

OPTIMISATION SANS CONTRAINTES :

*Construction d'une famille d'algorithmes à convergence quadratique
par la linéarisation.*

J. DENEL

Dept Informatique, Université de Lille I
B.P. 36 59650 VILLENEUVE D'ASCQ

Abstract :

An algorithm using first order approximation of a real-valued function is described for the solution of the unconstrained maximization of a continuous differentiable function ; convergence is proved and a rate of convergence is determined under the usual second order assumptions. Identity is shown between the proposed algorithm and the more general conjugate directions algorithm.

0. INTRODUCTION - NOTATIONS

Dans le problème de l'optimisation sans contraintes d'une fonction différentiable, on distingue deux types d'approche : les méthodes directes et les méthodes de prédiction selon la terminologie de Powell. Les premières requièrent une optimisation unidimensionnelle à chaque étape tandis que la maximisation de la fonction sur une droite n'est plus utilisée dans les secondes.

Les méthodes du premier type qui nous intéressent ici sont caractérisées par l'utilisation de directions conjuguées successives. On trouve par exemple dans cette classe de méthodes, d'une part les méthodes de gradients conjugués (dues à Hestenes et Stiefel [15] et appliquées à l'optimisation par Fletcher et Reeves [13] tout d'abord puis par exemple par Polak et Ribière [20]) et d'autre part les méthodes quasi-newton (Broyden [2,3], Davidon [7], Fletcher et Powell [12] et de nombreuses autres).

Ces algorithmes, encore appelés méthodes de "métrique-variable" ont suscité la formulation de schémas généraux (Adachi [1], Greenstadt [14], Huang [16]) pour le cas quadratique.

Huang montre que le déroulement itératif de ces méthodes est identique (pour les mêmes conditions initiales) dans le cas quadratique ; Dixon [9] donne une condition nécessaire et suffisante du déroulement identique des algorithmes de Huang pour une fonction différentiable quelconque. Les problèmes de convergence sont abordés par Powell [21] pour la méthode D.F.P., Broyden [3] pour ses méthodes de rang 1 et 2, Daniel [6] et Polak [20] pour leur méthode. De même certains auteurs prouvent la convergence superlinéaire de quelques algorithmes (Powell [21], Broyden-Dennis-Moré [4]) tandis que Cohen montre la convergence quadratique de trois algorithmes particuliers de gradients conjugués soumis à une réinitialisation tous les r pas ($r \geq n$).

En fait, le trait essentiel de ces méthodes est qu'elles rentrent, pour le cas quadratique, dans un schéma très général qui consiste à choisir, à chaque pas, une direction de recherche conjuguée de toutes les précédentes. Cependant toutes les méthodes restreignent, à chaque pas, le choix d'une nouvelle direction par des formules de récurrence sur les matrices de "métrique-variable".

Nous proposons dans ce papier un algorithme qui permet de conserver, à chaque pas, la généralité du schéma cité ci-dessus. Dans le cas quadratique, l'ensemble des directions conjuguées de toutes les précédentes s'identifie avec l'ensemble des solutions optimales d'un programme linéaire construit à partir de linéarisation de

la fonction ; les programmes linéaires successifs ne diffèrent que par une seule contrainte supplémentaire ; ils ont au plus n contraintes. L'application au cas non quadratique suit le même schéma.

A une étape donnée, la détermination d'une direction conjuguée des précédentes revient, en définitive, à résoudre un système d'équations linéaires. Nous montrons que le schéma proposé permet d'atteindre les solutions de ce système sous-déterminé par l'utilisation de la méthode duale-simplex (enchaînement de programmes linéaires). De plus il est montré en I.4 l'analogie entre la recherche de ces solutions et la recherche de "centres" au sens de Huard [17] du polyèdre défini par des linéarisations du domaine non linéaire. En fait, en utilisant la notion de F-distance [17], l'ensemble des directions admissibles (i.e conjuguées des précédentes) est identique à un sous espace d'"égale distance" des linéarisations de la fonction.

L'algorithme présenté ici, est l'application à l'optimisation sans contraintes d'une méthode introduite dans l'algorithme partiel de la méthode des centres linéarisée de Huard [18] pour accélérer sa convergence pratique lors de la résolution du problème général d'optimisation non linéaire sous contraintes [8].

Dans la section I, après la description de l'algorithme, il est prouvé, sous l'unique hypothèse de continue-différentiabilité, que tout point d'accumulation de la suite générée est un point stationnaire. La section II montre l'identité avec le schéma de directions conjuguées rappelé ci-dessus. La vitesse de convergence de l'algorithme proposé est déterminée dans la section III. Sous les hypothèses usuelles relatives aux dérivées du second ordre, il est prouvé un taux de convergence d'ordre 2.

NOTATIONS :

- sur \mathbb{R}^n

x^t le vecteur ligne transposé de x

(x,y) le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n

$|x|$ norme induite sur \mathbb{R}^n de x

$\|A\|$ la norme de matrices carrées engendrée par la norme de vecteurs

$|\cdot|$

$[a_1, \dots, a_k]$ le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs a_j

$j = 1, \dots, k$

$[a_1, \dots, a_k]^\perp$ l'orthogonal de $[a_1, \dots, a_k]$

- pour une fonction numérique $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 2 fois différentiable

$\nabla f(x)$ le gradient de f en x

$H(x)$ le hessien de f en x (matrice des dérivées secondes)

\tilde{f} l'approximation quadratique de f en x_0

I. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME. CONVERGENCE

On considère le problème de maximisation sans contraintes :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où f est une fonction continûment différentiable telle que, pour un point quelconque x_0 de \mathbb{R}^n , l'ensemble $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq f(x_0)\}$ est compact. On se donne $\delta \in]0,1[$.

I.1) DESCRIPTION DE L'ALGORITHME A

à l'itération i on dispose d'un point x_i de départ, d'une direction arbitraire c_0 vérifiant $|c_0| = 1$ et $(\nabla f(x_i), c_0) \geq \delta |\nabla f(x_i)|$.

On pose $y_0 = x_i$.

1) définir $y_1 = y_0 + \theta_0 c_0$ tq $(\nabla f(y_1), c_0) = 0$ et $\theta_0 > 0$

$$\omega_1 = y_0 + \gamma_0 c_0 \text{ tq } f(\omega_1) = f(y_0)$$

2) étape k ($k < n$)

on dispose de y_0, \dots, y_k $y_j = y_{j-1} + \theta_{j-1} c_{j-1}$ et $(\nabla f(y_j), c_{j-1}) = 0$

$$y_0, \omega_1, \dots, \omega_k \quad \omega_j = y_{j-1} + \gamma_{j-1} c_{j-1} \text{ et } f(\omega_j) = f(y_0)$$

* choisir c_k de norme 1 tq

$$(\nabla f(y_0), c_k) = (\nabla f(\omega_1), c_k) = \dots = (\nabla f(\omega_k), c_k)$$

** définir $y_{k+1} = y_k + \theta_k c_k$ avec $(\nabla f(y_{k+1}), c_k) = 0$

$$\omega_{k+1} = y_k + \gamma_k c_k \text{ avec } f(\omega_{k+1}) = f(y_0)$$

stop si $\nabla f(y_{k+1}) = 0$.

*** si $k+1 = n$ aller en 3 sinon retour en 2 avec $k+1$ au lieu de k .

3) poser $x_{i+1} = y_n$ et fin de l'itération i .

I.2) CONVERGENCE

Théorème 1 : Sous l'hypothèse précédente sur f (continue-différentiabilité) tout point d'accumulation x^* de la suite (x_i) vérifie $\nabla f(x^*) = 0$.

Démonstration : Nous utiliserons le théorème de Zangwill que l'on trouve dans Dubois [10] ou FIOROT-HUARD [11]. Ce résultat est rappelé ci-dessous :

$E \subset \mathbb{R}^n$ est compact, $P \subset E$ fermé, γ une application multivoque $E \rightarrow P(E)$
 $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur E
 si $\forall x \in E-P$ a) $\gamma(x) \neq \emptyset$
 b) $x' \in \gamma(x) \implies h(x') > h(x)$

alors l'algorithme :

$$\left\| \begin{array}{l} x_0 \in E, x_{i+1} \in E \text{ tq } h(x_{i+1}) \geq h(y_i) \text{ avec } y_i \in \gamma(x_i) \\ x_{i+1} = x_i \text{ sinon} \end{array} \right.$$

génère une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que tout point d'accumulation x^* de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ appartient à P si l'application γ est sup-continue en x^* .

De manière évidente, pour l'application de ce résultat, nous définirons $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\} \subset E_0$ et l'application multivoque $\gamma : E_0 \rightarrow P(E_0)$ par :

$$\gamma : x \rightarrow \gamma(x) = \{y \in E_0 \mid y = x + \lambda h ; h \in \mathbb{R}^n, |h| = 1, \\ (\nabla f(x), h) \geq \delta |\nabla f(x)|, (\nabla f(y), h) = 0\}$$

Prouvons que γ est sup-continue sur E_0 :

si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de E_0 convergeant vers x

$(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de E_0 convergeant vers y telle que $y_k \in \gamma(x_k) \forall k$

alors par définition de $\gamma(x_k)$, $\forall k$ on a

$$\begin{array}{l} - y_k = x_k + \lambda_k h_k \quad \lambda_k = |y_k - x_k|, |h_k| = 1 \\ - (\nabla f(x_k), h_k) \geq \delta |\nabla f(x_k)| \\ - (\nabla f(y_k), h_k) = 0 \end{array}$$

comme $|h_k| = 1 \forall k$, h_k appartient à un compact de \mathbb{R}^n , il existe donc une sous-suite $k' \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ telle que $h_{k'} \rightarrow \bar{h}$ et le triplet $(x_{k'}, y_{k'}, h_{k'})_{k' \in \mathbb{N}'}$ converge vers (x, y, \bar{h}) .

Dans ces conditions, f étant continûment différentiable, le passage à la limite dans les trois relations ci-dessus entraîne $y \in \gamma(x)$. D'autre part en prenant pour fonction h la fonction f , il est évident que le résultat de Zangwill s'applique et tout point d'accumulation x^* de la suite générée par l'algorithme A vérifie $\nabla f(x^*) = 0$.

I.4) CONSTRUCTION DES DIRECTIONS c_k ADMISSIBLES A L'ETAPE k DE A

Par définition c est admissible à l'étape k si et seulement si

$$c \in [a_1, \dots, a_k]^{1^+} \text{ avec } a_j = \nabla f(\omega_j) - \nabla f(y_0)$$

Une méthode simple pour construire le sous espace des directions admissibles consiste à envisager à l'étape k le programme linéaire à $n+1$ variables $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$PL(k) \left\{ \begin{array}{l} \max \mu \\ (\nabla f(y_0), x - y_0) = \mu \\ (\nabla f(\omega_j), x - \omega_j) = \mu \quad j = 1, \dots, k \\ (x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \right.$$

toute direction d'infinitude de $PL(k)$ est une direction admissible pour l'étape k de l'itération i de A .

Il est à noter que le passage de l'étape k à l'étape $k+1$ introduit une contrainte supplémentaire au programme $PL(k)$; la résolution de $PL(k+1)$ peut donc s'effectuer par la technique duale-simplex. Notons, par ailleurs, que la résolution de $PL(k)$ revient à chercher l'ensemble des points à "égale distance" au sens de Huard [17] de toutes les contraintes d'un polyèdre linéaire défini par

$$\{x \mid (\nabla f(y_0), x - y_0) \geq 0, (\nabla f(\omega_j), x - \omega_j) \geq 0 \quad j=1, \dots, k.\}$$

Les contraintes de ce cône polyédrique d'appui au domaine $E_j = \{x \mid f(x) \geq f(x_j)\}$ sont les linéarisations de la fonction f aux points $y_0, \omega_1, \dots, \omega_k$.

II. APPLICATION DE L'ALGORITHME A A L'OPTIMISATION D'UNE FONCTION QUADRATIQUE

Considérons le problème (P.Q)

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f(x) = \frac{1}{2} x^t Q x + q x \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Q matrice symétrique définie négative.

Le principal résultat de cette section est la preuve de la convergence finie de A pour résoudre P.Q.

Proposition 2.1.

Pour toute étape k, on suppose que c_0, c_1, \dots, c_{k-1} sont conjuguées entre elles alors

a) si $c \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$(\nabla f(y_0), c) = (\nabla f(\omega_1), c) = \dots = (\nabla f(\omega_k), c)$$

c est conjuguée des directions c_0, c_1, \dots, c_{k-1}

b) réciproquement, si c est conjuguée de c_0, c_1, \dots, c_{k-1} alors (2.1) est vérifiée.

Démonstration :

a) prouvons tout d'abord $(c, Qc_0) = 0$

partant de $(\nabla f(\omega_1), c) = (\nabla f(y_0), c)$ et de $\nabla f(\omega_1) - \nabla f(y_0) = \gamma_0 Qc_0$ le résultat est évident. Supposons donc $(c, Qc_\ell) = 0 \ell=0, \dots, j-1$ et prouvons $(c, Qc_j) = 0$. En utilisant $(\nabla f(\omega_{j+1}), c) = (\nabla f(y_0), c)$ il vient

$$0 = (\nabla f(\omega_{j+1}) - \nabla f(y_0), c) = \gamma_j (c, Qc_j) + \sum_{r=1}^j \theta_{r-1} (c, Qc_{r-1})$$

d'où, avec l'hypothèse de récurrence, la conclusion

b) réciproquement, si c est conjuguée de c_0, c_1, \dots, c_{k-1} , on écrit comme précédemment

$$\omega_k - \omega_j = \gamma_{k-1} c_{k-1} - \gamma_{j-1} c_{j-1} + \sum_{r=j+1}^{k-1} \theta_{r-1} c_{r-1}$$

avec $j \leq k$

d'où $(c, Q(\omega_k - \omega_j)) = 0$ et (2.1) est vérifiée.

Théorème 2 : Pour une fonction quadratique strictement concave, l'algorithme A avec un point de départ x_0 quelconque et une direction quelconque c_0 , non orthogonale au gradient de f en x_0 , fournit à la première itération en au plus n étapes, la solution de (P.Q).

C'est un résultat classique sur les algorithmes de directions conjuguées.

En conclusion l'algorithme A appliqué à une fonction quadratique s'identifie donc à l'algorithme le plus général de directions conjuguées.

III, VITESSE DE CONVERGENCE DE L'ALGORITHME A DANS LE CAS GÉNÉRAL

III.0) INTRODUCTION

Hypothèses sur f

H1) pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $E_0 = \{x \mid f(x) \geq f(x_0)\}$ compact

H2) f est 2 fois continûment différentiable et vérifie une condition de Lipschitz au voisinage de l'optimum :

$$\exists B > 0 \quad ||H(x) - H(x')|| \leq B|x-x'|$$

H3) $\exists \ell > 0 \quad \forall x \in E_0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \ell|y|^2 \leq |(y, H(x) \cdot y)|$

$$\exists L > 0 \quad \forall x \in E_0 \quad ||H(x)|| \leq L$$

La convergence de A vers l'unique point α solution optimale du problème (P) est assurée par le théorème 1. Le résultat de cette section porte sur la vitesse de convergence de A qui est, à partir d'un certain rang i_0 d'ordre 2 ie

$$\exists c < +\infty \quad \forall i \geq i_0 \quad |x_{i+1} - \alpha| \leq c|x_i - \alpha|^2.$$

Signalons enfin que notre résultat est semblable à celui de Cohen [5] qui sous les mêmes hypothèses sur f montre la convergence quadratique des 3 algorithmes : Daniel, Fletcher et Reeves, Polak et Ribière.

III.1) VITESSE DE CONVERGENCE

Théorème 3 : L'algorithme A, sous les hypothèses H1, 2, 3 a un taux de convergence d'ordre 2.

Démonstration en III.2.

L'approche utilisée dans ce papier pour mesurer le taux de convergence de A est la même que celle de Cohen ou originellement celle de Daniel [6]. Donnons-nous, pour l'itération i, les points engendrés par A

$$y_0 = x_i, y_1, \dots, y_n = x_{i+1}$$

et les directions c_0, c_1, \dots, c_{n-1} associées, et l'approximation quadratique \hat{f} de f en x_i .

Nous allons montrer qu'il est possible à l'étape j ($j=0, \dots, n-1$) de définir, à partir de la direction c_j , une direction \hat{c}_j conjuguée, pour la matrice des dérivées

secondes de \hat{f} , par rapport aux directions précédentes $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{j-1}$ et telle que

$$- |c_j - \hat{c}_j| = \sigma(|x_i - \alpha|)$$

- l'étape j de A appliqué à \hat{f} avec la direction \hat{c}_j fournisse un point \hat{y}_{j+1} vérifiant $|\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}| = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$.

Si pour $j=0, \dots, n-1$ ce qui précède est possible (voir preuve en III.2), le théorème II implique que pour un rang $q (\leq n)$, le point \hat{y}_q sera l'optimum de \hat{f} , que nous notons $\hat{\alpha}$, et on aura la relation $|y_q - \hat{\alpha}| = \sigma(|x_i - \alpha|^q)$.

D'autre part, il est connu (voir par exemple Ortega et Rheinboldt [19 page 312]) que $\hat{\alpha} = \hat{y}_q$ est obtenu par une itération de la méthode de Newton (ordre 2) avec x_i comme point de départ ; ceci, avec ce qui précède, prouve que

$$\exists i_0 \quad i \geq i_0 \quad |y_q - \alpha| = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$$

De plus, un développement de Taylor à l'ordre 2 en α permet de montrer

$$|x_{i+1} - \alpha| \leq \sqrt{\frac{L}{2}} |y_q - \alpha|$$

Cette dernière remarque prouvera le résultat énoncé.

III.2) DEMONSTRATION DU THEOREME 3

La démonstration est constructive pour chaque j et utilise une série de lemmes présentés en annexe.

a) Définissons $\hat{c}_0 = c_0$ et $\hat{y}_1 = y_0 + \hat{\theta}_0 \hat{c}_0$, $\hat{\omega}_1 = y_0 + \hat{\gamma} \hat{c}_0$
avec

$$(\nabla \hat{f}(\hat{y}_1), \hat{c}_0) = 0 \text{ et } \hat{f}(\hat{\omega}_1) = f(y_0)$$

on a $|\hat{y}_1 - y_1| = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$

en effet $|\hat{y}_1 - y_1| = |\theta_0 c_0 - \hat{\theta}_0 \hat{c}_0| = |\hat{\theta}_0 - \theta_0|$ puisque $\hat{c}_0 = c_0$ et $|\hat{c}_0| = 1$

or par construction, y_1 est le maximum de f sur la direction c_0 , il existe donc

$$n_0 \in (y_0, y_1) \text{ tq } \theta_0 = \frac{(\nabla f(y_0), c_0)}{(c_0, H(n_0) \cdot c_0)} \text{ de même } \hat{\theta}_0 = - \frac{(\nabla f(y_0), c_0)}{(c_0, H(x_i) \cdot c_0)}$$

les hypothèses $H_{2,3}$ et le lemme A1 entraînent le résultat.

b) supposons que pour $\ell=0, \dots, j-1$ des directions \hat{c}_ℓ de norme 1 admissi-

bles pour l'algorithme A appliqué à \hat{f} ont été construites ; on dispose donc des points :

$$y_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_j : \hat{y}_{\ell+1} = \hat{y}_\ell + \hat{\theta}_\ell \hat{c}_\ell \quad (\nabla \hat{f}(\hat{y}_{\ell+1}), \hat{c}_\ell) = 0 \quad \hat{\theta}_\ell \text{ peut être négatif}$$

$$y_0, \hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_j : \hat{\omega}_{\ell+1} = \hat{y}_\ell + \hat{\gamma}_\ell \hat{c}_\ell \quad \hat{f}(\hat{\omega}_{\ell+1}) = f(y_0) \text{ avec } \hat{\gamma}_\ell > 0$$

d'après la remarque de I.4 si $b_k = \nabla \hat{f}(\hat{\omega}_k) - \nabla f(y_0) \quad k=1, \dots, j$ on a $\hat{c}_\ell \in [b_1, \dots, b_\ell]^\perp$ $\ell=1, \dots, j-1$.

Faisons l'hypothèse de récurrence :

$$(3.1) \quad 1) |y_{\ell+1} - \hat{y}_{\ell+1}| = \sigma(|x_i - \alpha|^2) \quad \ell = 0, \dots, j-1$$

$$(3.2) \quad 2) |c_\ell - \hat{c}_\ell| = \sigma(|x_i - \alpha|)$$

d'après le a) ci-dessus, (3.1) et (3.2) sont vraies pour $\ell=0$.

D'après les remarques de III.1) nous devons associer à la direction c_j (connue par le déroulement fixé de A à l'itération i), une direction \hat{c}_j conjuguée de $\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_{j-1}$.

Définissons donc $\hat{c}_j = \frac{\tilde{c}_j}{|\tilde{c}_j|}$ avec

$$(3.3) \quad \tilde{c}_j = c_j + \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k \hat{c}_k \text{ les } \lambda_k \text{ déterminés pour que } (\tilde{c}_j, b_\ell) = 0 \quad \ell=1, \dots, j, \text{ ceci}$$

étant une condition nécessaire et suffisante pour que c_j soit conjuguée des précédentes.

Prouvons a) que (3.2) est vérifiée pour $\ell=j$ avec cette définition

b) que (3.1) est vérifiée si \hat{y}_{j+1} est le maximum de \hat{f} sur la direction \hat{c}_j passant par \hat{y}_j .

a) Montrons que $|\hat{c}_j - c_j| = \sigma(|x_i - \alpha|)$

Proposition 3.1. $\forall k, k=0, \dots, j-1, |\lambda_k| = \sigma(|x_i - \alpha|)$

Démonstration : remarquons que $(c_j, a_k) = 0 \quad k=1, \dots, j$ par définition de l'algorithme A (cf. I.4) ; en conséquence, le second membre du système linéaire d'inconnues (λ_k) a pour composantes les produits scalaires $d_r = (c_j, a_r - b_r) \quad r=1, \dots, j$.

Le lemme A4 entraîne

$$(3.4) \quad |d_k| = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$$

D'autre part, puisque $b_k = \nabla f(\hat{\omega}_k) - \nabla f(y_0) = H(x_i) \cdot (\hat{\omega}_k - y_0)$ on peut écrire la relation de récurrence sur les vecteurs b_k

$$(3.5) \quad \begin{cases} b_1 = \hat{\gamma}_0 H(x_i) \cdot c_0 \\ b_k = b_{k-1} - (\hat{\gamma}_{k-2} \hat{\theta}_{k-2}) H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-2} + \hat{\gamma}_{k-1} H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1} \quad k=2, \dots, j \end{cases}$$

le système linéaire donnant les α_k est triangulaire inférieur et du fait de la conjugaison des directions \hat{c}_ℓ ($\ell=0, \dots, j-1$) les éléments diagonaux sont

$$(\hat{c}_{k-1}, b_k) = \hat{\gamma}_{k-1} (c_{k-1}, H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1}) \quad k=1, \dots, j$$

et en vertu du lemme A2 on a

$$(3.6) \quad |(\hat{c}_{k-1}, b_k)| \geq m_2 |x_i - \alpha|$$

ceci prouve que $|\lambda_0| = \sigma(|x_i - \alpha|)$ et que si

(3.7) $|\lambda_0|, \dots, |\lambda_{k-1}|$ $k=1, \dots, j-1$ sont des $\sigma(|x_i - \alpha|)$, alors la $k+1^e$ équation entraîne $|\lambda_k| = \sigma(|x_i - \alpha|)$; en effet elle s'écrit :

$$\lambda_k (\hat{c}_k, b_{k+1}) + \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_r (\hat{c}_r, b_{k+1}) = (c_j, a_{k+1} - b_{k+1})$$

par majoration

$$|\lambda_k| |(\hat{c}_k, b_{k+1})| \leq |(c_j, a_{k+1} - b_{k+1})| + \sum_{r=0}^{k-1} |\lambda_r| |(\hat{c}_r, b_{k+1})|$$

la relation (3.4), le lemme 1, l'hypothèse (3.7) entraînent, avec la relation (3.6)

$$|\lambda_k| \leq M |x_i - \alpha|$$

cqfd.

Maintenant si nous notons $u \in \mathbb{R}^n$, $u = \sum_{j=0}^j \hat{c}_j - c_j$ la proposition 3.1 avec $|\hat{c}_r| = 1$ $r=0, \dots, j-1$ entraîne

$$(3.8) \quad |u| = \sigma(|x_i - \alpha|) \text{ et donc le résultat}$$

(3.9) $\left\{ \begin{array}{l} \text{la relation (3.3) définit une direction conjuguée des directions } \hat{c}_\ell \\ \ell=0, \dots, j-1 \text{ telle que } |\hat{c}_j - c_j| = \sigma(|x_i - \alpha|) \end{array} \right.$

b) Montrons, qu'avec cette définition, $|\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}| = \sigma(|x_j - \alpha|^2)$

Proposition 3.2 $|\theta_j - \hat{\theta}_j| = \sigma(|x_j - \alpha|^2)$.

Démonstration : Par construction de y_{j+1} et \hat{y}_{j+1} (maxima exacts) on a

$$|\theta_j - \hat{\theta}_j| = \frac{|(\hat{c}_j, H(x_j) \cdot \hat{c}_j) (\nabla f(y_j), c_j) - (c_j, H(\eta_j) \cdot c_j) (\nabla \hat{f}(\hat{y}_j), \hat{c}_j)|}{(\hat{c}_j, H(x_j) \cdot \hat{c}_j) (c_j, H(\eta_j) \cdot c_j)}$$

expression que nous pouvons majorer avec l'hypothèse H3 par

$$\begin{aligned} \ell^2 |\theta_j - \hat{\theta}_j| &\leq |(\hat{c}_j - c_j, H(x_j) \cdot (\hat{c}_j + c_j)) (\nabla f(y_j), c_j)| \\ &\quad + |(c_j, [H(x_j) - H(\eta_j)] \cdot c_j) (\nabla f(y_j), c_j)| \\ (3.10) \quad &\quad + |(c_j, H(\eta_j) \cdot c_j) (\nabla f(y_j), c_j - \hat{c}_j)| \\ &\quad + |(c_j, H(\eta_j) \cdot c_j) (\nabla f(y_j) - \nabla \hat{f}(\hat{y}_j), \hat{c}_j)| \\ &\quad + |(c_j, H(\eta_j) \cdot c_j) (\nabla \hat{f}(\hat{y}_j) - \nabla f(y_j), \hat{c}_j)| \end{aligned}$$

le lemme A1, les relations (3.1) et (3.9) fournissent la preuve de la proposition 3.2 en majorant chaque ligne de (3.10).

Proposition 3.3 $|y_{j+1} - \hat{y}_{j+1}| = \sigma(|x_j - \alpha|^2)$

Démonstration :

$$y_{j+1} = y_j + \theta_j c_j \text{ et } \hat{y}_{j+1} = \hat{y}_j + \hat{\theta}_j \hat{c}_j \text{ d'où}$$

$$|y_{j+1} - \hat{y}_{j+1}| \leq |y_j - \hat{y}_j| + |\hat{\theta}_j| |c_j - \hat{c}_j| + |\theta_j - \hat{\theta}_j|$$

or l'hypothèse H₃ entraîne $|\hat{\theta}_j| \leq \frac{1}{\ell} |(\nabla \hat{f}(\hat{y}_j), \hat{c}_j)|$ mais

$\nabla \hat{f}(\hat{y}_j) = \nabla f(y_0) + \sum_{k=1}^j \hat{\theta}_{k-1} H(x_k) \hat{c}_{k-1}$ et par la conjugaison des directions \hat{c}_r il

vient $(\nabla \hat{f}(\hat{y}_j), \hat{c}_j) = (\nabla f(y_0), \hat{c}_j)$. Le lemme A2 prouve alors $|\hat{\theta}_j| = \sigma(|x_j - \alpha|)$.

La démonstration s'achève par (3.1) pour $\ell=j-1$, (3.9) et la proposition (3.2).

En conclusion, ce qui précède, prouve qu'il existe un algorithme de direc-

tions conjuguées, associé au déroulement de l'itération i de A appliqué à f , convergent vers $\hat{\alpha}$ en au plus n itérations. Les explications de III.1 apportent la preuve du théorème 3.

ANNEXE

Lemme A1.

$$* \forall t \ f(t) \geq f(x_i) \implies |t - x_i| \leq (1 + \sqrt{\frac{L}{\ell}}) |x_i - \alpha|$$

$$* \forall t \ \hat{f}(t) \geq f(x_i) \implies |t - x_i| \leq \frac{2L}{\ell} |x_i - \alpha|$$

$$* |\nabla f(x_i)| < L|x_i - \alpha|$$

$$* |\nabla f(x_i)| \geq \ell|x_i - \alpha|$$

$$* \text{ sous l'hypothèse } (\nabla f(x_i), c_0) \geq \delta |\nabla f(x_i)|, \text{ on a } \frac{1}{\gamma_0} \geq m|x_i - \alpha|$$

$$* \hat{f}(\hat{y}_1) - f(x_i) \geq m_1|x_i - \alpha|^2$$

$$* \forall x \in E_0 \ |f(x) - \hat{f}(x)| = \delta(|x_i - \alpha|^3)$$

$$* |\nabla f(y_j)| = \delta(|x_i - \alpha|)$$

$$* |\nabla f(y_j) - \nabla f(\hat{y}_j)| \leq L|y_j - \hat{y}_j|$$

$$* |\nabla f(\hat{y}_j) - \nabla \hat{f}(\hat{y}_j)| = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$$

$$* |a_k| = |\nabla f(\omega_k) - \nabla f(x_i)| = \sigma(|x_i - \alpha|) \quad \forall k < n$$

$$* |b_k| = |\nabla \hat{f}(\hat{\omega}_k) - \nabla f(x_i)| = \sigma(|x_i - \alpha|)$$

Les démonstrations des points précédents utilisés dans la démonstration du théorème 3 sont évidentes par l'utilisation de développements de Taylor.

Lemme A2. $\forall k, k=0, \dots, q-1, \hat{\gamma}_k \geq m_2|x_i - \alpha|$

$\hat{\gamma}_k$ est défini par $\hat{\omega}_{k+1} = \hat{y}_k + \hat{\gamma}_k \hat{c}_k$, $\hat{f}(\hat{\omega}_{k+1}) = f(x_i)$ et $\hat{\gamma}_k > 0$

1) si $(\nabla f(\hat{y}_k), \hat{c}_k) \geq 0$, $\hat{\gamma}_k$ est défini par

$$(A1) \quad 0 = -\hat{f}(\hat{\omega}_{k+1}) + \hat{f}(\hat{y}_k) + \hat{\gamma}_k (\nabla \hat{f}(\hat{y}_k), \hat{c}_k) + \frac{\hat{\gamma}_k^2}{2} (\hat{c}_k, H(x_i) \cdot \hat{c}_k)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\hat{\gamma}_k^2}{2} |(\hat{c}_k, H(x_i) \cdot \hat{c}_k)| \geq \hat{f}(\hat{y}_k) - f(x_i) \geq \hat{f}(\hat{y}_1) - f(x_i) \geq m_1 |x_i - \alpha|^2$$

2) si $(\nabla \hat{f}(\hat{y}_k), \hat{c}_k) < 0$, $\hat{\gamma}_k$ est racine positive de (A.1)

Considérons le point $\hat{\omega}_{k+1}$ et sa projection u sur le convexe $\{x \mid \hat{f}(x) \geq \hat{f}(\hat{y}_k)\}$ on a $\hat{f}(u) = \hat{f}(\hat{y}_k)$ et $u - \hat{\omega}_{k+1} = r c$ $r > 0$ en notant

$$c = \frac{\nabla \hat{f}(u)}{|\nabla \hat{f}(u)|}.$$

Il est évident que $\hat{\gamma}_k > r$ (projection) ; d'autre part r est la racine positive de l'équation $\frac{r^2}{2} \beta - r(\nabla \hat{f}(u), c) + \beta' = 0$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \beta = (c, H(x_i) \cdot c) < 0 \\ \beta' = \hat{f}(u) - f(x_i) > 0 \\ 2\beta' \end{cases}$$

$$\text{on a } r = \frac{\beta'}{(\nabla \hat{f}(u), c) + \sqrt{(\nabla \hat{f}(u), c)^2 - 2\beta\beta'}}$$

or $(\nabla \hat{f}(u), c) \leq k_1 |x_i - \alpha|$; de plus $-\beta \leq L$ et $\beta' \leq k_2 |x_i - \alpha|^2$; il vient

$$r \geq \frac{2\beta'}{k|x_i - \alpha|} \geq m_2 |x_i - \alpha|$$

Lemme A3 : $\forall j \leq q, \forall k = 1, \dots, j \mid \omega_k - \hat{\omega}_k \mid = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$

Démonstration : On utilise l'hypothèse de récurrence (3.1) et (3.2) par construction

$$\omega_k = y_k + (\gamma_{k-1} - \theta_{k-1}) c_{k-1} = y_k + \varepsilon_{k-1} c_{k-1}$$

$$\hat{\omega}_k = \hat{y}_k + (\hat{\gamma}_{k-1} - \hat{\theta}_{k-1}) \hat{c}_{k-1} = \hat{y}_k + \hat{\varepsilon}_{k-1} \hat{c}_{k-1}$$

par choix (remarque du I.2) on a $\varepsilon_{k-1} > 0$ et par construction du point $\hat{\omega}_k$ ($\hat{\gamma}_{k-1} > 0$ quel que soit le signe de $\hat{\theta}_{k-1}$), d'où,

$$(A.2) \quad \begin{aligned} |\hat{\omega}_k - \omega_k| &\leq |y_k - \hat{y}_k| + |\varepsilon_{k-1} c_{k-1} - \hat{\varepsilon}_{k-1} \hat{c}_{k-1}| \\ &\leq |y_k - \hat{y}_k| + |\hat{\varepsilon}_{k-1}| |\hat{c}_{k-1} - c_{k-1}| + |\hat{\varepsilon}_{k-1} - \varepsilon_{k-1}| \end{aligned}$$

$$(A.3) \quad - |y_k - \hat{y}_k| = \sigma(|x_i - \alpha|^2) \text{ pour } k \leq j \quad \text{cf. hypothèse (3.1)}$$

$$(A.4) \quad - |\hat{c}_{k-1} - c_{k-1}| = \sigma(|x_i - \alpha|) \text{ pour } k \leq j \quad \text{cf. hypothèse (3.2)}$$

Maintenant, ε_{k-1} et $\hat{\varepsilon}_{k-1}$ sont racines positives des équations

$$(A.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (\varepsilon_{k-1})^2 (c_{k-1}, H(\eta_k) \cdot c_{k-1}) + f(y_k) - f(x_i) = 0 \quad \eta_k \in (y_k, \omega_k) \\ \frac{1}{2} (\hat{\varepsilon}_{k-1})^2 (\hat{c}_{k-1}, H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1}) + \hat{f}(\hat{y}_k) - f(x_i) = 0 \end{array} \right.$$

comme le montre un développement de Taylor de $f(\omega_k)$ et $\hat{f}(\hat{\omega}_k)$ en y_k et \hat{y}_k en conséquence

$$(A.6) \quad |\varepsilon_{k-1} - \hat{\varepsilon}_{k-1}| = \frac{|\hat{\varepsilon}_{k-1}^2 - \varepsilon_{k-1}^2|}{\varepsilon_{k-1} + \hat{\varepsilon}_{k-1}} \leq \frac{1}{\varepsilon_{k-1}} |\varepsilon_{k-1}^2 - \hat{\varepsilon}_{k-1}^2|$$

$$\text{on a } \hat{\varepsilon}_{k-1}^2 = 2 \frac{\hat{f}(\hat{y}_k) - f(x_i)}{|(\hat{c}_{k-1}, H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1})|} \geq 2 \frac{\hat{f}(\hat{y}_k) - f(x_i)}{|(\hat{c}_{k-1}, H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1})|} \\ \geq \frac{2}{\Gamma} m_1 |x_i - \alpha|^2$$

par l'hypothèse H_3 et le lemme A1.

En utilisant les équations (A5) on écrit

$$\frac{\varepsilon_{k-1}^2 - \hat{\varepsilon}_{k-1}^2}{2} = \frac{(c_{k-1}, H(\eta_k) \cdot c_{k-1}) (\hat{f}(\hat{y}_k) - f(x_i)) - (\hat{c}_{k-1}, H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1}) (f(y_k) - f(x_i))}{(c_{k-1}, H(\eta_k) \cdot c_{k-1}) (\hat{c}_{k-1}, H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1})}$$

Le dénominateur est minoré par ℓ^2 (cf. H_3) et le numérateur, en valeur absolue, est majoré par

$$\begin{aligned} & |(c_{k-1} - \hat{c}_{k-1}, H(\eta_k) \cdot (c_{k-1} + \hat{c}_{k-1}))| |\hat{f}(\hat{y}_k) - f(x_i)| \\ & + |(\hat{c}_{k-1}, [H(\eta_k) - H(x_i)] \cdot \hat{c}_{k-1})| |\hat{f}(\hat{y}_k) - f(x_i)| \\ & + |(\hat{c}_{k-1}, H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1})| |\hat{f}(\hat{y}_k) - \hat{f}(y_k)| \\ & + |(\hat{c}_{k-1}, H(x_i) \cdot \hat{c}_{k-1})| |\hat{f}(y_k) - f(y_k)| \end{aligned}$$

l'hypothèse H_2 , les hypothèses de récurrence (3.1) et (3.2), le lemme A1 montrent que le numérateur est un $\sigma(|x_i - \alpha|^3)$.

En utilisant (A.6) et (A.7) il vient :

$$|\varepsilon_{k-1} - \hat{\varepsilon}_{k-1}| = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$$

Il est, par ailleurs, facile de prouver en utilisant (A.5) et l'hypothèse H_3 que

$$|\hat{\varepsilon}_{k-1}| = \sigma(|x_i - \alpha|)$$

d'où avec (A_{2,3,4}), $|\omega_k - \hat{\omega}_k| = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$

cqfd.

Lemme A4 :

$$\forall j, j \leq q, \forall k = 1, \dots, j \quad |a_k - b_k| = \sigma(|x_i - \alpha|^2).$$

Démonstration :

$$a_k = \nabla f(\omega_k) - \nabla f(x_i) = H(\eta_k) \cdot (\omega_k - x_i) \quad \eta_k \in (x_i, \omega_k)$$

$$b_k = \nabla f(\hat{\omega}_k) - \nabla f(x_i) = H(x_i) \cdot (\hat{\omega}_k - x_i)$$

d'où

$$a_k - b_k = [H(\eta_k) - H(x_i)] \cdot (\omega_k - x_i) + H(x_i) \cdot (\omega_k - \hat{\omega}_k)$$

en utilisant H_2 , H_3 et les lemmes A1 et A3 il vient :

$$|a_k - b_k| = \sigma(|x_i - \alpha|^2)$$

cqfd.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] ADACHI (N)
On variable-metric algorithms.
 Journal of Optimization theory, vol.7 (6) 1971, p.391-410.
- [2] BROYDEN (C.G.)
Quasi-Newton methods and their application to function minimization.
 Mathematics of Computation, vol. 21 (99) 1967 p.368-381.
- [3] BROYDEN (C.G.)
The convergence of a class of double rank minimization algorithms.
 J. Inst. Math. and App. vol.6 (1) 1970, p.76-90.
- [4] BROYDEN-DENNIS-MORE
On the local and superlinear convergence of quasi-newton methods.
 J. Inst. Math. and App. vol.12 (3) 1973, p.223-245.
- [5] COHEN (A.I.)
Rate of convergence of several conjugate gradient algorithms.
 SIAM Num. Analysis, vol.9 (2) 1972 p.248-259.
- [6] DANIEL (J.W.)
The conjugate gradient method for linear and non linear operator equations.
 SIAM Num. Analysis, vol.4 (1) 1967, p.10-26.
- [7] DADIDON (W.C.)
Variance algorithm for minimization.
 Computer Journal vol.10 (4) 1968, p.406-410.
- [8] DENEL (J.)
 . *Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires par la méthode des centres linéarisée.*
 Bul. D.E.R. de E.D.F. série C n°1 1973.
 . *Adaptation and performance of the linearized method of centers.*
 cahiers du CERO, vol.16 (4) 1974, p.447-457.

- [9] DIXON (L.C.W.)
Variable metric algorithms : Necessary and sufficient conditions for identical behavior of non quadratic function.
J. of Optimization vol.10 (1) 1972, p.34-40.
- [10] DUBOIS (J.)
Theorems of convergence for improved non linear programming algorithms.
Operations Res. vol.21 1973, p.328-332.
- [11] FIOROT-HUARD
Composition et réunion d'algorithmes généraux.
Publication 43, mai 1974, Laboratoire de Calcul Université de Lille I France.
- [12] FLETCHER-POWELL
A rapidly convergent descent method for minimization.
Computer Journal vol.6 (2) 1963, p.163-168.
- [13] FLETCHER-REEVES
Function minimization by conjugate gradients.
Computer Journal vol.7 (2) 1964, p.149-154.
- [14] GREENSTADT (J.)
Variations on the variable metric methods.
Math. of Computation vol.24 (109) 1970, p.1-30
- [15] HESTENES-STIEFEL
Methods of conjugate gradients for solving linear systems.
Journal of Res. of NBS vol.49 (6) 1952, p.409.
- [16] HUANG (H.Y.)
Unified approach to quadratically convergent algorithms for function minimization.
Journal of Optimization vol.5 (6) 1970, p.405-423.
- [17] HUARD (P.)
Resolution of mathematical programming problems with non linear constraints by the method of centers.
Non linear programming (Ed. Abadie) North Holl. Publishing C° 1967.

- [18] HUARD (P.)
Programmation mathématique convexe.
RIRO (7) 1968 p.43-59.
- [19] ORTEGA-RHEINBOLDT
Iteration solution of non linear equations in several variables.
Academic Press 1970.
- [20] POLAK-RIBIERE
Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées.
RIRO n°16 1969, p.35-43.
- [21] POWELL (M.J.D.)
. *Rank one methods for unconstrained optimization.*
Integer and non linear programming (Ed. Abadie) 1970, North
Holland.
. *On the convergence of the variable metric algorithm.*
Journal of Inst. Maths. Appl. vol.7 (1) 1971, p.21-36.