Alcune soluzioni esatte delle equazioni della Magnetofluidodinamica per il moto stazionario di un fluido viscoso, incomprimibile e a conducibilità elettrica finita (*).

VINCENZO MILLUCCI (Siena) (**)

A DARIO GRAFFI nel suo 70° compleanno

Summary. – *With regard to the non-linear equations of Magneto-Fluid Dynamics in this paper we examine the steady, axially symmetric motion of an incompressible, homogeneous, viscous and electrically conducting fluid when such a fluid moves also around the axis of symmetry. We give some classes of exact solutions and then we generalize the problem taking also in account the Hall effect.*

1. – Introduzione.

Si consideri un fluido omogeneo, viscoso, incomprimibile, stokesiano-lineare, di viscosità cinematica ν costante, di conducibilità elettrica finita σ (costante), soggetto a forze di massa non elettromagnetiche che ammettano un potenziale per unità di massa U.

Nell'ambito dello schema del continuo della Magnetofluidodinamica (MFD) ci proponiamo di studiare il moto stazionario con simmetria di rivoluzione attorno ad un asse di un tale fluido nel caso in cui il moto avvenga anche attorno all'asse ([1]).

In MFD tale classe di moti è stata studiata in [2], ma con riguardo ad un fluido perfettamente conduttore dell'elettricità.

In questo lavoro cercheremo in particolare classi di soluzioni esatte nello spirito del metodo indiretto di cui al n. 3 di [3].

Assunta una terna T di coordinate cilindriche ortogonali z, r, φ di versori $\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ con z asse di simmetria del moto, al n. 2 si scrivono dapprima le equazioni MFD per il problema in esame e si derivano poi le equazioni cui debbono soddisfare le funzioni incognite: $\boldsymbol{v}$ (velocità), $\boldsymbol{B}$ (vettore induzione magnetica) e p (pressione).

Al n. 3, assumendo che il moto avvenga solo attorno all'asse, si determinano alcune classi di soluzioni esatte dipendenti dalle variabili r e z.

(*) Entrata in Redazione il 23 gennaio 1975.

(**) Istituto Matematico dell'Università di Siena.

([1]) In una trattazione puramente idrodinamica, R. BERKÈR in [1] — Sez. 28 e 29 — ha definito questi moti « di pseudo-rivoluzione di seconda specie ».

Al n. 4 si esaminano alcune conseguenze della ipotesi che le componenti di $\boldsymbol{v}$ e di $\boldsymbol{B}$ dipendano solo dalla variabile r e si danno altre classi di soluzioni esatte.

Al n. 5, conservando le stesse ipotesi del n. 4, si studiano i casi: (*a*) fluido viscoso e perfetto conduttore dell'elettricità; (*b*) fluido non viscoso e imperfetto conduttore dell'elettricità; (*c*) fluido non viscoso e perfetto conduttore dell'elettricità.

Al n. 6 infine si esamina, per il problema in studio, il caso in cui non sia trascurabile la corrente di Hall.

2. – Le equazioni per il problema in esame.

Per il fluido in studio le equazioni non lineari MFD in assenza di effetto Hall e nelle unità di Gauss sono:

$$\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{v}-\operatorname{grad}\left(U-\frac{p}{\varrho}\right)+\frac{1}{4\varrho\pi\mu}\boldsymbol{B}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{B}-\nu\nabla^2\boldsymbol{v}=0\,, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\,, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})+\nu_m\nabla^2\boldsymbol{B}=0\,,\qquad (\nu_m=c^2/4\pi\mu\sigma), \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0\,. \tag{2.4}$$

In esse ϱ è la densità (costante), μ la permeabliità magnetica (costante), c la velocità della luce nel vuoto, ν_m è interpretabile come coefficiente di viscosità magnetica e le rimanenti grandezze sono state definite nell'Introduzione.

Le incognite fondamentali sono $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ e p che debbono soddisfare alle tre equazioni (2.1), (2.2), (2.3) e alla condizione di solenoidalità di $\boldsymbol{B}$ (2.4). È ben noto che una volta conosciuti $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$, i vettori densità di corrente $\boldsymbol{J}$ e campo elettrico $\boldsymbol{E}$ si ricavano dalle:

$$\boldsymbol{J}=\frac{c}{4\pi\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\,, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}-\frac{\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}}{c}\,. \tag{2.6}$$

Dette v_z, v_r, v_φ, B_z, B_r, B_φ le componenti fisiche di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$ rispetto alla terna introdotta, abbiamo per i moti in esame:

$$\boldsymbol{v}=v_z(r,z)\,\boldsymbol{e}_z+v_r(r,z)\,\boldsymbol{e}_r+v_\varphi(r,z)\,\boldsymbol{e}_\varphi=\boldsymbol{v}_m(r,z)+v_\varphi(r,z)\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.7}$$

e, analogamente, seguendo il metodo indiretto ricordato, possiamo assumere per i vettore induzione magnetica:

$$\boldsymbol{B}=B_z(r,z)\,\boldsymbol{e}_z+B_r(r,z)\,\boldsymbol{e}_r+B_\varphi(r,z)\,\boldsymbol{e}_\varphi=\boldsymbol{B}_m(r,z)+B_\varphi(r,z)\,\boldsymbol{e}_\varphi\,. \tag{2.8}$$

Dalle (2.2) e (2.4) segue:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_m = 0 , \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B}_m = 0$$

il che rende possibile l'introduzione di due funzioni scalari ψ e ψ_B tali che:

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{1}{r} \operatorname{grad} \psi \wedge \boldsymbol{e}_\varphi , \qquad \boldsymbol{B}_m = \frac{1}{r} \operatorname{grad} \psi_B \wedge \boldsymbol{e}_\varphi .$$

Dato che l'equazione di moto è la stessa del caso $\nu_m = 0$ esaminto in [2], anche nel caso presente valgono le considerazioni sulla (2.1) fatte in [2] al n. 2 ed in particolare sussistono le:

$$\nu(\nabla^2 \Omega - \Omega/r^2) + D + D_B + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{B_\varphi}{4\pi\mu\varrho} \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0 , \tag{2.9}$$

$$\nu(\nabla^2 v_\varphi - v_\varphi/r^2) + \frac{1}{r^2} (A + A) = 0 \tag{2.10}$$

dove:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_m = 2\Omega \boldsymbol{e}_\varphi , \qquad \Omega = -\frac{1}{2r} D^2 \psi , \qquad D^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} ,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}_m = 2\Omega_B \boldsymbol{e}_\varphi , \qquad \Omega_B = -\frac{1}{2r} D^2 \psi_B , \qquad D^2 \psi_B = \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z^2} ,$$

$$D = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial(\Omega/r)}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial(\Omega/r)}{\partial z} , \qquad D_B = -\frac{1}{4\pi\mu\varrho} \left[\frac{\partial \psi_B}{\partial z} \frac{\partial(\Omega_B/r)}{\partial r} - \frac{\partial \psi_B}{\partial r} \frac{\partial(\Omega_B/r)}{z} \right] ,$$

$$A = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} (r v_\varphi) , \qquad A_B = -\frac{1}{4\pi\mu\varrho} \left[\frac{\partial \psi_B}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial \psi_B}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} (r B_\varphi) \right] .$$

Nell'equazione del campo magnetico a differenza della (2.2) di [2] è ora presente il termine $\nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B}$. Proiettando la (2.3) lungo $\boldsymbol{e}_z$ ed $\boldsymbol{e}_r$ si ottiene in analogia alla (2.20) di [4]:

$$\frac{1}{r} G + \nu_m D^2 \psi_B = \text{costante} \qquad \text{dove} \qquad G = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi_B}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi_B}{\partial z} . \tag{2.11}$$

La proiezione della (2.3) lungo $\boldsymbol{e}_\varphi$ fornisce:

$$F_1 + F_2 + \nu_m(\nabla^2 B_\varphi - B_\varphi/r^2) = 0 \tag{2.12}$$

in cui

$$F_1 = \frac{\partial \psi_B}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} (v_\varphi/r) - \frac{\partial \psi_B}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (v_\varphi/r) , \tag{2.13}$$

$$F_2 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (B_\varphi/r) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} (B_\varphi/r) . \tag{2.14}$$

Il problema è così ridotto alla determinazione delle quattro funzioni incognite ψ, ψ_B, v_φ e B_φ soddisfacenti le quattro equazioni differenziali (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12).

Nel caso $v_\varphi = B_\varphi = 0$ ci si riconduce alle equazioni già date in [4] al n. 2.

Per la completa soluzione del problema MFD in studio rimane da determinare la pressione p che, una volta note le incognite $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$, è data dalla (2.1) per quadrature. Si ha (cfr. [2] (2.7)):

$$U - p/p - v^2/2 = \int_{z_0}^{z} \left[-\nu\nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{2\Omega}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{4\pi\mu\varrho}\left(B_\varphi\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \frac{2\Omega_B}{r}\frac{\partial\psi_B}{\partial z}\right)\right] dz + \int_{r_0}^{r} \left\{\left[\nu\nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{\nu}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi) + \frac{2\Omega}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{4\pi\mu\varrho}\left[\frac{B_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) - \frac{2\Omega_B}{r}\frac{\partial\psi_B}{\partial r}\right]\right\}_{z=z_0} dr + \text{costante} \tag{2.15}$$

dove r_0 e z_0 sono due costanti arbitrariamente fissate.

Osserviamo infine che per le ipotesi (2.7) e (2.8) non è ora necessariamente $\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) = 0$ a differenza di quanto accade nel caso in cui sia $v_\varphi = 0$ e $B_\varphi = 0$ (cfr. [4], n. 2). Ciò comporta che, anche in assenza di effetto Hall, nei moti MFD considerati può esserci una distribuzione di carica spaziale non nulla.

3. – Alcune soluzioni dipendenti dalle variabili r e z.

Consideriamo il moto MFD simmetrico rispetto all'asse z caratterizzato dalle:

$$\psi = \text{costante}\,, \qquad \psi_B = \tfrac{1}{2}B_0 r^2 + \text{costante} \tag{3.1}$$

$$v_\varphi = v_\varphi(r, z)\,, \qquad B_\varphi = B_\varphi(r, z) \tag{3.2}$$

con B_0 costante. Ciò comporta:

$$\boldsymbol{v} = v_\varphi(r, z)\,\boldsymbol{e}_\varphi\,, \qquad \boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z + B_\varphi(r, z)\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{3.3}$$

ed inoltre è facile controllare che:

$$\Omega = 0\,, \quad D^2\psi_B = 0\,, \quad D = 0\,, \quad D_B = 0\,, \quad A = 0\,, \quad G = 0\,, \quad F_2 = 0$$

per cui la (2.11) è identicamente soddisfatta e (2.9), (2.10) con (2.12) forniscono rispettivamente:

$$\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{B_\varphi}{4\pi\mu\varrho r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\,, \tag{3.4}$$

$$\nu(\nabla^2 v_\varphi - v_\varphi/r^2) + \frac{B_0}{4\pi\mu\varrho}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0\,, \tag{3.5}$$

$$B_0\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \nu_m(\nabla^2 B_\varphi - B_\varphi/r^2) = 0\,. \tag{3.6}$$

È questo un sistema sovradeterminato (« overdetermined system », cfr. [5], pp. 15-18) di equazioni differenziali alle derivate parziali nelle ingognite v_φ e B_φ, funzioni delle due variabili r e z. Ne daremo qui certe soluzioni esatte imponendo ad alcune delle funzioni che soddisfano la condizione (3.4) di soddisfare anche le equazioni (3.5) e (3.6) (2).

La (3.4) può essere messa nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(v_\varphi^2 - \frac{B_\varphi^2}{4\pi\mu\varrho}\right) = 0 \,. \tag{3.7}$$

Notiamo che per $v_m = 0$ si ottiene subito la classe di soluzioni esatte date in [2] (n. 6):

$$\begin{aligned} v_\varphi &= c_1 r + c_2/r \qquad \text{con } c_1 \text{ e } c_2 \text{ costanti arbitrarie,} \\ B_\varphi &= \text{arbitraria funzione di } r. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nel caso attuale in cui $v_m \neq 0$ avremo soluzioni analoghe se:

$$\nabla^2 B_\varphi - B_\varphi/r^2 = 0 \,. \tag{3.9}$$

Infatti da (3.4)-(3.6) seguono allora subito:

$$v_\varphi = c_1 r + c_2/r \,, \tag{3.10}$$

$$B_\varphi = c_3 r + c_4/r \,, \tag{3.11}$$

dove c_3 e c_4 sono anch'esse costanti arbitrarie.

Notiamo che tali soluzioni sono valide anche nel caso di un fluido non viscoso, ma con conducibilità elettrica finita, in quanto ciò porta ancora necessariamente alla (3.9).

Le (3.10) e (3.11) sono soluzioni esatte indefinite. Ad esse dovranno essere applicate le condizioni al contorno meccaniche ed elettromagnetiche caratteristiche di ogni eventuale problema particolare. Nello spirito del metodo indiretto (cfr. [3], Sez. 3) qui e nel seguito considereremo solo le soluzioni esatte indefinite.

Dalle (3.10) e (3.11) avremo per la pressione tramite la (2.15):

$$U - \frac{p}{\varrho} = \frac{1}{4\pi\mu\varrho}(c_3 r^2 + 2c_3 c_4 \lg r) - \frac{1}{2} c_1 r^2 + \frac{1}{2} c_2 r^{-2} - 2c_1 c_2 \lg r + \text{costante} \,. \tag{3.12}$$

Altre classi di soluzioni esatte della (3.4), (3.5) e (3.6) si ottengono osservando

(2) Sistemi con caratteristiche analoghe al presente si incontrano anche in problemi puramente idrodinamici come, ad esempio, in [1], p. 103, riguardo ai moti di Jeffery generalizzati.

che dalla (3.7) segue:

$$B_\varphi^2 = 4\pi\mu\varrho v_\varphi^2 + F(r) \tag{3.13}$$

con $F(r)$ arbitraria funzione di r. Assumendo $F = 0$ si nota che le (3.5) e (3.6) risultano compatibili con (3.13) solo se:

$$\nu = \nu_m .$$

Sotto questa ipotesi avremo quindi soluzioni esatte del tipo:

$$B_\varphi = (4\pi\mu\varrho)^{\frac{1}{2}} v_\varphi \tag{3.14}$$

con v_φ che soddisfa la:

$$\nabla^2 v_\varphi - v_\varphi/r^2 + k_* \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{dove} \qquad k_* = B_0/\nu\sqrt{4\pi\mu\varrho} . \tag{3.15}$$

Per quanto riguarda la pressione si ricava:

$$U - p/\varrho = \tfrac{1}{2} v_\varphi^2 + \text{costante} \tag{3.16}$$

Osserviamo che le soluzioni per le quali si ha $\boldsymbol{B} = (4\pi\mu\varrho)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{v}$ sono note nella letteratura come « equipartition solutions », cfr. [6], Sez. 40 e [7], Cap. V, dove però esse sono date per fluidi incomprimibili, non viscosi e perfettamente conduttori dell'elettricità.

Ponendo:

$$v_\varphi(r, z) = f^*(r)\, g^*(z) \tag{3.17}$$

una prima classe di soluzioni della (3.15) è data da:

$$v_\varphi = (c_5 r + c_6 r^{-1})(c_7 \exp[-k^* z] + c_8) \tag{3.18}$$

con c_5, c_6, c_7 e c_8 costanti arbitrarie.

Un'altra classe di soluzioni è data da:

$$v_\varphi = J_1(\alpha_* r)[c_9 \exp[\lambda_1 z] + c_{10} \exp[\lambda_2 z]] \tag{3.19}$$

con c_9, c_{10}, α_* costanti arbitrarie e dove J_1 indica la funzione di Bessel di ordine uno e di prima specie mentre è:

$$\lambda_{\substack{1\\2}} = (-k_* \pm \sqrt{k_*^2 + 4\alpha_*})/2 .$$

Consideriamo l'altro caso particolare:

$$\psi = \text{costante}\,, \qquad \psi_B = \text{costante}$$

$$v_\varphi = v_\varphi(r, z)\,, \qquad B_\varphi = B_\varphi(r, z)$$

In questo caso anche il vettore induzione magnetica ha componenti solo lungo $\boldsymbol{e}_\varphi$ e si ha dalle (2.9), (2.10) e (2.12) un sistema analogo al precedente:

$$\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = \frac{B_\varphi}{4\pi\mu\varrho}\frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\,,$$

$$\nu\;(\nabla^2 v_\varphi - v_\varphi/r^2) = 0\,,$$

$$\nu_m(\nabla^2 B_\varphi - B_\varphi/r^2) = 0\,.$$

Osserviamo che le soluzioni di v_φ e B_φ non dipenderanno da ν e ν_m.
Assumendo ancora soluzioni del tipo (3.14) avremo da verificare:

$$\nabla^2 v_\varphi - v_\varphi/r^2 = 0\,.$$

Sotto l'ipotesi (3.17) si ottiene ora una prima classe di soluzioni esatte del tipo:

$$v_\varphi = (c_{11}z + c_{12})(c_{13}r + c_{14}r^{-1}) \tag{3.20}$$

con c_{11}, c_{12}, c_{13} e c_{14} costanti arbitrarie.
Inoltre avremo ancora la classe di soluzioni regolari sull'asse già data in [2], n. 6 per il caso $\nu_m = 0$:

$$v_\varphi = J_1(\beta r)[c_{15}\exp[\beta z] + c_{16}\exp[-\beta z]] \tag{3.21}$$

con c_{15}, c_{16}, β costanti arbitrarie.
Per quanto riguarda la pressione sarà ancora valida la (3.16).

4. – Soluzioni dipendenti solo dalla variabile r.

In questo numero esamineremo alcuni casi in cui le (2.7) e (2.8) si specializzemo nelle:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_m(r) + v_\varphi(r)\boldsymbol{e}_\varphi\,, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_m(r) + B_\varphi(r)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{4.1}$$

Osserviamo subito che in forza della (4.1) la (2.9) non contiene più v_φ e B_φ e dunque insieme alla (2.11) da per il moto nei piani meridiani delle equazioni indipendenti da v_φ e B_φ stessi.

Sarà dunque possibile determinare prima $\boldsymbol{v}_m$ e $\boldsymbol{B}_m$ e poi dare la corrispondente classe di soluzioni per v_φ e B_φ risolvendo il sistema formato dalle (2.10) e (2.12).

Assumiamo dunque per ψ e ψ_B:

$$\psi_B = -A_1 z + q(r)\,, \tag{4.2}$$

$$\psi \;= -A_2 z + m(r)\,, \tag{4.3}$$

con A_1 e A_2 costanti reali arbitrarie e $q(r)$ ed $m(r)$ funzioni reali da determinare.

Queste ipotesi sono già state assunte in [4] (n. 4) e dunque per quanto riguarda $\boldsymbol{v}_m$ e $\boldsymbol{B}_m$ le soluzioni saranno quelle ivi date.

Per quanto riguarda v_φ e B_φ in conseguenza di (4. 2) e (4.3) le (2.10) e (2.12) assumono la forma:

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r_z} + \frac{h}{r^2}\frac{d}{dr}(rB_\varphi) - \frac{k}{r^2}\frac{d}{dr}(rv_\varphi) = 0\,, \tag{4.4}$$

$$\frac{d^2 B_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dB_\varphi}{dr} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \gamma\frac{d}{dr}(v_\varphi/r) - \eta\frac{d}{dr}(B_\varphi/r) = 0\,, \tag{4.5}$$

dove:

$$h = A_1/4\pi\mu\varrho\nu\,, \qquad k = A_2/\nu\,,$$

$$\gamma = A_1/\nu_m\,, \qquad \eta = A_2/\nu_m\,.$$

Al fine di risolvere il sistema formato dalla (4.4) e (4.5) poniamo ora:

$$rB_\varphi = f(r)\,, \tag{4.9}$$

$$v_\varphi/r = g(r)\,. \tag{4.7}$$

Conseguentemente la (4.4) e (4.5) diventano:

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{(3-k)}{r}\frac{dg}{dr} - \frac{2k}{r^2}g + \frac{h}{r^3}\frac{df}{dr} = 0\,, \tag{4.8}$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{(1+\eta)}{r}\frac{df}{dr} + \frac{2\eta}{r^2}f + \gamma r\frac{dg}{dr} = 0\,.$$

Ricavando ora dg/dr dalla seconda di queste ed integrando si ha:

$$g(r) = \frac{\eta}{\gamma}\frac{f}{r^2} - \frac{1}{\gamma r}\frac{df}{dr} + c_1 \tag{4.9}$$

con c_1 costante arbitraria, e sostituendo nella (4.9) si ha in definitiva

$$\frac{d^3 f}{dr^3} + \frac{\alpha}{r}\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{\delta}{r^2}\frac{df}{dr} = \frac{A_4}{r} \tag{4.10}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1-\eta-k = 1-A_2\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_m}\right),\\
\delta &= 1+\gamma h+k-\eta-k\eta = 1+\gamma h - A_2\,\frac{(A_2-\nu_m+\nu)}{\nu\nu_m},\\
A_4 &= -2kc_1 .
\end{aligned}$$

Notiamo che le soluzioni della (4.9) e (4.10) saranno valide per il problema in esame solo se $\gamma\neq 0$, cioè $A_1\neq 0$. Il caso $A_1=0$ che comporta $B_r=0$ lo tratteremo a parte.

Dall'integrale generale della (4.10) segue:

$$B_\varphi = c_2 r^{s_1} + c_3 r^{s_2} + \frac{c_4}{r} + \frac{A_4}{2(\alpha-\delta)}\,r \tag{4.11}$$

con c_2, c_3, c_4 costanti arbitrarie e:

$$s_{\frac{1}{2}} = \left[(1-\alpha)\pm\sqrt{(1-\alpha)^2+4\delta}\right]/2 .$$

La (4.11) non è soluzione del nostro problema nei seguenti casi:

$$\alpha+\delta=2\,,\qquad \alpha=\delta$$

cioè:

$$\frac{A_2^2}{4\pi\mu\varrho\nu\nu_m}-2\,\frac{A_2}{\nu_m}-\frac{A_1^2}{\nu\nu_m}=0,\qquad \frac{A_1^2}{4\pi\mu\varrho\nu\nu_m}+2\,\frac{A_2}{\nu_m}-\frac{A_2^2}{\nu\nu_m}=0.$$

È facile vedere che per le ipotesi fatte ($\nu\neq 0$, $\nu_m\neq 0$, $A_1\neq 0$) queste due situazioni si escludono a vicenda.

Avremo dunque in corrispondenza al primo caso:

$$B_\varphi = c_2\,\frac{\lg r}{r} + c_3 r^\delta + \frac{c_4}{r} + \frac{1}{2}\,\frac{A_4}{\alpha-\delta}\,r \tag{4.12}$$

e in corrispondenza al secondo:

$$B_\varphi = c_2 r^{s_1} + c_3 r^{s_2} + \frac{c_4}{r} + \frac{A_4}{\alpha+1}\left[\frac{1}{2}\,r\lg r - \frac{1}{4}\,r\right] \tag{4.13}$$

in cui, sempre per le ipotesi fatte, è $\alpha+1\neq 0$.

Usando poi la (4.9), (4.6) e (4.7) si hanno le soluzioni per v_φ. Dalla (4.11) segue:

$$v_\varphi = \frac{\eta-s_1-1}{\gamma}\,c_2 r^{s_1} + \frac{\eta-s_2-1}{\gamma}\,c_3 r^{s_2} + \frac{\eta}{\gamma}\,\frac{c_4}{r} + \left[1-\frac{(\eta-2)\,k}{\gamma\,(\alpha-\delta)}\right]c_1 r .$$

Dalla (4.12):

$$v_\varphi = \frac{\eta}{\gamma} c_2 \frac{\lg r}{r} + \frac{\eta - \delta - 1}{\gamma} c_3 r^\delta + \frac{\eta c_4 - c_2}{\gamma} \frac{1}{r} + \left[1 - \frac{(\eta - 2)k}{\gamma(\alpha - \delta)}\right] c_1 r\,.$$

Dalla (4.13):

$$v_\varphi = \frac{\eta - s_1 - 1}{\gamma} c_2 r^{s_1} + \frac{\eta - s_2 - 1}{\gamma} c_3 r^{s_2} + \frac{\eta}{\gamma} \frac{c_4}{r} - \frac{(\eta - 2) k c_1}{\gamma(\alpha + 1)} r \lg r + \left[1 - \frac{\eta k}{2\gamma(\alpha + 1)}\right] c_1 r\,.$$

Siamo ora in grado di dare l'andamento della pressione in corrispondenza delle ipotesi (4.1), (4.2) e (4.3). Dalla (2.15) segue:

$$U - \frac{p}{\varrho} = -A_3 z + \frac{B_z^2}{8\pi\mu\varrho} + \frac{1}{2} v_r^2 + \frac{B_\varphi^2}{8\pi\mu\varrho} + \int \left(\frac{B_\varphi^2}{4\pi\mu\varrho} - v_\varphi^2\right) \frac{dr}{r} \tag{4.14}$$

in cui A_3 è una costante arbitraria d'integrazione (cfr. (4.6) di [4]), B_z è dato dalle soluzioni di [4], n. 4, $v_r = A_2/r$, v_φ e B_φ sono dati in questo numero.

Notiamo la dipendenza della pressione anche dalle componenti B_φ e v_φ rispetto alle soluzioni date in [4]. Se poi si assumono le ipotesi (3.1) (3.2), (3.14) allora si riottiene subito la (3.16).

Ricordiamo ora che in [1], Sez. 30, nello studio di problemi puramente idrodinamici, si danno per i moti di pseudo rivoluzione di seconda specie di un fluido viscoso incomprimibile, le soluzioni particolari:

$$\begin{aligned} v_z &= A_5 \lg r + A_6 r^2 + A_7\,, \\ v_\varphi &= A_8 r \lg r + A_9 r + \frac{A_{10}}{r}\,, \\ v_r &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.15}$$

con $A_5, \ldots, A_{10}$ costanti arbitrarie, descriventi moti per eliche circolari di Strakhovitch.

A tali soluzioni si giunge assumendo l'ipotesi che v_z e v_φ dipendano solo dalla variabile r.

Osserviamo ora che se in (4.3) è:

$$A_2 = 0\,, \tag{4.16}$$

il che implica $v_r = 0$, allora le (4.2) e (4.3) coincidono con le ipotesi fatte in [3] (Sez. 4) riguardo al moto di rivoluzione per rette parallele in Magnetofluidodinamica. Inoltre si osserva anche che le nostre ipotesi (4.1), (4.2) e (4.3) con la condizione (4.16) si adattano ad un problema MFD analogo, per quanto concerne il campo di velocità, a quello puramente idrodinamico sopra ricordato.

Questo problema è esattamente risolto dall'insieme di soluzioni costituito da quelle date in [3] (Sez. 4) per v_z e B_z e da quelle date in questo numero per v_φ e B_φ tenendo conto di (4.16).

Notiamo che tale affermazione è vera nel caso, trattato qui come anche in [3] sez. 4, di un fluido viscoso, incomprimibile, a conducibilità elettrica finita ($\nu_m \neq 0$).

Ricordiamo che moti MFD per eliche circolari di Strakhovitch sono già stati messi in evidenza in [8] (nn. 4 e 5) nel caso $\nu \neq 0$, $\nu_m = 0$.

Esaminiamo ora il caso in cui si abbia $B_r = 0$, cioè $A_1 = 0$ nella (4.2). Ferme restando le (4.1) e (4.3) avremo per v_φ e B_φ due equazioni separate che discendono da (4.4) e (4.5):

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{(1-k)}{r}\frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{(1+k)}{r^2} v_\varphi = 0 \,, \tag{4.17}$$

$$\frac{d^2 B_\varphi}{dr^2} + \frac{(1-\eta)}{r}\frac{dB_\varphi}{dr} - \frac{(1-\eta)}{r^2} B_\varphi = 0 \,. \tag{4.18}$$

L'integrale generale della (4.17) è dato da:

$$v_\varphi = c_4 r^{-1} + c_5 r^{k+1} \tag{4.19}$$

con c_4 e c_5 costanti arbitrarie, tranne nel caso in cui sia $K = -2$, cioè $A_2 = -2\nu$, per il quale si ha:

$$v_\varphi = c_4 r^{-1} + \frac{c_5}{r} \lg r \,.$$

Dalla (4.18) si ha:

$$B_\varphi = c_6 r + c_7 r^{\eta-1} \,, \tag{4.20}$$

con c_6 e c_7 costanti arbitrarie, mentre se $\eta = 2$, cioè se $A_2 = 2\nu_m$, si ha:

$$B_\varphi = c_6 r + c_7 r \lg r \,.$$

Le soluzioni qui date per v_φ e B_φ sono completate dalle soluzioni per $\boldsymbol{v}_m$ e $\boldsymbol{B}_m$ date in [4], n. 4 riguardo al caso $B_r = 0$, dove è trattato anche il caso in cui oltre ad $A_1 = 0$, sia anche $A_2 = 0$.

Tale ultime ipotesi e contenuta nelle (4.19) e (4.20), per quanto concerne v_φ e B_φ, e corrisponde ai valori $k = 0$ ed $\eta = 0$.

Per quanto riguarda la pressione continua a valore la (4.14) con le nuove espressioni indicate per v_φ, B_φ, B_z e v_r.

5. – Assenza, parziale o totale, di termini dissipativi.

Assumendo le stesse ipotesi del n. 4 esamineremo ora le soluzioni delle equazioni date al n. 2 nei seguenti casi:

$$(a) \qquad \nu \neq 0\,, \qquad \nu_m = 0\,,$$

$$(b) \qquad \nu = 0\,, \qquad \nu_m \neq 0\,,$$

$$(c) \qquad \nu = 0\,, \qquad \nu_m = 0\,.$$

Osserviamo subito che, come al n. 4, il moto nei piani meridiani non dipende da v_φ e B_φ e quindi le soluzioni che daremo per v_φ e B_φ vanno completate con le corrispondenti soluzioni per v_z, B_z, v_r e B_r. Queste sono già state discusse in [4], n. 5 separatamente per i casi (a), (b) e (c) e sotto l'ipotesi, che manteniamo anche qui, che le costanti A_1 e A_2 di (4.2), (4.3) fossero non nulle.

Caso (a). – È questa la condizione per un fluido viscoso con conducibilità elettrica tanto grande da poter essere considerata infinita. Lo studio di un tale fluido per i moti di cui ci interessiamo in questo lavoro è stato già affrontato in [2]; qui daremo ulteriori soluzioni esatte.

La (2.12) si scrive ora:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{A_1}{r}v_\varphi - \frac{A_2}{r}B_\varphi\right) = 0$$

da cui

$$B_\varphi = \frac{A_1}{A_2}v_\varphi + c_1 r \tag{5.1}$$

con c_1 costante aroitraria. Sostituendo nella (4.4) si ha:

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + (1+\delta_1)\frac{1}{r}\frac{dv_\varphi}{dr} + (\delta_1 - 1)\frac{v_\varphi}{r^2} = -\frac{2A_1c_1}{4\pi\mu\varrho\nu}\frac{1}{r} \tag{5.2}$$

con

$$\delta_1 = \frac{A_1^2}{4\pi\mu\varrho\nu A_2} - \frac{A_2}{\nu}\,.$$

L'integrale generale della (5.2) è dato da:

$$v_\varphi = c_2 r^{-1} + c_3 r^{1-\delta_1} - \frac{A_1 c_1}{4\pi\mu\varrho\nu\delta_1} r \tag{5.3}$$

con c_2 e c_3 costanti arbitrarie.

Se però è $\delta_1 = 2$, cioè $A_1^2/(4\pi\mu\varrho\nu A_2) = 2 + A_2/\nu$, allora avremo

$$v_\varphi = c_2 r^{-1} + c_3 (\lg r)/r - A_1 c_1 r/8\pi\mu\varrho\nu \,. \tag{5.4}$$

Ed infine se $\delta_1 = 0$, cioè se $A_1^2/(4\pi\mu\varrho\nu A_2) = A_2/\nu$, allora

$$v_\varphi = c_2 r^{-1} + c_3 r + \frac{A_1 c_1}{8\pi\mu\varrho\nu} r - \frac{A_1 c_1}{4\pi\mu\varrho\nu} r \lg r \,. \tag{5.5}$$

Dalla (5.1) seguono le soluzioni di B_φ in corrispondenza delle (5.3), (5.4) e (5.5). Per quanto riguarda la pressione avremo ancora un andamento dato dalla (4.14).

Caso (*b*). – È questa la condizione per un fluido non viscoso e imperfetto conduttore dell'elettricità.

Dalla (2.10) segue ora

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{A_1}{4\pi\mu\varrho} r B_\varphi - A_2 r v_\varphi\right) = 0$$

da cui

$$v_\varphi = \frac{A_1}{4\pi\mu\varrho A_2} B_\varphi + \frac{c_4}{r} \tag{5.6}$$

con c_4 costante arbitraria.

Da (4.5) segue:

$$\frac{d^2 B_\varphi}{dr^2} + \frac{\delta_2}{r}\frac{dB_\varphi}{dr} - \frac{\delta_2}{r^2} B_\varphi = 2\frac{A_1}{\nu_m} c_4 \frac{1}{r^3} \tag{5.7}$$

con

$$\delta_2 = 1 + \frac{A_1^2}{4\pi\mu\varrho\nu_m A_2} - \frac{A_2}{\nu_m} \,.$$

L'integrale generale della (5.7) è

$$B_\varphi = c_5 r + c_6 r^{-\delta_2} - \frac{A_1 c_4}{\nu_m(\delta_2 - 1) r}$$

con c_5 e c_6 costanti arbitrarie.

Se $\delta_2 = -1$, cioè se $A_2/\nu_m - 2 = A_1^2/(4\pi\mu\varrho\nu_m A_2)$, la soluzione della (5.7) è rappresentata da:

$$B_\varphi = c_5 r + c_6 r \lg r + A_1 c_4/2\nu_m r \,.$$

Se invece $\delta_2 = 1$, cioè se $A_1^2/(4\pi\mu\varrho\nu_m A_2) = A_2/\nu_m$, avremo:

$$B_\varphi = c_5 r + c_6 r^{-1} - (A_1 c_4/2\nu_m) r^{-1} - (A_1 c_4/\nu_m)\frac{\log r}{r} \,.$$

Le corrispondenti soluzioni per v_φ sono date dalla (5.6). Per la pressione sussiste ancora la (4.14).

Caso (*c*). – È questa la condizione per un fluido non viscoso e perfetto conduttore dell'elettricità.

Le (2.10) e (2.12) diventano ora

$$(A_1/4\pi\mu\varrho)\frac{d}{dr}(rB_\varphi) - A_2\frac{d}{dr}(rv_\varphi) = 0\,, \tag{5.8}$$

$$A_1\frac{d}{dr}(v_\varphi/r) - A_2\frac{d}{dr}(B_\varphi/r) = 0\,. \tag{5.9}$$

Dalla prima segue:

$$v_\varphi = (A_1/4\pi\mu\varrho A_2)B_\varphi + c_7 r^{-1} \tag{5.10}$$

e dalla seconda

$$v_\varphi = \frac{A_2}{A_1}B_\varphi + c_8 r \tag{5.11}$$

con c_7 e c_8 costanti arbitrarie. Uguagliando (5.10) e (5.11)

$$B_\varphi = \frac{1}{A_1/4\pi\mu\varrho A_2 - A_2/A_1}(c_8 r - c_7 r^{-1})\,.$$

Questa soluzione è valida solo se:

$$\frac{A_1}{4\pi\mu\varrho A_2} \neq \frac{A_2}{A_1}\,. \tag{5.12}$$

In caso contrario da (5.10) e (5.11) seguono solo le condizioni $c_7 = 0$, $c_8 = 0$ con la conseguenza

$$v_\varphi = \frac{A_2}{A_1}B_\varphi = \frac{A_1}{4\pi\mu\varrho A_2}B_\varphi\,.$$

Però le (5.8) e (5.9) non sono in tal caso sufficienti a determinare esplicitamente v_φ e B_φ.

Ricordiamo che se non vale la (5.12) anche le soluzioni per v_z e B_z, cfr. [4] n. 5, sono indeterminate. Allora per i moti in esame di un fluido perfetto dovremo aggiungere alle ipotesi (4.2) e (4.3) altre ipotesi, per esempio sulla pressione, se vogliamo determinare i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$.

6. – Influenza dell'effetto Hall.

È ben noto (cfr. per es. [9], Sez. 3 e Sez. 4) che in molti problemi MFD si può adeguatamente tenere conto dell'influenza dell'effetto Hall sostituendo la (2.5) con:

$$\boldsymbol{J} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}}{c} - \beta_H \boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{B}\right)$$

dove β_H è il coefficiente di Hall.

L'unica conseguenza di ciò nelle equazioni (2.1), ..., (2.4) si ha nella (2.3) che diventa:

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) + \nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B} + \beta \operatorname{rot}(\boldsymbol{B}\wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{B}) = 0 \qquad \text{dove } \beta = \frac{\beta_H c^2}{4\pi\mu}$$

Ciò comporta in termini delle funzioni introdotte al n. 2:

$$\operatorname{rot}\left[\frac{G}{r^2} + \nu_m D^2\psi_B - \beta 4\pi\mu\varrho\frac{A_B}{r^2}\right]\boldsymbol{e}_\varphi + \left\{\beta\left[\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{B_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_B}{\partial r}D^2\psi_B\right] + \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_B}{\partial z}D^2\psi_B + B_\varphi\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right]\right] - \nu_m\left(\nabla^2 B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2}\right) - F_1 - F_2\right\}\boldsymbol{e}_\varphi = 0 \,. \tag{6.1}$$

Da questa seguono immediatamente le equazioni che prendono ora il posto della (2.11) e (2.12).

Assumiamo ora le ipotesi del n. 4. Da (6.1) seguono facilmente per le funzioni B_z, B_φ e v_φ:

$$\nu_m\frac{d^2B_z}{dr^2} + (\nu_m - A_2)\frac{1}{r}\frac{dB_z}{dr} + \frac{A_1}{r}\frac{dv_z}{dr} - \frac{\beta}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{A_1}{r}\frac{d}{dr}(rB_\varphi)\right] = 0 \,,$$

$$\nu_m\frac{d^2B_\varphi}{dr^2} + \frac{\nu_m}{r}\frac{dB_\varphi}{dr} - \nu_m\frac{B_\varphi}{r^2} + A_1\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right) - A_2\frac{d}{dr}\left(\frac{B_\varphi}{r}\right) - \beta\frac{d}{dr}\left(\frac{A_1}{r}\frac{d}{dr}B_z\right) = 0 \,.$$

Le equazioni (2.9) e (2.10) rimangono inalterate in presenza dell'effetto Hall. Sotto le ipotesi del n. 4 avremo quindi ancora la (4.4) che segue dalla (2.10) e inoltre dalla (2.9) avremo (cfr. (4.6) di [4]):

$$\nu\frac{d^2v_z}{dr^2} + (\nu - A_2)\frac{1}{r}\frac{dv_z}{dr} + \frac{A_1}{4\pi\mu\varrho}\frac{1}{r}\frac{dB_z}{dr} = A_3$$

con A_3 costante arbitraria.

Ricordando l'espressione delle costanti γ, h, k, η introdotte al n. 4, la (4.6) e la (4.7), potremo scrivere infine le quattro equazioni per le quattro incognite v_z, B_z, v_φ, B_φ:

$$\frac{d^2v_z}{dr^2}+\frac{(1-k)}{r}\frac{dv_z}{dr}+\frac{h}{r}\frac{dB_z}{dr}=\frac{A_3}{\nu}, \tag{6.2}$$

$$\frac{d^2B_z}{dr^2}+\frac{(1-\eta)}{r}\frac{dB_z}{dr}+\frac{\gamma}{r}\frac{dv_z}{dr}-\frac{\beta}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{\gamma}{r}\frac{df}{dr}\right]=0, \tag{6.3}$$

$$\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{(3-k)}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{2kg}{r^2}+\frac{h}{r^3}\frac{df}{dr}=0, \tag{6.4}$$

$$\frac{d^2f}{dr^2}-\frac{(1+\eta)}{r}\frac{df}{dr}+\frac{2\eta f}{r^2}+\gamma r\frac{dg}{dr}-\beta\frac{d}{dr}\left[\frac{\gamma}{r}\frac{dB_z}{dr}\right]=0. \tag{6.5}$$

Una classe di soluzioni di questo sistema si ottiene assumendo:

$$B_z=c_1r^2+c_2, \tag{6.6}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. È facile controllare che dalla (6.2) e (6.3) segue

$$\frac{\beta}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{\gamma}{r}\frac{df}{dr}\right]=0 \tag{6.7}$$

qualora per v_z si scelga la soluzione:

$$v_z=\frac{\eta-2}{\gamma}c_1r^2+c_3 \tag{6.8}$$

con c_3 costante arbitraria.

Da (6.7) discende:

$$f(r)=c_4r^2+c_5,$$

con c_4 e c_5 costanti arbitrarie e conseguentemente da (6.5)

$$g(r)=\frac{\eta}{\gamma}\frac{c_5}{r_2}+\frac{h}{k}c_4$$

e dunque per v_φ e B_φ:

$$B_\varphi=c_4r+c_5r^{-1}, \tag{6.9}$$

$$v_\varphi=\frac{\eta}{\gamma}c_5r^{-1}+\frac{h}{k}c_4r. \tag{6.10}$$

In definitiva in presenza di effetto Hall abbiamo la classe di soluzioni esatte data da (6.6), (6.8), (6.9), (6.10) con $v_r=A_2/r$, $B_r=A_1/r$ e p ancora data da (4.14).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BERKÈR, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der physik, VIII/2 (1963).
[2] G. MATTEI, *Sui moti simmetrici rispetto ad un asse di un fluido viscoso incomprimibile in Magnetofluidodinamica: caso in cui il moto avviene anche attorno all'asse*, Atti Acc. Sc. Torino, Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., **99** (1964-65), pp. 637-653.
[3] V. MILLUCCI, *Exact solutions of the magneto-fluid dynamics: a contribution*, Annali Scuola Normale Pisa, (IV), **1**, nn. 1-2 (1974), pp. 99-111.
[4] V. MILLUCCI, *Classi di soluzioni esatte della Magnetofluidodinamica*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **23** (1974), pp. 1-18.
[5] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, Interscience, New York (1966).
[6] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford (1961).
[7] N. G. VAN KAMPEN - B. U. FELDERHOF, *Theoretical Methods in Plasma Physics*, North-Holland, Amsterdam (1967).
[8] G. MATTEI, *Su una classe di moti magnetofluidodinamici di un fluido viscoso*, Annali Scuola Normale di Pisa, **19** (1965), pp. 429-441.
[9] G. MATTEI, *Sulla influenza dell'effetto Hall nella propagazione di onde magnetofluidodinamiche di un fluido incomprimibile*, Ann. Mat. Pura Appl., **84** (1969), pp. 1-32.