

---

## **Kapitel 3**

# **Regelbasierte Systeme**

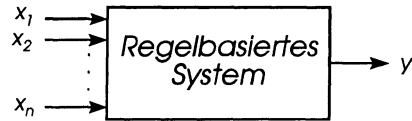
---

---

### 3.1 Fuzzy-Logik regelbasierter Systeme

---

Wir haben in den voranstehenden Abschnitten nun alle Voraussetzungen zusammengetragen, um regelbasierte Systeme zu behandeln, die auf unscharfen Informationen agieren. Ein *regelbasiertes System* besteht aus einem System von Inferenzregeln und einem Inferenzschema, das die Verarbeitungsvorschrift enthält, nach der (scharfe) Eingangsgrößen  $x_i$  mit Hilfe der Inferenzregeln zu (scharfen) Ausgangsgrößen  $y_j$  verarbeitet werden. Es genügt, eine Ausgangsgröße zu betrachten, da sich für mehrere Ausgangsgrößen das Regelschema wiederholt (Bild 3.1).



**Bild 3.1.** Regelbasiertes System mit  $n$  Eingangsgrößen  $x_i$  und einer Ausgangsgröße  $y$ .

Das System der Inferenzregeln fassen wir zusammen in einer *Regelbasis* der Form

$$R_1: \text{ WENN } x_1 = A_{11} \dots \text{ UND } x_i = A_{1i} \dots \text{ UND } x_n = A_{1n} \quad \text{DANN } y = B_1$$

$$\vdots$$

$$R_j: \text{ WENN } x_1 = A_{j1} \dots \text{ UND } x_i = A_{ji} \dots \text{ UND } x_n = A_{jn} \quad \text{DANN } y = B_j$$

$$\vdots$$

$$R_m: \text{ WENN } x_1 = A_{m1} \dots \text{ UND } x_i = A_{mi} \dots \text{ UND } x_n = A_{mn} \quad \text{DANN } y = B_m$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ :           Eingangsgrößen

$A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{mi}$ :    linguistische Terme der Eingangsgröße  $x_i$

$y$ :                            Ausgangsgröße

$B_1, B_2, \dots, B_m$ :     linguistische Terme der Ausgangsgröße

Dabei ist " $x_i = A_{ji}$ " so zu lesen: "Wenn die Eingangsgröße  $x_i$  die Eigenschaft  $A_{ji}$  hat". Entsprechendes ist für " $y = B_j$ " zu setzen.

Die Tatsache, daß wir für die Verknüpfung der Prämissen einer Regel nur die UND-Verknüpfung zugelassen haben, bedeutet keine Einschränkung, da wir eine Regel mit ODER-verknüpften Prämissen jederzeit aufspalten können in mehrere Regeln unserer Form. Alternativ dazu können wir natürlich in einem solchen Fall auch den MIN-Operator jeweils durch den MAX-Operator ersetzen.

Einem aktuellen Satz von Eingangsgrößen  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  wird dann auf Grund des Inferenzschemas unter Beachtung der Regelbasis zunächst eine Fuzzy-Menge zugeordnet, die aus den Ergebnissen aller Regeln zusammengesetzt ist. Dazu finden wir in jeder Zeile das Ergebnis der jeweiligen Regel für die Ausgangsgröße  $y$  aus  $Z$  als Zugehörigkeitswert einer geköpften Fuzzy-Menge  $\mu_{B_i}$ :

$$\begin{aligned} R_1: & \text{MIN}(\mu_{11}(x'_1), \dots, \mu_{1n}(x'_n), \mu_{B_1}(y)) = \mu_{B_1}(y) \\ & \vdots \\ R_j: & \text{MIN}(\mu_{j1}(x'_1), \dots, \mu_{jn}(x'_n), \mu_{B_j}(y)) = \mu_{B_j}(y) \\ & \vdots \\ R_m: & \text{MIN}(\mu_{m1}(x'_1), \dots, \mu_{mn}(x'_n), \mu_{B_m}(y)) = \mu_{B_m}(y) \end{aligned}$$

Verbunden durch den ODER-Operator MAX entsteht die resultierende Fuzzy-Menge  $\mu_{\text{res}}$ :

$$R_1 \cup \dots \cup R_j \cup R_m: \mu_{\text{res}}(y) := \text{MAX}(\mu_{B_1}(y), \dots, \mu_{B_j}(y), \dots, \mu_{B_m}(y)), \quad y \in Z$$

Die resultierende Fuzzy-Menge  $\mu_{\text{res}}$  ist auf der Kenngröße  $Z$  am Ausgang als linguistischer Term anzusehen, der jedoch bei den gewählten Beispielen als solcher nur selten vorkommt. Die Aufgabe von Fuzzy-Control besteht nun allerdings nicht darin, für das erhaltene Ergebnis einen angemessenen linguistischen Term zu formulieren, sondern etwa für die Steuerung einer Maschine eine scharfe Ausgangsgröße  $y$  auf der Kenngröße  $Z$  zu finden. Diese Aufgabe und ihre Lösung wird als *Defuzzifizierung* bezeichnet.

Bild 3.2 veranschaulicht die Komponenten eines regelbasierten Systems. Die Eingangsgrößen  $x_i$  und die Ausgangsgröße  $y$  sind nun scharfe Werte.

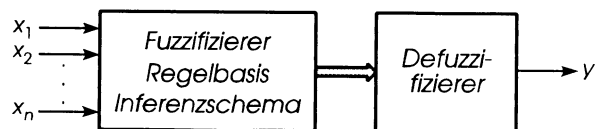


Bild 3.2. Komponenten eines regelbasierten Systems.

**Bemerkung:**

Der allgemeine Fall, daß die scharfen Eingangsgrößen zunächst in einem Eingabe-Interface zu Fuzzy-Mengen umgewandelt werden und dann erst an die Regelbasis und das Inferenzschema geliefert werden, wird hier nicht behandelt. Er kommt bisher in der Praxis von Fuzzy-Control nicht vor (siehe auch Bild 2.11).

**Beispiel: Bremsvorgang auf Autobahn**

Wir wollen unser Beispiel *Bremsvorgang auf Autobahn* aus Abschnitt 2.3 mit den Eingangsgrößen

*Abstand A* zum vorausfahrenden Fahrzeug

*Geschwindigkeit G* des eigenen Fahrzeugs

und der Ausgangsgröße

*Bremskraft K*

fortsetzen, jetzt jedoch mit einer kompletten Regelbasis. Da wir für beide Eingangsgrößen jeweils fünf linguistische Terme definiert haben, kann unsere Regelbasis maximal  $5 \cdot 5 = 25$  Regeln enthalten. Für die scharfen Eingangsgrößen

$$A = 175 \text{ m}$$

$$G = 190 \text{ km/h}$$

hatten wir die fuzzifizierten Werte

$$A^* = (0, 0.75, 0.25, 0, 0)$$

$$G^* = (0, 0, 0, 0, 1)$$

ermittelt. Dies bedeutet, daß lediglich zwei Regeln aktiv sind, nämlich diejenigen zu den Prämissen  $A = \text{mittel}$  UND  $G = \text{sehr\_hoch}$  bzw.  $A = \text{niedrig}$  UND  $G = \text{sehr\_hoch}$ . Die beiden Regeln sollen lauten

$R_1$ : WENN  $A = \text{mittel}$  UND  $G = \text{sehr\_hoch}$  DANN  $K = \text{dreiviertel}$

$R_2$ : WENN  $A = \text{niedrig}$  UND  $G = \text{sehr\_hoch}$  DANN  $K = \text{voll}$

Die Abarbeitung des Inferenzschemas umfaßt nun folgende Schritte:

## ① Fuzzifizierung der Eingangsgrößen

Die Fuzzifizierung erfolgt wie im Falle einer einzelnen Regel (siehe Abschnitt 2.3) und liefert die oben angegebenen Werte.

## ② Ermittlung der aktiven Regeln

Die Regeln  $R_1$  und  $R_2$  sind aktiv. Dies sind die einzigen aktiven Regeln.

### ③ Ermittlung der einzelnen Ausgangs-Fuzzy-Mengen

Da die beiden Prämissen der Regeln UND-verknüpft sind, müssen die Zugehörigkeitswerte über den MIN-Operator zum Erfüllungsgrad der Regel verknüpft werden:

$$H_1 = \text{MIN}(\mu_{A_{\text{mittel}}}(200 \text{ m}), \mu_{G_{\text{sehr\_hoch}}}(190 \text{ km/h})) = \text{MIN}(0.25, 1) = 0.25$$

$$H_2 = \text{MIN}(\mu_{A_{\text{niedrig}}}(200 \text{ m}), \mu_{G_{\text{sehr\_hoch}}}(190 \text{ km/h})) = \text{MIN}(0.75, 1) = 0.75$$

Die Fuzzy-Mengen der Konklusion jeder aktiven Regel sind in der Höhe des jeweiligen Erfüllungsgrades  $H_i$  abzuschneiden und auf der Ausgangsgröße  $K$  abzutragen.

### ④ Ermittlung der resultierenden Ausgangs-Fuzzy-Menge

Wir fassen die in Schritt 3 ermittelten Fuzzy-Mengen mit dem ODER-Operator MAX zur resultierenden Ausgangs-Fuzzy-Menge  $\mu_{K_{\text{res}}}$  zusammen (Bild 3.3).

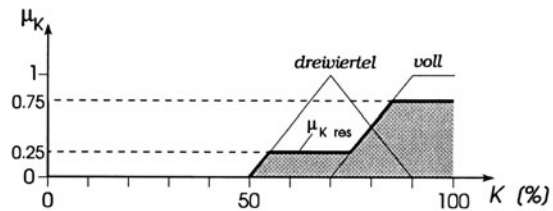


Bild 3.3. Ermittlung der resultierenden Fuzzy-Menge.

### ⑤ Bestimmung der scharfen Ausgangsgröße

Auf die resultierende Fuzzy-Menge  $\mu_{K_{\text{res}}}$  ist nun ein Defuzzifizierungsverfahren anzuwenden, das eine scharfe Ausgangsgröße liefert. Die wichtigsten Defuzzifizierungsverfahren sind im nachfolgenden Abschnitt beschrieben. ■

Wir wollen die Auswertung regelbasierter Systeme noch einmal in einer Kurzübersicht zusammenfassen:

**Schritt 1:** Fuzzifizierung der scharfen Eingangsgrößen.

**Schritt 2:** Ermittlung des Erfüllungsgrades  $H_i$  jeder aktiven Regel  $R_i$  durch Verknüpfung aller Zugehörigkeitsgrade der Eingangsgrößen der Regel mit dem MIN-Operator.

**Schritt 3:** Ermittlung der resultierenden Ausgangs-Fuzzy-Menge durch Überlagerung der in der Höhe  $H_i$  abgeschnittenen Ausgangs-Fuzzy-Mengen der aktiven Regeln (MAX-Operator).

**Schritt 4:** Berechnung der scharfen Ausgangsgröße durch Defuzzifizierung.

## 3.2 Defuzzifizierung

Das Ergebnis der Fuzzy-Inferenz ist zunächst eine resultierende Fuzzy-Menge für die Ausgangsgröße. Um eine scharfe Ausgangsgröße - man spricht in diesem Zusammenhang häufig auch von *Crisp-Ausgangsgröße* - zu erhalten, muß die resultierende Ausgangs-Fuzzy-Menge defuzzifiziert werden. Wir listen hier die wichtigsten Methoden der Defuzzifizierung mit ihren speziellen Vor- und Nachteilen auf.

### A Maximum-Methode und Mustererkennung

Die einfachste Methode der Defuzzifizierung besteht darin, daß nur diejenige Regel mit dem höchsten Erfüllungsgrad bei einem vorgegebenen Eingangsrößenatz betrachtet wird und diese einen festen Wert als Ausgangsgröße ausgibt. Wir bezeichnen dieses Defuzzifizierungsverfahren kurz als *Maximum- oder Mustererkennungs-Methode*.

Die Maximum-Methode wird bei der Fuzzy-Modellierung am besten dadurch vorbereitet, daß die Ausgangsmenge jeder Regel als Singleton vorgegeben wird. Es muß bei der Modellierung darauf geachtet werden, daß immer mindestens eine Regel aktiv ist, da sonst keine Entscheidung gefällt wird.

#### Beispiel: Bremsvorgang auf der Autobahn

Wir übernehmen die Fuzzy-Modellierung der Eingangsgrößen, die Regelbasis und die scharfen Eingangsgrößen wie im Beispiel des voranstehenden Abschnitts. Dann läuft das Fuzzy-Inferenzverfahren bis zur Bestimmung der Erfüllungsgrade in Schritt 3 unverändert ab.

Bezüglich unserer Ausgangsgröße, der *Bremskraft*  $K$ , wollen wir nun annehmen, daß diese nur in Schritten von 10% vorgebar ist. Wir modellieren daher unsere linguistischen Terme als Singletons wie in Bild 3.4 dargestellt. Auf diese Weise erhalten wir nach dem Fuzzy-Inferenzschema als Gesamtergebnis für die Fuzzy-Menge am Ausgang die beiden skizzierten geköpften Singletons.

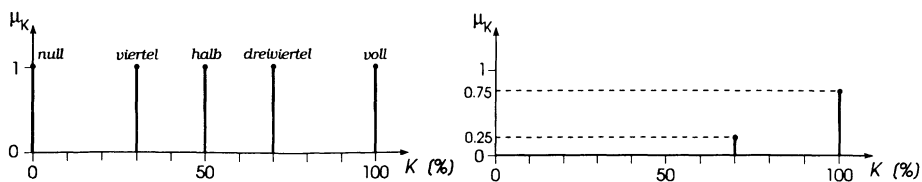


Bild 3.4. Linguistische Terme für *Bremskraft* (links) und Inferenzergebnis (rechts).

Das Maximum des Zugehörigkeitsgrades wird für  $K = voll$ , d. h. volle Bremskraft angenommen. Die scharfe Ausgangsgröße ist also 100%. ■

Dieses Beispiel ist für die Verwendung der angegebenen Methode nicht überzeugend. Wir möchten jedoch ein Beispiel durch alle Defuzzifizierungsmethoden verfolgen, da es für die Praxis von Fuzzy-Control von entscheidender Bedeutung ist, welches Defuzzifizierungsverfahren zum Einsatz kommt. Bevor wir zum nächsten Verfahren übergehen, wollen wir noch ein weiteres, typischeres Anwendungsbeispiel für die Defuzzifizierung nach maximaler Höhe betrachten.

### Beispiel: Mustererkennung

Es seien  $k$  Signalgeber vorgegeben. Ein Zustand eines beobachteten Prozesses wird dann durch  $k$  Signalwerte der Signalgeber beschrieben, so daß auf jedem Signalkanal eine Amplitudenhöhe zu dem beobachteten Zustand gehört. Bild 3.5 zeigt für den Fall  $k = 4$  vier verschiedene Zustände. Jeder Zustand ist als ein Muster von Amplitudenhöhen abgespeichert. Dies soll in jeweils elf Diskretisierungsstufen von 0..10 geschehen, wobei Stufe 0 alle Amplitudenhöhen unterhalb eines Schwellwertes zusammenfaßt und in der Musterdarstellung damit dem Zustand "nicht sichtbar" entspricht (z. B. Kanal 3 bei Typ 4). Haben wir einen aktuell vorliegenden Zustand mit den abgespeicherten Zuständen zu vergleichen, so sind für jeden Zustandstyp die Höhen der gespeicherten Amplituden mit den aktuellen Amplituden zu vergleichen. In der Praxis kann es nun geschehen, daß die erwartete Amplitudenhöhe - beispielsweise aufgrund von Meßfehlern - um eine Diskretisierungsstufe erhöht oder erniedrigt ist. Außerdem kann das gesamte Muster um mehrere Diskretisierungsstufen nach oben oder unten verschoben sein. Bild 3.6 zeigt eine solche Modifizierung der in Bild 3.5 festgelegten Muster.

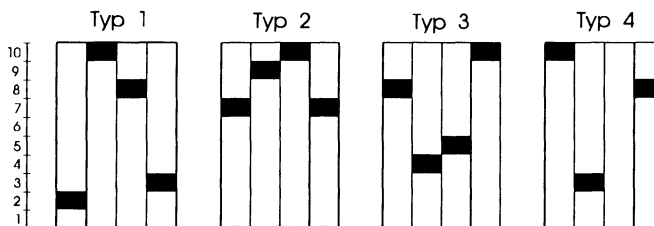


Bild 3.5. Mögliche Zustände der Signalgeber.

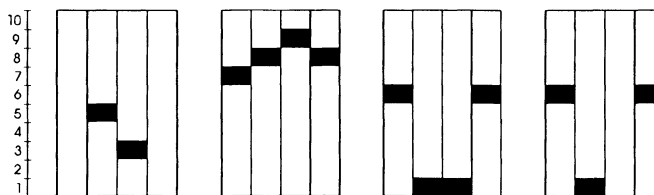


Bild 3.6. Modifizierte Muster.

Das Vergleichen der Muster unter der Bedingung solcher Modifikationen hat mathematisch zur Folge, daß bei  $s$  Diskretisierungsstufen  $3^k(s-1)$  mögliche Modifikationen eines vorgegebenen Musters auftreten können. Es liegt daher nahe, Mustervergleiche dieser Art unter dem Fuzzy-Aspekt vorzunehmen. Dazu legen wir für unser Inferenzschema zunächst fest

*Eingangsgroßen* sind die Amplitudenhöhen auf den vier Kanälen der Signalgeber

*Ausgangsgroße* sind die Typen 1, 2, 3, 4.

Die linguistischen Terme für die vier Kanäle wählen wir wie in Bild 3.7. Dabei bedeutet *mh* soviel wie *mittel\_hoch*, *n* *niedrig* usw. Da als Ausgangsgroße nur diskrete Alternativen für den Typ zur Verfügung stehen - dies ist typisch für Probleme der Mustererkennung - modellieren wir die linguistischen Terme als Singletons.

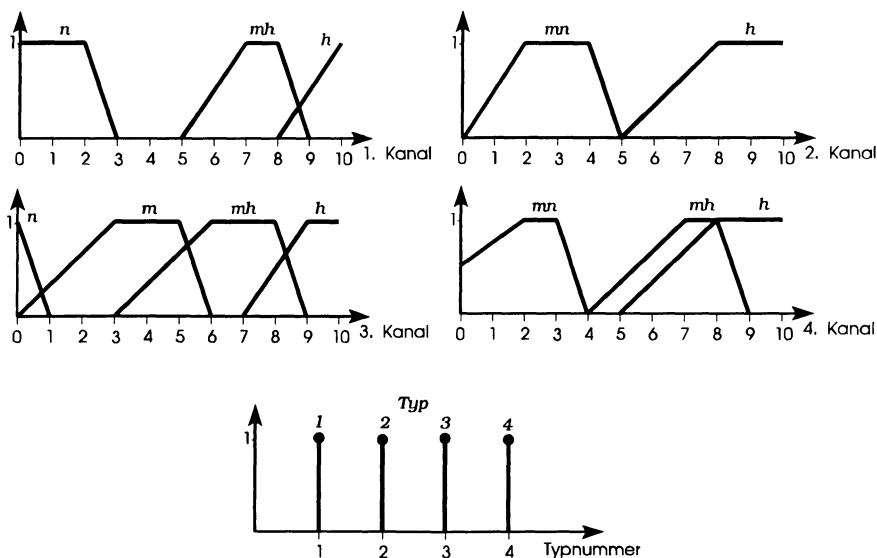


Bild 3.7. Mustererkennung mit Fuzzy-Mengen für vier Typen.

Die Regelbasis soll die folgende Gestalt aufweisen:

$R_1$ : WENN 1. Kanal =  $n$  UND 2. Kanal =  $h$  UND  
3. Kanal =  $mh$  UND 4. Kanal =  $mn$   
DANN Typnummer = 1

$R_2$ : WENN 1. Kanal =  $mh$  UND 2. Kanal =  $h$  UND  
3. Kanal =  $h$  UND 4. Kanal =  $mh$   
DANN Typnummer = 2



$R_3$ : WENN 1. Kanal = mh UND 2. Kanal = mn UND  
3. Kanal = m UND 4. Kanal = h

DANN Typnummer = 3

$R_4$ : WENN 1. Kanal = h UND 2. Kanal = mn UND  
3. Kanal = n UND 4. Kanal = mh

DANN Typnummer = 4

Als Eingangsgröße wählen wir exemplarisch das dritte Muster aus Bild 3.6 mit den Amplitudenwerten (6, 1, 1, 6). Die Fuzzifizierung liefert zunächst die in Bild 3.8 dargestellten Ergebnisse.

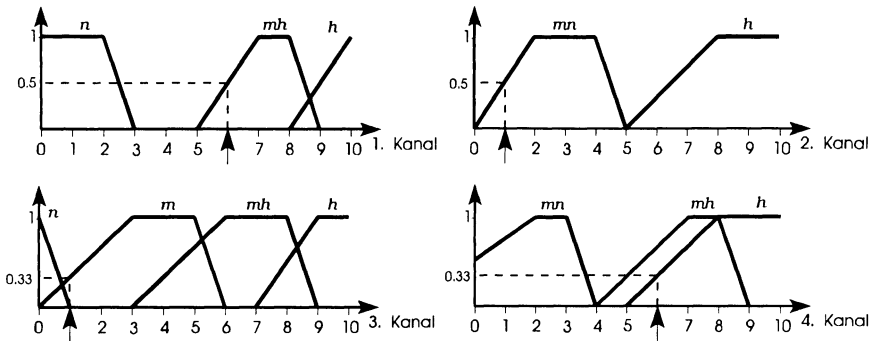


Bild 3.8. Fuzzifizierung der Eingangsamplitudenwerte.

Die Auswertung der Regelbasis liefert für den Erfüllungsgrad der einzelnen Regeln

$$H_1 = \text{MIN}(\mu_{1n}(6), \mu_{2h}(1), \mu_{3mh}(1), \mu_{4mn}(6)) = 0$$

$$H_2 = \text{MIN}(\mu_{1mh}(6), \mu_{2h}(1), \mu_{3h}(1), \mu_{4mh}(6)) = 0$$

$$H_3 = \text{MIN}(\mu_{1mh}(6), \mu_{2mn}(1), \mu_{3m}(1), \mu_{4h}(6)) = 0.33$$

$$H_4 = \text{MIN}(\mu_{1h}(6), \mu_{2mn}(1), \mu_{3n}(1), \mu_{4mh}(6)) = 0$$

(Der Ausdruck  $\mu_{1n}$  kennzeichnet die Fuzzy-Menge  $n$  für den 1. Kanal usw.)

Bild 3.9 zeigt die Ermittlung der resultierenden Ausgangs-Fuzzy-Menge.  $R_3$  ist die einzige aktive Regel und damit automatisch die Regel mit dem höchsten Erfüllungsgrad. Die Defuzzifizierung nach dem Maximum liefert also den (korrekten) Typ 3 als Ergebnis der Mustererkennung. ■

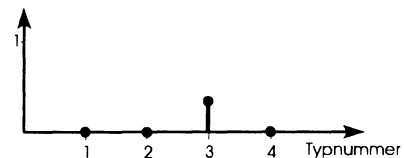


Bild 3.9. Ermittlung der resultierenden Ausgangs-Fuzzy-Menge.

Das voranstehende Beispiel zeigt, daß die Fuzzy-Inferenz auf einfachste Weise ca. die Hälfte der  $3^k(s-1) = 3^4 \cdot 10 = 810$  hier möglichen Fälle der Mustermodifikationen erkennt und unterscheidet.

Treten mehrere Regeln mit maximalem Erfüllungsgrad auf, so muß gegebenenfalls nach einer Prioritätenliste entschieden werden. Für Aufgaben der Mustererkennung reicht beim Auftreten eines solchen Falles das Auflösungsvermögen der gewählten Fuzzy-Modellierung nicht aus. Kann die Fuzzy-Modellierung nicht besser eingerichtet werden, so muß ein weiterer Kanal für ein zusätzliches Unterscheidungsmerkmal hinzugefügt werden.

Fassen wir die Defuzzifizierung nach der Maximum-Methode zusammen:

#### Defuzzifizierung nach der Maximum-Methode

- nur aktive Regel mit höchstem Erfüllungsgrad wird betrachtet
- Maximum der zugehörigen Ausgangs-Fuzzy-Menge bestimmt scharfe Ausgangsgröße
- besonders geeignet für Probleme der Mustererkennung
- ⊕ einfache soft- und hardwaremäßige Realisierung
- ⊖ nur eine aktive Regel wird betrachtet
- ⊖ Ausgangsgröße unabhängig vom Erfüllungsgrad der maßgebenden Regel
- ⊖ es treten nur diskrete Ausgangswerte auf, d. h. bei Variation der Eingangsgröße(n) können sprungförmige Ausgangsgrößenverläufe auftreten

### B Maximum-Mittel-Methode

Wir verfahren bei dieser Methode wie bei der Maximum-Methode. Falls mehr als eine Regel maximalen Erfüllungsgrad hat, werden die zu diesen Regeln gehörenden scharfen Ausgangsgrößen arithmetisch gemittelt.

**Beispiel:** Bremsvorgang auf der Autobahn

Wie im ersten Beispiel unter der Defuzzifizierungsmethode A sollen auf der Ausgangsgröße *Bremskraft K* nur Terme in Form von Singletons vorgegeben werden. Als scharfe Eingangsgrößen wählen wir jetzt jedoch

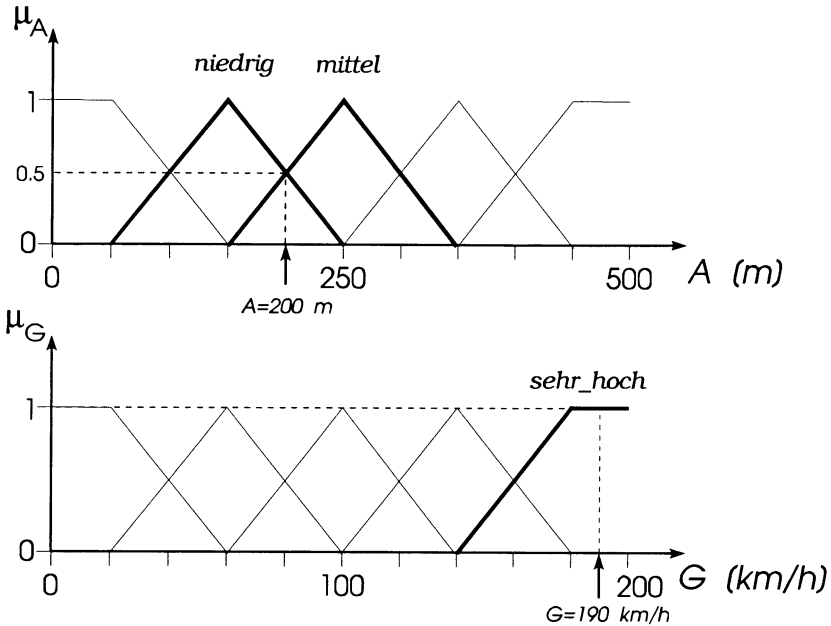
$$A = 200 \text{ m,}$$

$$G = 190 \text{ km/h .}$$

Die Fuzzifizierung (Bild 3.10) liefert in diesem Fall

$$A^* = (0, 0.5, 0.5, 0, 0)$$

$$G^* = (0, 0, 0, 0, 1)$$



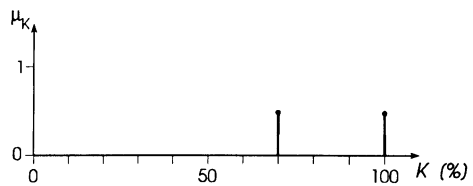
**Bild 3.10.** Fuzzifizierung der scharfen Eingangsgrößen.

Für die Erfüllungsgrade der beiden aktiven Regeln erhalten wir

$$H_1 = \text{MIN}(\mu_{A \text{ mittel}}(200 \text{ m}), \mu_{G \text{ sehr\_hoch}}(190 \text{ km/h})) = \text{MIN}(0.5, 1) = 0.5 ,$$

$$H_2 = \text{MIN}(\mu_{A \text{ niedrig}}(200 \text{ m}), \mu_{G \text{ sehr\_hoch}}(190 \text{ km/h})) = \text{MIN}(0.5, 1) = 0.5 .$$

Beide Regeln besitzen jetzt also den gleichen Erfüllungsgrad. Die zugehörigen Ausgangs-Fuzzy-Mengen zeigt Bild 3.11. Nach der Maximum-Mittel-Methode wird die scharfe Ausgangsgröße  $K_{\text{res}}$  nun bestimmt durch das arithmetische Mittel der zu den Single-



**Bild 3.11.** Ausgangs-Fuzzy-Mengen.

tons der aktiven Regeln gehörenden scharfen Ausgangswerte:

$$K_{\text{res}} = \frac{1}{2}(70\% + 100\%) = 85\%$$

Durch diese Methode können also insbesondere auch Zwischenwerte der verwendeten Singletons auf der Ausgangsgröße erreicht werden. ■

Wir fassen die Maximum-Mittel-Methode zusammen:

#### Defuzzifizierung nach der Maximum-Mittel-Methode

- alle aktiven Regeln mit höchstem Erfüllungsgrad werden betrachtet
- arithmetisches Mittel der scharfen Ausgangsgrößen der aktiven Regeln bestimmt scharfe Ausgangsgröße
- ⊕ es sind Interpolationen möglich
- ⊕ Stellen mit gleichem maximalen Erfüllungsgrad mehrerer Regeln, insbesondere benachbarter Regeln, sind unkritisch
- ⊖ interpolierte Werte können nicht benutzbar sein
- ⊖ Ausgangsgröße unabhängig vom Erfüllungsgrad der maßgebenden Regel(n)
- ⊖ es treten nur diskrete Ausgangswerte auf, d. h. bei Variation der Eingangsgröße(n) können sprunghafte Ausgangsgrößenverläufe auftreten

Die Maximum-Mittel-Methode ist nur selten sinnvoll einsetzbar.

### C Akkumulationsmethode

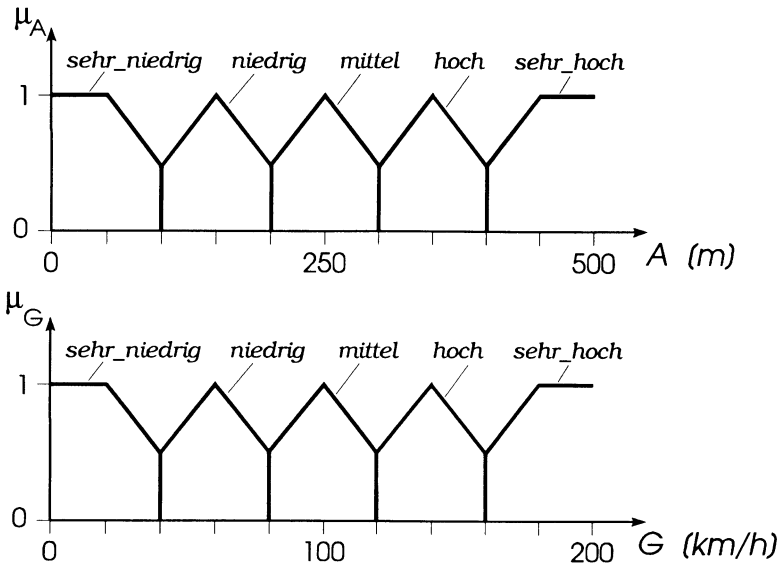
Wir bilden zunächst ein Inferenzverfahren nach der Mustererkennungs-methode A. Zu jeder Regel wird in Gestalt eines Singletons ein scharfer Ausgangswert  $\Delta y$  angegeben, der von einem vorhandenen (aktuellen) Wert abzuziehen ist oder zu ihm hinzuaddiert werden muß, falls die Regel maximalen Erfüllungsgrad hat:

$$y_{\text{neu}} = y_{\text{alt}} \pm (\Delta y)_{i_{\text{max}}}$$

Der Index  $i_{\max}$  kennzeichnet die Regel mit maximalem Erfüllungsgrad. Es ist bei der Modellierung der Terme auf den Eingangsgrößen darauf zu achten, daß immer nur eine Regel den höchsten Erfüllungsgrad hat.

**Beispiel:** Bremsvorgang auf der Autobahn.

Die linguistischen Terme der Eingangsgrößen werden gemäß Bild 3.12 neu modelliert, wobei immer der rechte Randwert zu einer Fuzzy-Menge gehören soll, der linke Randwert jedoch nur im Falle des Minimums auf der Kenngröße. Benachbarte Fuzzy-Mengen stoßen also jeweils exakt aneinander.



**Bild 3.12.** Modellierung der Eingangsgrößenterme für die Defuzzifizierung nach der Akkumulationsmethode.

Wir betrachten wieder unsere ursprünglichen scharfen Eingangsgrößen

$$A = 175 \text{ m,}$$

$$G = 190 \text{ km/h .}$$

Die Fuzzifizierung gemäß Bild 3.13 liefert

$$A^* = (0, 0.75, 0, 0, 0),$$

$$T^* = (0, 0, 0, 0, 1).$$

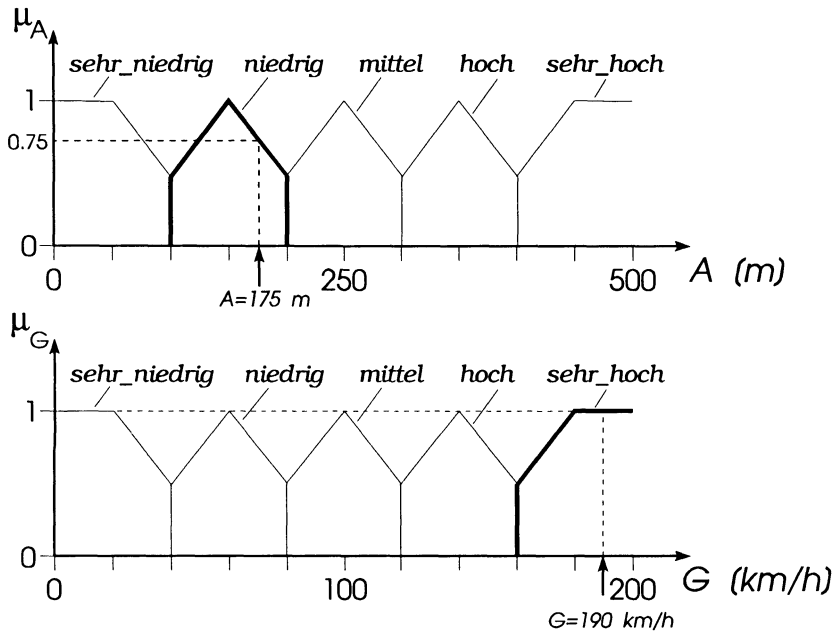


Bild 3.13. Fuzzifizierung der scharfen Eingangsgrößen.

Von unseren ursprünglich aktiven Regeln ist also nur noch  $R_2$  aktiv. Diese möge lauten

$$R_2: \text{ WENN } A = \text{niedrig} \text{ UND } G = \text{sehr\_hoch} \text{ DANN } \Delta K = +20$$

Für ihren Erfüllungsgrad - den wir im folgenden allerdings nicht benötigen - können wir dann ermitteln

$$H_2 = \text{MIN}(\mu_{A \text{ niedrig}}(175 \text{ m}), \mu_{G \text{ sehr\_hoch}}(190 \text{ km/h})) = \text{MIN}(0.75, 1) = 0.75.$$

Die Ermittlung der Ausgangs-Fuzzy-Menge ist bei dieser Methode nicht notwendig. Zur Defuzzifizierung wird der alte Wert der Bremskraft  $K_{\text{alt}}$  um den durch die Regel  $R_2$  gegebenen Wert von  $\Delta K = 20\%$  erhöht. Die daraus resultierende Bremskraft

$$K_{\text{res}} = K_{\text{alt}} + 20\%$$

ist als scharfer Wert der Ausgangsgröße bestimmt. ■

Diese Defuzzifizierungsmethode berücksichtigt ebenfalls nicht den Erfüllungsgrad der maßgebenden Regel. Es handelt sich um eine Mustererkennung kombiniert mit der Veränderung der Ausgangsgröße. Man könnte das Verfahren als regelbasiertes Differenzenverfahren bezeichnen.

Die Akkumulations-Methode auf Chips der Serie NLX der Firma NEURALOGIX, Sanford, USA, ist funktional verdrahtet und zugunsten dieser Firma patentrechtlich geschützt. Auf dieser Hardware ist außerdem die reine Maximum-Methode, bei der zu jeder Regel ein scharfer Ausgabewert gehört, realisiert. Haben alle Regeln den Erfüllungsgrad null, so bleibt der alte Wert der Ausgangsgröße unverändert (siehe auch Kapitel 6).

Die Akkumulationsmethode in der Zusammenfassung:

#### Defuzzifizierung nach der Akkumulationsmethode

- geeignet für Probleme mit diskretem Verhalten oder Schachbrett-Strategien
- ⊕ preisgünstige schnelle Hardwarerealisierung
- ⊖ Ausgangsgröße unabhängig vom Erfüllungsgrad der maßgebenden Regel
- ⊖ es treten nur diskrete Ausgangswerte auf, d. h. bei Variation der Eingangsgröße(n) können sprunghafte Ausgangsgrößenverläufe auftreten

#### D Schwerpunktmethode ("Center of Gravity"-Methode)

Die Defuzzifizierung nach der Schwerpunktmethode ist das gebräuchlichste Verfahren. Es geht auf H. WATANABE 1986 zurück und besteht darin, daß der Flächenschwerpunkt der aus allen Ergebnis-Fuzzy-Mengen der Regeln nach dem Inferenzschema resultierenden Ausgangs-Fuzzy-Menge  $\mu_{\text{res}}$  über der Ausgangsgröße gebildet und seine Abszisse als scharfe Ausgangsgröße  $y_{\text{res}}$  bestimmt wird (Bild 3.14). Der Schwerpunktmethode liegt die exakte Formel

$$y_{\text{res}} = \frac{\int_0^{\infty} y \mu_{\text{res}}(y) dy}{\int_0^{\infty} \mu_{\text{res}}(y) dy}$$

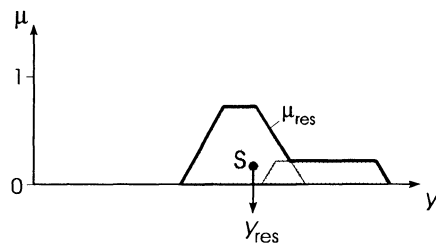


Bild 3.14. Defuzzifizierung nach der Schwerpunktmethode.

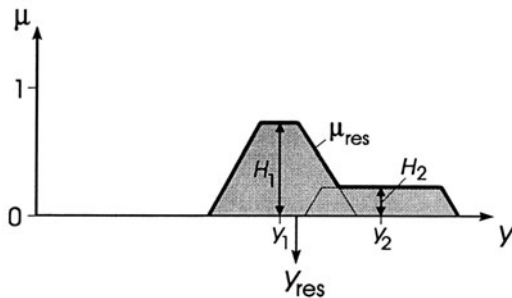
zugrunde. Die praktische Berechnung erfolgt durch numerische Integration als approximierende Summe.

Eine meist ausreichende Näherung wird dadurch gegeben, daß die Abszissen  $y_i$  der Schwerpunkte der Ausgangsmengen aller  $m$  Regeln, die dreiecks- oder trapezförmig sein sollten, in eine mit dem Erfüllungsgrad  $H_i$  gewichtete Summe eingebracht werden:

$$y_{\text{res}} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i H_i}{\sum_{i=1}^m H_i}$$

Für die in Bild 3.15 dargestellte Ausgangs-Fuzzy-Menge erhalten wir nach dieser Näherungsformel z. B.

$$y_{\text{res}} = \frac{y_1 H_1 + y_2 H_2}{H_1 + H_2}.$$

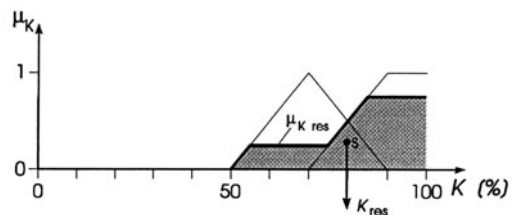


**Bild 3.15.** Anwendung der Näherungsformel für die Schwerpunktberechnung.

### Beispiel: Bremsvorgang auf der Autobahn

Wir wählen wieder unsere ursprüngliche Konstellation aus Abschnitt 3.1. Als Ergebnis der Inferenz hatten wir dort die in Bild 3.16 dargestellte resultierende Ausgangs-Fuzzy-Menge ermittelt. Die Berechnung des Schwerpunktes  $S$  ergibt einen Abszissenwert und damit eine scharfe Ausgangsgröße von

$$K_{\text{res}} = 82.7\%. \quad \blacksquare$$

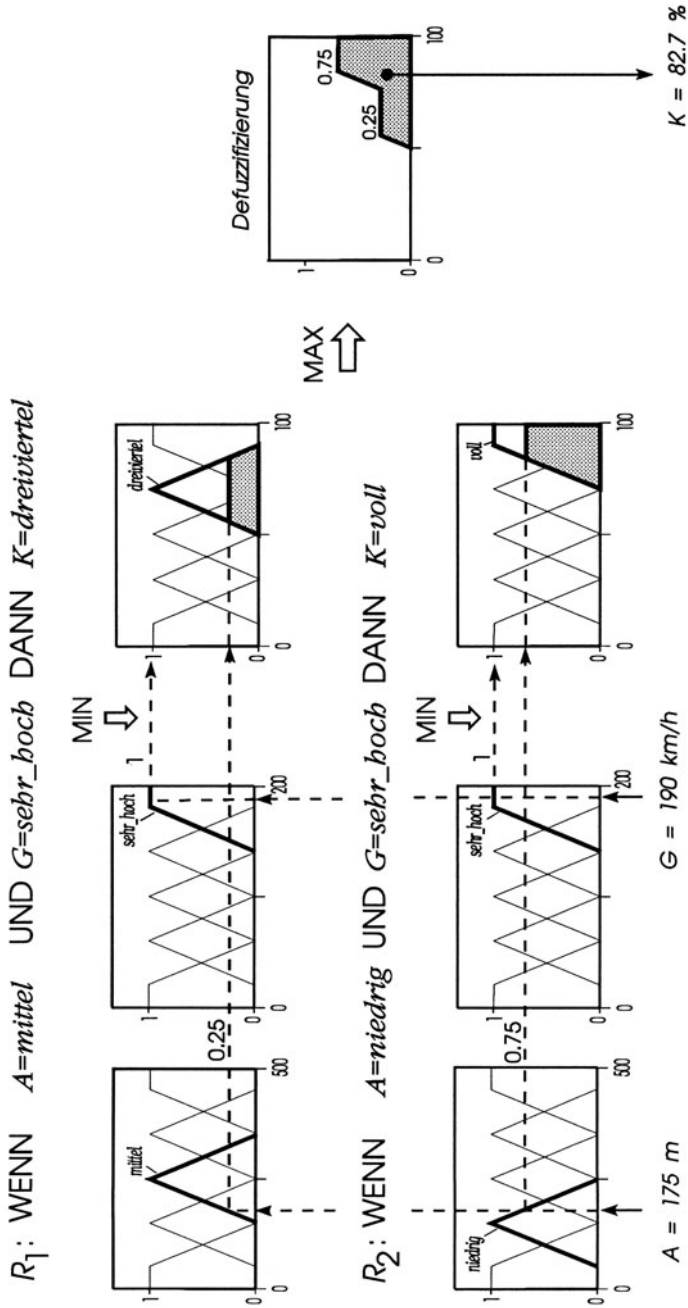


**Bild 3.16.** Defuzzifizierung nach der Schwerpunktmethode.

Wegen der Bedeutung der Schwerpunktmethode zeigt Bild 3.17 noch einmal im Überblick die Arbeitsweise eines regelbasierten Systems mit den Schritten *Fuzzifizierung*, *Inferenz* und *Defuzzifizierung* nach der Schwerpunktmethode für den von uns gewählten Satz scharfer Eingangsgrößen.

Die Schwerpunktmethode im Überblick:

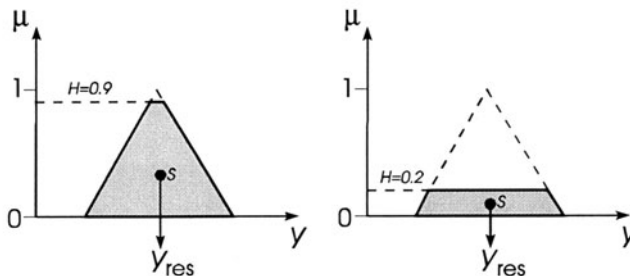




**Bild 3.17.** Verarbeitung scharfer Eingangsgrößen in einem regelbasierten System mit MAX-MIN-Inferenz und Defuzzifizierung nach der Schwerpunktmethod am Beispiel *Bremsvorgang auf der Autobahn.*

### Defuzzifizierung nach der Schwerpunktmethod

- Berechnung des Flächenschwerpunktes  $S$  der resultierenden Ausgangs-Fuzzy-Menge. Der Abszissenwert von  $S$  stellt die scharfe Ausgangsgröße  $y_{res}$  dar
- ⊕ alle aktiven Regeln gehen in die Berechnung der scharfen Ausgangsgröße ein
- ⊕ bei Variation der Eingangsgröße(n) erhält man i. a. stetige Ausgangsgrößenverläufe
- ⊖ Schwerpunktberechnung numerisch aufwendig (→ Rechenzeitproblem, speziell bei Echtzeitanwendungen)
- ⊖ Hardwarerealisierung aufwendig
- ⊖ nicht der gesamte Ausgangsgrößenbereich kann erreicht werden (siehe Abschnitt 5.2)
- ⊖ bei nur einer aktiven Regel mit symmetrischer Ausgangs-Fuzzy-Menge ist die scharfe Ausgangsgröße unabhängig vom Erfüllungsgrad der Regel (siehe nachfolgendes Bild)



### E Schwerpunktmethod für Singletons

Diese Defuzzifizierungsmethod kann nur angewendet werden, wenn die Terme auf der Ausgangsgröße Singletons sind. Es wird dann für jede Regel  $R_i$  der Erfüllungsgrad  $H_i$  mit dem Modalwert  $y_i$  des Singletons in der Regel multipliziert. Diese Produkte  $H_i y_i$  werden über alle Regeln aufsummiert und durch die Summe der Erfüllungsgrade  $H_i$  dividiert:

$$y_{\text{res}} = \frac{\sum_{i=1}^m H_i y_i}{\sum_{i=1}^m H_i}$$

Es liegt ein Entartungsfall der Schwerpunktmethod vor, der dort als Näherungsformel genutzt wird.

**Beispiel:** Bremsvorgang auf der Autobahn.

Wie im ersten Beispiel bei Methode A sind die Terme auf der Ausgangsgröße *Bremskraft* als Singletons zu definieren. Für die Eingangsgrößen

$$A = 175 \text{ m,}$$

$$G = 190 \text{ km/h}$$

erhalten wir die fuzzifizierten Werte

$$A^* = (0, 0.75, 0.25, 0, 0),$$

$$G^* = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Bild 3.18 zeigt die resultierende Ausgangs-Fuzzy-Menge. Wir können ablesen

$$H_1 = 0.25, \quad y_1 = 70\%,$$

$$H_2 = 0.75, \quad y_2 = 100\%.$$

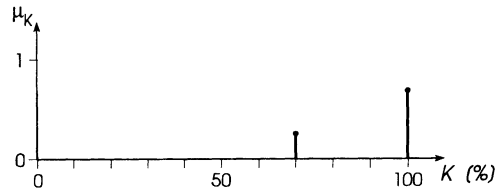


Bild 3.18. Resultierende Ausgangs-Fuzzy-Menge.

und erhalten damit für die scharfe Ausgangsgröße nach obiger Gleichung

$$y_{\text{res}} = \frac{0.25 \cdot 70\% + 0.75 \cdot 100\%}{0.25 + 0.75} = 92.5\%.$$

Wir sehen, daß sich dieses Ergebnis sehr von dem bei der Schwerpunktmethod D ermittelten unterscheidet. ■

Fassen wir die Schwerpunktmethod für Singletons zusammen:

#### Schwerpunktmethod für Singletons

- ⊕ einfachere Berechnung gegenüber der allgemeinen Schwerpunktmethod
- ⊖ Verlauf der Ausgangsgröße nicht transparent

## F Lineare Defuzzifizierung ("Methode F")

"Methode F" besteht in ihrer allgemeinsten Form darin, daß die resultierende Fuzzy-Menge als Ergebnis des Fuzzy-Inferenzschemas aller Regeln mit aufsteigenden bzw. absteigenden Abszissen der Ausgangsgröße solange durchlaufen wird, bis jeweils der erste Zugehörigkeitsgrad erreicht ist, der mit dem maximalen Erfüllungsgrad aller Regeln übereinstimmt. Die Defuzzifizierung nach der Methode F geht auf einen der beiden Autoren zurück und ist urheberrechtlich zugunsten der Firma ZETEC, Dortmund, geschützt.<sup>8</sup>

Ist die Ausgangs-Fuzzy-Menge ein in der Höhe  $H$  abgeschnittenes Dreieck (Bild 3.19), so erhalten wir die beiden Alternativen, die auch als  $F_{\text{links}}$  und  $F_{\text{rechts}}$  bezeichnet werden

$$y_{\text{res}} = y_l = y_0 + (1-H)(y_{\text{min}} - y_0) \quad \text{lineare Erniedrigung}$$

$$y_{\text{res}} = y_r = y_0 + (1-H)(y_{\text{max}} - y_0) \quad \text{lineare Erhöhung}$$

Sind die Flanken der Fuzzy-Mengen gekrümmt, so ist die Defuzzifizierung nicht mehr linear. Mit dieser Methode kann die Übertragungskennlinie eines Fuzzy-Controllers nach unterschiedlichen mathematischen Verfahren approximiert werden (siehe Abschnitt 5.4.2).

### Beispiel: Bremsvorgang auf der Autobahn

Wir erhalten eine bis auf die Defuzzifizierung identische Verarbeitung der Eingangsgrößen wie in Bild 3.17 dargestellt. Die Defuzzifizierung der resultierenden Fuzzy-Menge zeigt Bild 3.20. Wir ermitteln die beiden Alternativen

$$K_{\text{res}} = K_l = 85\%$$

$$K_{\text{res}} = K_r = 100\%.$$

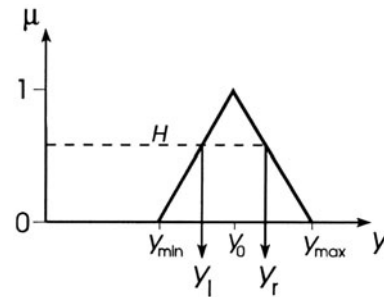


Bild 3.19. Defuzzifizierung linear links und linear rechts.

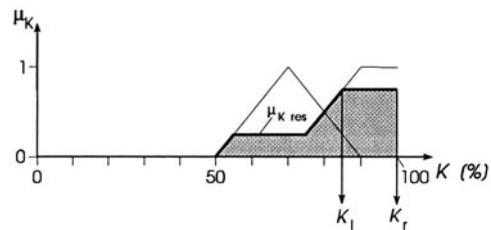


Bild 3.20. Defuzzifizierung zur Ermittlung der scharfen Ausgangsgröße.

<sup>8</sup> Der Autor dankt an dieser Stelle der VW-Stiftung für die große finanzielle Unterstützung anlässlich eines Gemeinschaftsprojekts "Integrierte Schaltungen mit modifizierten Fuzzy-Zellen" an der Universität Dortmund zusammen mit Prof. K. Goser (ET) und Prof. K. Strauß (CT).

Welche der beiden Ausgangsgrößenalternativen im konkreten Fall gewählt werden sollte, hängt von der Problemumgebung ab. ■

Wir fassen Methode F zusammen:

#### Defuzzifizierung nach "Methode F"

- ⊕ einfache Berechnung
- ⊕ Erfüllungsgrad  $H$  geht in Berechnung ein
- ⊕ einfache Hardware-Realisierung (Patent)
- ⊖ nur die Regeln mit maximalem Erfüllungsgrad gehen in die Bestimmung der scharfen Ausgangsgrößen ein
- ⊖ die Fuzzy-Modellierung erfordert etwas mehr "Nachdenken"

#### G Gewichtete Defuzzifizierung

Etwa in Expertensystemen können Regeln verschiedener Experten über ein und denselben Sachverhalt vorliegen. Diese Regeln können mit Gewichten  $w_1, \dots, w_q$  abhängig von der Glaubwürdigkeit der Experten belegt sein und werden zu seinem Teilsystem zusammengefaßt. Es interessiert dann nur ein gemeinsamer Erfüllungsgrad  $H$  für das Teilsystem, der nach Gewichtung und unterschiedlich kombinierten Verknüpfungen des MIN- und MAX-Operators errechnet wird:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^q w_i H_i}{\sum_{i=1}^q w_i}$$

Anwendungen dieser Methode sollen hier nicht behandelt werden, da sie derzeit im Bereich Fuzzy-Control keine Bedeutung haben (siehe [ZIM91]).

---

### 3.3 Variationen des Inferenzschemas

---

Wie bei der Defuzzifizierung gibt es auch für das Inferenzschema selbst unterschiedliche Variationsmöglichkeiten, die darin bestehen, daß für die Realisierung der Verknüpfungen UND, ODER, WENN... DANN... andere Operatoren als die bisher von uns benutzten herangezogen werden. Wir hatten gewählt

UND-Verknüpfung:                    MIN-Operator

ODER-Verknüpfung:                MAX-Operator

WENN... DANN...-Verknüpfung: MIN-Operator

Das auf diesen Operatoren begründete Inferenzschema ist das im Bereich Fuzzy-Control weltweit am meisten benutzte Schema. Es geht auf ZADEH und MAMDANI zurück (siehe [ZAD73], [MAM75]).

Hauptvorteile dieser Kombination von Operatoren sind:

- Ihre Eigenschaften sind umfassend untersucht.
- Die Realisierung in Software und Hardware ist gleichermaßen einfach und preisgünstig.

Die Ersetzung der Operatoren im Inferenzschema ist für eine vorliegende Problemumgebung zu entscheiden. Hier können nur wichtige Hinweise darauf gegeben werden, was bei einer solchen Ersetzung zu beachten und mit welchen Unterschieden durch die Operator-Eigenschaften zu rechnen ist.

Grundlegend sind die Verknüpfungen UND, ODER und WENN... DANN... immer so zu wählen und zu kombinieren, daß das Inferenzschema die Gesetze der Fuzzy-Logik (siehe Abschnitt 2.4) erfüllt. Insbesondere muß der *Modus Ponens* gelten, da sonst kein fuzzy-logisches Schließen möglich ist.

Zunächst denken wir an eine Ersetzung der Operatoren für UND und ODER. Dies hat paarweise im Sinne von logischen Gegenstücken zu geschehen. Ein Ansatz, der als Grenzfälle den MIN- bzw. MAX-Operator enthält, wird durch FUZZY-UND und FUZZY-ODER gegeben:

FUZZY-UND:

$$\mu(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \gamma \text{MIN}(\mu_1(x), \mu_2(x)) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)(\mu_1(x) + \mu_2(x)), \quad \gamma \in [0, 1]$$

FUZZY-ODER:

$$\mu(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \gamma \text{MAX}(\mu_1(x), \mu_2(x)) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)(\mu_1(x) + \mu_2(x)), \quad \gamma \in [0, 1]$$

Wir können folgende Grenzfälle erkennen:

$$\begin{array}{lll} \gamma = 1: & \text{FUZZY-UND} & \rightarrow \text{MIN-Operator} \\ & \text{FUZZY-ODER} & \rightarrow \text{MAX-Operator} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \gamma = 0: & \text{FUZZY-UND} & \rightarrow \text{arithmetisches Mittel} \\ & \text{FUZZY-ODER} & \rightarrow \text{arithmetisches Mittel} \end{array}$$

Eine beliebige Einstellung zwischen UND und ODER erlaubt der  $\gamma$ -Operator

$$\mu(\mu_1(x), \mu_2(x)) = (\mu_1(x), \mu_2(x))^{1-\gamma} (1 - (1 - \mu_1(x))(1 - \mu_2(x)))^\gamma, \gamma \in [0, 1].$$

Ein systematisches Verfahren, zu Paaren von UND- und ODER-Operatoren zu kommen, besteht darin, mathematische Forderungen aufzustellen und dann Lösungen dafür zu finden. So gelangen wir zu den Operatorklassen *T-Normen* und *T-Konormen*, wobei das T für *triangular* steht und den Zusammenhang mit der Dreiecksnorm in der Mathematik andeutet.

T-Normen sind Operatoren zur Modellierung der Durchschnittsbildung zweier Fuzzy-Mengen bzw. der UND-Verknüpfung zweier unscharfer Aussagen. Der MIN-Operator gehört zur Klasse der T-Normen. T-Normen erfüllen folgende Eigenschaften:

- $T(0, 0) = 0$ ;  $T(\mu_1(x), 1) = T(1, \mu_1(x)) = \mu_1(x)$ ,  $x \in G_1$
- $T(\mu_1(x), \mu_2(x)) \leq T(\mu_3(x), \mu_4(x))$  falls  $\mu_1(x) \leq \mu_3(x)$  und  $\mu_2(x) \leq \mu_4(x)$   
(*Monotonie*)
- $T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = T(\mu_2(x), \mu_1(x))$  (*Kommutativgesetz*)
- $T(\mu_1(x), T(\mu_2(x), \mu_3(x))) = T(T(\mu_1(x), \mu_2(x)), \mu_3(x))$  (*Assoziativgesetz*)

Wichtig ist insbesondere das Assoziativgesetz, da es die rekursive Verknüpfung von Fuzzy-Mengen ermöglicht.

T-Konormen, auch *S-Normen* genannt, sind demgegenüber Operatoren zur Modellierung der Vereinigung zweier Fuzzy-Mengen bzw. der ODER-Verknüpfung zweier unscharfer Aussagen. Der MAX-Operator gehört zur Klasse der T-Konormen. T-Konormen erfüllen folgende Eigenschaften:

- $S(1, 1) = 1$ ;  $S(\mu_1(x), 0) = S(0, \mu_1(x)) = \mu_1(x)$ ,  $x \in G_1$
- $S(\mu_1(x), \mu_2(x)) \leq S(\mu_3(x), \mu_4(x))$  falls  $\mu_1(x) \leq \mu_3(x)$  und  $\mu_2(x) \leq \mu_4(x)$   
(*Monotonie*)

$$\bullet S(\mu_1(x), \mu_2(x)) = S(\mu_2(x), \mu_1(x)) \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$\bullet S(\mu_1(x), S(\mu_2(x), \mu_3(x))) = S(S(\mu_1(x), \mu_2(x)), \mu_3(x)) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

T-Normen und T-Konormen sind logische Gegenstücke auf den klassischen Wahrheitswerten der zweiwertigen Logik:

$$T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = 1 - S(1 - \mu_1(x), 1 - \mu_2(x))$$

Ihre gegenseitige Ersetzung geschieht mit der Komplementbildung 1- ... aus Abschnitt 1.2 im Sinne des NICHT-Operators.

Es gibt viele Paare von Funktionen, die als T-Norm und dazugehörige S-Norm auftreten. Wir listen die wichtigsten Paare im folgenden auf.

- MIN- und MAX-Operator:

$$T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \text{MIN}(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

$$S(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \text{MAX}(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

- Drastisches Produkt und drastische Summe:

$$T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \begin{cases} \text{MIN}(\mu_1(x), \mu_2(x)) & \text{wenn } \text{MAX}(\mu_1(x), \mu_2(x)) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \begin{cases} \text{MAX}(\mu_1(x), \mu_2(x)) & \text{wenn } \text{MIN}(\mu_1(x), \mu_2(x)) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Abgeschnittene Differenz und abgeschnittene Summe, auch: LUKASIEWICZ-UND und -ODER

$$T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \text{MAX}(0, \mu_1(x) + \mu_2(x) - 1)$$

$$S(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \text{MIN}(1, \mu_1(x) + \mu_2(x))$$

- Einstein-Produkt und Einstein-Summe:

$$T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = (\mu_1(x)\mu_2(x)) / (2 - (\mu_1(x) + \mu_2(x) - \mu_1(x)\mu_2(x)))$$

$$S(\mu_1(x), \mu_2(x)) = (\mu_1(x) + \mu_2(x)) / (1 + \mu_1(x)\mu_2(x))$$



- Algebraisches Produkt und algebraische oder direkte Summe:

$$T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \mu_1(x)\mu_2(x)$$

$$S(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \mu_1(x) + \mu_2(x) - \mu_1(x)\mu_2(x)$$

- Hamacher-Produkt und Hamacher-Summe:

$$T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = (\mu_1(x)\mu_2(x)) / (\mu_1(x) + \mu_2(x) - \mu_1(x)\mu_2(x))$$

$$S(\mu_1(x), \mu_2(x)) = (\mu_1(x) + \mu_2(x) - 2\mu_1(x)\mu_2(x)) / (1 - \mu_1(x)\mu_2(x))$$

- Yager-Operatoren

$$T(\mu_1(x), \mu_2(x)) = 1 - \text{MIN} \left( \left[ (1 - \mu_1(x))^p + (1 - \mu_2(x))^p \right]^{\frac{1}{p}}, 1 \right)$$

$$S(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \text{MIN} \left( \left( \mu_1(x)^p + \mu_2(x)^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \right)$$

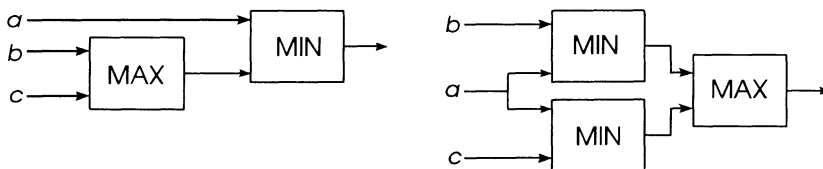
Dabei ist  $p$  eine reelle Zahl größer als Null.

MIN- und MAX-Operator sind das einzige Paar von T-Norm und S-Norm, für das das Distributiv-Gesetz

$$T(a, S(b, c)) = S(T(a, b), T(a, c))$$

gilt, d. h.

$$\text{MIN}(a, \text{MAX}(b, c)) = \text{MAX}(\text{MIN}(a, b), \text{MIN}(a, c)) \quad (\text{Bild 3.21})$$



**Bild 3.21.** Distributivgesetz.

Nur dieses Paar eignet sich für eine Parallelisierung des Inferenzschemas. Alle anderen Paare von T-Normen und S-Normen erfüllen die Eigenschaft der Distributivität nicht. Sie sind daher nicht für eine Parallelverarbeitung geeignet. Das algebraische Produkt und die algebraische Summe zeichnen sich durch die Eigenschaft der strengen Monotonie aus.

Alle anderen Operatoren haben die unschöne Eigenschaft, daß sie ganze Bereiche ignorieren, d. h. einebnen, in denen dann keine Informationen durchgelassen werden. Dies zeigen wir an einem Beispiel.

**Beispiel:** Wir betrachten die LUKASIEWICZ-Operatoren der abgeschnittenen Differenz als UND-Operator und der abgeschnittenen Summe als ODER-Operator auf Fuzzy-Mengen. Die LUKASIEWICZ-Operatoren wirken wie Filter, die Höhen und Tiefen unterdrücken (Bild 3.22). ■

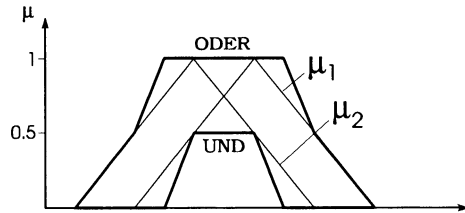


Bild 3.22. LUKASIEWICZ-Operatoren.

FUZZY-UND und FUZZY-ODER sowie die  $\gamma$ -Operatoren erfüllen nicht die Eigenschaft der Assoziativität. Sie sind nur geeignet, wenn einzig und allein zwei Informationen zu einer einzigen zusammengefaßt werden und dann erst das Ergebnis an ein Fuzzy-Inferenzschema übergeben wird (z. B. Entscheidungen beim Kreditwesen). Der Parameter  $\gamma$  ist eine Größe, die leicht einem Lernprozeß unterworfen werden kann (siehe Abschnitt 8.2).

Die bekannteste Variation des Inferenzschemas ist die *MAX-PROD-Inferenz*. Sie benutzt die Operatoren

UND-Verknüpfung:	MIN-Operator
ODER-Verknüpfung:	MAX-Operator
WENN... DANN...-Verknüpfung:	Algebraisches Produkt

Zur Ersetzungsregel

<i>Implikation:</i>	WENN A DANN B
<i>Faktum:</i>	A' gilt
<hr/>	
<i>Schluß:</i>	DANN gilt B'

gehört das MAX-PROD-Inferenzschema

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \max_{x \in G_1} (\min(\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y))) \\ &= \max_{x \in G_1} (\min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)) \cdot \mu_B(y)),\end{aligned}$$

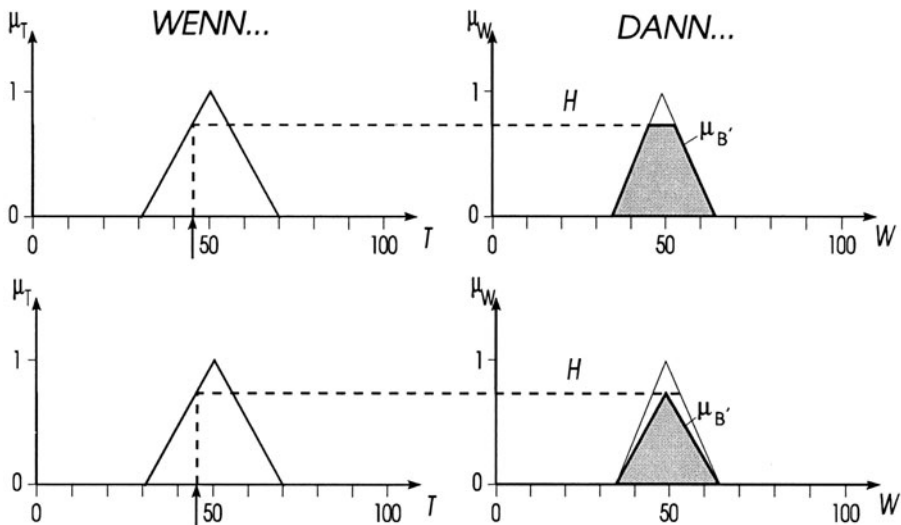
das sich für die scharfe Eingangsgröße  $x'$  verjüngt zu

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \mu_R(x', y) \\ &= \mu_A(x') \cdot \mu_B(y).\end{aligned}\quad (\text{Bild 3.23})$$

Wie in Abschnitt 2.3 ist hier  $\mu_A(x')$  der Erfüllungsgrad der Regel WENN  $A$  DANN  $B$ , mit dem die Fuzzy-Menge  $\mu_B$  in der Konklusion der Regel multipliziert wird. Die Fuzzy-Relation  $R$  der Regel ist in diesem Fall jedoch gegeben durch

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y).$$

Das Kreuzprodukt zur Bildung der Fuzzy-Relation wird also hier ersetzt durch das algebraische Produkt. Bild 3.23 zeigt MAX-MIN-Inferenz und MAX-PROD-Inferenz für den Fall einer scharfen Eingangsgröße und einer Regel anhand des früher besprochenen Beispiels *Erhitzen von Wasser* im Vergleich.



**Bild 3.23.** Vergleich zwischen MAX-MIN-Inferenz (oben) und MAX-PROD-Inferenz (unten).

Andere Inferenzschemata sind bisher in Fuzzy-Control nicht in Gebrauch.