1 Allgemeine Grundlagen

1.1 Allgemeine binomische Formeln

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \tag{501}$$

Binomialkoeffizienten (n über k):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq n \tag{502}$$

Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten mittels Pascalschem Dreieck:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & \searrow + \swarrow & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}
\quad \Rightarrow \quad \binom{3}{0} = 1\,, \ \binom{3}{1} = 3\,, \ldots \tag{503}$$

Binomische Reihe

Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes liefert die binomische Reihe:

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} a^{r-k}\, b^k \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R} \tag{504}$$

Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten:

$$\binom{r}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{r-(j-1)}{j} = \frac{r \cdot [r-1] \cdot [r-2] \cdot \ldots \cdot [r-(k-1)]}{k!}\,, \qquad \binom{r}{0} = 1 \tag{505}$$

1.2 Transzendente Zahlen

Eulersche Zahl:

$$\mathrm{e} = 2{,}718281828459045\ldots \tag{506}$$

Kreiszahl:

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots \tag{507}$$

Im Gegensatz zu *algebraischen Zahlen* (z. B. $\sqrt{2}$; aus $x^2 - 2 = 0$) lassen sich *transzendente Zahlen* nicht aus einer algebraischen Gleichung $c_n x^n + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ berechnen.

Weitere transzendente Zahlen: $\cos(1)$, $2^{\sqrt{2}}$, $\ln(3)$.

L. Nasdala, *Mathematik 1 Beweisaufgaben*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-30160-6_19