Teil B
Methoden zur exakten Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

Einleitung

Die Erhaltungssätze (Kontinuitätsgleichung, Bewegungsgleichung, Energiegleichung), die am Beginn fast jeder theoretischen Behandlung von Strömungsproblemen stehen, sind nichtlinear. Nur in sehr speziellen, wenn auch wichtigen Sonderfällen reduzieren sie sich auf lineare Differentialgleichungen.

Der herausragenden Bedeutung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen in der Strömungslehre stehen aber leider keine entsprechend umfangreichen Lösungsmethoden gegenüber. Während uns die Mathematik bei linearen partiellen Differentialgleichungen eine gut ausgearbeitete Theorie bereits seit langem bereitstellt, ist man bei nichtlinearen Problemen noch damit beschäftigt, die Vielfalt möglicher Lösungen (und damit mögliche Strömungsformen) an Hand einfacher Beispiele, wie der Korteweg-de Vries-Gleichung, verstehen zu lernen (vgl. z. B. *Ames*, 1967a).

Eine wesentliche und oft entscheidende Erschwerung bei der Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen ergibt sich daraus, daß die Superposition (Überlagerung) von bereits bekannten Lösungen im allgemeinen nicht zu neuen Lösungen führt. Damit entfällt ein wirkungsvolles Verfahren, mit dessen Hilfe man bei linearen partiellen Differentialgleichungen die Randbedingungen erfüllen kann. Dementsprechend erweist sich die Erfüllung der Randbedingungen oft als ein großes Hindernis bei der Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen.

Der wesentliche Schritt bei der Lösung einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung besteht sehr oft darin, das gestellte Problem zu vereinfachen, indem man es entweder in ein lineares Problem überführt (Transformationsmethoden, Störungsmethoden) oder die partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert (Separationsmethoden, Ähnlichkeitslösungen, Lösungen spezieller Form). Die Vereinfachungen können entweder exakt sein oder – wie bei den Störungsmethoden – auf einer (rationalen und systematischen) Approximation der ursprünglichen Gleichungen beruhen. Wir werden uns in den folgenden Kapiteln mit den genannten Methoden beschäftigen. Nicht behandelt werden empirische Näherungsmethoden, wie etwa die parabolische Methode für schallnahe Strömungen, sowie rein numerische Methoden und Methoden, die trotz gewisser analytischer Ansätze in der Durchführung im wesentlichen auf eine numerische Behandlung hinauslaufen; zur letzten Gruppe gehören beispielsweise Integralverfahren und Variationsmethoden (mit Ausnahme der Whithamschen Mittelungsmethode, die unter den Störungsmethoden zu finden ist).

8. Partielle Differentialgleichung erster Ordnung

Wenn wir es mit einer einzigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zu tun haben – was leider in der Strömungslehre nicht sehr häufig der Fall ist – so können wir auch im nichtlinearen Fall auf eine allgemeine Theorie zurückgreifen. Aufbauend auf dieser Theorie läßt sich die Differentialgleichung fast rezeptmäßig lösen. Für partielle Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung und für Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es eine allgemeine Theorie nicht.