Math. Ann. 257, 199–218 (1981)

Mathematische Annalen

Charakterisierung von Produkten harmonischer Räume

Wolfgang Meier

Lerchenweg 1, D-8027 Neuried, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Die klassischen Beispiele der Potentialtheorie sind der harmonische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{H}_\Delta^*)$ zur Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^n$ und der harmonische Raum $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathscr{H}_{\triangle}^*)$ zur Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Zwischen diesen Räumen besteht ein enger Zusammenhang: Ist (P_t) die Brownsche Halbgruppe auf $\mathbb{R}^n$, so stimmt die Menge der (P_t)-exzessiven Funktionen bekanntlich überein mit der Menge aller positiven (bzgl. der Laplace-Gleichung) hyperharmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Bildet man nun das Produkt der Halbgruppe (P_t) mit der Halbgruppe (T_t) der gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$, so erhält man die Halbgruppe der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Die exzessiven Funktionen dieser Produkthalbgruppe sind dann gerade die positiven (bzgl. der Wärmeleitungsgleichung) hyperharmonischen Funktionen. Da die Halbgruppe (T_t) ebenfalls einen harmonischen Raum $(\mathbb{R}, \mathscr{H}_0^*)$ erzeugt, kann man somit $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathscr{H}_{\triangle}^*)$ als Produkt der Räume $(\mathbb{R}^n, \mathscr{H}_\Delta^*)$ und $(\mathbb{R}, \mathscr{H}_0^*)$ auffassen.

Auf ähnlichem Wege lassen sich nun unter gewissen Voraussetzungen Produkte beliebiger harmonischer Räume $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(Y, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ konstruieren: Man wähle zu $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(Y, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ passende Halbgruppen (P_t) und (R_t) und bilde das Produkt $(P_t \otimes R_t)$ dieser Halbgruppen. Existiert dann ein harmonischer Raum $(X \times Y, \bar{\mathscr{H}}^*)$, dessen positive hyperharmonische Funktionen die $(P_t \otimes R_t)$-exzessiven Funktionen sind, so kann man diesen als Produkt von $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(Y, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ bezeichnen.

Eine derartige Produktbildung ist allerdings nicht immer möglich. Wählt man zum Beispiel für beide Faktoren den harmonischen Raum zur gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$ mit der zugehörigen Halbgruppe (T_t), so liefert die Halbgruppe $(T_t \otimes T_t)$ keinen harmonischen Raum. Im ersten Kapitel wird daher ein Kriterium für die Produktfähigkeit harmonischer Räume hergeleitet. Da entsprechende Resultate bereits von Schirmeier in [13] und [14] veröffentlicht wurden, beschränken wir uns dabei hauptsächlich auf den einfacher zu behandelnden Fall, daß $(Y, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ der harmonische Raum $(\mathbb{R}, \mathscr{H}_0^*)$ zur gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$ ist. Es zeigt sich, daß ein Produkt von $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\mathbb{R}, \mathscr{H}_0^*)$ genau dann existiert, wenn es eine zu $(X, \mathscr{H}^*)$ passende stark-Fellersche Halbgruppe gibt.

0025-5831/81/0257/0199/$04.00

Als Vorbereitung für die folgenden Abschnitte wird im zweiten Kapitel kurz gezeigt, wie man aus einer zu einem $\mathfrak{P}$-harmonischen Raum $(X, \mathscr{H}^*)$ passenden Halbgruppe (P_t) lokale Halbgruppen, d.h. zu den Unterräumen $(U, \mathscr{H}^*_{|U})$, $U \subset X$ offen, passende Halbgruppen gewinnen kann.

Für die eingangs erwähnte klassische Situation zeigte Hansen in [9], unter Heranziehung allgemeinerer Resultate über Abbildungen harmonischer Räume, daß das Fegen von Maßen bzgl. $(\mathbb{R}^n, \mathscr{H}^*_\Delta)$ zurückgeführt werden kann auf das Fegen bzgl. $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathscr{H}^*_\square)$. Daraus folgt dann insbesondere, daß Dünnheit und Polarität einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ für die Laplace-Gleichung durch entsprechende Eigenschaften von $A \times \mathbb{R}$ bzgl. der Wärmeleitungsgleichung beschrieben werden können.

Im dritten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß entsprechende Resultate auch für allgemeine Produkte harmonischer Räume gelten: Ist $(X \times Y, \bar{\mathscr{H}}^*)$ das Produkt von $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(Y, \tilde{\mathscr{H}}^*)$, so liefert die Projektion von $X \times Y$ auf X den gewünschten Zusammenhang zwischen Fegen und Dünnheit bzgl. $(X, \mathscr{H}^*)$ einerseits und $(X \times Y, \bar{\mathscr{H}}^*)$ andererseits.

Durch einige der in Kap. 3 bewiesenen Eigenschaften lassen sich Produkträume sogar vollständig charakterisieren. Sind $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ harmonische Räume, so werden im vierten Kapitel notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ das Produkt von $(X, \mathscr{H}^*)$ mit dem harmonischen Raum zur gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$ ist. Diese Charakterisierung geschieht durch rein potentialtheoretische Eigenschaften, eine Kenntnis der zu $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ passenden Halbgruppen ist dazu nicht erforderlich.

0. Bezeichnungen

Sei X ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis.

Wir bezeichnen mit $\mathscr{B}(X)$ [bzw. $\mathscr{C}(X)$] die Menge aller Borel-meßbaren (bzw. aller stetigen reellwertigen) Funktionen auf X. Ferner sei $\mathscr{K}(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Ist $\mathscr{A}$ eine Menge numerischer Funktionen, so bezeichne $\mathscr{A}^+$ bzw. $\mathscr{A}_b$ die Menge aller positiven bzw. beschränkten Funktionen aus $\mathscr{A}$, und $\mathscr{A}_1$ sei die Menge aller Funktionen $f \in \mathscr{A}$ mit $|f| \leqq 1$. Ist f eine numerische Funktion, so sei $\hat{f}$ die größte nach unten halbstetige Minorante von f. Sind $f: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $t \in \mathbb{R}$, so sei $f_t: X \to \mathbb{R}$ stets definiert durch $f_t(x) = f(x, t)$ für $x \in X$.

Alle potentialtheoretischen Bezeichnungen werden aus [6] übernommen. Ist $(X, \mathscr{H}^*)$ ein harmonischer Raum, so nehmen wir jedoch stets an, daß X eine abzählbare Basis besitzt und daß $1 \in \mathscr{H}^*_+(X)$ gilt. Mit $\mathscr{P}(X)$ bzw. $\mathscr{P}_c(X)$ sei die Menge aller Potentiale, bzw. aller stetigen reellwertigen Potentiale auf X bezeichnet.

Begriffe im Zusammenhang mit Standard-Balayage-Räumen, Markoffschen Prozessen, Halbgruppen und Resolventen werden wie in [2, 3] und [11] gebraucht. Sind $\mathfrak{X}$ ein Standardprozeß auf X und $A \subset X$, so bezeichne insbesondere T_A die Eintrittszeit von $\mathfrak{X}$ in A, und für $x \in X$ sei $P_A(x, \cdot)$ die Trefferverteilung von A bei Start in x. Für Prozesse $\mathfrak{X}$, Halbgruppen (P_t) und Resolventen (V_λ) bezeichne $\mathscr{E}(\mathfrak{X})$, $\mathscr{E}(P_t)$ bzw. $\mathscr{E}(V_\lambda)$ jeweils die Menge aller exzessiven Funktionen auf X.

Ein sub-Markoffscher Kern N auf X heiße *stark-Fellersch*, falls $N(\mathscr{B}_b) \subset \mathscr{C}_b$ gilt. Eine sub-Markoffsche Halbgruppe (P_t) [bzw. eine Resolvente (V_λ)] heiße *stark-Fellersch*, falls jeder Kern P_t, $t > 0$ (bzw. V_λ, $\lambda > 0$) stark-Fellersch ist.

Das Produkt $(P_t \otimes R_t)$ zweier Halbgruppen (P_t) und (R_t) sowie das Produkt $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Y}$ von Standardprozessen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ seien wie in [4, Kap. 1], definiert.

Mit (T_t) bzw. (T_t^+) bezeichnen wir die Halbgruppen der gleichmäßigen Bewegung nach links auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_+^* :=]0, \infty[$, gegeben durch $T_t(s, \cdot) = \varepsilon_{s-t}$ für $t > 0$ und $s \in \mathbb{R}$ bzw. $T_t^+(s, \cdot) = \varepsilon_{s-t}$ für $0 < t < s$ und $T_t^+(s, \cdot) = 0$ für $0 < s \leqq t$.

1. Produkte harmonischer Räume

Im folgenden sei X ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis.

Definition. Ist $(X, \mathscr{H}^*)$ ein harmonischer Raum, so heiße eine sub-Markoffsche Halbgruppe (P_t) auf X *passend* zu $(X, \mathscr{H}^*)$, falls gilt

1) $\mathscr{E}(P_t) = \mathscr{H}_+^*(X)$.

2) Für jedes $f \in \mathscr{K}(X)$ ist $\lim\limits_{t \to 0} \|P_t f - f\| = 0$.

3) Es gibt einen Standardprozeß $\mathfrak{X}$ auf X mit stetigen Pfaden und (P_t) als Übergangshalbgruppe.

1.1. Bemerkung. Ist $(X, \mathscr{H}^*)$ sogar ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum, so ist eine sub-Markoffsche Halbgruppe (P_t) auf X bereits dann passend zu $(X, \mathscr{H}^*)$, wenn $\mathscr{E}(P_t) = \mathscr{H}_+^*(X)$ gilt:

Nach [6, Proposition 10.2.3], folgt hieraus nämlich sofort die Eigenschaft (2). Ferner existiert nach [10] ein Huntscher Prozeß $\mathfrak{X}$ auf X, welcher (P_t) als Übergangshalbgruppe besitzt. Für jede Borel-Menge $A \subset X$ und jedes $x \in X$ stimmt dann die Trefferverteilung von A bei Start in x mit dem gefegten Maß ε_x^A überein. (Nach einem Resultat von Hansen gilt dies auch dann, wenn der Potentialkern von $\mathfrak{X}$ nicht eigentlich ist.) Insbesondere wird daher für jede offene Teilmenge U von X und alle $x \in U$ das Maß $P_{\complement U}(x, \cdot) = \varepsilon_x^{\complement U} = \mu_x^U$ von ∂U getragen. Daraus folgt nach [16, Lemma 6.1], daß die Pfade von $\mathfrak{X}$ f.s. stetig auf $[0, \zeta[$ sind.

1.2. Lemma. *Seien (P_t) eine sub-Markoffsche Halbgruppe auf X mit $1 \in \mathscr{E}(P_t)$ und $(Q_t) := (P_t \otimes T_t^+)$ das Produkt von (P_t) mit der Halbgruppe der gleichmäßigen Bewegung.*

Sei $f \in \mathscr{B}_1^+(X)$. Ist dann $F: X \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,s) = P_s f(x)$ für alle $(x,s) \in X \times \mathbb{R}_+^*$, so sind F und $1-F$ exzessiv bzgl. (Q_t). Sind überdies alle (Q_t)-exzessiven Funktionen nach unten halbstetig, so ist F stetig auf $X \times \mathbb{R}_+^*$.

Beweis. Für $(x,s) \in X \times \mathbb{R}_+^*$ und $t > 0$ gilt im Fall $t < s$

$$Q_t F(x,s) = \int_X P_{s-t} f(y) P_t(x, dy) = F(x,s),$$

und im Fall $s \leqq t$ ist

$$Q_t F(x,s) = (P_t \otimes T_t^+) F(x,s) = 0.$$

Also ist $F \in \mathscr{E}(Q_t)$.

Ebenso ist für $(x,s) \in X \times \mathbb{R}_+^*$ wegen $0 \leqq F \leqq 1$

$$Q_t(1-F)(x,s) \leqq 1 - Q_t F(x,s) = 1 - F(x,s) \quad \text{für} \quad 0 < t < s$$

und

$$Q_t(1-F)(x,s)=0 \leqq 1-F(x,s) \quad \text{für} \quad 0<s \leqq t.$$

Zusammen mit $1 \in \mathscr{E}(Q_t)$ liefert dies $(1-F) \in \mathscr{E}(Q_t)$.

Sind nun alle (Q_t)-exzessiven Funktionen nach unten halbstetig, so sind insbesondere F und $1-F$ nach unten halbstetig. Wegen $F+(1-F)=1$ ist F dann sogar stetig. □

1.3. Korollar. *Sei (P_t) eine sub-Markoffsche Halbgruppe auf X mit $1 \in \mathscr{E}(P_t)$. Alle $(P_t \otimes T_t^+)$-exzessiven Funktionen seien nach unten halbstetig. Dann ist (P_t) stark-Fellersch.*

Beweis. Sei zunächst $f \in \mathscr{B}_b(X)$ mit $0 \leqq f \leqq 1$. Nach Lemma 1.2 ist dann die Abbildung $(x,s) \mapsto P_s f(x)$ stetig auf $X \times \mathbb{R}_+^*$. Insbesondere ist also $P_s f$ stetig auf X für jedes $s>0$.

Wegen $P_s f = P_s f^+ - P_s f^-$ ist dann auch $P_s f$ stetig für alle $f \in \mathscr{B}_1(X)$ und alle $s>0$. Somit ist (P_t) stark-Fellersch. □

1.4. Lemma. *Sei (V_λ) eine sub-Markoffsche Resolvente auf X. (V_λ) sei stark-Fellersch und besitze einen eigentlichen Potentialkern V. Dann ist jede exzessive Funktion das Supremum einer isotonen Folge stetiger exzessiver Funktionen.*

Beweis. Sei $\lambda>0$. Nach Voraussetzung ist dann $V_\lambda(\mathscr{B}_b) \subset \mathscr{C}_b$. Wegen $V = V_\lambda + \lambda V_\lambda V$ ist somit auch $Vg \in \mathscr{C}_b$ für jedes $g \in \mathscr{B}_b$ mit beschränktem Vg.

Sei nun f eine exzessive Funktion. Da (V_λ) sub-Markoffsch ist und einen eigentlichen Potentialkern besitzt, existieren nach [11, Théorème IX.64], dann $f_n \in \mathscr{B}_b$ mit $Vf_n \uparrow f$ und Vf_n beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$. Jedes Vf_n ist aber exzessiv und nach der Vorbemerkung auch stetig. □

1.5. Satz. *Sei $\mathfrak{X}$ ein Standardprozeß auf X mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *$\mathfrak{X}$ besitzt keine Absorptionspunkte.*

(b) *$\mathfrak{X}$ besitzt einen eigentlichen Potentialkern.*

(c) *Die Pfade von $\mathfrak{X}$ sind stetig auf $[0,\zeta[$.*

(d) *Die Resolvente von $\mathfrak{X}$ ist stark-Fellersch.*

Dann existiert ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum $(X, \mathscr{H}^*)$ mit $\mathscr{H}_+^*(X) = \mathscr{E}(\mathfrak{X})$.

Beweis. Lemma 1.4 und [2, Theorem 5.2]. □

Definition. Seien $(X, \mathscr{H}^*)$ ein harmonischer Raum und (P_t) eine zu $(X, \mathscr{H}^*)$ passende Halbgruppe. Dann heiße $(X, \mathscr{H}^*)$ *produktfähig* [bzgl. (P_t)], falls es einen $\mathfrak{P}$-harmonischen Raum $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ gibt mit

$$\bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}) = \mathscr{E}(P_t \otimes T_t).$$

Im folgenden sei nun $(X, \mathscr{H}^*)$ ein harmonischer Raum mit einer passenden Halbgruppe (P_t). Für jedes $f \in \mathscr{B}_b(X)$ sei die Abbildung

$$(x,s) \to P_s f(x) \quad \text{stetig auf} \quad X \times \mathbb{R}_+^*.$$

Weiter seien (T_t) die Halbgruppe der gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$ und $(Q_t) := (P_t \otimes T_t)$ die Produkthalbgruppe zu (P_t) und (T_t) auf $X \times \mathbb{R}$. Mit (W_λ) und W seien die Resolvente und der Potentialkern von (Q_t) bezeichnet. Dann gilt:

1.6. Lemma. *Sei $\lambda > 0$ und $f \in \mathscr{B}_b(X \times \mathbb{R})$ mit kompaktem Träger. Dann ist*

$$W_\lambda f \in \mathscr{C}_b(X \times \mathbb{R}).$$

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\operatorname{Tr} f \subset X \times]a, b[$. Für $(x, s) \in X \times \mathbb{R}$ ist dann

$$\begin{aligned} W_\lambda f(x,s) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f_{s-t}(x) dt = \int_{-\infty}^{s} e^{-\lambda(s-t)} P_{s-t} f_t(x) dt \\ &= \int_a^b 1_{]a,s[}(t) e^{-\lambda(s-t)} P_{s-t} f_t(x) dt, \end{aligned}$$

wobei $P_u(y, \cdot) = 0$ für $y \in X$ und $u \leqq 0$ sei.

Seien nun $(x_n, s_n) \in X \times \mathbb{R}$ und $(x_0, s_0) \in X \times \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, s_n) = (x_0, s_0).$$

Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei dann $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(t) := 1_{]a, s_n[}(t) e^{-\lambda(s_n - t)} P_{s_n - t} f_t(x_n).$$

Nach Voraussetzung ist für jedes $g \in \mathscr{B}_b(X)$ die Abbildung $(x, s) \to P_s g(x)$ stetig auf $X \times \mathbb{R}_+^*$, also gilt

$$\lim_{n \to \infty} g_n(t) = g_0(t) \quad \text{für alle} \quad t \in]a, b[\setminus \{s_0\}$$

und damit

$$\lim_{n \to \infty} W_\lambda f(x_n, s_n) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b g_n(t) dt = \int_a^b g_0(t) dt = W_\lambda f(x_0, s_0).$$

Also ist $W_\lambda f$ stetig auf X. □

1.7. Lemma. *Für jedes $\lambda > 0$ ist $W_\lambda 1_{X \times \mathbb{R}} \in \mathscr{C}_b(X \times \mathbb{R})$.*

Beweis. Da (P_t) stark-Fellersch ist, ist auch die Resolvente (V_λ) von (P_t) stark-Fellersch und somit insbesondere $V_\lambda 1_X \in \mathscr{C}_b(X)$ für alle $\lambda > 0$. Wegen

$$W_\lambda 1_{X \times \mathbb{R}}(x, s) = V_\lambda 1_X(x)$$

für $(x, s) \in X \times \mathbb{R}$ ist daher auch $W_\lambda 1_{X \times \mathbb{R}} \in \mathscr{C}_b(X \times \mathbb{R})$ für alle $\lambda > 0$. □

1.8. Korollar. *Die Resolvente (W_λ) ist stark-Fellersch.*

Beweis. Seien $\lambda > 0$ und $f \in \mathscr{B}_b(X \times \mathbb{R})$. Zu zeigen ist $W_\lambda f \in \mathscr{C}_b(X \times \mathbb{R})$. Dabei kann o. B. d. A. $0 \leqq f \leqq 1$ angenommen werden. Aus Lemma 1.6 folgt dann zunächst, daß $W_\lambda f$ und $W_\lambda(1 - f)$ nach unten halbstetig sind. Nach Lemma 1.7 ist aber $W_\lambda 1 = W_\lambda f + W_\lambda(1 - f)$ stetig. Also ist auch $W_\lambda f$ stetig. □

1.9. Satz. *Sei $(X, \mathscr{H}^*)$ ein harmonischer Raum mit einer passenden Halbgruppe (P_t). Dann sind äquivalent:*

(1) *$(X, \mathscr{H}^*)$ ist produktfähig bzgl. (P_t).*
(2) *Für jedes $f \in \mathscr{B}_b(X)$ ist die Abbildung $(x, s) \to P_s f(x)$ stetig auf $X \times \mathbb{R}_+^*$.*

Beweis. (1)⇒(2): Nach (1) gibt es einen $\mathfrak{P}$-harmonischen Raum $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ mit

$$\mathscr{E}(P_t \otimes T_t) = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}).$$

Dann ist (z. B. nach Satz 2.3 und 2.4) auch

$$\mathscr{E}(P_t \otimes T_t^+) = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}_+^*).$$

Insbesondere sind daher alle $(P_t \otimes T_t^+)$-exzessiven Funktionen nach unten halbstetig. Aus Lemma 1.2 folgt dann sofort (2).

(2)⇒(1): Seien $\mathfrak{X}$ ein Standardprozeß auf X mit stetigen Pfaden sowie (P_t) als Übergangshalbgruppe und $\mathfrak{Z}$ der kanonische Standardprozeß der gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$. Sind dann $\mathfrak{Y} := \mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Z}$ und $(Q_t) := (P_t \otimes T_t)$, so ist $\mathfrak{Y}$ ein Standardprozeß auf $X \times \mathbb{R}$ mit stetigen Pfaden und Übergangshalbgruppen (Q_t). Mit $\mathfrak{Z}$ besitzt auch $\mathfrak{Y}$ keine Absorptionspunkte und einen eigentlichen Potentialkern. Außerdem ist nach Korollar 1.8 die zugehörige Resolvente stark-Fellersch. Nach Satz 1.5 existiert somit ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ mit $\bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}) = \mathscr{E}(\mathfrak{Y}) = \mathscr{E}(Q_t)$. □

1.10. Satz. *Jede stark-Fellersche Halbgruppe (P_t) ist stark-Fellersch im engeren Sinn (d.h. für alle $t > 0$ ist $\{P_t f \mid f \in \mathscr{B}_1^+\}$ gleichgradig stetig).*

Beweis. Folgt unmittelbar aus [12, Théorème 1]. □

Der folgende Satz zeigt, daß es in 1.9(2) genügt, (P_t) als stark-Fellersch vorauszusetzen:

1.11. Satz. *Sei (P_t) eine sub-Markoffsche Halbgruppe auf X mit $\lim_{t\to 0} \|P_t f - f\| = 0$ für alle $f \in \mathscr{K}(X)$. Dann sind äquivalent:*

(1) *(P_t) ist stark-Fellersch.*

(2) *Für jedes $f \in \mathscr{B}_b(X)$ ist die Abbildung $(x, s) \to P_s f(x)$ stetig auf $X \times \mathbb{R}_+^*$.*

Beweis. (1)⇒(2): Nach Satz 1.10 ist (P_t) sogar stark-Fellersch im engeren Sinn. Da (T_t^+) eine stark-Fellersche Resolvente besitzt, ist nach [13, S. 14], dann die Resolvente der Halbgruppe $(Q_t) := (P_t \otimes T_t^+)$ ebenfalls stark-Fellersch. Aus Lemma 1.4 folgt somit, daß jede (Q_t)-exzessive Funktion nach unten halbstetig ist. Zusammen mit Lemma 1.2 liefert dies die Behauptung. □

Damit erhalten wir das folgende – bereits in [13] und [14] bewiesene – Resultat:

1.12. Satz. *Sei $(X, \mathscr{H}^*)$ ein harmonischer Raum mit passender Halbgruppe (P_t). Dann sind äquivalent:*

(1) *$(X, \mathscr{H}^*)$ ist produktfähig bzgl. (P_t).*

(2) *(P_t) ist stark-Fellersch.*

(3) *Ist $(Y, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ ein weiterer harmonischer Raum mit passender Halbgruppe (R_t) sowie einer stark-Fellerschen Resolvente, und besitzt $(Q_t) := (P_t \otimes R_t)$ einen eigentlichen Potentialkern, so existiert ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum $(X \times Y, \bar{\mathscr{H}}^*)$ mit $\bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times Y) = \mathscr{E}(Q_t)$.*

2. Lokale Halbgruppen

Im folgenden sei $(X, \mathscr{H}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum mit einer passenden Halbgruppe (P_t). Weiter sei $\mathfrak{X} = (\Omega, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ ein Standardprozeß auf X mit stetigen Pfaden und (P_t) als Übergangshalbgruppe. Ist $U \subset X$ offen, so sei $\mathfrak{X}^U$ der Teilprozeß von $\mathfrak{X}$ auf U. Nach [7, Kap. 10.1], gilt dann:

2.1. Satz. *Für jede offene Teilmenge U von X ist $\mathfrak{X}^U$ ein Standardprozeß auf U. Die Übergangshalbgruppe (P_t^U) von $\mathfrak{X}^U$ wird gegeben durch*

$$P_t^U f(x) = \int_{[t < T_{\complement U}]} f \circ X_t \, dP^x$$

für alle $f \in \mathscr{B}_b(U)$, alle $x \in X$ und alle $t > 0$.

Definition. Ist $U \subset X$ offen, so heiße (P_t^U) die *lokale Halbgruppe zu (P_t) auf U.*

2.2. Bemerkung. Da $\mathfrak{X}$ stetige Pfade besitzt, sind die lokalen Halbgruppen zu (P_t) durch die endlich-dimensionalen Verteilungen von $\mathfrak{X}$ bestimmt. Damit hängt die Definition der lokalen Halbgruppen nur von (P_t), nicht aber von der Wahl des zugehörigen Prozesses ab.

Für jede offene Teilmenge U von X ist (P_t^U) eine zu $(U, \mathscr{H}^*_{|U})$ passende Halbgruppe:

2.3. Satz. *Für jede offene Menge $U \subset X$ ist $\mathscr{E}(P_t^U) = \mathscr{H}^*_+(U)$.*

Beweis. Sei $U \subset X$ offen. Ist dann $W \subset X$ offen und relativ-kompakt mit $\bar{W} \subset U$, so stimmen die Trefferverteilungen von $\complement W$ bei Start in U bzgl. $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}^U$ überein und es gilt $P_{\complement W}(x, \cdot) = \mu_x^W$ für alle $x \in W$. Ebenso erzeugen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}^U$ dieselbe feine Topologie auf U, nämlich die durch $\mathscr{H}^*$ bestimmte feine Topologie. Die Behauptung folgt daher mit [6, Proposition 5.1.4] und [7, Theorem 12.9]. □

Sind (P_t) und (R_t) zwei Halbgruppen mit zugehörigen Prozessen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, so können die lokalen Halbgruppen zu $(P_t \otimes R_t)$ bzgl. $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Y}$ gebildet werden. Damit ergibt sich leicht das folgende Resultat:

2.4. Satz. *Seien X und Y lokal-kompakt mit abzählbarer Basis und (P_t) bzw. (R_t) sub-Markoffsche Halbgruppen auf X bzw. Y. (Q_t) sei die zugehörige Produkthalbgruppe auf $X \times Y$. Sind dann $U \subset X$ und $V \subset Y$ offene Mengen, so gilt für die lokalen Halbgruppen*

$$Q_t^{U \times V} = P_t^U \otimes R_t^V \quad \textit{für alle} \quad t > 0.$$

2.5. Bemerkung. Man kann zeigen, daß eine sub-Markoffsche Halbgruppe (P_t) auf X genau dann stark-Fellersch ist, wenn alle lokalen Halbgruppen (P_t^U), $U \subset X$ offen, stark-Fellersch sind.

Insbesondere sind daher alle Unterräume eines produktfähigen $\mathfrak{P}$-harmonischen Raumes ebenfalls produktfähig.

3. Eigenschaften von Produkträumen

Der folgende Satz ergibt sich leicht aus der Definition der Reduzierten einer Funktion. Auf einen Beweis kann an dieser Stelle daher verzichtet werden.

3.1. Satz. *Seien $(Y, \mathscr{H}^*)$ ein harmonischer Raum und τ ein Homöomorphismus von Y in sich mit $\mathscr{H}^*_+(Y) \circ \tau = \mathscr{H}^*_+(Y)$. Dann gilt für alle $A \subset Y$ und alle $u \in \mathscr{H}^*_+(Y)$*

$$\hat{R}_{u \circ \tau}^{\tau^{-1}(A)} = \hat{R}_u^A \circ \tau .$$

3.2. Korollar. *Seien $(Y, \mathscr{H}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum und τ ein Homöomorphismus von Y in sich mit $\mathscr{H}^*_+(Y)\circ\tau = \mathscr{H}^*_+(Y)$. Dann ist für alle $x \in Y$ und alle $A \subset Y$*

$$\varepsilon_{\tau(x)}^{\tau(A)} = \tau(\varepsilon_x^A).$$

Im folgenden seien nun

X und Y lokal-kompakt mit abzählbarer Basis,

$(X, \mathscr{H}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum mit passender sub-Markoffscher Halbgruppe (P_t),

$(X \times Y, \bar{\mathscr{H}}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum mit passender sub-Markoffscher Halbgruppe (Q_t).

Ferner existiere eine *Markoffsche* Halbgruppe (R_t) auf Y mit $(Q_t) = (P_t \otimes R_t)$.

Weiter seien π die Projektion von $X \times Y$ auf X und $\mathscr{T}$ eine Gruppe von Homöomorphismen von $X \times Y$ in sich mit den Eigenschaften

(*) Für alle $(x, y) \in X \times Y$ ist $\{\tau(x, y) | \tau \in \mathscr{T}\} = \{x\} \times Y$.
(**) Für alle $\tau \in \mathscr{T}$ ist $\bar{\mathscr{H}}^*_+(X \times Y)\circ\tau = \bar{\mathscr{H}}^*_+(X \times Y)$.

Eine numerische Funktion f auf $X \times Y$ heiße *$\mathscr{T}$-invariant*, wenn $f\circ\tau = f$ für alle $\tau \in \mathscr{T}$ gilt.

3.3. Bemerkung. Ist $(X, \mathscr{H}^*)$ ein produktfähiger $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum, so erhält man ein Beispiel für die oben beschriebene Situation, wenn man für $(X \times Y, \bar{\mathscr{H}}^*)$ das Produkt von $(X, \mathscr{H}^*)$ mit dem harmonischen Raum zur gleichmäßigen Bewegung auf $Y := \mathbb{R}$ und für $\mathscr{T}$ die Menge aller durch $\tau_a(x, s) = (x, s + a)$, $a \in \mathbb{R}$, definierten Translationen auf $X \times \mathbb{R}$ wählt.

3.4. Satz. *Für $(x, y) \in X \times Y$, $A \subset X \times Y$ und $\tau \in \mathscr{T}$ gilt*

$$\varepsilon_{\tau(x,y)}^{\tau(A)} = \tau(\varepsilon_{(x,y)}^A).$$

Beweis. Wende Korollar 3.2 auf $(X \times Y, \bar{\mathscr{H}}^*)$ an. □

3.5. Korollar. *Sei $U \subset X$ offen. Dann ist für alle $\tau \in \mathscr{T}$*

$$\bar{\mathscr{H}}^*(U \times Y)\circ\tau = \bar{\mathscr{H}}^*(U \times Y) \quad \text{und} \quad \bar{\mathscr{H}}(U \times Y)\circ\tau = \bar{\mathscr{H}}(U \times Y).$$

Beweis. Seien $\tau \in \mathscr{T}$, $f \in \bar{\mathscr{H}}^*(U \times Y)$ und $V \subset X \times Y$ offen mit $\bar{V} \subset U \times Y$. Dann ist auch $\tau(V)$ offen mit $\overline{\tau(V)} \subset U \times Y$, und für $(x, y) \in V$ gilt

$$\varepsilon_{(x,y)}^{\complement V}(f\circ\tau) = \tau(\varepsilon_{(x,y)}^{\complement V})(f) = \varepsilon_{\tau(x,y)}^{\complement\tau(V)}(f) \leqq f(\tau(x, y)) = f\circ\tau(x, y).$$

Somit ist $\bar{\mathscr{H}}^*(U \times Y)\circ\tau \subset \bar{\mathscr{H}}^*(U \times Y)$ und wegen $\tau^{-1} \in \mathscr{T}$ dann auch

$$\bar{\mathscr{H}}^*(U \times Y)\circ\tau = \bar{\mathscr{H}}^*(U \times Y). \quad \square$$

3.6. Lemma. *Für alle $f \in \mathscr{H}^*_+(X)$ ist $f\circ\pi \in \bar{\mathscr{H}}^*_+(X \times Y)$.*

Beweis. Für $(x, y) \in X \times Y$ und $t > 0$ ist

$$Q_t(f\circ\pi)(x, y) = P_t f(x) \cdot R_t 1_Y(y) = P_t f(x).$$

Für $(x, y) \in X \times Y$ ist somit wegen $\mathscr{H}_+^*(X) = \mathscr{E}(P_t)$

$$Q_t(f \circ \pi)(x, y) = P_t f(x) \leqq f(x) = f \circ \pi(x, y) \quad \text{für alle} \quad t > 0$$

und

$$\lim_{t \to 0} Q_t(f \circ \pi)(x, y) = \lim_{t \to 0} P_t f(x) = f(x) = f \circ \pi(x, y).$$

Demnach ist $f \circ \pi \in \mathscr{E}(Q_t) = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times Y)$. □

3.7. Korollar. *π ist fein-stetig.*

Beweis. Die feine Topologie ist jeweils die gröbste Topologie, für die alle positiven hyperharmonischen Funktionen stetig sind. Die Behauptung folgt somit aus Lemma 3.6. □

3.8. Lemma. *Ist $f \in \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times Y)$ $\mathscr{T}$-invariant, so gibt es ein $u \in \mathscr{H}_+^*(X)$ mit $f = u \circ \pi$. Insbesondere gilt: Ist u eine numerische Funktion auf X mit $u \circ \pi \in \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times Y)$, so ist $u \in \mathscr{H}_+^*(X)$.*

Beweis. Wähle ein $y_0 \in Y$. Dann wird durch $u(x) := f(x, y_0)$, $x \in X$, eine positive Funktion u auf X definiert, für die $f = u \circ \pi$ gilt. Zu zeigen bleibt $u \in \mathscr{H}_+^*(X)$. Seien dazu $x \in X$ und $t > 0$. Dann ist

$$Q_t f(x, y_0) = P_t u(x) \cdot R_t(y_0, Y) = P_t u(x).$$

Also ist für $x \in X$ wegen $f \in \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times Y) = \mathscr{E}(Q_t)$

$$P_t u(x) = Q_t f(x, y_0) \leqq f(x, y_0) = u(x) \quad \text{für alle} \quad t > 0$$

und

$$\lim_{t \to 0} P_t u(x) = \lim_{t \to 0} Q_t f(x, y_0) = f(x, y_0) = u(x).$$

Demnach ist $u \in \mathscr{E}(P_t) = \mathscr{H}_+^*(X)$. □

3.9. Lemma. *Für alle $A \subset X$ und alle $u \in \mathscr{H}_+^*(X)$ gilt*

$$\hat{R}_{u \circ \pi}^{A \times Y} \leqq \hat{R}_u^A \circ \pi.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lemma 3.4. □

3.10. Satz. *Für alle fein-offenen Mengen $U \subset X$ und alle $u \in \mathscr{H}_+^*(X)$ gilt*

$$R_{u \circ \pi}^{U \times Y} = R_u^U \circ \pi.$$

Beweis. Da π fein-stetig ist, ist $U \times Y$ fein-offen in $X \times Y$, also ist

$$R_{u\ \pi}^{U \times Y} \in \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times Y).$$

Außerdem zeigt man leicht, daß $R_{u \circ \pi}^{U \times Y}$ $\mathscr{T}$-invariant ist. Nach Lemma 3.8 gibt es somit ein $w \in \mathscr{H}_+^*(X)$ mit

$$R_{u \circ \pi}^{U \times Y} = w \circ \pi.$$

Dann ist aber $w = u$ auf U und somit $R_u^U \leqq w$. Dies liefert

$$R_u^U \circ \pi \leqq w \circ \pi = R_{u\circ\pi}^{U \times Y},$$

und die Behauptung folgt mit Lemma 3.9. □

3.11. Lemma. *Zu jedem $x \in X$ gibt es eine relativ-kompakte, offene Umgebung W und ein $u \in \mathscr{H}_+^*(X)$ mit $u \geqq 1$ auf X, u harmonisch auf W und $u \circ \pi$ harmonisch auf $W \times Y$.*

Beweis. Zu $x \in X$ existiert eine relativ-kompakte, offene Umgebung V mit

$$\hat{R}_2^{X \setminus V} \geqq 1 \quad \text{auf} \quad V.$$

Ist dann W offen mit $x \in W \subset \bar{W} \subset V$, so ist

$$u := R_2^{X \setminus \bar{W}} \geqq \hat{R}_2^{X \setminus V} \geqq 1 \quad \text{auf} \quad V \supset \bar{W}.$$

Außerdem ist $u = 2$ auf $X \setminus \bar{W}$ und somit $u \geqq 1$ auf X. Ferner ist u harmonisch außerhalb des Abschlusses von $X \setminus \bar{W}$, also auf W. Nach Satz 3.10 ist dann

$$u \circ \pi = R_2^{X \setminus \bar{W}} \circ \pi = R_2^{(X \setminus \bar{W}) \times Y},$$

also $u \circ \pi$ harmonisch außerhalb des Abschlusses von $(X \setminus \bar{W}) \times Y$ und damit auf $W \times Y$. □

3.12. Satz. *Sei $\tilde{h} \in \mathscr{H}_+(X \times Y)$ beschränkt und $\mathscr{T}$-invariant. Dann gibt es ein $h \in \mathscr{H}_+(X)$ mit $\tilde{h} = h \circ \pi$.*

Beweis. Da $\tilde{h}$ insbesondere hyperharmonisch ist, gibt es nach Lemma 3.8 ein $h \in \mathscr{H}_+^*(X)$ mit $\tilde{h} = h \circ \pi$. Zu zeigen bleibt $-h \in \mathscr{H}^*(X)$. Sei dazu $x \in X$. Dann gibt es nach Lemma 3.11 eine relativ-kompakte, offene Umgebung W von x und ein $u \in \mathscr{H}_+^*(X)$ mit $u \geqq 1$ auf X und u harmonisch auf W. Ferner existiert ein $\alpha > 0$ mit $-h + \alpha u \geqq 0$ auf X. Dann ist auch $(-h + \alpha u) \circ \pi \geqq 0$ auf $X \times Y$. Außerdem ist $(-h + \alpha u) \circ \pi$ hyperharmonisch auf $X \times Y$. Nach Lemma 3.8 ist somit $-h + \alpha u$ hyperharmonisch auf X. Da u auf W harmonisch ist, ist dann $-h$ hyperharmonisch auf W. Weil jeder Punkt $x \in X$ eine solche Umgebung W besitzt, ist schließlich $-h \in \mathscr{H}^*(X)$. □

3.13. Satz. *Ist $p \in \mathscr{P}(X)$ beschränkt, so ist $p \circ \pi \in \mathscr{P}(X \times Y)$.*

Beweis. Sei $\tilde{h}$ die größte harmonische Minorante von $p \circ \pi$ auf $X \times Y$. Mit p ist auch $\tilde{h}$ beschränkt. Außerdem ist $\tilde{h} \geqq 0$. Zu zeigen ist $\tilde{h} = 0$.

Für alle $\tau \in \mathscr{T}$ ist nach Korollar 3.5 auch $\tilde{h} \circ \tau$ harmonisch und es ist $\tilde{h} \circ \tau \leqq p \circ \pi \circ \tau = p \circ \pi$. Nach Definition von $\tilde{h}$ folgt demnach $\tilde{h} \circ \tau \leqq \tilde{h}$ für alle $\tau \in \mathscr{T}$. Da $\mathscr{T}$ eine Gruppe ist, ist $\tilde{h}$ dann sogar $\mathscr{T}$-invariant. Nach Satz 3.12 gibt es somit ein $h \in \mathscr{H}_+(X)$ mit $\tilde{h} = h \circ \pi$. Wegen $\tilde{h} \leqq p \circ \pi$ ist dann auch $h \leqq p$, also $h = 0$ und damit schließlich $\tilde{h} = 0$. □

3.14. Satz. *Seien $p \in \mathscr{P}_c(X)$ und $K \subset X$ kompakt. Dann ist*

$$\hat{R}_p^K \circ \pi = \hat{R}_{p\circ\pi}^{K \times Y}.$$

Beweis. (Vgl. [9, Lemma 1.9].) O.B.d.A. kann angenommen werden, daß p beschränkt ist. Nach Satz 3.13 ist dann $p\circ\pi\in\mathscr{P}_c(X\times Y)$. Seien nun $(x,y)\in X\times Y$ und $\varepsilon>0$. Dann gibt es eine kompakte Menge $\tilde{K}\subset X\times Y$ mit

$$R_{p\circ\pi}^{X\times Y\setminus\tilde{K}}(x,y)<\varepsilon.$$

Ferner gibt es eine offene Menge $\tilde{U}\subset X\times Y$ mit $K\times Y\subset\tilde{U}$ und

$$R_{p\circ\pi}^{\tilde{U}}(x,y)\leqq R_{p\circ\pi}^{K\times Y}(x,y)+\varepsilon.$$

Sei (U_n) eine Folge offener Mengen in X mit $\bar{U}_{n+1}\subset U_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$. Dann gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit

$$\tilde{K}\setminus\tilde{U}\subset\complement\bar{U}_n\times Y\quad\text{bzw.}\quad\bar{U}_n\times Y\subset\tilde{U}\cup\complement\tilde{K}.$$

Mit Satz 3.10 folgt somit

$$\begin{aligned}R_p^K\circ\pi(x,y)&\leqq R_p^{U_n}\circ\pi(x,y)=R_{p\circ\pi}^{U_n\times Y}(x,y)\\&\leqq R_{p\circ\pi}^{\tilde{U}}(x,y)+R_{p\circ\pi}^{\complement\tilde{K}}(x,y)\\&\leqq R_{p\circ\pi}^{K\times Y}(x,y)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon>0$ und $(x,y)\in X\times Y$ beliebig gewählt waren, gibt dies

$$R_p^K\circ\pi\leqq R_{p\circ\pi}^{K\times Y}.$$

Zusammen mit Lemma 3.9 und [8, Lemma 3.6] folgt hieraus die Behauptung. □

3.15. Korollar. *Für alle Borel-Mengen $B\subset X$ und alle $p\in\mathscr{P}_c(X)$ gilt*

$$\hat{R}_{p\circ\pi}^{B\times Y}=\hat{R}_p^B\circ\pi.$$

Beweis. Nach [6], Theorem 5.3.1 und Corollary 5.2.2, sowie Satz 3.14 ist

$$\hat{R}_p^B\circ\pi=\sup_{\substack{K\subset B\\K\,kp.}}\hat{R}_p^K\circ\pi=\sup_{\substack{K\subset B\\K\,kp.}}\hat{R}_{p\circ\pi}^{K\times Y}\leqq\hat{R}_{p\circ\pi}^{B\times Y}.$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt nach Lemma 3.9. □

3.16. Korollar. *Für alle Borel-Mengen $B\subset X$ und alle $(x,y)\in X\times Y$ gilt*

$$\pi(\varepsilon_{(x,y)}^{B\times Y})=\varepsilon_x^B.$$

Das folgende Lemma kann wie [9, Lemma 1.11], bewiesen werden:

3.17. Lemma. *Zu jedem $A\subset X$ gibt es eine G_δ-Menge $B\subset X$ mit $A\subset B$ und*

$$\varepsilon_x^A=\varepsilon_x^B\ \text{ sowie }\ \varepsilon_{(x,y)}^{A\times Y}=\varepsilon_{(x,y)}^{B\times Y}\ \text{ für alle }\ (x,y)\in X\times Y.$$

3.18. Satz. *Für alle $A\subset X$ und alle $(x,y)\in X\times Y$ gilt*

$$\pi(\varepsilon_{(x,y)}^{A\times Y})=\varepsilon_x^A.$$

Beweis. Korollar 3.16 und Lemma 3.17. □

3.19. Satz. *Sei $U\subset X$* offen. Ist $f\in\bar{\mathscr{H}}^*(U\times Y)$ *$\mathscr{T}$-invariant, so gibt es ein $u\in\mathscr{H}^*(U)$ mit $f=u\circ\pi$.*

Beweis. Da f $\mathcal{T}$-invariant ist, gibt es eine numerische Funktion u auf U mit $f = u \circ \pi$. Dann ist $u \circ \pi = f = \hat{f} = \widehat{u \circ \pi} = \hat{u} \circ \pi$, also $u = \hat{u}$, d. h. u ist nach unten halbstetig. Zu zeigen bleibt $u \in \mathcal{H}^*(U)$.

Sei dazu $x_0 \in U$. Dann gibt es nach Lemma 3.11 eine relativ-kompakte, offene Umgebung von x_0 mit $\bar{W} \subset U$ und ein $h \in \mathcal{H}(W)$ mit $h \geqq 1$ und $h \circ \pi \in \bar{\mathcal{H}}(W \times Y)$. Auf $\bar{W}$ ist u nach unten beschränkt, also gibt es ein $\alpha > 0$ mit $u + \alpha h \geqq 0$ auf W. Sei $\tilde{u} := (u + \alpha h) \circ \pi$ auf $W \times Y$. Dann ist $\tilde{u} \in \bar{\mathcal{H}}_+^*(W \times Y)$. Für alle offenen Mengen $V \subset X$ mit $\bar{V} \subset W$ und alle $(x, y) \in V \times Y$ ist daher nach [6, Theorem 1.2.1],

$$\mu_{(x,y)}^{V \times Y}(\tilde{u}) \leqq \bar{H}_{\tilde{u}}^{V \times Y}(x, y) \leqq \tilde{u}(x, y).$$

Also ist für alle $(x, y) \in V \times Y$

$$\varepsilon_{(x,y)}^{\complement V \times Y}(u \circ \pi + \alpha h \circ \pi) \leqq (u \circ \pi + \alpha h \circ \pi)(x, y)$$

und damit nach Satz 3.18 auch

$$\varepsilon_x^{\complement V}(u + \alpha h) = \varepsilon_x^{\complement V}(u) + \alpha \varepsilon_x^{\complement V}(h) \leqq u(x) + \alpha h(x) \quad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Wegen $\varepsilon_x^{\complement V}(h) = h(x)$ folgt hieraus

$$\varepsilon_x^{\complement V}(u) = \mu_x^V(u) \leqq u(x) \quad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Da V beliebig war, ist somit u hyperharmonisch auf W. Schließlich besitzt jeder Punkt $x_0 \in U$ eine derartige Umgebung W, also ist $u \in \mathcal{H}^*(U)$. □

3.20. Satz. *Ist $U \subset X$ offen, so gilt $\mathcal{H}^*(U) \circ \pi \subset \bar{\mathcal{H}}^*(U \times Y)$.*

Beweis. Wendet man Lemma 3.6 auf $(U, \mathcal{H}_{|U}^*)$ und $(U \times Y, \bar{\mathcal{H}}_{|U \times Y}^*)$ an, was aufgrund der Resultate von Kap. 2 möglich ist, so folgt zunächst nur $\mathcal{H}_+^*(U) \circ \pi \subset \bar{\mathcal{H}}_+^*(U \times Y)$. Zusammen mit Lemma 3.11 liefert dies jedoch die Behauptung. □

Mit den in diesem Kapitel hergeleiteten Ergebnissen erhalten wir schließlich die folgenden Sätze, die wie entsprechende Resultate in [9] bewiesen werden können:

3.21. Satz. *Eine Teilmenge A von X ist genau dann polar in X, wenn $A \times Y$ polar in $X \times Y$ ist.*

3.22. Satz. *Seien $A \subset X$ und $x \in X$. Dann gilt:*

1) *Ist A dünn in x, so ist $A \times Y$ dünn in jedem Punkt aus $\{x\} \times Y$.*

2) *Ist $A \times Y$ dünn in einem Punkt aus $\{x\} \times Y$ und ist außerdem $x \notin A$ oder $\{x\}$ totaldünn, so ist A dünn in x.*

3.23. Korollar. *π ist fein-offen.*

4. Charakterisierung von Produkträumen

Sei X ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis.

In diesem Kapitel soll untersucht werden, wann ein harmonischer Raum $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathcal{H}}^*)$ das Produkt eines auf X gegebenen harmonischen Raumes mit dem harmonischen Raum zur gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$ ist. Dazu konstruieren wir zunächst eine zu $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathcal{H}}^*)$ passende Halbgruppe (Q_t), die die Form $(Q_t) = (P_t \otimes T_t)$ mit einer geeigneten Halbgruppe (P_t) auf X hat. Anschließend werden Kriterien dafür angegeben, daß (P_t) eine passende Halbgruppe für den auf X vorgegebenen harmonischen Raum ist.

Im folgenden sei nun $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum, in dem alle Mengen

$$\{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r \leqq s\}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

Absorptionsmengen sind. $\mathfrak{Y} = (\Omega, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_t, Y_t, \theta_t, Q^{(x,s)})$ sei ein Standardprozeß auf $X \times \mathbb{R}$ mit $\mathscr{E}(\mathfrak{Y}) = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$ und auf $[0, \zeta[$ stetigen Pfaden. Dabei bezeichne ζ die Lebenszeit von $\mathfrak{Y}$. Ferner besitze $\mathfrak{Y}$ eine stark-Fellersche Resolvente (W_λ) und einen eigentlichen Potentialkern. Für $t \in [0, \infty]$ seien $X_t: \Omega \to X \cup \{\Delta_X\}$ und $Z_t: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ definiert durch

$$Y_t(\omega) = (X_t(\omega), Z_t(\omega)) \text{ für alle } \omega \in \Omega \text{ mit } t < \zeta(\omega).$$

[Im Fall $t \geqq \zeta(\omega)$ wähle man für $X_t(\omega)$ bzw. $Z_t(\omega)$ jeweils den unendlich fernen Punkt.]

4.1. Lemma. *Es gibt ein Referenzmaß für* $\mathfrak{Y}$.

Beweis. Sei $\{(x_n, s_n) | n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $X \times \mathbb{R}$. Dann leistet

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} W_1((x_n, s_n), \cdot)$$

das Verlangte. □

4.2. Lemma. *Die Abbildung* $t \to Z_t$ *ist f.s. antiton auf* $[0, \zeta[$.

Beweis. Da die Pfade von $\mathfrak{Y}$ stetig sind, genügt es zu zeigen, daß für $(x,s) \in X \times \mathbb{R}$ und $0 < t_1 < t_2 < \infty$

$$Q^{(x,s)}[Z_{t_1} < Z_{t_2}, t_2 < \zeta] = 0$$

gilt. Nun ist aber

$$Q^{(x,s)}[Z_{t_1} < Z_{t_2}, t_2 < \zeta] = Q^{(x,s)}\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [Z_{t_1} < q < Z_{t_2}, t_2 < \zeta]\Big),$$

und für jedes $q \in \mathbb{Q}$ ist $A_q := \{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r \leqq q\}$ eine Absorptionsmenge in $X \times \mathbb{R}$. Somit ist für alle $q \in \mathbb{Q}$

$$Q^{(x,s)}[Z_{t_1} < q < Z_{t_2}, t_2 < \zeta] = 0$$

und daraus folgt die Behauptung. □

4.3. Lemma. *Die Abbildung* $t \to Z_t$ *ist f.s. streng antiton auf* $[0, \zeta[$.

Beweis. Wegen Lemma 4.2 genügt es zu zeigen, daß für alle $(x,s) \in X \times \mathbb{R}$ und alle $t_1 < t_2$

$$Q^{(x,s)}[Z_{t_1} = Z_{t_2}, t_2 < \zeta] = 0$$

gilt. Seien dazu $(x,s) \in X \times \mathbb{R}$ und zunächst $t_1 = 0$, $t_2 > 0$. Angenommen, es ist

$$Q^{(x,s)}[Z_0 = Z_{t_2}, t_2 < \zeta] > 0.$$

Dann gilt für $H_s := \{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r < s\}$ wegen der bereits gezeigten Antitonie von $t \to Z_t$

$$Q^{(x,s)}[T_{H_s} > 0] > 0,$$

d. h. H_s ist dünn in (x,s). Sei ferner $B_s := \complement H_s$. Da für jedes $u < s$ die charakteristische Funktion der Menge $\{(y,r) | r > u\}$ hyperharmonisch auf $X \times \mathbb{R}$ ist, folgt, daß B_s ebenfalls dünn in (x,s) ist. Insgesamt erhalten wir damit den Widerspruch, daß $X \times \mathbb{R} = B_s \cup H_s$ dünn in (x,s) ist.

Seien nun t_1, t_2 beliebig mit $0 < t_1 < t_2$. Dann ist mit $r := t_2 - t_1$

$$[Z_{t_1} = Z_{t_2}, t_2 < \zeta] \subset [Z_0 = Z_r, r < \zeta].$$

Damit folgt die Behauptung aus dem bereits bewiesenen Spezialfall. □

Im folgenden können wir also o. B. d. A. annehmen, daß

$$t \to Z_t(\omega) \text{ streng antiton für alle } \omega \in \Omega$$

ist.

Für $t \in]0, \infty]$ seien die Abbildungen $A_t : \Omega \to [0, \infty]$ definiert durch

$$A_t(\omega) = Z_0(\omega) - Z_t(\omega)$$

für $t < \zeta(\omega)$ und

$$A_t(\omega) = \sup\{Z_0(\omega) - Z_s(\omega) | 0 \leqq s < \zeta(\omega)\}$$

für $t \geqq \zeta(\omega)$. Außerdem sei $A_0 \equiv 0$. Für $t \in [0, \infty[$ sei ferner $\tau_t : \Omega \to [0, \infty]$ gegeben durch

$$\tau_t(\omega) := \inf\{u > 0 | A_u(\omega) > t\} \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Dabei sei $\inf \emptyset = \infty$.

Dann ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

4.4. Satz. *Die Familie $\{A_t | t \in [0, \infty]\}$ ist ein stetiges, streng isotones additives Funktional auf X (s. [3, Sect. IV.1]).*

4.5. Lemma. *Für $r \in \mathbb{R}$ sei $H_r := \{(y,u) \in X \times \mathbb{R} | u < r\}$. Dann gilt für alle $(x,s) \in X \times \mathbb{R}$ und alle $t > 0$*

$$\tau_t = T_{H_{s-t}} \quad Q^{(x,s)}\text{-f.s.}$$

4.6. Lemma. *Für alle $(x,s) \in X \times \mathbb{R}$ und alle $t > 0$ ist*

$$Y_{\tau_t} \in \{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r = s - t\} \quad Q^{(x,s)}\text{-f.s.}$$

auf $[\tau_t < \zeta]$.

4.7. Satz. *Es gibt einen Standardprozeß $\tilde{\mathfrak{Y}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mathfrak{M}}_t, \tilde{Y}_t, \tilde{\theta}_t, \tilde{Q}^{(x,s)})$ mit Zustandsraum $X \times \mathbb{R}$ und den folgenden Eigenschaften:*

1) *$\mathfrak{Y}$ und $\tilde{\mathfrak{Y}}$ besitzen dieselben Trefferverteilungen.*

2) *Die feine Topologie auf $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ stimmt mit der von $\tilde{\mathfrak{Y}}$ erzeugten feinen Topologie überein.*

3) *Für alle Borel-Mengen* $A \subset X \times \mathbb{R}$ *und alle* $(x,s) \in X \times \mathbb{R}$ *gilt*

$$\varepsilon^A_{(x,s)} = \tilde{P}_A((x,s),\cdot),$$

wenn dabei $\tilde{P}_A$ *die Trefferverteilung bzgl.* $\tilde{\mathfrak{Y}}$ *bezeichnet.*

4) $\mathscr{H}^*_+(X \times \mathbb{R}) = \mathscr{E}(\tilde{\mathfrak{Y}})$.

5) *Es ist* $\tilde{Y}_t \in \{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r = s - t\}$ $\tilde{Q}^{(x,s)}$*-f.s. auf* $[t < \tilde{\zeta}]$, *wobei* $\tilde{\zeta}$ *die Lebenszeit von* $\tilde{\mathfrak{Y}}$ *sei.*

6) *Sind* $(x,s) \in X \times \mathbb{R}$, $t > 0$ *und* $G = \{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r = s - t\}$, *so ist* $\tilde{Q}^{(x,s)}$*-f.s.* $\tilde{T}_G = t$.

Beweis. $\{\tau_t | t \geqq 0\}$ ist, im Sinne von [3], das Inverse des additiven Funktionals (A_t). Da (A_t) streng isoton und stetig ist und $\mathfrak{Y}$ ein Referenzmaß besitzt, wird dann durch

$$\tilde{\mathfrak{Y}} := (\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_{\tau_t}, Y_{\tau_t}, \theta_{\tau_t}, Q^{(x,s)})$$

ein Standardprozeß $\tilde{\mathfrak{Y}}$ mit Zustandsraum $X \times \mathbb{R}$ definiert, der dieselben Trefferverteilungen und dieselbe feine Topologie wie $\mathfrak{Y}$ besitzt. Außerdem ist die Lebenszeit $\tilde{\zeta}$ von $\tilde{\mathfrak{Y}}$ gegeben durch $\tilde{\zeta} = A_\zeta = A_\infty$ (s. [3, S. 212 u. S. 233/234]). Insbesondere gilt demnach (1).

Da $\mathfrak{Y}$ ein zu $(X \times \mathbb{R}, \mathscr{H}^*)$ passender Prozeß ist, stimmt die von $\mathfrak{Y}$ erzeugte feine Topologie mit der feinen Topologie von $(X \times \mathbb{R}, \mathscr{H}^*)$ überein. Weil $\mathfrak{Y}$ und $\tilde{\mathfrak{Y}}$ dieselbe feine Topologie erzeugen, gilt somit (2).

Für jede Borel-Menge $A \subset X \times \mathbb{R}$ ist $\varepsilon^A_{(x,s)} = \mathrm{P}_A((\mathrm{x},\mathrm{s}),\cdot)$, zusammen mit (1) liefert dies (3).

Wir zeigen nun (4): Sei zunächst $f \in \mathscr{H}^*_+(X \times \mathbb{R})$. Dann ist f fein-stetig und wegen

$$\mathscr{E}(\mathfrak{Y}) = \mathscr{H}^*_+(X \times \mathbb{R})$$

ist $P_K f = \tilde{P}_K f \leqq f$ für jede kompakte Menge $K \subset X \times \mathbb{R}$. Nach [3, Theorem II.5.1], ist somit f supermedian bzgl. der Resolvente $(\tilde{W}_\lambda)$ von $\tilde{\mathfrak{Y}}$. Nach [11, Théorème IX.60], ist dann

$$\bar{f} := \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \tilde{W}_\lambda f$$

exzessiv bzgl. $(\tilde{W}_\lambda)$ und $[\bar{f} \neq f]$ ist eine Menge vom Potential Null. Andererseits ist $[\bar{f} \neq f]$ fein-offen, also muß $\bar{f} = f$ und damit $f \in \mathscr{E}(\tilde{\mathfrak{Y}})$ gelten. Sei nun umgekehrt $f \in \mathscr{E}(\tilde{\mathfrak{Y}})$. Dann ist f fein-stetig und für alle offenen, relativ-kompakten Mengen $U \subset X \times \mathbb{R}$ und alle $(x,s) \in U$ ist

$$\mu^U_{(x,s)}(f) = \tilde{P}_{\complement U} f(x,s) \leqq f(x,s),$$

d. h. f ist nahezu-hyperharmonisch. Mit [6, Proposition 5.1.4], folgt $f \in \mathscr{H}^*_+(X \times \mathbb{R})$.

Zum Beweis von (5) zeigt man zunächst $[\tau_t < \zeta] = [t < \tilde{\zeta}]$. Für $\tilde{Y}_t := Y_{\tau_t}$ und

$$\tilde{Q}^{(x,s)} := Q^{(x,s)}$$

folgt dann die Behauptung sofort aus Lemma 4.6.

Zum Beweis von (6): Für $t > 0$ seien $\tilde{X}_t$ und $\tilde{Z}_t$ die Komponenten von $\tilde{Y}_t$. Wie in Lemma 4.3 folgt dann, daß $t \to \tilde{Z}_t$ streng antiton ist. Für die Eintrittszeit $\tilde{T}_G$ gilt nun wegen (5) zunächst $\tilde{T}_G \leqq t$ $\tilde{Q}^{(x,s)}$-f.s. Die strenge Antitonie von $t \to \tilde{Z}_t$ liefert dann aber sogar $\tilde{T}_G = t$ $\tilde{Q}^{(x,s)}$-f.s.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Im folgenden schreiben wir statt $\tilde{\mathfrak{Y}}$ wieder $\mathfrak{Y}$. Mit (Q_t) bezeichnen wir die Übergangshalbgruppen von $\mathfrak{Y}$. Für alle $f\in\mathscr{B}_b(X\times\mathbb{R})$ sowie alle $(x,s)\in X\times\mathbb{R}$ und $t>0$ ist dann also

$$Q_t f(x,s)=\int_\Omega f(X_t(\omega),s-t)\,dQ^{(x,s)}(\omega).$$

Weiter seien π die Projektion von $X\times\mathbb{R}$ auf X und

$$\mathscr{T}:=\{\tau_a:X\times\mathbb{R}\to X\times\mathbb{R}\,|\,a\in\mathbb{R},\ \tau_a(x,s)=(x,s+a)\ \text{für}\ (x,s)\in X\times\mathbb{R}\}.$$

Außerdem besitze $(X\times\mathbb{R},\bar{\mathscr{H}}^*)$ von jetzt an folgende Eigenschaft:

(*) Für alle $\tau\in\mathscr{T}$ ist $\bar{\mathscr{H}}^*_+(X\times\mathbb{R})\circ\tau=\bar{\mathscr{H}}^*_+(X\times\mathbb{R})$.

4.8. Lemma. *Sei $f\in\mathscr{B}_b(X\times\mathbb{R})$ $\mathscr{T}$-invariant. Dann gilt für alle $(x,s)\in X\times\mathbb{R}$, alle $t>0$ und alle $a\in\mathbb{R}$*

$$\int_\Omega f\circ Y_t\,dQ^{(x,s)}=\int_\Omega f\circ Y_t\,dQ^{(x,s+a)}.$$

Beweis. Seien $G:=\{(y,r)\in X\times\mathbb{R}\,|\,r=s-t\}$ und $G+a:=\tau_a(G)$. Wegen (*) und Korollar 3.2 gilt dann

$$\tau_a(\varepsilon^G_{(x,s)})=\varepsilon^{G+a}_{(x,s+a)}.$$

Also ist

$$P_G f(x,s)=\varepsilon^G_{(x,s)}(f\circ\tau_a)=\varepsilon^{G+a}_{(x,s+a)}(f)=P_{G+a}f(x,s+a).$$

Somit gilt

$$\int_\Omega f\circ Y_{T_G}\cdot 1_{[T_G<\infty]}\,dQ^{(x,s)}=\int_\Omega f\circ Y_{T_{G+a}}\cdot 1_{[T_{G+a}<\infty]}\,dQ^{(x,s+a)}$$

und daher auch

$$\int_\Omega f\circ Y_t\cdot 1_{[t<\zeta]}\,dQ^{(x,s)}=\int_\Omega f\circ Y_t\cdot 1_{[t<\zeta]}\,dQ^{(x,s+a)}.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Für $f\in\mathscr{B}_b(X)$, $t>0$ und $x\in X$ definieren wir nun

$$P_t f(x):=Q_t(f\circ\pi)(x,t)=\int_\Omega f\circ\pi\circ Y_t\,dQ^{(x,t)}$$

4.9. Satz. *(P_t) ist eine stark-Fellersche Halbgruppe auf X mit $(Q_t)=(P_t\otimes T_t)$.*

Beweis. Offensichtlich ist jedes P_t, $t>0$, ein sub-Markoffscher Kern auf X. Außerdem folgt mit Lemma 4.8 sofort, daß $Q_t=P_t\otimes T_t$ für alle $t>0$ gilt, und die Halbgruppeneigenschaft von (P_t) folgt aus der Definition von (P_t) sowie der Halbgruppeneigenschaft von (Q_t).

Weiter ist $(P_t\otimes T_t^+)$ die lokale Halbgruppe zu (Q_t) auf $X\times\mathbb{R}^*_+$. Nach Satz 2.3 ist daher $\bar{\mathscr{H}}^*_+(X\times\mathbb{R}^*_+)=\mathscr{E}(P_t\otimes T_t^+)$, insbesondere sind somit alle $(P_t\otimes T_t^+)$-exzessiven Funktionen nach unten halbstetig. Aus Korollar 1.3 folgt daher, daß (P_t) stark-Fellersch ist. □

Insgesamt haben wir damit bewiesen:

4.10. Satz. *Sei* $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ *ein* $\mathfrak{P}$*-harmonischer Raum mit den Eigenschaften*

(a) *Für alle* $s \in \mathbb{R}$ *ist* $\{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r \leqq s\}$ *eine Absorptionsmenge in* $X \times \mathbb{R}$.

(b) *Für alle* $\tau \in \mathscr{T}$ *ist* $\bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}) \circ \tau = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$.

Dann existieren sub-Markoffsche Halbgruppen (P_t) *bzw.* (Q_t) *auf* X *bzw.* $X \times \mathbb{R}$ *mit*

1) $Q_t = P_t \otimes T_t$ *für alle* $t > 0$.

2) (P_t) *ist stark-Fellersch.*

3) $\mathscr{E}(Q_t) = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$.

4.11. Satz. *Seien* $(X, \mathscr{H}^*)$ *ein harmonischer Raum und* $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ *ein* $\mathfrak{P}$*-harmonischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es gibt sub-Markoffsche Halbgruppen* (P_t) *auf* X *und* (Q_t) *auf* $X \times \mathbb{R}$ *mit* $(Q_t) = (P_t \otimes T_t)$ *sowie* $\mathscr{H}_+^*(X) = \mathscr{E}(P_t)$ *und* $\bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}) = \mathscr{E}(Q_t)$.

(D. h. $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ *ist das Produkt von* $(X, \mathscr{H}^*)$ *mit dem harmonischen Raum zur gleichmäßigen Bewegung auf* $\mathbb{R}$.*)*

(2) $(X, \mathscr{H}^*)$ *und* $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ *erfüllen die folgenden Bedingungen:*

(a) *Für alle* $s \in \mathbb{R}$ *ist* $\{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r \leqq s\}$ *eine Absorptionsmenge in* $X \times \mathbb{R}$.

(b) *Für alle* $\tau \in \mathscr{T}$ *ist* $\bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}) \circ \tau = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$.

(c) *Es ist* $\mathscr{H}_+^*(X) \circ \pi \subset \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$.

(d) *Ist* $f \in \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$ $\mathscr{T}$*-invariant, so ist* $f \in \mathscr{H}_+^*(X) \circ \pi$.

Beweis. (1)⇒(2) folgt aus 3.6 und 3.8 [beim Beweis dieser Lemmata wurde nicht verwendet, daß $(X, \mathscr{H}^*)$ $\mathfrak{P}$-harmonisch ist]. (2)⇒(1): Wegen (a) und (b) gibt es nach Satz 4.10 Halbgruppen (P_t) auf X und (Q_t) auf $X \times \mathbb{R}$ mit $Q_t = (P_t \otimes T_t)$ und $\mathscr{E}(Q_t) = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$. Zu zeigen bleibt noch $\mathscr{H}_+^*(X) = \mathscr{E}(P_t)$:

Sei zunächst $f \in \mathscr{H}_+^*(X)$. Dann ist nach (c) auch $f \circ \pi \in \mathscr{E}(Q_t)$, also

$$Q_t(f \circ \pi) \leqq f \circ \pi \text{ für alle } t > 0 \text{ und } \lim_{t \to 0} Q_t(f \circ \pi) = f \circ \pi.$$

Für alle $(x,s) \in X \times \mathbb{R}$ ist aber $Q_t(f \circ \pi)(x,s) = P_t f(x)$. Somit folgt

$$P_t f \leqq f \text{ für alle } t > 0 \text{ und } \lim_{t \to 0} P_t f = f.$$

Also ist $f \in \mathscr{E}(P_t)$.

Sei nun umgekehrt $f \in \mathscr{E}(P_t)$. Dann ist $f \circ \pi \in \mathscr{E}(Q_t) = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$. Da $f \circ \pi$ außerdem $\mathscr{T}$-invariant ist, folgt mit (d) dann $f \in \mathscr{H}_+^*(X)$. □

Im folgenden soll nun eine weitere Charakterisierung von Produkträumen hergeleitet werden.

Dazu seien $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ zwei $\mathfrak{P}$-harmonische Räume mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist $\{(y,r) \in X \times \mathbb{R} | r \leqq s\}$ eine Absorptionsmenge in $X \times \mathbb{R}$.

(b) Für alle $\tau \in \mathscr{T}$ ist $\bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}) \circ \tau = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R})$.

(c′) Für alle offenen Mengen $U \subset X$ ist $\mathscr{H}^*(U) \circ \pi \subset \bar{\mathscr{H}}^*(U \times \mathbb{R})$.

Nach Satz 4.10 gibt es dann eine stark-Fellersche Halbgruppe (P_t) auf X und eine Halbgruppe (Q_t) auf $X \times \mathbb{R}$ mit

$$(Q_t) = (P_t \otimes T_t) \quad \text{und} \quad \mathscr{E}(Q_t) = \bar{\mathscr{H}}_+^*(X \times \mathbb{R}).$$

Zur Abkürzung setzen wir $\mathscr{W}:=\mathscr{E}(P_t)$. Weiter seien $\mathscr{P}_c$ der Kegel der stetigen, reellwertigen Potentiale auf X und

$$\mathscr{P}':=\{\inf(p,u) | p\in\mathscr{P}_c, u\in\mathscr{W}\cap\mathscr{C}(X)\}.$$

Dann gilt:

4.12. Lemma. *Sei w eine numerische Funktion auf X mit $w\circ\pi\in\bar{\mathscr{H}}_+^*(X\times\mathbb{R})$. Dann ist $w\in\mathscr{W}$.*

Beweis. Für $(x,s)\in X\times\mathbb{R}$ und $t>0$ ist $Q_t(w\circ\pi)(x,s)=P_t w(x)$. Wegen $\bar{\mathscr{H}}_+^*(X\times\mathbb{R})=\mathscr{E}(Q_t)$ und $\mathscr{W}=\mathscr{E}(P_t)$ folgt hieraus sofort die Behauptung (vgl. Lemma 3.8). □

4.13. Lemma. *$\mathscr{W}$ ist min-stabil mit $\mathscr{H}_+^*(X)\subset\mathscr{W}$. $\mathscr{P}'$ ist ein min-stabiler zulässiger Kegel mit $P_c\subset\mathscr{P}'$.*

Beweis. Ist $f\in\mathscr{H}_+^*(X)$, so ist wegen (c′) auch $f\circ\pi\in\bar{\mathscr{H}}_+^*(X\times\mathbb{R})$ und nach Lemma 4.12 somit $f\in\mathscr{W}$. Also ist $\mathscr{H}_+^*(X)\subset\mathscr{W}$. Sind nun $w_1,w_2\in\mathscr{W}=\mathscr{E}(P_t)$, so sind $w_1\circ\pi$ und $w_2\circ\pi$ in $\mathscr{E}(Q_t)=\bar{\mathscr{H}}_+^*(X\times\mathbb{R})$. Also ist auch

$$\inf(w_1\circ\pi, w_2\circ\pi)=\inf(w_1,w_2)\circ\pi$$

hyperharmonisch auf $X\times\mathbb{R}$. Nach Lemma 4.12 gibt dies $\inf(w_1,w_2)\in\mathscr{W}$. Damit ist $\mathscr{W}$ min-stabil. Weiter ist wegen $\mathscr{H}_+^*(X)\subset\mathscr{W}$ auch $\mathscr{P}_c\subset\mathscr{P}'$. Mit $\mathscr{P}_c$ ist daher $\mathscr{P}'$ ebenfalls ein zulässiger Kegel. □

4.14. Lemma. *$(X,\mathscr{W})$ ist ein Standard-Balayage-Raum; $\mathscr{W}$ besitzt die "truncation-property".*

Beweis. Da (P_t) stark-Fellersch ist, gilt $\mathscr{W}=\mathscr{S}(\mathscr{W}\cap\mathscr{C}(X))$, d.h. jedes $w\in\mathscr{W}$ ist isotoner Limes einer Folge stetiger Funktionen aus $\mathscr{W}$. Dann ist aber auch $\mathscr{W}=\mathscr{S}(\mathscr{P}')$. Nach [10, Corollary 3], ist daher $(X,\mathscr{W})$ ein Standard-Balayage-Raum. Die truncation-property für $\mathscr{W}$ folgt mit Hilfe von Lemma 4.12 aus der truncation-property für $\bar{\mathscr{H}}_+^*(X\times\mathbb{R})$. □

Im weiteren werde nun zusätzlich vorausgesetzt, daß die

Punkte in $(X,\mathscr{H}^*)$ totaldünn

sind.

4.15. Lemma. *$(X,\mathscr{W})$ besitzt keine fein-isolierten Punkte.*

Beweis. Wegen $(Q_t)=(P_t\otimes T_t)$ und $\mathscr{W}=\mathscr{E}(P_t)$ ist für $w\in\mathscr{W}$ stets

$$w\circ\pi\in\mathscr{E}(Q_t)=\bar{\mathscr{H}}_+^*(X\times\mathbb{R}).$$

Daher ist π $\mathscr{W}$-fein-stetig (d.h. stetig bzgl. der feinen Topologie auf $X\times\mathbb{R}$ und der $\mathscr{W}$-feinen Topologie auf X). Sei nun $x\in X$ ein $\mathscr{W}$-fein-isolierter Punkt. Dann ist $\{x\}$ $\mathscr{W}$-fein-offen und somit wegen der $\mathscr{W}$-feinen Stetigkeit von π auch $\{x\}\times\mathbb{R}$ fein-offen in $X\times\mathbb{R}$. Andererseits ist nach Voraussetzung $\{x\}$ totaldünn in $(X,\mathscr{H}^*)$. Zusammen mit (c′) liefert dies, daß auch $\{x\}\times\mathbb{R}$ totaldünn in $(X\times\mathbb{R},\bar{\mathscr{H}}^*)$ ist. Also ist $\{x\}\times\mathbb{R}$ sowohl totaldünn, als auch fein-offen. Dann muß aber $\{x\}\times\mathbb{R}=\emptyset$ sein. Demnach kann es keine $\mathscr{W}$-fein-isolierten Punkte geben. □

4.16. Korollar. *Es gibt eine hyperharmonische Garbe $\tilde{\mathscr{H}}^*$ auf X, so daß $(X, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum mit $\tilde{\mathscr{H}}^*_+(X) = \mathscr{W}$ ist.*

Beweis. Da (P_t) stark-Fellersch ist, ist jede Funktion in $\mathscr{W} = \mathscr{E}(P_t)$ nach unten halbstetig. Die Behauptung folgt somit aus [2, Theorem 3.12]. □

4.17. Satz. *Seien $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ zwei $\mathfrak{P}$-harmonische Räume. Die Punkte in X seien totaldünn. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es gibt sub-Markoffsche Halbgruppen (P_t) auf X und (Q_t) auf $X \times \mathbb{R}$ mit*

$(Q_t) = (P_t \otimes T_t)$

sowie $\mathscr{H}^*_+(X) = \mathscr{E}(P_t)$ und $\bar{\mathscr{H}}^*_+(X \times \mathbb{R}) = \mathscr{E}(Q_t)$.

(2) *$(X, \mathscr{H}^*)$ und $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ erfüllen die folgenden Bedingungen:*

(a) *Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist $\{(y, r) \in X \times \mathbb{R} | r \leqq s\}$ eine Absorptionsmenge in $X \times \mathbb{R}$.*

(b) *Für alle $\tau \in \mathscr{T}$ ist $\bar{\mathscr{H}}^*_+(X \times \mathbb{R}) \circ \tau = \bar{\mathscr{H}}^*_+(X \times \mathbb{R})$.*

(c′) *Für alle offenen Mengen $U \subset X$ ist $\mathscr{H}^*(U) \circ \pi \subset \bar{\mathscr{H}}^*(U \times \mathbb{R})$.*

Beweis. (1)⇒(2): Satz 4.11 und 3.21.

(2)⇒(1): Wegen (a) und (b) gibt es nach Satz 4.10 eine stark-Fellersche Halbgruppe (P_t) auf X und eine sub-Markoffsche Halbgruppe (Q_t) auf $X \times \mathbb{R}$ mit $(Q_t) = (P_t \otimes T_t)$ und $\bar{\mathscr{H}}^*_+(X \times \mathbb{R}) = \mathscr{E}(Q_t)$. Sei wieder $\mathscr{W} := \mathscr{E}(P_t)$. Zu zeigen bleibt, daß $\mathscr{W} = \mathscr{H}^*_+(X)$ gilt:

Sei dazu $\tilde{\mathscr{H}}^*$ wie in Korollar 4.16. Dann ist $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ das Produkt von $(X, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ mit dem harmonischen Raum zur gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$, und für alle offenen Mengen $U \subset X$ ist $\mathscr{H}^*(U) \subset \tilde{\mathscr{H}}^*(U)$: Ist nämlich $f \in \mathscr{H}^*(U)$, so ist wegen (c′) auch $f \circ \pi \in \bar{\mathscr{H}}^*(U \times \mathbb{R})$. Außerdem ist $f \circ \pi$ $\mathscr{T}$-invariant. Wendet man Satz 3.19 daher auf $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ und $(X, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ an, so folgt $f \in \tilde{\mathscr{H}}^*(U)$.

Nach [6, Theorem 2.1.1], ist somit $\mathscr{H}^* = \tilde{\mathscr{H}}^*$ und insbesondere

$$\mathscr{W} = \tilde{\mathscr{H}}^*_+(X) = \mathscr{H}^*_+(X). \quad \square$$

Auf die zusätzliche Voraussetzung in Satz 4.17, daß die Punkte in X totaldünn sind, kann nicht verzichtet werden. Dies zeigt das folgende Beispiel, welches ich Herrn W. Hansen verdanke.

4.18. Beispiel. Seien $X =]0, 2[$ und $\mathscr{H}^*$ die Garbe der klassischen hyperharmonischen Funktionen auf X. Dann ist $(X, \mathscr{H}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum, in welchem die Punkte nicht totaldünn sind.

Für $U \subset X \times \mathbb{R}$ sei $\bar{\mathscr{H}}^*(U)$ die Menge aller nach unten halbstetigen Funktionen $u: U \to]-\infty, \infty]$, deren Restriktion auf $U \backslash (\{1\} \times \mathbb{R})$ hyperharmonisch für die Wärmeleitungsgleichung ist und für die $u(1, \cdot)$ lokal isoton ist. Nach [15, Bemerkung 2.5], ist $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ ebenfalls ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum, und $\{1\} \times \mathbb{R}$ ist eine Absorptionsmenge in $X \times \mathbb{R}$.

Offensichtlich erfüllen $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ alle Bedingungen von Satz 4.17(2). $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ ist aber nicht (bzgl. geeigneter Halbgruppen) das Produkt von $(X, \mathscr{H}^*)$ mit dem harmonischen Raum zur gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$.

4.19. Bemerkung. Besitzen die Räume $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ in Satz 4.17 eine Basis regulärer Mengen, so kann die Bedingung (c′) noch abgeschwächt werden zu (c″) Die Projektion π von $(X \times \mathbb{R}, \bar{\mathscr{H}}^*)$ auf $(X, \mathscr{H}^*)$ ist harmonisch.

In diesem Fall folgt nämlich (c′) bereits aus (c″), wie [5, Theorem 3.1], zeigt.

Damit kann man zum Beispiel für $n \geqq 3$ ohne Kenntnis der zugehörigen Halbgruppen unmittelbar einsehen, daß der harmonische Raum zur Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ das Produkt des zur Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^n$ gehörenden harmonischen Raumes mit dem harmonischen Raum zur gleichmäßigen Bewegung auf $\mathbb{R}$ ist.

Literatur

1. Bauer, H.: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 22. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966
2. Bliedtner, J., Hansen, W.: Markov processes and harmonic spaces. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **42**, 309–325 (1978)
3. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processes and potential theory. New York, London: Academic Press 1968
4. Cairoli, R.: Produits de semi-groupes de transition et produits de processus. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **15**, 311–384 (1966)
5. Constantinescu, C., Cornea, A.: Compactifications of harmonic spaces. Nagoya Math. J. **25**, 1–57 (1965)
6. Constantinescu, C., Cornea, A.: Potential theory on harmonic spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
7. Dynkin, E.B.: Markov processes. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1965
8. Hansen, W.: Fegen und Dünnheit mit Anwendungen auf die Laplace- und Wärmeleitungsgleichung. Ann. Inst. Fourier **21/1**, 79–121 (1971)
9. Hansen, W.: Abbildungen harmonischer Räume mit Anwendung auf die Laplace- und Wärmeleitungsgleichung. Ann. Inst. Fourier **21/3**, 203–216 (1971)
10. Hansen, W.: Markov processes on standard balayage spaces (preprint) (1980)
11. Meyer, P.-A.: Probabilités et potentiel. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 14. Paris: Hermann 1966
12. Meyer, P.-A.: Les résolvantes fortement fellériennes d'après Mokobodzki. In: Seminaire de Probabilités II, 171–174. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 51. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1968
13. Schirmeier, U.: Produkte harmonischer Räume. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 00, 5–22 (1978)
14. Schirmeier, U.: Konvergenzeigenschaften in harmonischen Räumen. Invent. Math. **55**, 71–95 (1979)
15. Schirmeier, U.: Isomorphie harmonischer Räume. Math. Ann. **225**, 33–55 (1977)
16. Taylor, J.C.: Strict potentials and Hunt processes. Invent. Math. **16**, 249–259 (1972)

Eingegangen am 11. Dezember 1980; revidierte Fassung am 6. März 1981