ERRATUM A

Diagonale de fractions rationnelles

par G. Christol

(Séminaire de Théorie des Nombres 1986–87)

La démonstration de la proposition 5.1 comporte une erreur, signalée et rectifiée par Yves André. Voici une version corrigée de la fin de cette démonstration (à partir de la page 84, ligne 15).

On constacte que $f(0,\dots,0)$ est le "résidu en $\mathcal{P}$" de la forme différentielle $\omega\hat{\ } f^*(d\pi/\pi)$. Maintenant, en notant $\mathcal{R}$ l'application résidu de Poincaré (cf. [24] p. 232) on obtient une application :

$$\theta : \Omega^r_{X/\mathcal{C}}<Y> \xrightarrow{\hat{\ } f^*(d\pi/\pi)} \Omega^{r+1}_X<Y> \xrightarrow{\mathcal{R}} (a_{r+1})_* \,\Omega^0_{Y(r+1)}$$

qui s'annule sur $d(\Omega^{r-1}_{X/\mathcal{C}}<Y>)$ et se prolonge donc en une application :

$$\Omega^{\cdot}_{X/\mathcal{C}}<Y> \xrightarrow{\theta} (a_{r+1})_* \,\Omega^{\cdot}_{Y(r+1)}[-r]$$

qui donne une application :

$$\mathbb{R}^r f_*(\Omega^{\cdot}_{X/\mathcal{C}}<Y>) \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}^0 f_*((a_{r+1})_* \,\Omega^{\cdot}_{Y(r+1)}) = (f a_{r+1})_* \,\Omega^0_{Y(r+1)} \, .$$

On voit alors que $\delta_{\mathcal{P}}(\bar{\omega})$ est non nul s'il en est ainsi de $\theta(\bar{\omega})$. Maintenant le faisceau $\mathbb{R}^p f_*(\Omega^r_{X/\mathcal{C}}<Y>)$ est localement libre, ([24] théorème 2.18), on a donc l'isomorphisme suivant :

$$\mathbb{H}^r(Y,\Omega^{\cdot}_{X/\mathcal{C}}<Y> \otimes \mathcal{O}_Y) \cong \mathbb{R}^r f_*(\Omega^{\cdot}_{X/\mathcal{C}}<Y>) \otimes \mathcal{O}_P/\mathcal{M}_P$$

C. Goldstein (ed.), *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88*
© Springer Science+Business Media New York 1990

et on obtient une application :

$$\mathbb{H}^r(Y,\Omega^{\cdot}_{X/\mathscr{C}}<Y>\otimes \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\theta_{\mathscr{P}}} H^0(\tilde{Y}^{(r+1)})$$

pour laquelle on trouve :

$$\dim \mathscr{S} \geq Im(\theta_{\mathscr{P}}) .$$

Pour aller plus loin, nous utilisons les résultats de [24]. Considérons le complexe double de faisceaux sur Y :

$$A^{p,q} = \Omega_X^{p+q+1}<Y>/W_q\,\Omega_X^{p+q+1}<Y>$$

muni des différentielles :

$d' : A^{p,q} \longrightarrow A^{p\,,\,q+1}$ induite par la différentelle extérieure,

$d'' : A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1\,,\,q}$ induite par $\hat{\ }f^*(d\pi/\pi)$.

On munit le complexe simple $A^{\cdot}$ correspondant d'une filtration (encore notée W) en posant :

$$W_kA^{p,q} = W_{2q+k+1}\Omega_X^{p+q+1}<Y>/W_q\Omega_X^{p+q+1}<Y> .$$

On constate que $\hat{\ }f^*(d\pi/\pi)$ envoie $W_kA^{\cdot}$ dans $W_{k+1}A^{\cdot}$ si bien que :

$$Gr_k^wA^{\cdot} = \bigoplus_q Gr_k^wA^{\cdot,q}[-q] .$$

En particulier en utilisant le fait que X est de dimension $r+1$, on trouve :

$$Gr_k^wA^{\cdot} = 0 \text{ pour } k > r \text{ et } k < -r .$$

L'application $\hat{}f^*(d\pi/\pi)$ définit une surjection de $\Omega^p_{X/\mathscr{C}}<Y>\otimes\mathcal{O}_Y$ dans $A^{p,0}$ de telle sorte que $A^{p,\cdot}$ est une résolution de $\Omega^p_{X/\mathscr{C}}<Y>\otimes\mathcal{O}_Y$. On en déduit une suite spectrale :

$$E_1^{-k,q+k} = \mathbb{H}^q(Y, Gr_k^W A^\cdot) \Rightarrow \mathbb{H}^q(Y, A^\cdot) = \mathbb{H}^q(Y, \Omega^\cdot_{X/\mathscr{C}}<Y>\otimes\mathcal{O}_Y)$$

telle que $E_1^{-k,\cdot} = 0$ et donc $E_\infty^{-k,\cdot} = 0$ pour $k > r$. Comme cette suite est dégénérée en E_2 ([24], 4.20), elle nous fournit, par passage au gradué associé, une surjection :

$$\mathbb{H}^r(Y, \Omega^\cdot_{X/\mathscr{C}}<Y>\otimes\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\Phi} E_\infty^{-r,2r} = E_2^{-r,2r} = \ker(E_1^{-r,2r} \longrightarrow E_1^{-r+1,2r}) .$$

Maintenant, en utilisant le résidu de Poincaré, on trouve ([24] lemme 4.18) :

$$Gr_k^W A^\cdot \cong \bigoplus_{\substack{q\geq -k\\ q\geq 0}} a_*\,\Omega^\cdot_{\tilde{Y}(2q+k+1)}[-k-2q] .$$

En particulier on a :

$$Gr_r^W A^\cdot \cong (a_{r+1})_*\,\Omega^\cdot_{\tilde{Y}(r+1)}[-r]$$

$$Gr_{r-1}^W A^\cdot \cong (a_r)_*\,\Omega^\cdot_{\tilde{Y}(r)}[1-r]$$

si bien que :

$$\begin{aligned}
E_1^{-r,2r} &= \mathbb{H}^r(Y, Gr_r^W A^\cdot) \cong \mathbb{H}^0(Y, (a_{r+1})_*\Omega^\cdot_{\tilde{Y}(r+1)}) = H^0(\tilde{Y}^{(r+1)}) \\
E_1^{-r+1,2r} &= \mathbb{H}^{r+1}(Y, Gr_{r-1}^W A^\cdot) \cong \mathbb{H}^2(Y, (a_r)_*\Omega^\cdot_{\tilde{Y}(r)}) \\
&= \mathbb{H}^2(\tilde{Y}^{(r)}, \Omega^\cdot_{\tilde{Y}(r)}) = \mathbb{H}^0(\tilde{Y}^{(r)}, \Omega^\cdot_{\tilde{Y}(r)})^* = H^0(\tilde{Y}^{(r)})^*
\end{aligned}$$

que les applications Φ et $\theta_{\mathcal{P}}$ se déduisent l'une de l'autre par ces isomorphismes résulte de la construction même de la suite spectrale. Nous avons donc :

$$\dim \mathscr{S} \geq \dim \ker(E_1^{-r,2r} \longrightarrow E_1^{-r+1,2r}) .$$

Il suffit alors de remarquer que l'application d de la suite spectrale est la duale de l'application cobord d de $H^0(\tilde{Y}^{(r+1)})/d(H^0(\tilde{Y}^{(r)})) = H^r(\Gamma)$.