# PROCESSUS NON-SEQUENTIELS ET LEURS OBSERVATIONS EN UNIVERS NON-CENTRALISE

Ph. DARONDEAU*

Résumé : Nous étudions l'impact de la non-centralisation sur la nature des processus. La caractéristique majeure d'un univers non-centralisé est la règle d'incertitude sur les dates des événements d'un processus non-séquentiel, pour tout observateur de ce processus. Considérant cette caractéristique, le problème abordé est le suivant : quelles sont les définitions les moins restrictives des concepts de processus et d'observations de processus assurant l'isomorphisme de l'ensemble des processus et de l'ensemble de leurs observations ? L'étude de cette question nous amène à construire un modèle de processus non séquentiels à observations non-séquentielles, recueillies par des observateurs séquentiels. Nous montrons que la notion d'observation proposée, indispensable en univers non-centralisé, permet de définir une classe de processus qui étend la classe des processus non-séquentiels à observations séquentielles. Nous comparons les propriétés des processus ainsi définis à celles des "domaines concrets".

* Chargé de recherche CNRS.
IRISA, Avenue du Général Leclerc, 35042 RENNES-CEDEX, FRANCE.

## I - INTRODUCTION

Cet article étudie l'impact de la non-centralisation sur la nature des processus non-séquentiels. La caractéristique majeure d'un univers non centralisé est la règle d'incertitude sur les dates réelles des événements d'entrée/sortie d'un processus pour tout observateur séquentiel : diverses localisations sont possibles pour les événements, et un observateur ne peut surveiller simultanément l'ensemble de ces sites. Considérant cette caractéristique, le problème abordé est le suivant : quelles sont les définitions les moins restrictives des concepts de processus et d'observations de processus, assurant l'isomorphisme de l'ensemble des processus et de l'ensemble de leurs observations. L'étude de cette question nous a amenés à construire un modèle de processus non-séquentiels à observations non-séquentielles, recueillies par des observateurs séquentiels. Nous montrons que la notion d'observation non-séquentielle proposée, indispensable en univers non-centralisé mais également utile en univers centralisé, permet de définir une extension stricte de la classe des processus non-séquentiels caractérisés par leurs observations séquentielles.

Un processus communique avec son environnement par un ensemble de ports d'entrée et de sortie [Milner]. On appelle événement d'entrée (de sortie) la consommation (la production) par un processus d'une information à l'un de ses ports d'entrée (de sortie). Un événement est caractérisé par trois attributs qui permettent de le représenter : une localisation (nom de port), une date locale (numéro d'ordre parmi les événements de même localisation), et une valeur (information produite ou consommée).

Un processus non-séquentiel est modélisé par un demi-treillis de traces, définies comme des ensembles finis d'événements partiellement ordonnés. Chacune des traces d'un processus, analogues aux "structures d'événements sans conflit" de [Nielsen], représente l'un des passés possibles du processus, et peut être reconstituée par recoupement de ses observations. La relation d'ordre partiel entre les événements enregistrés dans une trace peut être interprétée comme la fermeture des relations i) de succession directe entre événements de même localisation, et

ii) de conséquence directe entre événements de localisations distinctes, respectivement caractérisées par les intervalles premiers dont les extrémités sont relatives à un même port ou à des ports distincts. La relation d'ordre partiel entre traces caractérise les diverses suites d'histoires croissantes du processus.

L'emploi d'un ordre partiel entre événements pour traduire la dimension non-séquentielle suit la démarche de [Hewitt], [Greif], [Lamport], [Nead]. L'introduction d'un second niveau d'ordre partiel entre les traces représente la dimension non-déterministe (irréductible à la précédente). Les processus étudiés sont largement inspirés des domaines concrets de Kahn et Plotkin [Kahn], mais n'en présentent pas toutes les propriétés ; les raisons précises en seront exposées. Après quelques préliminaires, nous étudierons successivement les notions de traces, de processus et d'observations avant de tirer nos conclusions.

## II - CONVENTIONS GENERALES

Les conventions et définitions suivantes s'appliquent aux ordres partiels. $\sqsubseteq$ désigne la relation d'ordre ; $\sqcup$ et $\sqcap$ désignent respectivement les opérations de borne supérieure et de borne inférieure de sous-ensembles, encore notées $\vee$ et $\wedge$ lorsqu'elles sont appliquées à des paires d'éléments. On appelle chaîne toute suite d'éléments totalement ordonnée. Deux éléments x et y sont dits compatibles ($x \uparrow y$) si $\{x,y\}$ admet un majorant, et incompatibles ($x \# y$) dans le cas contraire. Un élément y couvre un élément $x (x -\!\!\sqsubset y)$ ssi $x \sqsubset y$ et $\forall z\; x \sqsubseteq z \sqsubseteq y \Rightarrow x = z$ ou $z = y$. Lorsque $x -\!\!\sqsubset y$, le couple ordonné $[x,y]$ est un intervalle premier, d'extrémités x et y.

## III - SORTES

Un alphabet fini E est présumé définir les symboles des ensembles dénombrables utilisables pour les valeurs des événements, dont l'ensemble vide $E_\perp$. On fait en outre l'hypothèse de deux ensembles finis disjoints $\Sigma$ et $\bar{\Sigma}$, et d'un ensemble $\Sigma\Sigma = \Sigma \cup \bar{\Sigma}$. $\Sigma\Sigma$ est l'ensemble des noms de ports. $\sigma \in \Sigma$ est un nom de port d'entrée ; $\sigma \in \bar{\Sigma}$ est un nom de port de sortie. Par définition, on appelle sorte toute fonction s : $(\Sigma\Sigma \to E)$. Soit S l'ensemble des sortes. Tout processus P possède une sorte $S_p \in S$, associée à l'interprétation suivante. Soit $\Sigma\Sigma(S_p) = \{\sigma \in \Sigma\Sigma,$ $S_p(\sigma) \neq E_\perp\}$. $\Sigma\Sigma(S_p)$ est l'ensemble des ports du processus P. Pour tout $\sigma \in \Sigma\Sigma(S_p)$, $S_p(\sigma) \in E$ est le type des informations acceptées ($\sigma \in \Sigma$) ou délivrées ($\sigma \in \bar{\Sigma}$) par le processus P au port $\sigma$ [Milner]. Pour tout événement x relatif à un processus P de sorte $S_p$, on a : $x = (\mathrm{loc}(x), \mathrm{date}(x), \mathrm{val}(x))$, avec :
$\mathrm{loc}(x) \in \Sigma\Sigma(S_p)$ - $\mathrm{date}(x) \in N$ - $\mathrm{val}(x) \in S_p(\mathrm{loc}(x))$.

Exemple : Soit R un processus de transmission de lettres booléennes (V,F), doté de trois ports d'entrée (a, b, c) et de deux ports de sortie ($\bar{d}$, $\bar{e}$). Sa sorte $S_R$ est caractérisée par :
$\Sigma\Sigma(S_R) = \{a, b, c, \bar{d}, \bar{e}\}$ ; $S_R(\bar{d}) = S_R(\bar{e}) = \{V,F\}$ ;
$S_R(a) = S_R(b) = S_R(c) = \{\bar{d},\bar{e}\} \times \{V,F\}$.
(a, 1, $\bar{d}$ V) est l'un des événements possibles de R.

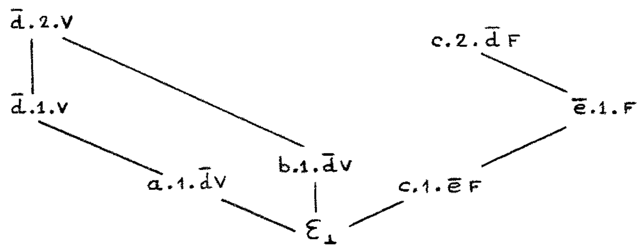
Cet exemple sera développé par la suite, avec l'hypothèse qu'une lettre n'est acceptée à un port d'entrée qu'une fois parvenue à destination la lettre pré cédemment émise par le même port.

## IV - TRACES

Soit une sorte $S_T \in S$. On appelle trace de sorte $S_T$ un ordre partiel $T = (\mathcal{E}_T, \sqsubseteq_T)$ vérifiant les conditions suivantes.

4.1) $\mathcal{E}_T$ est une partie finie de l'ensemble :
$\{\mathcal{E}_\perp\} \cup (\cup\{\{\sigma\} \times N \times S_T(\sigma)\ ,\ \sigma \in \Sigma\Sigma(S_T)\})$, et $\mathcal{E}_\perp \in \mathcal{E}_T$
- $\mathcal{E}_\perp$ symbolise l'événement initial de date nulle, à valeur et localisation indéfinies ; tout autre événement $x \in \mathcal{E}_T$ est caractérisé par sa localisation $\sigma$, sa date locale $\in N$, et sa valeur $\in S_T(\sigma)$ -
4.2) $\cap\, \mathcal{E}_T = \mathcal{E}_\perp$ - hypothèse d'initialité -
4.3) $(\forall x,\ x' \in \mathcal{E}_T,\ x \neq \mathcal{E}_\perp,\ x' \neq \mathcal{E}_\perp)$ $loc(x) = loc(x')$ et $date(x) = date(x') \Rightarrow x = x'$
- absence de conflit -
4.4) $(\forall x \in \mathcal{E}_T,\ date(x) > 1)$ $(\exists\, x' \in \mathcal{E}_T,\ x' \sqsubseteq_T x)$ :
$(loc(x) = loc(x')$ et $date(x') = date(x) - 1)$ - non fragmentation -

Exemple : Le diagramme de Hasse suivant représente l'une des traces du processus R:




Afin de justifier la restriction de finitude imposée aux traces par 4.1, rappelons qu'une trace représente l'un des passés possibles d'un processus. Comme $\Sigma\Sigma(S_T)$ est par hypothèse fini, une trace infinie T contiendrait au moins une chaîne infinie $C = (\mathcal{E}_\perp \mathrel{-\!\!\sqsubset} x1 \mathrel{-\!\!\sqsubset} x2 \mathrel{-\!\!\sqsubset} \dots \mathrel{-\!\!\sqsubset} xn \mathrel{-\!\!\sqsubset} \dots)$, dont chaque intervalle $[xi, xi+1]$ représente la succession directe de deux événements de même localisation, ou la relation de conséquence directe entre deux événements de localisations distinctes. Or dans un système discret, délais de transmission du signal entre deux ports et délais de latence entre événements relatifs au même port sont bornés inférieurement par un délai de garde $\Delta$ non nul. Si $\mathcal{E}_\perp$ est l'événement de date absolue 0, C contient, $\forall n \in N$, des événements dont la date réelle ne peut être inférieure à $n\Delta$ : T ne peut être considérée comme le passé d'un processus par l'un de ses observateurs qu'une fois cet observateur parvenu à la fin des temps $(\omega\Delta)$, ce qui défie le sens concret.

Dans le reste de cette section, nous allons étudier deux relations d'ordre sur l'ensemble $T_r(S_T)$ des traces de sorte $S_T$, dont on peut vérifier aisément qu'il s'agit d'un ensemble dénombrable. Ces deux relations d'ordre seront respectivement utilisées dans les sections 5 et 6. (Les démonstrations sont omises).

Définition 4.5 : $(\forall S_T \in S)$ $(\forall T, T' \in Tr(S_T),\ T = (\mathcal{E}_T, \sqsubseteq_T),\ T' = (\mathcal{E}_{T'}, \sqsubseteq_{T'}))$, on dit que T' est incluse dans T($T' \subseteq T$) ssi

i) $\mathcal{E}_{T'} \subseteq \mathcal{E}_T$ ii) $\forall x \in \mathcal{E}_{T'}\ \{x' \in \mathcal{E}_T,\ x' \sqsubseteq_T x\} = \{x' \in \mathcal{E}_{T'},\ x' \sqsubseteq_{T'} x\}$

(soit encore, ssi $\mathcal{E}_{T'}$ est fermé vers le bas pour $\sqsubseteq_T$ et $\sqsubseteq_{T'}$ est la restriction de $\sqsubseteq_T$ au sous-ensemble $\mathcal{E}_{T'}$).

Notations. $(\forall S_T \in S)$, on note respectivement, $\cup, \cap$ , $-\!\!<$ et $T_\perp$ l'opération de borne supérieure, l'opération de borne inférieure, la relation de couverture et l'élément minimum de l'ordre partiel $(Tr(S_T), \subseteq)$.

Proposition 4.6 : Si $\{Ti = (\mathcal{E}i, \sqsubseteq i),\ i = 1 \ldots n\} \in \mathcal{P}f(Tr(S_T))$ est un ensemble fini de traces deux à deux compatibles pour l'inclusion, $\cup\{T1, T2, \ldots, Tn\}$ existe et est égale à $(\cup\{\mathcal{E}1, \mathcal{E}2, \ldots, \mathcal{E}n\}, \cup\{\sqsubseteq 1, \sqsubseteq 2, \ldots, \sqsubseteq n\})$

Proposition 4.7 : $(\forall T1, T2 \in Tr(S_T),\ T1 = (\mathcal{E}1, \sqsubseteq 1),\ T2 = (\mathcal{E}2, \sqsubseteq 2))$, le support $\mathcal{E}$ de l'ordre partiel $T1 \cap T2$ est égal à $\mathcal{E}1 \cap \mathcal{E}2$ si $T1 \vee T2$ existe.

Définition 4.8 : $(\forall S_T \in S)$ $(\forall T, T' \in Tr(S_T),\ T = (\mathcal{E}_T, \sqsubseteq_T),\ T' = (\mathcal{E}_{T'}, \sqsubseteq_{T'}))$, on dit que T' est moins désordonné que T($T' \leqslant T$) ssi :

i) $\mathcal{E}_{T'} = \mathcal{E}_T$ ii) $\sqsubseteq_T \subseteq \sqsubseteq_{T'}$

Notation. Pour toute sorte $S_T \in S$, pour tout ensemble d'événements $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés (4.1, 4.3, 4.4), on note $Tr_{\mathcal{E}}(S_T)$ l'ensemble fini des traces de sorte $S_T$ ayant pour support l'ensemble d'événements $\mathcal{E}$.

Proposition 4.9 : $Tr_{\mathcal{E}}(S_T)$ est le support d'un demi-treillis supérieur $(Tr_{\mathcal{E}}(S_T), \leqslant, \cup, T_\top)$.

Dem. $\cup\{Ti = (\mathcal{E}, \sqsubseteq_i),\ i = 1 \ldots n\} = (\mathcal{E}, \sqsubseteq)$, où $\sqsubseteq$ est l'intersection des relations $\sqsubseteq_i$ : $x \sqsubseteq x'$ ssi $(\forall i \in [1,n])\ x \sqsubseteq_i x'$.

$T_\top = (\mathcal{E}, \sqsubseteq_\top)$, où $\sqsubseteq_\top$ est la relation : $x \sqsubseteq_\top x'$ ssi

$x = \mathcal{E}_\perp$ ou $(loc(x) = loc(x')$ et $date(x) \leqslant date(x')$ ).

## V - PROCESSUS

Soit une sorte $S_p \in S$. On appelle processus de sorte $S_p$ un demi-treillis $P = (\Theta_p, \sqsubseteq_p, \sqcap_p, T_\perp)$ vérifiant les conditions suivantes.

5.1. $\Theta_p \subseteq Tr(S_p)$ - ensemble fini ou dénombrable des traces de sorte $S_p$ qui représentent des passés possibles du processus P -

5.2. $T_\perp = (\{\mathcal{E}_\perp\}, \sqsubseteq_\perp)$ - trace initiale -

5.3. $(\forall T \in Tr(S_p))$ $(\forall T' \in \Theta_p)$ $(T \in \Theta_p$ et $T \mathrel{-\!\!\sqsubset_p} T') \Leftrightarrow (T -\!\!< T')$

- deux traces T et T' représentant deux histoires successives du processus P sont ordonnées par inclusion : tout événement consigné dans T l'est également dans T' avec les mêmes prédécesseurs (c'est-à-dire les mêmes causes) ; en outre, si T' représente l'un des passés possibles de P, toute trace T obtenue en éliminant de T' l'un de ses événements maximaux représente également l'un des passés possibles de P -

5.4. $(\forall T, T' \in \Theta_p, T = (\mathcal{E}, \sqsubseteq_T), T' = (\mathcal{E}', \sqsubseteq_{T'}))$

$T \# T'$ <u>et</u> $T \wedge T' \prec\!\!\sqsubset T \Rightarrow (\exists T'' = (\mathcal{E}'', \sqsubseteq_{T''}) \in \Theta_p, T \wedge T' \prec\!\!\sqsubset T'' \sqsubseteq T')$ :

$T \# T''$ <u>ou</u> $\exists x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}'$ : $(\{y \in \mathcal{E}, y \sqsubset_T x\}$ et $\{y \in \mathcal{E}', y \sqsubset_{T'} x\}$ sont deux sous-ensembles incomparables de l'ensemble des événements de T'').

- version affaiblie de la propriété Q des domaines concrets de Kahn et Plotkin, dans laquelle les mêmes prémices impliquent $\exists! T'' : T'' \# T$ <u>et</u> $T \wedge T' \prec\!\!\sqsubset T'' \sqsubseteq T'$ -

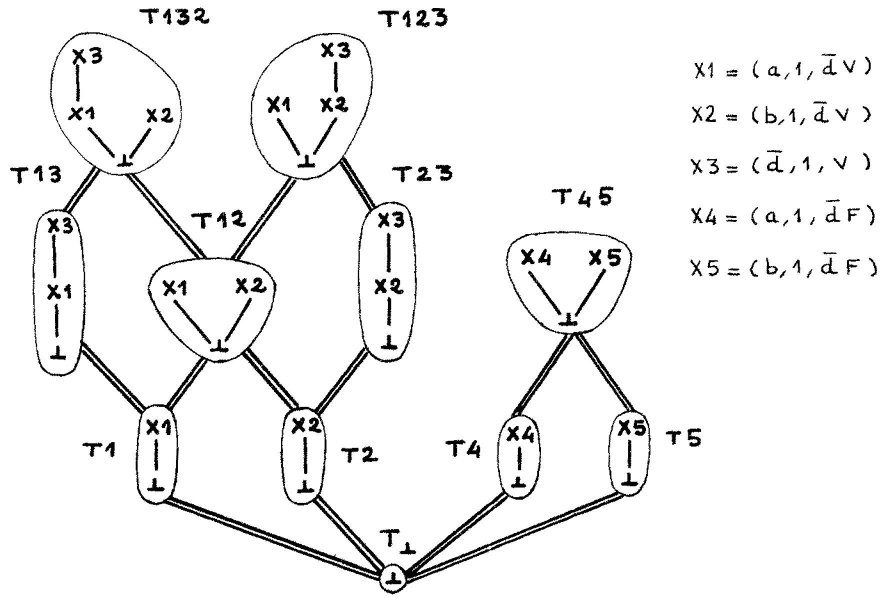
Un exemple est nécessaire afin de justifier la propriété 5.4. Soit R' le sous-demi-treillis du processus R décrit par le schéma de la page suivante. R' a trois ports (a, b, $\bar{d}$), n'accepte que des lettres V ou que des lettres F et ne transmet qu'au plus une lettre V émise en a ou en b. R' est un processus mais n'est pas un domaine concret. En effet, T13 # T123 et T1 $\prec\!\!\sqsubset$ T13 entraînent T12 # T13 par la propriété Q ; en outre, T1 # T4 et T2 # T4 contredisent l'unicité de T'' dans les implications de Q avec les prémices T4 # T12 et $T_\perp \prec\!\!\sqsubset$ T4. Considérons maintenant le sous-demi-treillis R'' de R' restreint au support $\{T_\perp$, T1, T2, T12, T23$\}$. Dans R'', seule est éventuellement transmise en $\bar{d}$ la lettre émise en b. T23 # T1 viole à la fois les axiomes Q et 5.4., dont on peut donner l'interprétation suivante. Dès l'instant initial correspondant à $\perp$ , est prise dans R'' la décision d'accepter a priori X1 et X2 comme deux occurrences indépendantes. L'événement X2 entraîne une seconde décision, visant à légaliser X3. Cette seconde décision ne peut en aucun cas revenir sur la décision antérieure : l'ensemble de traces de R'' doit donc être complété par T123.

Les définitions suivantes visent à montrer que, dans le cadre qui vient d'être construit, déterminisme et séquentialité ne sont pas nécessairement des notions liées.

<u>Définition 5.5</u> : Soit $T = (\mathcal{E}_T, \sqsubseteq_T)$ une trace de sorte $S_T$. On appelle "norme" de T l'entier $|T|$ défini par : $|T| = \sqcup \{date(x) / x \in \mathcal{E}_T\}$

<u>Définition 5.6</u> : Un processus $P = (\Theta_p, \sqsubseteq_p, \sqcap_p, T_\perp)$ est <u>séquentiel</u> ssi $\forall T \in \Theta_p$, $T = (\mathcal{E}_T, \sqsubseteq_T), \sqsubseteq_T$ est un ordre total sur $\mathcal{E}_T$.

<u>Définition 5.7</u> : Un processus $P = (\Theta_p, \sqsubseteq_p, \sqcap_p, T_\perp)$ est <u>déterministe</u> ssi $\forall n \in N$ $\{T \in \Theta_p, |T| \leqslant n\}$ admet une borne supérieure dans $\Theta_p$.




Nous établissons maintenant la principale propriété des processus sur laquelle repose leur observabilité, à savoir que deux traces distinctes (d'un processus) construites sur le même ensemble d'événements ne peuvent être plus ou moins ordonnées l'une que l'autre. Cette propriété est énoncée par la proposition suivante, où $Pr(S_p)$ désigne l'ensemble des processus de sorte $S_p$.

<u>Proposition 5.8</u> : $(\forall P \in Pr(S_p),\ P = (\Theta, \sqsubseteq, \sqcap, T_\perp))$
$(\forall T1, T2 \in \Theta,\ T1 = (\mathcal{E}1, \sqsubseteq_1),\ T2 = (\mathcal{E}2, \sqsubseteq_2))$
$(\mathcal{E}1 = \mathcal{E}2$ et $T1 \neq T2) \Rightarrow T1 \sqcup T2 \notin \{T1, T2\}$

<u>Dém</u>. Supposons $\mathcal{E}1 = \mathcal{E}2$, $T1 \neq T2$ et $T2 = T1 \sqcup T2$ (cf. 4.9).
$T1 \# T2 \Rightarrow T0 \triangleq T1 \wedge T2 \sqsubset T1 \Rightarrow \exists T'1 \in \Theta : T0 -\!\!\sqsubset T'1 \sqsubseteq T1$.
Soit $T0 = (\mathcal{E}0, \sqsubseteq_0)$, $T'1 = (\mathcal{E}'1, \sqsubseteq'_1)$, $\{x\} = \mathcal{E}'1 \setminus \mathcal{E}0$.
Soit $\{y1, y2, \ldots, yn\} = \{y \in \mathcal{E}0 / y -\!\!\sqsubset'_1 x\}$.
$T'1 \sqsubseteq T1 \Rightarrow \{y \in \mathcal{E}1 / y -\!\!\sqsubset_1 x\} = \{y1, y2, \ldots, yn\}$. $T1 < T1 \sqcup T2 = T2 \Rightarrow$
$\{y \in \mathcal{E}2 / y -\!\!\sqsubset_2 x\} \subseteq \{y \in \mathcal{E}1 / y -\!\!\sqsubset_1 x\} = \{y \in \mathcal{E}0 / y -\!\!\sqsubset'_1 x\}$, et l'inclusion est nécessairement stricte, sans quoi on aurait $T0 -\!\!\sqsubset T'1 \sqsubseteq T2$, donc $T0 \neq T1 \wedge T2$. Donc
$\exists yi \in \{y1, y2, \ldots, yn\}$ $yi -\!\!\sqsubset'_1 x$ et <u>non</u> $yi \sqsubseteq_2 x$. Comme $T1 < T2$, on ne peut avoir $x \sqsubseteq_2 yi$ : x et yi sont incomparables selon $\sqsubseteq_2$.
Maintenant, comme $T0 \sqsubset T2$ et $\{y \in \mathcal{E}2 / y -\!\!\sqsubset_2 x\} \subseteq \{y \in \mathcal{E}0 / y -\!\!\sqsubset_2 x\}$, il existe $T'2 \in \Theta$,

$T'2 = (\mathcal{E}'2, \sqsubseteq'_2)$, telle que $T0 -\!\!\sqsubset T'2 \sqsubseteq T2$, $\{x\} = \mathcal{E}'2 \backslash \mathcal{E}0$, x et yi maximaux dans T'2

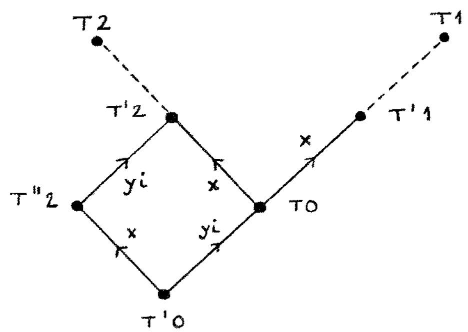
Récapitulons les points acquis. On a :

$T0 -\!\!\sqsubset T'1 \sqsubseteq T1$ , $yi -\!\!\sqsubset'_1 x$ maximal dans T'1

$T0 -\!\!\sqsubset T'2 \sqsubseteq T2$ , yi et x maximaux dans T'2

$\mathcal{E}'1 = \mathcal{E}'2 = \mathcal{E}0 \, \underline{\cup}\{x\}$ - union disjointe -

Soit à présent $T'0 \in \Theta$, $T'0 = (\mathcal{E}'0, \sqsubseteq'_0)$, telle que $T'0 -\!\!\sqsubset T0$ et $\mathcal{E}'0 = \mathcal{E}0 \backslash \{yi\}$. Comme $x \in \mathcal{E}2 \backslash \mathcal{E}'0$, $T'0 \sqsubseteq T2$ et $\{y \in \mathcal{E}2 / y -\!\!\sqsubset_2 x\} \subseteq \{y1 \ \ldots \ yn\} \backslash \{yi\} \subseteq \mathcal{E}'0$ impliquent l'existence d'une trace $T''2 \in \Theta$, $T''2 = (\mathcal{E}''2, \sqsubseteq''_2)$, telle que $T'0 -\!\!\sqsubset T''2 \sqsubseteq T2$ et $\mathcal{E}''2 = \mathcal{E}'0 \, \underline{\cup}\{x\}$. De $\mathcal{E}''2 = \mathcal{E}'0 \, \underline{\cup}\{x\}$ et $\mathcal{E}'2 = \mathcal{E}0 \, \underline{\cup}\{x\} = \mathcal{E}'0 \, \underline{\cup}\{yi\} \, \underline{\cup} \, \{x\} = \mathcal{E}'0 \, \underline{\cup}\{x\} \, \underline{\cup} \, \{yi\}$, on déduit $\{yi\} = \mathcal{E}'2 \backslash \mathcal{E}''2$. Or $T'2 \sqsubseteq T2$ et $T''2 \sqsubseteq T2$, d'où finalement $T''2 -\!\!\sqsubset T'2$. Récapitulons à nouveau les points acquis, sous la forme d'un diagramme dont les arcs représentent la relation $T -\!\!\sqsubset T'$ renseignée par l'événement $\mathcal{E}' \backslash \mathcal{E}$. On a :




On a certainement T"2 et T'1 incompatibles, puisque $yi -\!\!\sqsubset'_1 x$, $x \in \mathcal{E}''2$ et $yi \notin \mathcal{E}''2$. Or $T'1 \wedge T''2 = T'0 -\!\!\sqsubset T''2$. D'après (5.4), il doit exister $T3 \in \Theta$, $T'0 -\!\!\sqsubset T3 \sqsubseteq T'1$, telle que $T3 \# T''2$ ou $\exists z \in \mathcal{E}''2 \cap \mathcal{E}'1$ : $\{\omega \in \mathcal{E}''2,\ \omega \sqsubset''_2 z\}$ et $\{\omega \in \mathcal{E}'1,\ \omega \sqsubset'_1 z\}$ sont deux sous-ensembles incomparables de l'ensemble des événements de TO. Or TO est la seule trace de $\Theta$ qui vérifie $T'0 -\!\!\sqsubset T0 \sqsubseteq T'1$, $T0 \uparrow T''2$, $\{y \in \mathcal{E}''2,\ y \sqsubset''_2 x\} \subset \{y \in \mathcal{E}'1,\ y \sqsubset'_1 x\}$, et x est le seul évènement de $\mathcal{E}''2 \cap \mathcal{E}'1$ à ne pas avoir le même ensemble d'antécédents dans T'1 et T"2. D'où la démonstration.

Afin de conclure cette section, notons qu'un processus est un affaiblissement d'un domaine concret distributif [Kahn], dans lequel la cohérence serait relâchée en cohérence finie et où la propriété Q serait atténuée conformément à 5.4. Un processus est complet sous condition, finiment cohérent, trivialement séparable, vérifie les axiomes I, C et R des domaines concrets et présente la propriété de distributivité conditionnelle.

## VI - OBSERVATEURS SEQUENTIELS ET OBSERVATIONS NON SEQUENTIELLES

Définition 6.1 : Soit une sorte $S_p \in S$, et soit $\{\sigma 1, \sigma 2, \ldots, \sigma n\} = \Sigma\Sigma(S_p)$. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'événements vérifiant les propriétés 4.1, 4.3, 4.4 pour la sorte $S_p$. Soit $T = (\mathcal{E}, \sqsubseteq_T) \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p)$ une trace de sorte $S_p$ construite sur l'ensemble d'événements $\mathcal{E}$. On appelle observateur de T toute fonction $O : (\mathcal{E} \to N)$ telle qu'il existe une permutation $(\sigma i_1, \sigma i_2, \ldots, \sigma i_n)$ de $\{\sigma 1, \sigma 2, \ldots, \sigma n\}$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $(\forall x, y \in \mathcal{E})$ $\quad x \sqsubset_T y \Rightarrow O(y) - O(x) > n$.
ii) $(\forall x \in \mathcal{E})$ $\quad loc(x) = \sigma i_j \Rightarrow \exists k : O(x) = j + nk$
iii) $O(\mathcal{E}_\perp) = 0$

Interprétation intuitive : Soit $\Delta$ le délai de garde qui borne inférieurement, pour tous les processus, délais de transmission du signal entre ports et délais de latence entre événements relatifs au même port. Soit P un processus fini déterministe, admettant T comme trace maximale. Un expérimentateur, muni d'une horloge de période $\Delta/2n$, déclenche une exécution de P à l'instant 0, et parcourt séquentiellement l'ensemble des ports de P selon le cycle $(\sigma i_1, \sigma i_2, \ldots, \sigma i_n)$, de sorte à pratiquer sont $(k+1)^{\text{ème}}$ examen du port $\sigma i_j$ lorsque l'horloge passe à la valeur j+nk. Si l'expérimentateur associe à chaque événement x, de localisation $\sigma i_j$, la plus petite date approchée j+nk à laquelle il a pu noter que x s'était déjà produit, son expérimentation a pour résultat la fonction de datation $O : \mathcal{E} \to N$ qu'elle permet d'établir. Deux événements x et y associés à deux dates approchées O(x) et O(y) telles que $O(x) < O(y)$ et $O(y) - O(x) \leqslant n$ ne peuvent s'être produit à des dates réelles éloignées de plus de $2n(\Delta/2n) = \Delta$, et sont donc non reliés causalement. Deux événements x et y de dates approchées O(x) et O(y) telles que $O(y) - O(x) > n$ ne peuvent s'être produits à des dates réelles $t_x$ et $t_y$ telles que $t_x \geqslant t_y$. En effet, $t_x \leqslant O(x) \times \Delta/2n$, et $t_y \geqslant (O(y) - n) \times \Delta/2n$. Réciproquement, si $x \sqsubset_T y$, on a nécessairement $t_y - t_x > \Delta$, d'où : $O(y) - O(x) \geqslant 2nt_y/\Delta - (2nt_x/\Delta + n) > n$. L'ensemble des observateurs de T définit donc exactement l'ensemble des résultats d'expérimentations possibles du processus P.

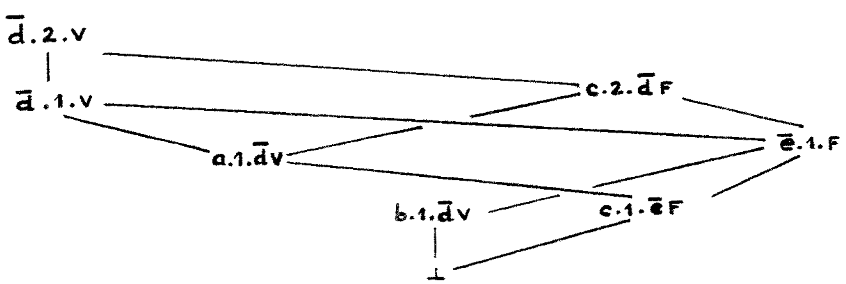
Définition 6.2 : Soit $T = (\mathcal{E}, \sqsubseteq_T) \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p)$ une trace de sorte $S_p$ construite sur un ensemble d'événements $\mathcal{E}$. On appelle observation de T un ordre partiel $(\mathcal{E}, \sqsubseteq_O)$ tel qu'il existe un observateur O de T vérifiant la condition : $(\forall x, y \in \mathcal{E})$ : $x \sqsubseteq_O y \Leftrightarrow (O(x) = O(y)$ ou $O(y) - O(x) > n)$.

Interprétation intuitive : Une observation de T est un ordre partiel moins désordonné que T (cf. 4.8), obtenu par analyse du résultat d'une expérimentation de T (ou encore d'un processus déterministe admettant T comme trace maximale).

<u>Exemple</u> : Soit T la trace du processus R schématisée dans la section IV. Soit R''' le sous-demi-treillis de R admettant T comme borne supérieure. Un expérimentateur du processus R''', qui parcourt l'ensemble des ports selon la permutation cyclique ($\bar{d}$, a, b, c, $\bar{e}$), peut obtenir la séquence suivante (le $i^{\text{ème}}$ élément, compte non tenu des séparateurs de cycles (|), représente l'événement x noté par l'expérimentateur à l'instant $i(\Delta/10)$, d'où $O(x) = i$ dans l'observateur résultant, ou l'absence d'un tel événement).

|--- (c.1.$\bar{e}$ F) -|-- (b.1.$\bar{d}$ V) --|- (a.1.$\bar{d}$ V) -- ($\bar{e}$.1.F)|
-----|($\bar{d}$.1.V) -- (c.2.$\bar{d}$ F) -|-----|-----|($\bar{d}$.2.V) ----|

L'observation déduite de cette expérimentation est décrite par le schéma suivant (à comparer au schéma de la trace T).




La définition et la proposition suivantes visent à caractériser de manière plus directe l'ensemble des observations de traces.

<u>Définition 6.3</u> : Soit une sorte $S_p \in S$. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'événements vérifiant les propriétés (4.1, 4.3, 4.4) pour la sorte $S_p$. $\forall T \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p)$ on note Ob(T) l'ensemble des observations de la trace T. On appelle ensemble des observations de sorte $S_p$ relatives à $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $Tr_{\mathcal{E}}(S_p)$ défini par :
$OB_{\mathcal{E}}(S_p) = \cup \{Ob(T),\ T \in Tr_{\mathcal{E}}(Sp)\}$.

<u>Proposition 6.4</u> : $OB_{\mathcal{E}}(S_p) = Ob(\bigvee Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$. - cf. 4.9 -
<u>Corollaire</u> : Soit $\{\sigma 1, \sigma 2, \ldots, \sigma n\} = \Sigma\Sigma(S_p)$. L'ensemble $OB_{\mathcal{E}}(S_p)$ est l'ensemble des traces $T \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p)$ vérifiant la condition suivante : - il existe une permutation $(\sigma i_1, \sigma i_2, \ldots, \sigma i_n)$ de $\{\sigma 1, \ldots, \sigma n\}$ et n fonctions f1, f2, ..., fn strictement croissantes de N dans N telles que :
$(\forall x, y \in \mathcal{E},\ loc(x) = \sigma i_x,\ loc(y) = \sigma i_y,\ date(x) = \sqrt{}_x,\ date(y) = \sqrt{}_y)$
$x \sqsubseteq_T y \iff (x + nfx(\sqrt{}x) = y + nfy(\sqrt{}y)$ <u>ou</u> $n < (y-x) + n\,(fy(\sqrt{}y) - fx(\sqrt{}x)))$.

La première étape à franchir pour démontrer l'observabilité des processus consiste à établir que deux traces construites sur le même ensemble d'événements sont toujours distinguées par leurs ensembles d'observations respectifs. Tel est l'objet des trois propositions suivantes. (Les démonstrations des propositions 6.5 et 6.6 figurent en annexe).

Proposition 6.5 : $(\forall T \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$, $Ob(T) = \{\omega \in OB_{\mathcal{E}}(S_p),\ \omega \leqslant T\}$
En clair : toute observation de trace $\omega$ plus ordonnée qu'une trace T est une observation de T.
Proposition 6.6 : $(\forall T \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$, $T = \bigcup Ob(T)$
En clair : toute trace est la borne supérieure de l'ensemble de ses observations pour la relation "moins désordonné que".
Théorème 6.7 : Soit $\hat{P}(OB_{\mathcal{E}}(S_p))$ l'ensemble des parties W de $OB_{\mathcal{E}}(S_p)$ qui vérifient la condition : $W = \{\omega \in OB_{\mathcal{E}}(S_p) / \omega \leqslant \bigcup W\}$.
La fonction Ob : $Tr_{\mathcal{E}}(S_p) \to \hat{P}(OB_{\mathcal{E}}(S_p))$ qui à une trace T fait correspondre l'ensemble Ob(T) de ses observations, est une fonction bijective.

Nous nous proposons maintenant de généraliser le résultat précédent, établi pour une trace, à tout ensemble de traces construites sur un ensemble commun d'événements et susceptibles d'appartenir au support d'un processus commun. Les définitions et propositions suivantes, qui permettent d'établir l'observabilité des ensembles de traces, se fondent sur la non-comparabilité de deux traces distinctes d'un processus pour la relation "moins ordonné que" (cf. 5.8). Comme précédemment, les principales démonstrations figurent en annexe.

Notation : Soit $T = (\mathcal{E}, \sqsubseteq_T)$ une trace admettant $x \in \mathcal{E}$ parmi ses événements maximaux. On note $T\backslash x$ la trace $T' \prec T$ de support $\mathcal{E}' = \mathcal{E}\backslash\{x\}$. On note x max T le prédicat : "x est un événement maximal de T".
Définition 6.8 : Soit $\bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$ l'ensemble des parties $\mathcal{C}$ de $Tr_{\mathcal{E}}(S_p)$ qui vérifient les deux propriétés :
i) $(\forall T1, T2 \in \mathcal{C})$  $T1 \not\prec T2$  - cf. 5.8 -
ii) $(\forall x \in \mathcal{E}, \mathcal{E}' = \mathcal{E}\backslash\{x\})$  $\{T\backslash x,\ T \in \mathcal{C}$ et x max $T\} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}'}(S_p))$
On appelle observation groupée d'un ensemble de traces $\mathcal{C} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$ le sous-ensemble de $OB_{\mathcal{E}}(S_p)$ défini par : $Obg(\mathcal{C}) = \cup\{Ob(T),\ T \in \mathcal{C}\}$.
Interprétation intuitive : Soit un processus $P \in Pr(S_p)$, $P = (\Theta, \sqsubseteq, \sqcap, T_\perp)$, et soit $\mathcal{C} = \Theta \cap Tr_{\mathcal{E}}(S_p)$ l'ensemble de ses traces construites sur l'ensemble d'événements $\mathcal{E}$. D'après la proposition 5.8 et la propriété 5.3, $\mathcal{C}$ vérifie les deux conditions requises dans la définition 6.8. Son observation groupée $Obg(\mathcal{C})$ est l'ensemble des ordres partiels obtenus par analyse de tous les résultats d'expérimentations possibles de P, de la forme $O : (\mathcal{E}' \to N)$ avec $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, qui vérifient la

propriété suivante : $\exists k \in N$ : $(\forall x \in \mathcal{E}')$ $x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow O(x) \leq k$.

Proposition 6.9 : L'ensemble $\bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$ est partiellement ordonné par la relation $\alpha$ : $\mathcal{C}1 \, \alpha \, \mathcal{C}2$ ssi $\forall T1 \in \mathcal{C}1, \exists T2 \in \mathcal{C}2 : T1 \leq T2$.

Proposition 6.10 : Soit Obg : $(\bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p)), \alpha) \rightarrow (\mathcal{P}(OB_{\mathcal{E}}(S_p)), \subseteq)$ la fonction qui, à un ensemble de traces $\mathcal{C}$, fait correspondre son observation groupée Obg($\mathcal{C}$). La fonction Obg est une fonction croissante.

Proposition 6.11 : $(\forall T \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$
$(\forall \{T1, T2, \ldots, Tn\} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p)))$
$Ob(T) = \cup\{Ob(Ti), i \in [1,n]\} \Rightarrow n = 1$ et $T = T1$.

Proposition 6.12 : $(\forall \mathcal{C}1, \mathcal{C}2 \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$
$Obg(\mathcal{C}1) \subseteq Obg(\mathcal{C}2) \Rightarrow \mathcal{C}1 \, \alpha \, \mathcal{C}2$.

Théorème 6.13 : La fonction Obg : $(\bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p)), \alpha) \rightarrow (\mathcal{P}(OB_{\mathcal{E}}(S_p)), \subseteq)$ qui, à un ensemble de traces $\mathcal{C}$, fait correspondre son observation groupée Obg($\mathcal{C}$), est une fonction croissante injective. Soit $\tilde{P}(OB_{\mathcal{E}}(S_p))$ l'image de $\bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$ par Obg. La fonction $Obg^{-1}$ : $(\tilde{P}(OB_{\mathcal{E}}(S_p)), \subseteq) \rightarrow (\bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p)), \alpha)$ est également une fonction croissante.

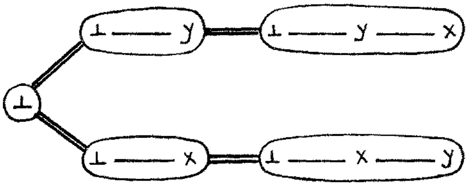
Le résultat final concernant l'observabilité des processus découle du théorème précédent par une nouvelle généralisation qui ne présente aucune difficulté.

Définition 6.14 : Soit un processus $P \in Pr(S_p)$, $P = (\Theta, \sqsubseteq, \sqcap, T_{\perp})$. Soit $OB(S_p)$ le sous-ensemble de $Tr(S_p)$ défini par : $OB(S_p) = \cup\{OB_{\mathcal{E}}(S_p)$, $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés 4.1, 4.3, 4.4 pour la sorte $S_p\}$. On appelle observation totale de P le sous-ensemble de $Tr(S_p)$ défini par : $Obt(P) = \cup\{Ob(T), T \in \Theta\}$
- ensemble des observations de toutes les traces du processus -.

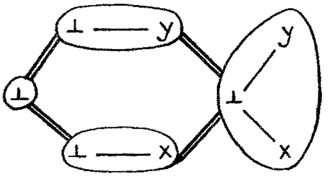
Proposition 6.15 : L'ensemble $Pr(S_p)$ est partiellement ordonné par la relation $\hat{\alpha}$ :
$(\forall P1, P2, P1 = (\Theta1, \sqsubseteq_1, \sqcap_1, T_{\perp}), P2 = (\Theta2, \sqsubseteq_2, \sqcap_2, T_{\perp}))$
$P1 \, \hat{\alpha} \, P2$ ssi
$(\forall \mathcal{E}$ vérifiant les propriétés 4.1, 4.3, 4.4 pour la sorte $S_p)$
$\Theta1 \cap Tr_{\mathcal{E}}(S_p) \, \alpha \, \Theta2 \cap Tr_{\mathcal{E}}(S_p)$.

Théorème 6.16 : La fonction Obt : $(Pr(S_p), \hat{\alpha}) \rightarrow (\mathcal{P}(OB(S_p), \subseteq)$, qui à un processus fait correspondre son observation totale, est une fonction croissante injective. Soit $\tilde{P}(OB(S_p))$ l'image de $Pr(S_p)$ par Obt. La fonction $Obt^{-1}$ : $(\mathcal{P}(OB(S_p)), \subseteq) \rightarrow (Pr(S_p), \hat{\alpha})$ est également une fonction croissante.

Il ne nous reste plus à présent qu'à conclure : l'ensemble des processus est isomorphe à l'ensemble de leurs observations totales. La notion de processus définie en 5 a donc bien une signification concrète : un processus est entièrement caractérisé par ses manifestations externes et vice-versa, malgré la règle d'incertitude temporelle sur les dates réelles des événements pour tout observateur, inhérente à l'univers distribué. Tel n'aurait pas été le cas si nous n'avions considéré que des observations totalement ordonnées : plusieurs processus non séquentiels, au sens où nous les avons définis, auraient pu correspondre à la même observation totale, comme par exemple les processus P1 et P2 ci-dessous. Afin de rétablir l'injectivité de la fonction d'observation totale, on aurait dû restreindre la classe des processus non séquentiels par passage à des classes d'équivalence. Les processus P1 et P2 ci-dessous auraient ainsi été identifiés en un seul processus non-séquentiel ; or ces processus doivent être distingués puisque leurs manifestations externes sont distinctes en univers non centralisé.




P1




P2

REFERENCES

Greif, I., A language for Formal Problem Specification, CACM 20, 12, pp. 931-935 (1977).

Hewitt, C. et Baker H., Laws for Communicating Parallel Processes, IFIP 77 (North-Holland), pp. 987-992 (1977).

Kahn, G. et Plotkin, G., Domaines concrets, IRIA, RR 336 (1978).

Lamport, L., Time, clocks, and the Ordering of Events in a Distributed System, CACM 21, 7, pp. 558-564 (1978).

Milner, R., Synthesis of Communicating Behaviour, 7th Symposium on Math. Foundations of Comp. Science, Zakopane, Poland (1978).

Nead, J., On the Semantics of Control Statements, SIGPLAN Notices 14, 11, pp. 84-96 (1979).

Nielsen, M., Plotkin, G., Winskel, G., Petri nets, event structures and Domains, Semantics of Concurrent Computation, Evian (1979).

ANNEXES

Dém. 6.5 : L'inclusion $\subseteq$ est évidente. Reste à la montrer dans le sens $\supseteq$ . Soit donc $\omega \in OB_{\mathcal{E}}(S_p)$, $\omega \leqslant T$. Soit $\{\sigma 1, \sigma 2, \ldots, \sigma n\} = \Sigma\Sigma(S_p)$. D'après 6.4, il existe une permutation $(\sigma i_1, \sigma i_2, \ldots, \sigma i_n)$ de $\{\sigma 1, \sigma 2, \ldots, \sigma n\}$ et n fonctions f1, f2, ..., fn telles que, étant donné la fonction O : ($\mathcal{E}$ -> N) : $O((\sigma i_x, \vartheta x, vx))$ $= x + nfx(\vartheta x)$, on ait entre autres : $x \sqsubseteq_\omega y \iff O(x) = O(y)$ ou $O(y) - O(x) > n$. Mais comme $x \sqsubseteq_T y \Rightarrow x \sqsubseteq_\omega y$ puisque $\omega \leqslant T$, on a aussi : $x \sqsubseteq_T y \Rightarrow O(x) = O(y)$ ou $O(y) - O(x) > n$. Donc O est un observateur de T et $\omega \in$ Ob(T).

Dém. 6.6 : D'après 6.5, on a $\bigcup$ Ob(T) $\leqslant$ T. Supposons $\bigcup$ Ob(T) < T. Alors $\exists x, y \in \mathcal{E}$ : x, y incomparables dans T et ($\forall\omega \in$ Ob(T) : $x \sqsubset_\omega y$). Montrons que cette supposition est absurde. Soit donc $\omega \in$ Ob(T), et soit O l'un des observateurs associés à T, caractérisé par sa permutation $(\sigma i_1, \ldots, \sigma i_n)$ de $\Sigma\Sigma(S_p)$ et ses fonctions f1, ... fn de N dans N. Soit $loc(x) = \sigma i_x$ et $loc(y) = \sigma i_y$. On a $\sigma i_x \neq \sigma i_y$, sans quoi x et y seraient comparables dans T (cf. 4.3, 4.4). Considérons l'ensemble $\mathcal{Z} = \{z \in \mathcal{E} / z \sqsubset_T x$ ou $z \sqsubseteq_T y\}$. Pour chaque $\sigma i_j$, soit j la date maximale des événements de localisation $\sigma i_j$ qui figurent dans $\mathcal{Z}$. On peut toujours trouver un entier h tel que : $x + n(h + fx(\vartheta x)) > n + (y + nfy(\vartheta y))$. Soit alors (f'1, ..., f'n) la famille des fonctions f'i caractérisée par : $f'i(\vartheta) = fi(\vartheta)$ $\forall \vartheta \leqslant i$ ; $f'i(\vartheta) = h + fi(\vartheta)$ $\forall \vartheta > \vartheta i$. La permutations $(\sigma i_1, \sigma i_2, \ldots, \sigma i_n)$ et la famille de fonctions $(f'i_1, f'i_2, \ldots, f'i_n)$ caractérisant un observateur O' de T, et l'observations $\omega'$ associée vérifie $y \sqsubseteq_{\omega'} x$, d'où la démonstration.

Dém. 6.10 : Soit $\mathcal{C}1, \mathcal{C}2 \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$, $\mathcal{C}1 \; \alpha \; \mathcal{C}2$. On a par définition $Obg(\mathcal{C}1) = \cup\{Ob(T1), T1 \in \mathcal{C}1\}$, et $Obg(T2) = \cup\{Ob(T2), T2 \in \mathcal{C}2\}$. Or $\forall T1 \in \mathcal{C}1$, $\exists T2 \in \mathcal{C}2$ : $T1 \leqslant T2$ puisque $\mathcal{C}1 \; \alpha \; \mathcal{C}2$, ce qui implique $Ob(T1) \subseteq Ob(T2)$ d'après 6.5 et 6.6.

Lemme 1 : $(\forall T \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$ $(\forall x \in \mathcal{E}$ , x max T) $Ob(T\backslash x) = \{\omega\backslash x$, x max $\omega$ et $\omega \in Ob(T)\}$.

Dém. Soit $\mathcal{E}' = \mathcal{E}\backslash\{x\}$. Soit $\Sigma\Sigma(S_p) = \{\sigma 1, \sigma 2, \ldots, \sigma n\}$.
i) inclusion dans le sens $\supseteq$ :
($\forall\omega \in$ Ob(T), x max $\omega$) $\omega \in OB_{\mathcal{E}}(S_p)$ et $\omega \leqslant T \Rightarrow \omega\backslash x \in OB_{\mathcal{E}'}(S_p)$ et $\omega\backslash x \leqslant T\backslash x$.
ii) inclusion dans le sens $\subseteq$ :
$(\forall\omega' \in OB_{\mathcal{E}'}(S_p)$, $\omega' \leqslant T\backslash x)$ $\exists O'$ : ($\mathcal{E}'$ -> N) qui est l'un des observateurs de $T\backslash x$ associés à l'observation $\omega'$. Or O' peut être étendu en une fonction O : ($\mathcal{E}$ -> N) : $O(y) = O'(y)$ $\forall y \in \mathcal{E}'$, $O(x) > n + \max\{O(y), y \in \mathcal{E}'\}$. O est bien un observateur de T, donc $\exists\omega \in$ Ob(T) : x max $\omega$ et $\omega' = \omega\backslash x$.

Lemme 2 : $(\forall T \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$, $T = (\mathcal{E}, \sqsubseteq_T)$, $(\forall x1, x2, \ldots, xp \in \mathcal{E})$
$xi \not\sqsubseteq_T xj \quad \forall i \neq j \in [1,p] \Rightarrow$
$\exists \omega \in Ob(T),\ \omega = (\mathcal{E}, \sqsubseteq_\omega) : xi \not\sqsubseteq_\omega xj \qquad \forall i \neq j \in [1,p]$.

Lemme 3 : $\forall \mathcal{C} = \{T1, T2, \ldots, Tn\} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$
$U\{Ob(Ti),\ i \in [1,n]\} = Ob(\bigvee\{Ti,\ i \in [1,n]\}) \Rightarrow n = 1$.

Dem. La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal de l'ensemble d'événements $\mathcal{E}$. La propriété est trivialement vérifiée pour card($\mathcal{E}$) $\leq 3$. Supposons la vérifiée pour card($\mathcal{E}$) $\leq k-1$ et considérons card($\mathcal{E}$) = k.
Soit $\hat{T} = \bigvee\{Ti,\ i \in [1,n]\}$.Soit $\{x1, x2, \ldots, xp\} = \{x \in \mathcal{E},\ x \underline{max}\ \hat{T}\}$.
$\forall j \in [1,p]$, on a par hypothèse :
$\{\omega \in OB_{\mathcal{E}}(S_p), \omega \leq \hat{T}$ et $xj\ \underline{max}\ \omega\} = \{\omega \in OB_{\mathcal{E}}(S_p),\ \exists i \in [1,n] : \omega \leq Ti$ et $xj\ \underline{max}\ \omega\}$.
D'après le lemme 1, on a donc également : $(\forall j \in [1,p])$
$U\{Ob(Ti \backslash xj),\ Ti \in \mathcal{C}$ et $xj\ \underline{max}\ Ti\} = Ob(\hat{T}\backslash xj)$.
Soit $\mathcal{E}j = \mathcal{E}\backslash\{xj\}$. Comme $\mathcal{C} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$, on a d'après 6.8 :
$\{Ti\backslash xj,\ Ti \in \mathcal{C}$ et $xj\ \underline{max}\ Ti\} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}j}(S_p))$. Or card($\mathcal{E}j$) = k-1 et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, d'où : $(\forall Ti \in \mathcal{C})\ \ xj\ \underline{max}\ Ti \Rightarrow Ti\backslash xj = \hat{T}\backslash xj$.

Maintenant, d'après le lemme 2, puisque x1 ... xp sont les éléments maximaux et donc incomparables de $\hat{T}$, il existe une observation $\omega$ de $\hat{T}$ dans laquelle x1 ... xp sont également incomparables, et donc maximaux puisque $\omega \leq \hat{T}$. Comme $Ob(\hat{T}) = U\{Ob(Ti),\ Ti \in \mathcal{C}\}$, il doit exister une trace $Tk \in \mathcal{C} : \omega \leq Tk$. Les événements x1 ... xp sont donc incomparables dans Tk, et nécessairement maximaux puisque $Ob(Tk) \subseteq Ob(\hat{T}) \Rightarrow Tk \leq \hat{T}$ (cf. 6.5, 6.6). Comme $Tk \leq \hat{T}$ implique que Tk n'a pas d'autres événements maximaux, et comme $\forall j \in [1,p]\ Tk\backslash xj = \hat{T}\backslash xj$ d'après la première partie de la démonstration, on a nécessairement $Tk = \hat{T}$. D'où finalement n = 1 puisque $n \neq 1$ impliquerait $\exists Ti \in \mathcal{C} : Ti < \hat{T} = Tk$, et $\mathcal{C}$ ne pourrait pas appartenir à $\bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$.

Dém. 6.11 : $\forall i \in [1,n] \quad Ob(Ti) \subseteq Ob(T) \Rightarrow Ti \leq T$.
Donc $\hat{T} = \bigvee\{Ti,\ i \in [1,n]\} \leq T$, et $Ob(\hat{T}) \subseteq Ob(T) = U\{Ob(Ti), i \in [1,n]\}$.
Comme on a la propriété générale :
$U\{Ob(Ti),\ i \in [1,n] \subseteq Ob(\hat{T})$, on en déduit :
$Ob(T) = Ob(\bigvee\{Ti,\ i \in [1,n]\}) = U\{Ob(Ti),\ i \in [1,n]\}$.
D'où finalement n = 1 et T = T1 par application du lemme 3 et par injectivité de la fonction Ob(cf. 6.7).

Lemme 4 : $(\forall T \in Tr_{\mathcal{E}}(S_p)) \quad (\forall\{T1, T2, \ldots, Tn\} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p)))$
$Ob(T) \subseteq U\{Ob(Ti),\ i \in [i,n]\} \Rightarrow \exists k : T \leq Tk$.

Dém. $\forall i \in [1,n]$, soit T'i la trace définie par l'ensemble d'observations $Ob(T'i) = Ob(Ti) \cap Ob(T)$. Notons que Ob(T'i) appartient bien à $\hat{P}(OB_{\mathcal{E}}(S_p))$ : Ob(Ti) et Ob(T) contiennent toutes les observations $\leq$ à leurs bornes supérieures respectives Ti et T, et la borne supérieure de l'ensemble $Ob(Ti) \cap Ob(T)$ est nécessairement $\leq$ à Ti et à T (cf. 6.5, 6.6). On a évidemment $T'i \leq Ti$ $\forall i$. Soit $\{T'i_1, T'i_2, \ldots, T'i_m\} = \{T', \exists i \in [1,n] : Ob(T') = Ob(Ti) \cap Ob(T)\}$.

Comme $\{T1, T2, \ldots, Tn\} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$

$\Rightarrow (\forall x1, x2, \ldots, xp \in \mathcal{E})(i \neq j \Rightarrow Ti\backslash x1\backslash x2 \ldots \backslash xp \not\leq Tj\backslash x1\backslash x2 \ldots \backslash xp)$

$\Rightarrow (\forall x1, x2, \ldots, xp \in \mathcal{E})(i \neq j \Rightarrow \{\omega\backslash x1 \ldots xp, \omega \in Ob(Ti)\}$

$\not\subseteq \{\omega\backslash x1 \ldots xp, \omega \in Ob(Tj)\}$ - cf. lemme 1 -

$\Rightarrow (\forall x1, x2, \ldots, xp \in \mathcal{E})(i \neq j \Rightarrow \{\omega\backslash x1 \ldots xp, \omega \in Ob(T'i)\}$

$\not\subseteq \{\omega\backslash x1 \ldots xp, \omega \in Ob(T'j)\}$,

on a : $\{T'i_1, T'i_2, \ldots, T'i_m\} \in \bar{P}(Tr_{\mathcal{E}}(S_p))$.

D'après la proposition 6.11, $Ob(T) = \cup\{Ob(T'i_j), j \in [1,m]\}$

$\Rightarrow m = 1$ et $T = T'i_1$. Or $T'i_1 \leq Ti_1$. Soit $k = i_1$ : on a finalement $T \leq Tk$.

Dém. 6.12 : Evidente en vertu du lemme 4.

Dém. 6.13 : Evidente d'après 6.12 et 6.10.