Rimembranze! (*).

MAURO PICONE (Roma)

Al carissimo amico DARIO GRAFFI questo breve scritto
oso dedicare nel compimento del suo operoso settantennio.

« Da tante cose dipende la celebrità dei libri »
ALESSANDRO MANZONI nel Capitolo XXXIII,
44° capoverso, dei *Promessi sposi*.

Nel 1923, dal Circolo Matematico di Catania, durante le mia appartenza a quella Università, iniziatasi nel 1919, appena congedato dal servizio militare che prestai alla fronte di combattimento nella prima guerra mondiale, fu stampato, ed egregiamente stampato, un grosso volume (di ben 741 pagine) dedicato alla pubblicazione delle lezioni di Analisi infinitesimale, che io avevo tenuto, nella detta Università, durante il triennio 1919-1922.

Capitatomi casualmente, in questi giorni, fra le mani, quel grosso volume, ne ho riletto qua e là, qualche brano, e ho dovuto rimproverarmi di avere dimenticato e non più adoperato nell'insegnamento e nella ricerca, molte nozioni colà date, secondo il mio parere ancora utili nonostante la loro età semisecolare!

Fra queste, degna di menzione mi sembra anche la teoria degli integrali delle funzioni non limitate, nella quale è contenuta, come *particolarissimo caso*, quella del potenziale che si suole svolgere nei corsi di Fisica-matematica, spesso con discutibile rigore analitico.

In questa breve Nota esporrò un teorema sulle derivate delle funzioni reali di più variabili reali, che si fonda su nozioni date nel citato mio libro.

Assunti due punti x', x'' dello spazio ouclideo $S_{(1)}$ a r dimensioni, rispettivamente di coordinate $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ e $x''_1, x''_2, \ldots, x''_r$ verificanti le disuguaglianze

$$x'_k < x''_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

è colà chiamato *dominio rettangolare*, di *punti estremi inferiore* x' e *superiore* x'', la totalità dei punti di $S_{(r)}$ le cui coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_r$, verificano le limitazioni

$$x'_k \leqq x_k \leqq x''_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

(*) Entrata in Redazione il 22 febbraio 1975.

Per un tale dominio chiamo *vertici* di esso tutti i punti della sua frontiera le cui coordinate appartengono tutte a quella dei suoi punti estremi. Il numero dei vertici di un dominio rettangolare è 2^r e dico *opposti* due vertici se sono privi di coordinate in comune.

Per un insieme E di punti dello spazio $S_{(r)}$, dotato di punti interni, è considerato, nelle predette lezioni, e indicato con la notazione RE, l'insieme dei punti di E contenuti in dominii rettangolari, contenuti in E. Per esempio, per una sfera E dello spazio a tre dimensioni, i punti di RE sono quelli e solo quelli della sfera privata dei sei punti secondo i quali le tre rette passanti per il centro della sfera, ciascuna parallela ad uno degli assi coordinati, intersecano la frontiera della sfera. Si obbietterà che la nozione di punti interni ad un insieme E non dipende dagli assi coordinati di riferimento, mentre quella di RE ne dipende. Ebbene, io non trovo, in ciò, nessun inconveniente! Ricordiamoci che se si vuol far dell'Analisi matematica nello spazio non si può fare a meno di imitare Cartesio.

Per un punto x, di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_r$, appartenente a RE, esiste sempre un numero positivo $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ tale che se $h_1, h_2, \ldots, h_r$ sono numeri reali non nulli, ciascuno di segno determinato ed in valore assoluto minore di σ, il punto x e il punto x' di coordinate $x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_r + h_r$, sono vertici opposti di un dominio rettangolare contenuto in E.

Sia ora $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ una funzione reale definita in E. Se i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_r)$ appartengono ad E, porrò

$$\overset{x_i+h_i}{\underset{x_i}{\Delta}} f = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_r) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_r),$$

e per una qualunque permutazione $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ degli interi $1, 2, \ldots, r$, supposto che i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_r + h_r)$ siano vertici opposti di un dominio rettangolare contenuto in E, dirò *incremento* r-plo della f, relativo al passaggio dal punto $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ al punto $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_r + h_r)$. La quantità

$$\overset{x_{i_1}+h_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\Delta}} \overset{x_{i_2}+h_{i_2}}{\underset{x_{i_2}}{\Delta}} \cdots \overset{x_{i_r}+h_{i_r}}{\underset{x_{i_r}}{\Delta}} f,$$

che, come subito si dimostra, *non dipende* dalla permutazione adottata.

Se il rapporto:

$$\frac{\overset{x_{i_1}+h_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\Delta}} \overset{x_{i_2}+h_{i_2}}{\underset{x_{i_2}}{\Delta}} \cdots \overset{x_{i_r}+h_{i_r}}{\underset{x_{i_r}}{\Delta}} f}{h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_r}}.$$

detto *rapporto incrementale totale della funzione f relativo al passaggio dal punto $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ al punto $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_r + h_r)$*, ha un limite determinato e finito al tendere a zero della somma $|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_r|$, tale limite sarà qui chiamato *derivata prima* della funzione f nel punto $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e indicato col simbolo

$$f'(x_1, x_2, \ldots, x_r).$$

Ai predetti incrementi e derivate sono estesi, nel citato libro di Catania, in tre forme diverse i teoremi classici di ROLLE, di LAGRANGE, di CAUCHY e di L'HOSPITAL per il limite, in un punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$, del rapporto $f(x_1, x_2, \dots, x_r)/g(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di due funzioni che nel punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$ sono entrambe infinitesime o infinitamente grandi.

Nella Nota presente considero, di nuovo, il teorema di LAGRANGE per dedurne un altro che reputo nuovo e, a mio parere, degno di nota.

Siano $h_1, h_2, \dots, h_r$ numeri reali non nulli e $i_1, i_2, \dots, i_r$; $j_1, j_2, \dots, j_r$ due distinte permutazioni degli indici $1, 2, \dots, r$ e sia D il dominio rettangolare, contenuto in E, del quale i punti $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ e $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_r + h_r)$ siano vertici. Il rapporto incrementale totale ϱ della funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ relativo al passaggio del punto $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ al punto $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_r + h_r)$ ha le due espressioni

$$\varrho = \frac{\overset{x_{i_r}+h_{i_r}}{\underset{x_{i_r}}{\Delta}} \overset{x_{i_{r-1}}+h_{i_{r-1}}}{\underset{x_{i_{r-1}}}{\Delta}} \cdots \overset{x_{i_1}+h_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\Delta}} f}{h_{i_r} h_{i_{r-1}} \dots h_{i_1}} = \frac{\overset{x_{j_r}+h_{j_r}}{\underset{x_{j_r}}{\Delta}} \overset{x_{j_{r-1}}+h_{j_{r-1}}}{\underset{x_{j_{r-1}}}{\Delta}} \cdots \overset{x_{j_1}+h_{j_1}}{\underset{x_{j_1}}{\Delta}} f}{h_{j_r} h_{j_{r-1}} \dots h_{j_1}} .$$

Se $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ è una funzione definita nel dominio rettangolare D e se $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ sono punti di D, per ogni permutazione $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ degli indici $1, 2, \dots, r$, designerò coi simboli

$$\varphi \overset{y_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\uparrow}}, \quad \varphi \overset{y_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\uparrow}} \overset{y_{i_2}}{\underset{x_{i_2}}{\uparrow}}, \quad \varphi \overset{y_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\uparrow}} \overset{y_{i_2}}{\underset{x_{i_2}}{\uparrow}} \overset{y_{i_3}}{\underset{x_{i_3}}{\uparrow}}, \dots,$$

le funzioni che si ottengono da φ sostituendo x_{i_1} con y_{i_1}, x_{i_1} e x_{i_2} con y_{i_1} e y_{i_2}, $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$ con $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}, \dots$.

Ciò posto, per il teorema di Lagrange concernente le funzioni reali di una variabile reale, si ha:

$$\frac{1}{h_{i_1}} \overset{x_{i_1}+h_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\Delta}} = f_{x_{i_1}} \overset{x_{i_1}+\theta_{i_1}h_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\uparrow}},$$

θ_{i_1} designando un numero positivo minore di uno e $f_{x_{i_1}}$ la derivata parziale $\partial f/\partial x_{i_1}$,

$$\frac{1}{h_{i_2}} \frac{1}{h_{i_1}} \overset{x_{i_2}+h_{i_2}}{\underset{x_{i_2}}{\Delta}} \overset{x_{i_1}+h_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\Delta}} f = f_{x_{i_1}x_{i_2}} \overset{x_{i_1}+\theta_{i_1}h_{i_1}}{\underset{x_{i_1}}{\uparrow}} \overset{x_{i_2}+\theta_{i_2}h_{i_2}}{\underset{x_{i_2}}{\uparrow}},$$

θ_{i_2} designando un numero positivo minore di uno e $f_{x_{i_1}x_{i_2}}$ la derivata parziale $\partial^2 f/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}$ ed infine

$$\begin{aligned} \varrho &= f_{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_r}}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2, \dots, x_r + \theta_r h_r), \\ &= f_{x_{j_1}\dots x_{j_2}x_{j_r}}(x_1 + \tau_1 h_1, x_2 + \tau_2 h_2, \dots, x_r + \tau_r h_r), \end{aligned}$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ designando numeri positivi minori di uno e $f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}}$, $f_{x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}}$ rispettivamente le derivate parziali

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}}, \qquad \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_r}}.$$

Si ha dunque il

TEOREMA. – *Se una funzione reale $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ delle r variabili reali $x_1, x_2, \ldots, x_r$ è dotata in un dominio rettangolare R, contenuto in E, di vertici opposti $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_r + h_r)$, delle derivate parziali*

$$f_{x_{i_1}}, f_{x_{i_1} x_{i_2}}, \ldots, f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}},$$

in una qualsivoglia permutazione $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ degli indici $1, 2, \ldots, r$, le $r!$ derivate parziali

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}}, \tag{1}$$

coincidono, ciascuna, in almeno un punto interno a R, col rapporto incrementale totale della f, relativo al passaggio del punto $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ al punto $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_r + h_r)$. Pertanto, se la f, in un punto di RE, possiede la derivata, a questa, per $|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_r|$ infinitesimo, tende il considerato comune valore di tutte le derivate parziali (1).