neutroni prodotti da ogni evento di fissione;

h = coefficiente di scambio termico con il fluido refrigerante, [1];

K = coefficiente di produzione di energia (generata dalle fissioni, [1]);

T_f = temperatura media del fluido refrigerante.

Alle equazioni (1) e (2) vanno associate condizioni iniziali ed al contorno del tipo:

$$N(x, y, 0) = N_0(x, y) , \qquad |x| < a, \ |y| \leq 1 ; \qquad T(0) = T_0 ; \tag{3}$$

$$N(-a, y, t) = 0, \quad \forall y \in (0, 1] ; \qquad N(a, y, t) = 0, \quad \forall y \in [-1, 0) , \tag{4}$$

ove N_0 e T_0 sono assegnate.

Nell'ipotesi che la reazione, dovuta alle variazioni di temperatura, sia lineare [1], [2], si ha infine:

$$\Sigma = \Sigma_0(1 + \alpha_1\theta) , \qquad k = \gamma_0(1 + \alpha_2\theta) , \qquad K = K_0(1 + \alpha_3\theta) , \tag{5}$$

$$\theta = \theta(t) = T(t) - T_r , \tag{6}$$

ove Σ_0, k_0 e K_0 sono costanti positive, α_1, α_2, e α_3 sono costanti e T_r è un'opportuna temperatura di riferimento.

Facendo uso delle (5), la (1) e la (2) divengono:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -vy\frac{\partial N}{\partial x} - v\Sigma_0 N + \frac{1}{2}v\gamma_0\int_{-1}^{+1} N(x, y', t)\,dy' - \\ - \alpha_1 v\Sigma_0\theta N + \frac{1}{2}\alpha_2 v\gamma_0\theta\int_{-1}^{+1} N(x, y', t)\,dy' , \tag{7}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -h\theta + K_0\int_{-a}^{+a} dx'\int_{-1}^{+1} N(x', y', t)\,dy' + \\ + \alpha_3 K_0\theta\int_{-a}^{+a} dx'\int_{-1}^{+1} N(x', y', t)\,dy' + h(T_f - T_r) . \tag{8}$$

Osserviamo che la (7) e la (8) sono non lineari nelle incognite N e θ e che l'effetto delle variazioni di temperatura è di controreazione se α_1, α_2 e α_3 sono negative.

Avvertiamo pure che i procedimenti, di cui faremo uso nel seguito, possono essere generalizzati senza difficoltà al caso in cui Σ, γ e K sono proporzionali a $(1 + \alpha'\theta + \alpha''\theta^2)$.

NOTA 1. – Lo spessore $2a$, il coefficiente (positivo) h e la temperatura del fluido refrigerante T_f sono per ipotesi indipendenti dal tempo, [1].

3. – Preliminari matematici.

Posto $X_1 = L_1([-a, +a]\times[-1, +1])$ e indicato con X_2 l'insieme dei numeri complessi, sia $X = X_1 \times X_2$. X è uno spazio di Banach con norma:

$$\|f\| = K_0\|f_1\|_1 + h|f_2| , \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in X , \tag{9}$$

ove $\|\cdot\|_1$ è la norma in X_1:

$$\|f_1\|_1 = \int_{-a}^{+a} dx\int_{-1}^{+1} |f_1(x, y)|\,dy , \qquad f_1 \in X_1 .$$

Nella (9), le costanti K_0 ed h sono state introdotte per ragioni di omogeneità: infatti $\|f_1\|_1$ ha le dimensioni di una densità neutronica per una lunghezza, mentre $|f_2|$ ha le dimensioni di una temperatura.

NOTA 2. – L'uso dello spazio X_1 è giustificato dal fatto che $\|N\|_1$ fornisce il numero totale di neutroni presenti nel mezzo all'istante t.

Definiamo poi gli operatori seguenti:

(10) $$J_1 f_1 = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_1(x, y')\,dy', \qquad D(J_1) = X_1,\ R(J_1) \subset X_1;$$

(11) $$J_2 f_1 = \int_{-a}^{+a} dx' \int_{-1}^{+1} f_1(x', y')\,dy', \qquad D(J_2) = X_1,\ R(J_2) \subset X_2;$$

(12) $$\begin{cases} B_1 f_1 = -vy\dfrac{\partial}{\partial x} f_1 - v\Sigma_0 f_1, \\ D(B_1) = \Big\{f_1 : f_1 \in X_1;\ f_1(x, y) \text{ è assolutamente continua in } x \text{ per quasi ogni } \\ y \in [-1, +1];\ B_1 f_1 \in X_1;\ f_1(-a, y) = 0\ \ \forall y \in (0, 1];\ f_1(a, y) = 0\ \ \forall y \in [-1, 0)\Big\}, \\ \hfill R(B_1) \subset X_1, \end{cases}$$

ove, ad esempio, $D(B_1)$ e $R(B_1)$ sono rispettivamente il dominio ed il codominio di B_1.

Dalle definizioni (10) e (11) si ottiene senza difficoltà il seguente

LEMMA 1. – $J_1 \in \mathcal{B}(X_1) = \mathcal{B}(X_1, X_1)$, $\|J_1 f_1\|_1 \leqslant \|f_1\|_1$; $J_2 \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$, $|J_2 f_1| \leqslant \|f_1\|_1$, ■ ove $\mathcal{B}(X_i, X_j)$ è lo spazio degli operatori lineari e limitati da X_i in X_j, ([22], Capitolo 3, paragr. 3).

Per quanto riguarda l'operatore B_1, risultati ormai classici, esposti in dettaglio nel Capitolo 8 di [21], assicurano che B_1 è il generatore di un semigruppo fortemente continuo $\{\exp(tB_1), t \geqslant 0\} \in \mathcal{B}(X_1)$, tale che $\|\exp(tB_1)\|_1 \leqslant \exp(-v\Sigma_0 t)$ per ogni $t \geqslant 0$ (si veda anche [23]). In altri termini:

LEMMA 2. – $B_1 \in \mathcal{G}(1, -v\Sigma_0)$, ([22], Capitolo 9). ■

Introduciamo infine i seguenti operatori da X in X:

(13) $$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & -hI \end{pmatrix}, \qquad D(B) = D(B_1) \times X_2;$$

(14) $$J = \begin{pmatrix} v\gamma_0 J_1 & 0 \\ K_0 J_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(J) = X;$$

(15) $$F(f) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 v\Sigma_0 f_1 f_2 + \alpha_2 v\gamma_0 f_2 J_1 f_1 \\ \alpha_3 K_0 f_2 J_2 f_1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(F) = X.$$

Si ha:

LEMMA 3. – $J \in \mathcal{B}(X)$; $\|Jf\| \leqslant \beta\|f\|$, $\beta = (v\gamma_0 + h)$. ■

Dalla definizione (14), dalla (9) e dal Lemma 1, si ottiene infatti:

$$\|Jf\| = K_0\|v\gamma_0 J_1 f_1\|_1 + h|K_0 J_2 f_2| \leqslant (v\gamma_0 + h)K_0\|f_1\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant (v\gamma_0 + h)[K_0\|f\|_1 + h|f_2|] = (v\gamma_0 + h)\|f\|. \quad ■$$

LEMMA 4. – $B \in \mathcal{G}(1, -z_0)$, con $z_0 = \min(v\Sigma_0, h)$. ■

Infatti, per il Lemma 2, $D(B_1)$ è denso in X_1; $B_1 \in \mathcal{C}(X_1)$ ([22], Capitolo 3, paragr. 5); $R(z, B_1) = (zI - B_1)^{-1} \in \mathcal{B}(X_1)$ con $\|R(z, B_1) f_1\|_1 \leq (z + v\Sigma_0)^{-1} \|f_1\|_1$ per ogni $z > -v\Sigma_0$. Segue che $D(B) = D(B_1) \times X_2$ è denso in X e che $B \in \mathcal{C}(X)$ dato che $-hI \in \mathcal{B}(X_2) \subset \mathcal{C}(X_2)$. Inoltre, avendosi:

$$R(z, B) = (zI - B)^{-1} = \begin{pmatrix} R(z, B_1) & 0 \\ 0 & (z+h)^{-1} I \end{pmatrix},$$

si ottiene subito che $R(z, B) \in \mathcal{B}(X)$ e che $\|R(z, B)\| \leq (z + z_0)^{-1}$ per ogni $z > -z_0$. Si conclude che $B \in \mathcal{G}(1, -z_0)$. ■

Consideriamo infine l'operatore non lineare F; dati f e g in X, si ricava dalla (15):

$$\|F(f) - F(g)\| = K_0 \|\alpha_1 v\Sigma_0 (f_1 f_2 - g_1 g_2) - \alpha_2 v \gamma_0 (f_2 J_1 f_1 - g_2 J_1 g_1)\|_1 + \\ + h|\alpha_3 K_0 (f_2 J_2 f_1 - g_2 J_2 g_1)| . \tag{16}$$

D'altra parte,

$$\|f_1 f_2 - g_1 g_2\|_1 = \|f_1 f_2 - f_1 g_2 + f_1 g_2 - g_1 g_2\|_1 \leq |f_2 - g_2| \|f_1\|_1 + |g_2| \|f_1 - g_1\|_1 ,$$
$$\|f_1 f_2 - g_1 g_2\|_1 = \|f_1 f_2 - g_1 f_2 + g_1 f_2 - g_1 g_2\|_1 \leq |f_2 - g_2| \|g_1\|_1 + |f_2| \|f_1 - g_1\|_1 ,$$

e quindi:

$$\|f_1 f_2 - g_1 g_2\|_1 \leq \tfrac{1}{2} \{ [|f_2| + |g_2|] \|f_1 - g_1\|_1 + [\|f_1\|_1 + \|g_1\|_1] |f_2 - g_2| \} .$$

Disuguaglianze dello stesso tipo si ottengono per $\|f_2 J_1 f_1 - g_2 J_1 g_1\|_1$ e per $|f_2 J_2 f_1 - - g_2 J_2 g_1|$, facendo uso dei risultati del Lemma 1. Dalla (16) si ottiene così:

$$\|F(f) - F(g)\| \leq \alpha \{ h[|f_2| + |g_2|] K_0 \|f_1 - g_1\|_1 + K_0 [\|f_1\|_1 + \|g_1\|_1] h |f_2 - g_2| \} \leq \\ \leq \alpha [\|f\| + \|g\|] \{ K_0 \|f_1 - g_1\|_1 + h |f_2 - g_2| \} = \alpha [\|f\| + \|g\|] \|f - g\| ,$$

ove

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{|\alpha_1| v\Sigma_0 + |\alpha_2| v \gamma_0}{h} + |\alpha_3| \right) . \tag{17}$$

In conclusione, vale il seguente

LEMMA 5. – L'operatore non lineare F ha dominio coincidente con l'intero spazio X e soddisfa le diseguaglianze:

$$\|F(f) - F(g)\| \leq \alpha (\|f\| + \|g\|) \|f - g\| , \qquad \forall f, g \in X , \tag{18}$$

$$\|F(f)\| \leq \alpha \|f\|^2 , \qquad \forall f \in X , \tag{19}$$

dato che $F(0) = 0$. ■

Sia infine $s_r(f_0)$ la sfera

$$s_r(f_0) = \{f: f \in X,\ \|f - f_0\| \leqslant r\}\,,$$

ove f_0 è un assegnato elemento di X; dalla (18) e dalla (19) si ottiene:

$$\|F(f) - F(g)\| \leqslant 2\alpha(r + \|f_0\|)\|f - g\|\,, \qquad \forall f, g \in s_r(f_0)\,, \tag{20}$$

$$\|F(f)\| = \alpha(r + \|f_0\|)\|f\|\,, \qquad \forall f \in s_r(f_0)\,, \tag{21}$$

dato che $\|f\|$ e $\|g\|$ non superano $(r + \|f_0\|)$.

4. – Il problema astratto.

Facendo uso delle definizioni (13), (14) e (15), il sistema (7) + (8) con le corrispondenti condizioni iniziali ed al contorno può essere posto nella forma:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = (B + J)u(t) + F(u(t)) + v_0\,, \qquad t > 0\,,\\ &\lim_{t\to 0+} u(t) = u_0\,, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

ove

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(x, y, t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} N_0(x, y) \\ T_0 - T_r \end{pmatrix}, \qquad v_0 = h\begin{pmatrix} 0 \\ T_f - T_r \end{pmatrix}.$$

Nelle (22), $u(t)$ va ora interpretato come una trasformazione da $[0, +\infty)$ in X mentre la derivata d/dt ed il limite sono nel senso della norma di X, [22].

Il sistema (22) traduce un problema non lineare di evoluzione nello spazio di Banach X, che può essere studiato con le tecniche delineate in [11], ..., [18].

Osserviamo che ogni soluzione continua per $t \geqslant 0$ e derivabile per $t > 0$ di (22) (se esiste) soddisfa anche l'equazione integrale ([22], Capitolo 9):

$$u(t) = w_0(t) + \int_0^t Z(t - s)[Ju(s) + F(u(s))]\,ds\,, \qquad t \geqslant 0\,, \tag{23}$$

ove l'integrale è nel senso della norma di X ed ove si è posto

$$Z(t) = \exp(tB)\,, \qquad w_0(t) = Z(t)u_0 + \int_0^t Z(t - s)v_0\,ds\,. \tag{24}$$

NOTA 3. – Nel caso particolare in cui $\alpha = 0$, ovvero se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, la prima componente della (23) coincide con la classica equazione di Boltzmann in forma integrale [19], [20]. Così la (23) è una generalizzazione di tale forma integrale al caso in cui interviene una reazione dovuta alle variazioni di temperatura.

Viceversa, se la (23) ammette una soluzione $u(t)$ continua per $t \geqslant 0$, *non* è detto che, in generale, $u(t)$ soddisfi il sistema (22); con BROWDER [11], diciamo che $u(t)$ è una soluzione di tipo « mild » (« mild solution ») di (22). Più precisamente, fissato opportunamente $\bar{t} > 0$, sia

$$Y = C([0, \bar{t}]; X)$$

lo spazio delle trasformazioni continue $w = w(t)$ da $[0, \bar{t}]$ in X, con norma:

$$|||w||| = \{\max \|u(t)\|, t \in [0, \bar{t}]\} ;$$

allora, se la (23) ammette una soluzione $u \in Y$, diciamo che $u = u(t)$ è una soluzione di tipo « mild » del sistema (22) nell'intervallo $[0, \bar{t}]$.

Osserviamo che, per quanto accennato nella Nota 3, la conoscenza di una soluziome « mild » del sistema (22) ha notevole importanza da un punto di vista fisico.

Nel nostro caso tuttavia, ogni soluzione « mild » in $[0, \bar{t}]$ di (22) risulta continua e derivabile in $[0, \bar{t}]$ e pertanto è anche soluzione forte del sistema (22), ([12], Teorema 7; [13], Teorema 2). Questo risultato può del resto essere verificato *direttamente* studiando il comportamento di $R(t) = u_1(t) - [u(t+h) - u(t)]/h$, ove $u_1(t)$ è l'unica soluzione continua dell'equazione integrale lineare che si ottiene *formalmente* dalla (23) eseguendo la sostituzione $s' = t - s$ e poi derivando rispetto a t.

5. – Soluzione del sistema (22).

Dai Lemma 3, 4 e 5 e tenendo presente l'Osservazione 2 al Teorema 3 di [12], è lecito concludere che il sistema (22) ammette un'unica soluzione « mild » per $t \in [0, \bar{t}]$ se $\bar{t}$ è scelto in modo opportuno. Quanto segue è pertanto diretto a valutare $\bar{t}$ ed a calcolare una limitazione per $\|u(t)\|$, ove, per quanto osservato alla fine del paragrafo precedente, $u = u(t)$ è anche la soluzione forte per $t \in [0, \bar{t}]$ del sistema (22).

Ciò premesso, definiamo il seguente operatore non lineare da Y in Y:

$$P(w) = w_0 + \int_0^t Z(t-s)[Jw(s) + F(w(s))]\, ds , \qquad D(P) = Y , \tag{25}$$

ove, per la (24), risulta che $w_0 \in Y$.

Dai Lemma 3, 4 e 5 e dalla (25) si ottiene:

$$\begin{aligned} \|P(u)(t) - P(w)(t)\| &\leqslant \int_0^t \exp[-z_0(t-s)]\{\beta + \alpha[\|u(s)\| + \|w(s)\|]\}\|u(s) - w(s)\|\, ds \leqslant \\ &\leqslant p(\bar{t})\{\beta + \alpha[\,|||u||| + |||w|||\,]\}\, |||u - w||| , \end{aligned} \tag{26}$$

ove

$$p(\bar{t}) = [1 - \exp(-z_0 \bar{t})]/z_0 , \tag{27}$$

ed ove si è tenuto conto del fatto che $\|Z(t)\| \leqslant \exp(-z_0 t)$ dato che $B \in \mathcal{G}(1, -z_0)$.

Dalla (26) si ricava:

$$|||P(u) - P(w)||| \leqslant p(\bar{t}) \{\beta + \alpha[\, |||u||| + |||w|||]\} \, |||u - w||| , \tag{28}$$

$$|||P(u) - w_0||| \leqslant p(\bar{t}) \{\beta + \alpha |||u|||\} \, |||u||| \tag{29}$$

qualunque siano u e w in Y, ove la (29) segue dalla (28) con $w = 0$ (e quindi con $P(w) = w_0$, cfr. la (25)).

Se, in particolare, u e w appartengono alla sfera

$$S_r(w_0) = \{w : w \in Y, \ |||w - w_0||| \leqslant r\} ,$$

la (28) e la (29) divengono:

$$|||P(u) - P(w)||| \leqslant q_1 |||u - w||| , \qquad \forall u, w \in S_r(w_0) , \tag{30}$$

$$|||P(u) - w_0||| \leqslant q_2 |||u||| \leqslant q_3 r , \qquad \forall u \in S_r(w_0) , \tag{31}$$

ove

$$q_1 = q_1(\bar{t}, r) = p(\bar{t})[\beta + 2\alpha(r + |||w_0|||)] ,$$
$$q_2 = q_2(\bar{t}, r) = p(\bar{t})[\beta + \alpha(r + |||w|||)] ,$$
$$q_3 = q_3(\bar{t}, r) = q_2(\bar{t}, r)[1 + |||w_0|||/r)] .$$

Posto infine:

$$q = q(\bar{t}, r) = p(\bar{t})[\beta + 2\alpha(r + |||w_0|||)][1 + |||w_0|||/r] , \tag{32}$$

si ottiene dalla (30) e dalla (31):

$$|||P(u) - P(w)||| \leqslant q \, |||u - w||| , \qquad \forall u, w \in S_r(w_0) , \tag{33}$$

$$|||P(u) - w_0||| \leqslant qr , \qquad \forall u \in S_r(w_0) . \tag{34}$$

Osserviamo che, fissato r, $q(\bar{t}, r)$ è una funzione crescente di $\bar{t}$ e che

$$q(0, r) = 0 , \quad \lim_{\bar{t} \to +\infty} q(\bar{t}, r) = \frac{1}{z_0} [\beta + 2\alpha(r + |||w_0|||)][1 + |||w_0|||/r] > 1$$

dato che $z_0 = \min(h, v\Sigma_0) < \beta = (v\gamma_0 + h)$. Esiste dunque un $\bar{t}_0 = \bar{t}_0(r)$ tale che $q(\bar{t}, r) \geqslant 1$ per $\bar{t} \geqslant \bar{t}_0$. Ovvero:

LEMMA 6. – Ad ogni raggio r si può associare un $\bar{t}_0 = \bar{t}_0(r)$, tale che $q(\bar{t}, r) < 1$ se $\bar{t}$ è fissato in modo che $\bar{t} < \bar{t}_0$. ∎

NOTA 4. – La funzione $\bar{t}_0 = \bar{t}_0(r)$ può essere ricavata senza difficoltà a partire dalla relazione $q(\bar{t}_0, r) = 1$. Ovviamente, conviene scegliere r in modo che $\bar{t}_0$ sia massimo.

Fissato dunque $\bar{t}$ in modo che $0 < \bar{t} < \bar{t}_0$, la (34) mostra che P trasforma $S_r(w_0)$ in sè stessa, mentre, per la (33), P risulta strettamente contrattiva in $S_r(w_0)$. Si conclude che l'equazione:

$$u = P(u) \tag{35}$$

(e cioè la (23) con $t \in [0, \bar{t}]$) ammette un'unica soluzione $u \in S_r(w_0) \subset Y$, tale che:

$$\lim_{i \to +\infty} |||u^{(i)} - u||| = 0 \tag{36}$$

ove

$$u^{(i+1)} = P(u^{(i)}), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots; \qquad u^{(0)} = w_0. \tag{37}$$

Dunque:

TEOREMA 1. Il sistema (22) ammette un'unica soluzione « mild » $u = u(t)$, continua per $t \in [0, \bar{t}]$ e tale che $\|u(t) - w_0(t)\| \leqslant r$ per ogni $t \in [0, \bar{t}]$; tale $u = u(t)$ risulta anche essere soluzione forte di (22) in $[0, \bar{t}]$. ∎

NOTA 5. – Il raggio r, che compare nell'enunciato del Teorema 1, potrebbe a priori essere « molto grande ». Così, la diseguaglianza $\|u(t) - w_0(t)\| \leqslant r$ potrebbe avere scarso senso fisico. Ciò giustifica la ricerca di una limitazione più significativa per $\|u(t) - w_0(t)\|$.

6. – Limitazioni per $\|u(t)\|$.

Dall'equazione integrale (23) si ottiene:

$$\|u(t)\| \leqslant \|w_0(t)\| + \int_0^t \exp[-z_0(t-s)]\{\beta\|u(s)\| + \alpha\|u(s)\|^2\}\, ds, \tag{38}$$

ove, per il Teorema 1, $\|u(t)\|$ è una funzione continua e non negativa per $t \in [0, \bar{t}]$ ed ove

$$\|w_0(t)\| \leqslant \exp(-z_0 t)\|u_0\| + [1 - \exp(-z_0 t)]\|v_0\|/z_0 = b_0(t). \tag{39}$$

La diseguaglianza integrale (38) suggerisce di ricercare se l'equazione integrale

$$b(t) = b_0(t) + \int_0^t \exp[-z_0(t-s)]\{\beta b(t) + \alpha[b(t)]^2\}\, ds \tag{40}$$

ammetta una soluzione continua e non negativa per $t \in [0, \bar{t}]$. In tal caso infatti si avrebbe $\|u(t)\| \leqslant b(t)$ per ogni $t \in [0, \bar{t}]$, come si verifica facilmente a partire dalle (37).

Consideriamo allora il seguente sistema, ottenuto dalla (40) per derivazione rispetto a t:

$$\frac{db}{dt} = \alpha[b(t)]^2 + (\beta - z_0)b(t) + \|v_0\| \;, \quad t > 0 \;; \quad b(0) = \|u_0\| \;. \tag{41}$$

La prima delle (41) ammette la soluzione costante

$$b_1 = [(z_0 - \beta) + \varrho]/2\alpha \,, \qquad \varrho = [(z_0 - \beta)^2 - 4\alpha\|v_0\|]^{\frac{1}{2}} \,, \tag{42}$$

che è reale purchè α sia sufficientemente prossimo a zero (ricordiamo che $z_0 < \beta$). Nota la b_1, con metodi standard si ottiene la soluzione di (41):

$$b(t) = b_1 + 1/c(t) \,, \tag{43}$$

$$c(t) = -\frac{\alpha}{\varrho}\left\{\frac{2\varrho \exp(-\varrho t)}{z_0 - \beta + \varrho - 2\alpha\|u_0\|} + [1 - \exp(-\varrho t)]\right\}, \tag{44}$$

valida per ogni $t \in [0, \bar{t}_1)$, ove $\bar{t}_1$ è il primo zero di $c(t)$.

Notiamo che, essendo $\beta - z_0 > 0$ e supponendo che α sia sufficientemente prossimo a zero, risulta $c(0) > 0$, $dc(t)/dt < 0$, $\lim_{t \to +\infty} c(t) = -\alpha/\varrho < 0$; inoltre $b(0) = \|u_0\| > 0$, $db(t)/dt = -[1/c^2(t)]dc(t)/dt > 0$.

Si conclude che $b(t)$ è non negativa e finita per ogni $t \in [0, \bar{t}_1]$ ove $\bar{t}_1$ è tale che $c(\bar{t}_1) = 0$. Dunque:

TEOREMA 2. Il parametro non negativo α sia sufficientemente prossimo a zero; allora, $\|u(t)\| \leqslant b(t)$, ove $b(t)$ è data dalla (43), per ogni $t \in [0, \bar{t}]$, con $\bar{t} < \min(\bar{t}_0, \bar{t}_1)$. ■

Osserviamo che la limitazione $\|u(t)\| \leqslant b(t)$ non dipende dal raggio r del Teorema 1.

NOTA 6. – Le proprietà di $u = u(t)$ rispetto ai parametri α_1, α_2, α_3 (per es., la continuità e la derivabilità) possono essere esaminate mediante procedimenti simili a quelli di [24].

BIBLIOGRAFIA

[1] D. H. NGUYEN, Nucl. Sci. Eng., **55** (1974), p. 307.
[2] D. H. NGUYEN, Nucl. Sci. Eng., **52** (1973), p. 292.
[3] D. H. NGUYEN, Nucl. Sci. Eng., **50** (1973), p. 370.
[4] D. B. REISTER - P. L. CHAMBRÉ, Nucl. Sci. Eng., **48** (1972), p. 211.
[5] E. T. DEAN - P. L. CHAMBRÉ, SIAM J. Appl. Math., **20** (1971), p. 722.
[6] R. M. CRAWFORD - W. E. KASTEMBERG, Trans. Amer. Nucl. Soc., **12** (1969), p. 241.

[7] M. H. MILLMAN - J. B. KELLER, J. Math. Phys., **10** (1969), p. 348.
[8] W. E. KASTEMBERG, Trans. Amer. Nucl. Soc., **11** (1968), p. 224.
[9] C. HSU, Trans. Amer. Nucl. Soc., **11** (1968), p. 223.
[10] W. E. KASTEMBER - P. L. CHAMBRÉ, Nucl. Sci. Eng., **31** (1968), p. 67.
[11] F. E. BROWDER, Annals of Math., **80** (1964), p. 485.
[12] T. KATO, Proc. Symp. Appl. Math., **17** (1965), p. 50.
[13] I. SEGAL, Annals of Math., **78** (1963), p. 339.
[14] T. KATO, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), p. 508.
[15] C. V. PAO, Arch. Rat. Mech. Anal., **35** (1969), p. 16.
[16] C. V. PAO - G. VOGT, Arch. Rat. Mech. Anal., **35** (1969), p. 30.
[17] C. V. PAO, J. Math. Anal. Appl., **42** (1973), p. 578.
[18] V. BARBU, *Semigrupuri de Contractii Neliniare in Spatii Banach*, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucuresti (1974).
[19] G. I. BELL - S. GLASSTONE, *Nuclear Reactor Theory*, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1970).
[20] V. BOFFI, *Fisica del Reattore Nucleare*, Pàtron, Bologna (1974).
[21] G. M. WING, *An Introduction to Transport Theory*, J. Wiley, New York (1962).
[22] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York (1966).
[23] A. SUHADOLC, J. Math. Anal. Appl., **35** (1971), p. 1.
[24] A. BELLENI-MORANTE, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), p. 443.