Extrema unter Nebenbedingungen, Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wird bearbeitet:
Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, Begradigung, Bestimmen von Extrema unter Nebenbedingungen

---

A 157 Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung und

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$$

ihre Nullstellenmenge. Wann ist M eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$?

(1) immer
(2) nur falls $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$ gilt
(3) nur falls $\operatorname{grad} g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt
(4) nie

A 158 Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\}$

(1) ist eine Untermannigfaltigkeit, weil sie sich begradigen lässt,
(2) ist eine Untermannigfaltigkeit, obwohl sie sich nicht begradigen lässt,
(3) ist keine Untermannigfaltigkeit, weil sie sich nicht begradigen lässt,
(4) ist keine Untermannigfaltigkeit, obwohl sie sich nicht begradigen lässt.

A 159 Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x$$

(1) hat ein lokales Extremum,
(2) hat ein Extremum unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.
(3) Beides trifft zu.
(4) Keines von beiden trifft zu.

T. Bauer, *Verständnisaufgaben zur Analysis 1 und 2*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-59703-3_28