

SUR L'APPROXIMATION DU CONTRÔLE OPTIMAL DES SYSTÈMES
GOUVERNÉS PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC RETARD
PAR LA MÉTHODE DE DIFFÉRENCES FINIES

Irena Lasiecka, Andrzej Hatko
Institut de l'Organisation, Gestion
et du Contrôle
Varsovie, KRN 55

1. Introduction

Le problème qui va nous préoccuper est l'approximation numérique du problème de la minimization d'une fonctionnelle intégrale pour les systèmes gouvernés par des équations différentielles avec retard.

On considère la méthode de différences finies qui est relativement simple au point de vue de l'algorithme numérique [1], [2].

Le but principal de ce travail est d'estimer à priori la différence au sens de la norme L^2 entre la solution optimale d'un problème exact et d'un problème approximé.

2. Position du problème.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in H^1 [0T; \mathbb{R}^n] ; \quad \phi \in H^1 [-h, 0; \mathbb{R}^n] ; u \in H^1 [0T; \mathbb{R}^m] \\ A: L^2 [0T; \mathbb{R}^n] \times L^2 [0T; \mathbb{R}^m] \times L^2 [0T; \mathbb{R}^m] \rightarrow L^2 [0T; \mathbb{R}^n] \\ \Phi: L^2 [0T; \mathbb{R}^n] \times L^2 [0T; \mathbb{R}^m] \rightarrow L^2 [0T; \mathbb{R}^n] \\ \Omega \subset \mathbb{N}^1 [0T; \mathbb{R}^m] \quad - \text{un convexe fermé à l'intérieur} \\ \text{non-vide.} \end{aligned}$$

On admet que les hypothèses suivantes sont vérifiées

H1 - A est un opérateur borné dans $L^2 [0T; \mathbb{R}^n]$

H2 - A est un opérateur strictement monotone c'est à dire il existe

$$\alpha > 0 \text{ tel que pour chaque } x_1, x_2, y \in L^2 [0T; \mathbb{R}^n]; u \in L^2 [0T; \mathbb{R}^m]$$

$(k+1)h$

$$\begin{aligned} \int_{kh}^{(k+1)h} (A(x_1(t), y(t), u(t)) - A(x_2(t), y(t), u(t)), x_1(t) - x_2(t)) dt \gg \\ \gg \alpha \int_{kh}^{(k+1)h} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, \dots, m-1$ où on admet que $m = \frac{T}{h}$ est un entier.

H3 - La fonctionnelle $J(x, u) = \int_0^T \Phi(x(t), u(t)) dt$ est radiale-

ment non bornée - on dit que $J(x, u)$ est radialement non borné si

$\Phi(x, u)$ tend vers l'infini quand $\|u\|$ tend vers l'infini

(par $\|\cdot\|$ on note la norme au sens de l'espace L^2).

On considère alors le problème suivant:

PROBLÈME Q_0

Trouver $(x^0, u^0) \in H^1 [0T; \mathbb{R}^n] \times H^1 [0T; \mathbb{R}^m]$ minimisant $J(x, u)$

sous les contraintes.

$$(1) \frac{dx(t)}{dt} + A(x(t), x(t-h), u(t)) = 0^{(1)}; t \in [0, T] \text{ où } h > 0$$

(1) Les derivations sont prises au sens des distributions.

$$(2) x(Q) = \varphi(Q) \quad Q \in [-h, 0]$$

$$(3) u \in \Omega$$

On suppose tout au long du travail que le problème Q_0 admet une solution. On associe au problème Q_0 une famille de problèmes "approchés" et au lieu du problème Q_0 on résout le problème "approché".

Pour cela on introduit [3] une famille d'espaces

$$E_\tau[-h; T+\tau; \mathbb{R}^n] \subset L^2[-h; T+\tau; \mathbb{R}^n] \quad \text{où } \tau \text{ est un pas en temps}$$

destiné à tendre vers zéro.

En plus on admet qu'il est possible de choisir τ de façon que

$$l = \frac{dt}{\tau} \quad \text{et} \quad k = \frac{dt}{\tau} \quad \text{sont des entiers (cette condition n'est}$$

pas indispensable au point de vue du résultat final).

On définit par $E_\tau[-h; T+\tau; \mathbb{R}^n]$ l'espace des fonctions de la forme:

$$x_\tau(t) = \sum_{r=-1}^k x_\tau(r\tau) W_r(t) \quad \text{où } W_r(t) \text{ est la fonction caractéristique de l'intervalle } [r\tau; (r+1)\tau] \text{ et } x_\tau(r\tau) \in \mathbb{R}^n \text{ (renvoyez à [3])}.$$

Donc les fonctions de $L^2[-h, T; \mathbb{R}^n]$ sont approximées par des fonctions en escalier.

Soit $P_\tau : H^1[-h; T; \mathbb{R}^n] \rightarrow E_\tau[-h; T+\tau; \mathbb{R}^n]$ un opérateur de la projection tel que:

$$\exists c > 0 \quad \|P_\tau x - x\| \leq c\tau \quad \text{pour chaque } x \in H^1[-h; T; \mathbb{R}^n]$$

Un ensemble fermé et convexe $\mathcal{F}_\tau \subset E_\tau[0; T; \mathbb{R}^m]$ (2) est dit

(2) $E_\tau[0; T+\tau; \mathbb{R}^m]$ désigne le découpage de $E_\tau[-h; T+\tau; \mathbb{R}^m]$

l'approximation de Ω s'il vérifie l'axiome suivants:

$$(4) \exists c_1 > 0 \forall u \in \Omega \exists u_\tau \in \mathcal{P}_\tau \Omega \text{ tel que } \|u - u_\tau\| \leq c_1 \tau$$

$$(5) \exists c_2 > 0 \forall u_\tau \in \mathcal{P}_\tau \Omega \exists u \in \Omega \text{ tel que } \|u - u_\tau\| \leq c_2 \tau \quad (\text{cf. [9]})$$

$$\text{Soit } x_\tau \in E_\tau[0; T+\tau; \mathbb{R}^n]; \quad ; \quad u_\tau \in E_\tau[0; T+\tau; \mathbb{R}^m]$$

On définit un opérateur de différences finies ∇_τ par:

$$\nabla_\tau x_\tau(t) \stackrel{\text{dt}}{=} \frac{x_\tau(t+\tau) - x_\tau(t)}{\tau}$$

On est maintenant en mesure d'énoncer pour chaque τ un problème "approché" associé au problème Q_0 .

PROBLÈME Q_τ

$$\text{Trouver } (x_\tau^0, u_\tau^0) \in E_\tau[0; T; \mathbb{R}^n] \times E_\tau[0; T; \mathbb{R}^m]$$

$$\text{minimisant } J(x_\tau, u_\tau) = \int_0^T \Phi(x_\tau(t), u_\tau(t)) dt \text{ sous les contraintes}$$

$$(6) \nabla x_\tau(t) + A(x_\tau(t), x_\tau(t-h), u_\tau(t)) = 0$$

$$(7) x_\tau(Q) = P_\tau \phi(Q) \quad Q \in [-h, 0]; \quad x_\tau(0) = \phi(0)$$

$$(8) u_\tau \in \mathcal{P}_\tau \Omega$$

En utilisant les hypothèses H1, H3 d'un raisonnement analogue à celui de [4] on prouve que le problème Q_τ admet la solution optimale. Plus que ça, par les hypothèses H1, H2, H3 on montre que

(x^0, u^0) et (x_τ^0, u_τ^0) appartiennent à certain ensemble

$\mathcal{C} \subset L^2[0T; \mathbb{R}^n] \times L^2[0T; \mathbb{R}^m]$ qui peut être estimé a priori.

Notons, que les problèmes Q_0 et Q_τ on peut considerer comme des problèmes variationnelles de la minimization d'une fonctionnelle dans une espèce d'Hilbert.

Cependant on associe aux problèmes Q_0 et Q_τ les fonctionnelles de Lagrange L et L_τ respectivement

$$\text{Soit } \lambda \in L^2[0T; \mathbb{R}^m]$$

on pose $y(t) \stackrel{\text{dt}}{=} x(t-h)$

$L : H^1[-h, T; \mathbb{R}^n] \times H^1[0, T; \mathbb{R}^m] \times L^2[0, T; \mathbb{R}^n] \rightarrow \mathbb{R}^1$ est défini la formule :

$$(9) \quad L(x, u, \lambda) \stackrel{\text{dt}}{=} J(x, u) + \left\langle \lambda, \frac{dx}{dt} + A(x, y, u) \right\rangle \text{ où } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ désigne la dualité dans } L^2[0, T, \mathbb{R}^n].$$

Si on admet certaines conditions de la régularité posées sur A et Φ on a [5] qu'il existe $\lambda^0 \in H^1[0, T; \mathbb{R}^n]$ tel que :

$$(10) \quad \left\langle \delta_x L(x^0, u^0, \lambda^0), \delta \underline{x} \right\rangle + \left\langle \delta_y L(x^0, u^0, \lambda^0), \delta y \right\rangle = 0$$

pour chaque $\delta x \in H^1[-h, T; \mathbb{R}^n]$ tel que

$$\delta x(q) = 0 \quad q \in [-h, 0] \text{ (on se souvient que } \delta y(t) \stackrel{\text{dt}}{=} \delta \underline{x}(t-h))$$

$$(11) \quad \delta_\lambda L(x^0, u^0, \lambda^0) = 0.$$

$$(12) \quad \left\langle \delta_u L(x^0, u^0, \lambda^0), u - u^0 \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in \Omega$$

On fait en plus sur L l'hypothèse

$$H4 \quad \left\langle \begin{bmatrix} L_{xx}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}) & , L_{ux}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}) \\ L_{xu}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}) & , L_{uu}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\rangle \gg \|u\|^2$$

ou $\gamma > 0$; $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda})$ appartient à un certain voisinage de (x^0, u^0, λ^0) (cf [6, 7]),

Par une méthode analogue on introduit :

$$L_\tau : E_\tau[-h; T+\tau, \mathbb{R}^n] \times E_\tau[0; T+\tau; \mathbb{R}^m] \times E_\tau[0; T+\tau; \mathbb{R}^n] \rightarrow \mathbb{R}^1$$

defini par

$$(13) \quad L_\tau(x_\tau, u_\tau, \lambda_\tau) \stackrel{\text{dt}}{=} J(x_\tau, u_\tau) + \left\langle \lambda_\tau, \nabla x_\tau + A(x_\tau, y_\tau, u_\tau) \right\rangle$$

ou $y_\tau(t) \stackrel{\text{dt}}{=} x_\tau(t-h)$.

De même on a bien qu'il existe $\lambda_\tau^0 \in E_\tau[0; T+\tau; \mathbb{R}^n]$ tel que :

$$(14) \quad \left\langle \delta_x L_\tau(x_\tau^0, u_\tau^0, \lambda_\tau^0), \delta x_\tau \right\rangle + \left\langle \delta_y L_\tau(x_\tau^0, u_\tau^0, \lambda_\tau^0), \delta y_\tau \right\rangle = 0$$

pour tout $\delta x_\tau \in E_\tau[0; T+\tau; \mathbb{R}^n]$ tel que $\delta x_\tau(q) = 0$
 $q \in [-h, 0]$.

$$(15) \quad \delta_{\lambda_z} L_z(x_z^0, u_z^0, \lambda_z^0) = 0$$

$$(16) \quad \langle \delta_{u_z} L_z(x_z^0, u_z^0, \lambda_z^0), u_z - u_z^0 \rangle \gg 0 \quad \forall u_z \in \mathcal{Q}_z \cap \mathcal{U}$$

Respectivement sur L_z on fait l'hypothèse :

$$H4' \quad \left\langle \begin{bmatrix} L_z \ddot{x}(\tilde{x}_z, \tilde{u}_z, \tilde{\lambda}_z), L_z \ddot{u}(\tilde{x}_z, \tilde{u}_z, \tilde{\lambda}_z) \\ L_z x u(\tilde{x}_z, \tilde{u}_z, \tilde{\lambda}_z), L_z u u(\tilde{x}_z, \tilde{u}_z, \tilde{\lambda}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_z \\ u_z \end{bmatrix} \right\rangle \gg \|u_z\|^2$$

où $(\tilde{x}_z, \tilde{u}_z, \tilde{\lambda}_z)$ appartiennent à un certain voisinage de $(x_z^0, u_z^0, \lambda_z^0)$.

Notons que les hypothèses H4 et H4' permettent d'obtenir l'unicité des solutions (x^0, u^0) et (x_z^0, u_z^0) .

D'après les hypothèses H4 et H4' on constate que (x^0, u^0, λ^0) et $(x_z^0, u_z^0, \lambda_z^0)$ sont les points de la selle de L et L_z respectivement. (la démonstration de ce point est classique).

Il est facile de remarquer que le problème Q_v admet une solution u_z^0 qui n'appartient pas à $\hat{\mathcal{Q}}$ un ensemble des contrôles admissibles.

Donc à l'aide de u_z^0 on construit effectivement un autre contrôle -disons u_z^* proche à u_z^0 et en même temps appartenant à $\hat{\mathcal{Q}}$.

L'existence de tel u_z^* est assurée par la condition (5).

3. L'estimation de la différence entre la solution exacte et "approchée".

Le bût général de ce travail est de faire les estimations de $\|u_z^* - u^0\|$; $\|x_z^* - x^0\|$ et $J(x_z^*, u_z^*) - J(x^0, u^0)$ où x_z^* est une solution de l'équation (1) correspondante au u_z^* . On va distinguer deux cas selon des propriétés de Ω .

1^{er} cas - où $\Omega = H^1[OT; R^m]$ (on dit le problème sans contraintes).

2^{ième} cas - où Ω est un sousensemble convexe et fermé dans $H^1[OT; R^m]$ (on dit le problème aux contraintes).

On énonce donc le résultat principal du travail sous la forme des Théorèmes (1) et (2). D'abord on formule le Théorème (1) qui concerne un problème sans contraintes.

THEOREME (1)

Soit

- (a) (x^0, u^0) et (x_z^0, u_z^0) des solutions de problème Q_0 et Q_z respectivement; et u_z^* est défini[†] par (5).
- (b) Les hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4' sont vérifiées.
- (c) Les opérateurs $A, A_x, A_y, A_u, \Phi_x, \Phi_u$ satisfont la condition de Lipschitz sur G avec des constantes $L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ respectivement.
- (d) Les opérateurs $A_x, A_y, A_u, \Phi_x, \Phi_u, A_{xx}, A_{xy}, A_{xu}, \Phi_{xx}, \Phi_{xu}$ sont bornés au sens de la norme $L_\infty(G)$ par $M > 0$.
- (e) $\Omega = H^1[OT; R^m]$

$$(f) \quad \tau < \frac{\alpha}{2L_0^2}$$

donc,

$$(g) \quad \|u^0 - u_\tau^*\| \leq d_1 \tau$$

$$(h) \quad \|x^0 - x_\tau^*\| \leq d_2 \tau$$

$$(i) \quad |J(x_\tau^*, u_\tau^*) - J(x^0, u^0)| \leq d_3 \tau$$

où d_1, d_2, d_3 dependent de $\|\frac{du^0}{dt}\|$, $\|\frac{dx^0}{dt}\|$, $\|k\|, \alpha, \gamma, L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, M$.

Le schéma général de la preuve est suivant:

I. Par l'hypothèse H4' et les conditions (10,11,12) on trouve

d'abord l'estimation de la norme de différence $\|u^0 - u_\tau^0\|$ en termes de $\|x^0 - x_\tau^0\|$ et $\|\lambda^0 - \lambda_\tau^0\|$. Alors on déduit immédiatement du Théorème du Point de la Selle que:

$$(17) \quad J(x_\tau^0, u_\tau^0) = L_\tau(x_\tau^0, u_\tau^0, \lambda_\tau^0) \leq L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0) \text{ où}$$

$$\tilde{x}_\tau^0 = \mathbb{E}_\tau x^0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_\tau^0$$

est une approximation de u^0 appartenante à \mathcal{P}_τ (celui là existe d'après la condition (4)).

D'autre part en employant la formule de Taylor et l'Hypothèse H4¹ et en désignant $\tilde{\lambda}_\tau^0 \stackrel{\text{d.t.}}{=} P_\tau \lambda^0$ on a bien que:

$$(18) \quad J(x_\tau^0, u_\tau^0) = L_\tau(x_\tau^0, u_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0) \approx L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0) +$$

$$+ \langle \delta_{x_\tau} L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0), x_\tau^0 - \tilde{x}_\tau^0 \rangle + \langle \delta_{y_\tau} L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0), y_\tau^0 - \tilde{y}_\tau^0 \rangle +$$

$$+ \langle \delta_{u_\tau} L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0), u_\tau^0 - \tilde{u}_\tau^0 \rangle + \gamma \|u_\tau^0 - \tilde{u}_\tau^0\|^2$$

D'où il vient:

$$(19) \quad \gamma \|u_\tau^0 - \tilde{u}_\tau^0\|^2 \leq L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0) - L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0) +$$

$$+ \langle \delta_{x_\tau} L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0), x_\tau^0 - \tilde{x}_\tau^0 \rangle + \langle \delta_{y_\tau} L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0), y_\tau^0 - \tilde{y}_\tau^0 \rangle +$$

$$+ |\delta_{u_\tau} L_\tau(\tilde{x}_\tau^0, \tilde{u}_\tau^0, \tilde{\lambda}_\tau^0)| \|u_\tau^0 - \tilde{u}_\tau^0\|$$

Pour obtenir le résultat voulu il est nécessaire d'estimer les

expressions

$$(20) \quad L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0) - L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0)$$

$$(21) \quad \langle \delta_{x_z} L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0), x_z^0 - \tilde{x}_z^0 \rangle + \langle \delta_{y_z} L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0), y_z^0 - \tilde{y}_z^0 \rangle$$

$$(22) \quad \delta_{u_z} L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0).$$

Par la définition de L_z on estime (20) d'où il révient que:

$$L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0) - L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0) \leq \tau C^{(1)} \cdot \|\lambda^0 - \tilde{\lambda}_z^0\|$$

Ensuite par la condition (10) et (14) on a que :

$$\langle \delta_{x_z} L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0), x_z^0 - \tilde{x}_z^0 \rangle + \langle \delta_{y_z} L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0), y_z^0 - \tilde{y}_z^0 \rangle \leq \tau C \|\lambda^0 - \tilde{\lambda}_z^0\|.$$

En employant la condition (16) qui d'après (e) est de la forme

$$\delta_{u_z} L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0) = 0 \quad \text{on obtient que:}$$

$$|\delta_{u_z} L_z(\tilde{x}_z^0, \tilde{u}_z^0, \tilde{\lambda}_z^0)| \leq \tau C$$

En effet il en résulte que:

$$\|\lambda^0 - \tilde{\lambda}_z^0\| \leq \tau C (\|x^0 - \tilde{x}_z^0\| + \|\lambda^0 - \tilde{\lambda}_z^0\| + \|u_z^0 - \tilde{u}_z^0\|)$$

II. $\|\lambda^0 - \tilde{\lambda}_z^0\|$ on estime en termes de $\|x^0 - \tilde{x}_z^0\|$ et $\|u^0 - \tilde{u}_z^0\|$

en utilisant l'équation de l'état adjoint ce qui découle d'une

façon immédiate des conditions (10) et (14). D'où on a alors

$$\|\lambda^0 - \tilde{\lambda}_z^0\| \leq C (\|x^0 - \tilde{x}_z^0\| + \|u^0 - \tilde{u}_z^0\|)$$

III D'après l'hypothèse H2 et en utilisant l'équation de l'état

$$\text{on estime que: } \|x^0 - \tilde{x}_z^0\| \leq C \|u^0 - \tilde{u}_z^0\|$$

IV En appliquant les résultats données par I, II, III on déduit:

$$(23) \quad \|u^0 - \tilde{u}_z^0\| \leq C \tau.$$

V Parce que $\|u^0 - u_z^*\| \leq \|u^0 - \tilde{u}_z^0\| + \|\tilde{u}_z^0 - u_z^*\|$ donc en employant

(23) et la condition (4) on a:

$$\|u^0 - u_z^*\| \leq C \tau \text{ ce qui est le résultat voulu (g).}$$

(1) C désigne les constantes diverses.

VI. Ensuite de façon général on estime $\|x^0 - x_z^*\|$ (où x_z^* est une solution de l'équation (1) correspondante au u_z^*).

D'où on obtient (h).

VII À la fin on estime $|J(x_z^*, u_z^*) - J(x^0, u^0)|$ en utilisant les certaines conditions de la régularité faites sur $J(x, u)$

$$(\Phi_x, \Phi_u \in L_\infty(G)).$$

Le Théorème (2) formulé dessous traite d'un problème aux contraintes

(le deuxième cas) Il faut remarquer que dans ce cas les conditions

(12), (16) ne peuvent pas être remplacées par : $\delta_{u^0} L(x^0, u^0, \lambda^0) = 0$

et $\delta_{u_z^0} L(x_z^0, u_z^0, \lambda_z^0) = 0$. Pour cela on obtient un résultat plus

faible par rapport au cas précédent- le rang de la convergence

est égal $O(\tau^{\frac{1}{2}})$ (au contraire d'un problème sans contraintes, où

le même rang est égal $O(\tau)$).

THÉORÈME 2

Soient (x^0, u^0) , (x^0, u^0) , u_z^* , A , Φ_x, Φ_y , A_x, A_y, A_u satisfont les conditions du Théorème (1). En plus on admet que $\Omega \in H^1(\Omega; R^m)$

Donc:

$$\|u^0 - u_z^*\| \leq C_4 \tau^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x^0 - x_z^*\| \leq C_5 \tau^{\frac{1}{2}}$$

$$J(x^*, u^*) - J(x^0, u^0) \leq C_6 \tau^{\frac{1}{2}}$$

où C_4, C_5, C_6 dependent de : $L_0, L_4, L_5, \|\epsilon\|, \|\frac{dG}{dt}\|, \|\frac{du^0}{dt}\|, M, \alpha, \gamma$.

Le Théorème (2) se démontre par une méthode analogue au Théorème (1).

(Les détails qui concernent la démonstration du Théorème (2) sont présentés à [8]).

Remarque :

Les Théorèmes (1) et (2) restent valables dans, le cas où l'opérateur A et la fonctionnelle J dépendent d'une façon explicite du temps. La démonstration du Théorème dans ce cas se fait sans difficultés.

4. Exemple

Un exemple numérique qui illustre la méthode de l'approximation présentée avant, se trouve dans ce chapitre.

Pour pouvoir comparer la solution optimale déterminée d'un façon analytique avec celle obtenue par l'approximation, on se limite dans ce cas-ci au problème d'optimisation dans le cas d'une fonctionnelle quadratique et d'équations d'état linéaires.

Étant donné :

$$z \in H^1[0,2;R^1] ; w \in H^1[0,2;R^1] \quad -1,0;R^1$$

définies respectivement par :

$$(24) \quad z(t) = -\frac{1}{4} t^2 + \frac{7}{8} t \quad \text{pour } t \in [0,2]$$

$$(25) \quad w(t) = \begin{cases} t & t \in [0,1) \\ -t+2 & t \in [1,2] \end{cases}$$

$$(26) \quad \epsilon(q) = -\frac{1}{4} q^2 - \frac{9}{8} q \quad q \in [-1,0]$$

On considère alors le problème suivant :

$$\text{minimiser } \int_0^2 [|x(t) - z(t)|^2 + |u(t) - w(t)|^2] dt \quad \text{sous les contraintes}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) - x(t-1) - u(t) = 0 \quad t \in [0,2]$$

$$x(q) = \epsilon(q) \quad q \in [-1,0]$$

Il est facile à vérifier que la résolution analytique x^0, u^0 de ce problème se présente sous la forme :

$$x^0 = w$$

$$u^0 = z$$

et la valeur optimale de la fonctionnelle est égale zero.

Étant donné N .

$$\text{Soit } \tau = \frac{2}{N-1}$$

Au problème exacte on associe un problème "approché" Q_τ qui prend

dans ce cas la forme:

$$\text{minimiser } \int_0^2 \left[|x(t) - P_\tau z(t)|^2 + |u(t) - P_\tau w(t)|^2 \right] dt$$

sous les contraintes

$$(27) \quad \nabla x_\tau(t) + x_\tau(t) - x_\tau(t-1) - u_\tau(t) = 0 \quad t \in [0, 2]$$

$$(28) \quad x_\tau(Q) = P_\tau \varphi(Q) \quad Q \in [-1, 0]$$

$$(29) \quad x_\tau(0) = \varphi(0)$$

$$\text{où } P_\tau z(t) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\tau} \int_{r\tau}^{(r+1)\tau} z(t) dt \cdot W_r(t)$$

Le problème de la minimization d'une fonctionnelle on resout pour chaque N par le méthode iterative du type gradient conjugué.

La résolution de l'équation de l'état correspondante au contrôle obtenu dans les iterations successives on calcule par le suivant algorithm:

$$\frac{x_{r+1} - x_r}{\tau} + x_r - x_{r-\frac{N}{2}} - u_r = 0 \quad r = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_r = \varphi_r \quad r = -\frac{N}{2}, \dots, -1$$

Les calculs sont effectués sur l'ordinateur ODRA-1325

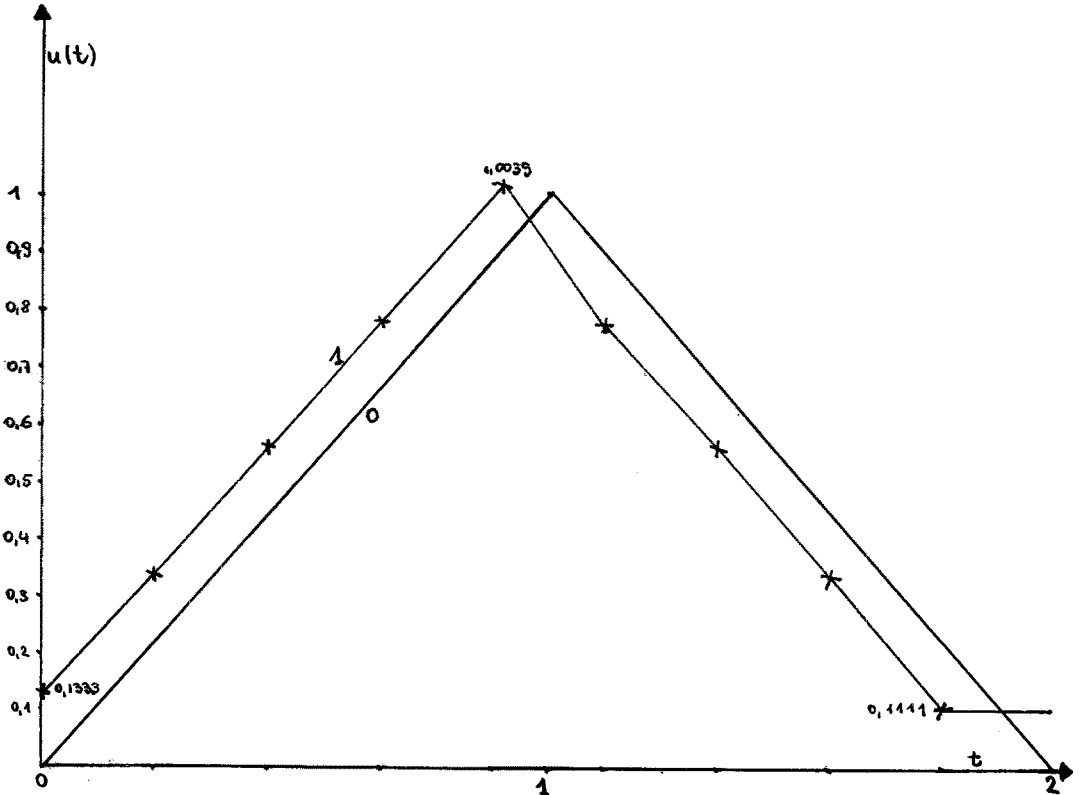
Les résultats obtenus sont donnés sur le tableau suivant:

Tabl. 1

N	Numeros des itérations	g	J x_N, u_N	$u_N - u^0$ 2
10	1	$0.32502 \cdot 10^3$	$0.32692 \cdot 10^1$	$0.25851 \cdot 10^2$
	2	$0.30649 \cdot 10^1$	$0.91566 \cdot 10^2$	$0.22733 \cdot 10^2$
	3	$0.56083 \cdot 10^{-2}$	$0.33678 \cdot 10^{-2}$	$0.22728 \cdot 10^2$
	5	$0.36797 \cdot 10^{-8}$	$0.33629 \cdot 10^{-2}$	$0.22728 \cdot 10^2$
	10	$0.32581 \cdot 10^{-14}$	$0.33629 \cdot 10^{-2}$	$0.22728 \cdot 10^2$
50	1	$0.63649 \cdot 10^2$	$0.27087 \cdot 10^1$	$0.66636 \cdot 10^1$
	2	0.47066	$0.39977 \cdot 10^{-2}$	$0.4102 \cdot 10^1$
	3	$0.67419 \cdot 10^{-3}$	$0.98461 \cdot 10^{-4}$	$0.40883 \cdot 10^1$
	5	$0.15849 \cdot 10^{-9}$	$0.96367 \cdot 10^{-4}$	$0.40883 \cdot 10^1$
	10	$0.10060 \cdot 10^{-15}$	$0.96367 \cdot 10^{-4}$	$0.40983 \cdot 10^1$
100	1	$0.35294 \cdot 10^2$	$0.26720 \cdot 10^1$	$0.47802 \cdot 10^1$
	2	0.25591	$0.37332 \cdot 10^{-2}$	$0.22556 \cdot 10^1$
	3	$0.35173 \cdot 10^{-3}$	$0.30724 \cdot 10^{-4}$	$0.22521 \cdot 10^1$
	5	$0.73443 \cdot 10^{-1}$	$0.28839 \cdot 10^{-4}$	$0.22521 \cdot 10^1$
	10	$0.7754 \cdot 10^{-1}$	$0.28839 \cdot 10^{-4}$	$0.22521 \cdot 10^1$
130	1	$0.24417 \cdot 10^2$	$0.26588 \cdot 10^1$	$0.40673 \cdot 10^1$
	2	0.17576	$0.36437 \cdot 10^{-2}$	$0.15560 \cdot 10^1$
	3	$0.23753 \cdot 10^{-3}$	$0.15473 \cdot 10^{-4}$	$0.15526 \cdot 10^1$
	5	$0.47404 \cdot 10^{-10}$	$0.13663 \cdot 10^{-4}$	$0.15526 \cdot 10^1$
	10	$0.21749 \cdot 10^{-15}$	$0.13663 \cdot 10^{-4}$	$0.15526 \cdot 10^1$
170	1	$0.18665 \cdot 10^2$	$0.26519 \cdot 10^1$	$0.36924 \cdot 10^1$
	2	0.13385	$0.35991 \cdot 10^{-2}$	$0.1188 \cdot 10^1$
	3	$0.17937 \cdot 10^{-3}$	$0.97128 \cdot 10^{-5}$	$0.11846 \cdot 10^1$
	5	$0.34927 \cdot 10^{-10}$	$0.79413 \cdot 10^{-5}$	$0.11846 \cdot 10^1$
	10	$0.20042 \cdot 10^{-16}$	$0.79413 \cdot 10^{-5}$	$0.11846 \cdot 10^1$

Dans les trois colonnes qui suivent, la première et la deuxième donnent la valeur obtenue pour la norme du gradient de la fonctionnelle g et pour $J(x_N, u_N)$ respectivement dans les iterations successives toutes les 10 valeurs de N en partant de la valeur $N = 10$. Dans la dernière colonne on donne la différence au sens de la norme L^2 entre la solution optimale u^0 et approximée u_N .

On voit de ce tableau que les valeurs obtenues pour $J(x_N, u_N)$ et $\|u_N - u^0\|^2$ sont à peu près les mêmes quand on ne fait que 3 itérations. Les valeurs de $J(x_N, u_N)$ et $\|u_N - u^0\|^2$ calculées après les cinq iterations diminuent de 99,6 % et 94,7 % respectivement lorsque N passe de 10 à 170.



Le graphique présenté au dessous indique la disposition des points u_N obtenue après 10 iterations en comparaison avec les valeurs exactes u^0 .

La ligne notée par 0 est la solution optimale u^0 . Les points dressés sur la ligne 1 représentent les valeurs u_N qu'on obtient pour $N = 10$.

Soit u_N^* la fonction construite à l'aide de u_N de façon suivant.

$$u_N^*(t) = \frac{u_{r+1} - u_r}{z} (t - rz) + u_r \quad \text{pour } t \in [rz, (r+1)z]$$

alors, la ligne 1 donne le graphique de u_N^* correspondante à valeur $N = 10$.

Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur Kazimierz Malanowski pour son aide et supervision pendant la préparation de ce travail.

Bibliographie

- [1] W.E. Bosarge,, Iterative continuation and the solution of non-linear two-point boundary value problems". Numer.Math.17
1971
- [2] J.M.Ortega, W.C.Rheinboldt,, Iterative solution of nonlinear equations in several variables." Academic Press, New York 1970.
- [3] P.A.Raviart,, Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires." J.de Math.pures et appl.
46 1967.
- [4] J.W.Daniel,, The approximate minimization of functionals,"
Prentice-Hall Englewood Cliffs N.J. 1971
- [5] D.G.Luenberger,, Optimization by vector space methods," John
Wiley, New York 1969.
- [6] R.S. McKnight,, W.E.Bosarge,, "The Ritz-Galerkin procedure for parabolic control problems." SIAM J.Control 11,3 1973
- [7] W.E.Bosarge, O.G.Johnson, R.S.McKnight, W.P.Timlake,, "The Ritz-Galerkin procedure for nonlinear control problems."
SIAM J.Numer.Anal.10 1973.
- [8] I. Lasiecka,, "Finite difference approximation of optimal control for systems described by nonlinear differential equation with delay." Control and Cybernetics (to be published).
- [9] K. Malanowski " On discrete approximation for a class of sets of admissible control" , Control and Cybernetics ,
(to be published)