APPLICATION DE LA METHODE DE PENALISATION

AUX PROBLEMES DE CONTROLE EN NOMBRES ENTIERS

C. Saguez

IRIA-LABORIA

B.P. 5 Domaine de Voluceau

78150 Le Chesnay (France)

Les actions que nous pouvons avoir sur un système, présentent souvent un caractère discret (ouverture - fermeture d'un circuit, choix optimal de matériaux dans un catalogue,...). Dans cet article nous étudions des problèmes de contrôle optimal de ce type où le contrôle intervient sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \quad \text{avec} \quad \{A_i\}_{i=1,\dots,n} \text{ une famille donnée d'intervalles}$$

$\chi_{A_i}$ la fonction caractéristique de $A_i$

$\alpha_i \in \{0,1\}$ $\forall$ $i=1,\dots,n$ les variables de contrôle.

Après avoir présenté la méthode de pénalisation pour les problèmes d'optimisation en variables mixtes, nous appliquons celle-ci aux problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par une équation parabolique ([8] YVON). Nous donnons les résultats numériques obtenus. Enfin nous montrons que ce principe s'applique également à certaines équations non linéaires et aux équations aux valeurs propres du deuxième ordre.

## I – Pénalisation en variables mixtes.

### 1.1. Position du problème.

Soient : V, Y deux espaces de Banach réflexifs.

I un ensemble discret fini $\{\alpha_1,\dots,\alpha_p\}$

f une application de $I \times Y$ dans $\mathbb{R}$, convexe continue sur Y

g une application de $I \times Y$ dans V, continue de $I \times Y$ faible dans V faible.

On suppose de plus que f et g vérifient une des deux hypothèses suivantes :

(1.1) $\left\{\begin{array}{l} f(\alpha,y) \to +\infty \\ \|y\|_Y \to +\infty \end{array}\right.$ et $G(\alpha) = \{y \mid y \in Y,\ g(\alpha,y) = 0\}$ convexe, fermé dans Y

(1.1)' l'ensemble $\{y \mid \|g(\alpha,y)\|_V \leq C_1\ ,\ f(\alpha,y) < C_2\ ,\ \alpha \in I\}$ est borné dans Y

On considère alors le problème suivant :

$$(1.2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Min}\ f(\alpha,y) \\ g(\alpha,y) = 0 \\ \alpha \in I,\ y \in Y \end{array}\right.$$

Proposition 1 : Sous les hypothèses précédentes, le problème (1.2) admet au moins une solution.

Remarque 1 : en supposant $f(\alpha,y)$ deux fois continument différentiable en $(\alpha,y)$ et $I = \{0,1\}^k$, on peut se ramener à la minimisation d'une fonctionnelle convexe.

Remarque 2 : Si $f(\alpha,y)$ est strictement convexe et sous l'hypothèse (1.1), il existe un problème admettant comme unique solution, une solution du problème (1.2) Cette remarque nous permettra par la suite de supposer que le problème étudié admet une solution unique.

### 1.2. Le problème pénalisé.

On définit le problème pénalisé suivant :

$$(1.3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Min}\ f(\alpha,y) + \frac{1}{\varepsilon}\|g(\alpha,y)\|_V^2 \\ \qquad \alpha \in I\ ,\ y \in Y \end{array}\right.$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2 :

Si $(\alpha_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ est une solution de (1.3), tout point adhérent faible de la suite $(\alpha_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ est solution de (1.2).

De plus si (1.2) admet une solution unique, alors

$$\alpha_\varepsilon^* = \alpha^* \quad \text{pour } \varepsilon \text{ suffisamment petit.}$$

$$y_\varepsilon^* \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \text{ dans } Y \text{ faible}$$

avec $(\alpha^*, y^*)$ solution du problème (1.2).

Donc d'après la remarque 2, on voit qu'il existe $\varepsilon_o$ tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_o$, $\alpha_\varepsilon^* = \alpha^*$ et alors on obtient $y^*$ en résolvant le problème

$$\begin{cases} \text{Min } f(\alpha^*, y) \\ \quad g(\alpha^*, y) = 0 \\ \quad y \in Y \end{cases}$$

On constate que les difficultés numériques de convergence et de stabilité rencontrées souvent dans les méthodes de pénalisation n'existent plus ici, la convergence ayant lieu pour $\varepsilon$ suffisamment petit.

Mais il faut remarquer que le problème pénalisé est en général un problème en variables mixtes difficile à résoudre. Cependant on verra que dans un certain nombre de cas, ce problème prend une forme simplifiée qui permet une résolution relativement facile.

## II - Application au problème de contrôle optimal en nombres entiers d'un système gouverné par une équation parabolique.

### 2.1. Position du problème.

Soient : - $V$, $H$ deux espaces de Hilbert avec $V \subset H \subset V'$ avec injection continue et densité.

- $a(t;\varphi,\Psi)$ une famille de formes linéaires continues sur $V$ telles que

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \forall\, \varphi,\ \Psi \in V \quad t \to a(t;\varphi,\Psi) \text{ mesurable sur } ]o,T[ \\ \text{et } |a(t;\varphi,\Psi)| \leq c\, \|\varphi\|_V \|\Psi\|_V \end{cases}$$

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \text{il existe } \lambda \text{ tel que} \\ a(t;\varphi,\varphi) + \lambda\, |\varphi|_H^2 \geq \alpha \|\varphi\|_V^2 \qquad \forall\, \varphi \in V \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall\, t \in ]o,T[ \end{cases}$$

On écrit

$$a(t;\varphi,\Psi) = (A(t)\varphi,\Psi)_{V' \to V}$$

$$\text{avec} \quad A(t) \in \mathcal{L}(L^2(o,T;V),\ L^2(o,T;V'))$$

- $\mathcal{U}$ l'espace des fonctions en escalier sur $]o,T[$, muni du produit scalaire de $L^2(o,T)$.

- $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\ L^2(o,T;V')$

On définit alors l'état du système par :

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + Bu \\ y(x,o) = y_o(x) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad f \in L^2(o,T;V'),\quad y_o \in H .$$

On prend u sous la forme

$$(2.4)\qquad u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i \chi_{[a_i,b_i]}$$

avec $n$ un entier fixé

$[a_i,b_i]$ une famille d'intervalles de $]o,T[$

$\chi_{[a_i,b_i]}$ la fonction caractéristique de $[a_i,b_i]$

$\mu_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \{o,1\}$ $\forall\, i=1,\ldots,n$

On note $I = \{o,1\}^n$ , $I_{ad}$ un sous-ensemble de $I$.

On définit la fonctionnelle

$$(2.5)\qquad J(\alpha) = \|y - z_d\|^2_{L^2(o,T;H)} + \nu \|u\|^2_{L^2(o,T)} \qquad \nu \geq 0$$

avec $z_d$ donné dans $L^2(o,T;H)$.

On considère alors le problème de contrôle :

$$(2.6)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \alpha^* \in I_{ad} \text{ tel que} \\ J(\alpha^*) = \underset{\alpha \in I_{ad}}{\text{Min}}\ J(\alpha) \end{cases}$$

2.2. <u>Le problème pénalisé.</u>

Soit l'espace de Hilbert $Y = \{y \mid y \in L^2(o,T;V)\ ;\ \frac{\partial y}{\partial t} + Ay \in L^2(o,T;V')\}$.
muni de la norme

$$\|y\|_Y^2 = \|y\|^2_{L^2(o,T;V)} + \|\frac{\partial y}{\partial t} + Ay\|^2_{L^2(o,T;V')} + \|y(x,o)\|_H^2 .$$

On obtient la fonctionnelle pénalisée

$$(2.7)\qquad J_\varepsilon(\alpha,y) = J(\alpha) + \frac{1}{\varepsilon_1}\|\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - f - Bu\|^2_{L^2(o,T;V')} + \frac{1}{\varepsilon_2}\|y(x,o) - y_o(x)\|_H^2$$

Le problème pénalisé s'écrit alors:

$$(2.8)\quad \begin{cases} \text{Trouver } (\alpha_\varepsilon^*,y_\varepsilon^*) \in I_{ad} \times Y \text{ tel que} \\ J_\varepsilon(\alpha_\varepsilon^*,y_\varepsilon^*) = \underset{(\alpha,y) \in I_{ad} \times Y}{\text{Min}}\ J_\varepsilon(\alpha,y) \end{cases}$$

Alors les résultats du I) sont applicables et donc en particulier tout point adhérent faible de $(\alpha_\varepsilon^*,y_\varepsilon^*)$ est solution de (2.6).

Le problème (2.8) est un problème de minimisation quadratique - quadratique en variables mixtes. Dans le cas où les intervalles $]a_i,b_i[$ sont disjoints, le problème pénalisé est équivalent à un problème continu ($\alpha \in [o,1]^n$). C'est dans ce cas que la méthode de pénalisation s'avère particulièrement intéressante.

2.3. <u>Méthodes numériques.</u>

On notera par y les variables continues et $\alpha$ les variables entières.

a) Dans le cas où le problème se ramène à un problème continu, on peut utiliser une méthode de décomposition, en minimisant successivement par rapport à $\alpha$, puis par rapport à y et en itérant jusqu'à convergence. On a alors le résultat suivant : si d désigne la distance sur Y et $d_1$ la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ on note

$$W_k^\varepsilon(\alpha,y) = \{(\beta,z) \in I \times Y \mid d(y,z) \leq \varepsilon\ ,\ d_1(\beta,\alpha) = k\}$$

alors la méthode précédente converge vers un point $(\alpha,y)$ tel que

$$J_\varepsilon(\alpha,y) \leq J_\varepsilon(\beta,z) \qquad \forall\ (\beta,z) \in W_1^\varepsilon(\alpha,y)$$

b) Dans le cas où le problème se ramène à un problème continu, on peut également utiliser une méthode du type Lagrangien augmenté développée par Rockafellar ([5] Rockafellar). On se trouve dans les conditions d'application de cette méthode et en particulier si P désigne le problème primal et D le problème dual alors:

$$\text{Inf}(P) = \text{Max}(D)$$

c) Dans le cas général, on a un problème quadratique en variables mixtes, alors en posant $\gamma_{ij} = \alpha_i \alpha_j$, on peut se ramener à un problème linéaire en $(\alpha,\gamma)$ avec contraintes linéaires sur $\alpha$, $\gamma$. On peut alors développer l'algorithme suivant ([7] Saguez)

1. On résoud le problème continu associé par une méthode de gradient conjugué réduit.
2. Si la solution $\alpha$ est entière, c'est la solution du problème, sinon on génère une coupe de Gomory (ceci est possible car on se trouve alors à un sommet du simplexe).
3. On itère alors ce processus, jusqu'à convergence. Celle-ci est assurée par la théorie des coupes de Gomory.

2.4. Exemple Numérique.

On prend l'état du système solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu_i \, \chi_{[a_i b_i]} & \text{sur } \Omega \times ]o,T[ = Q \\ y\big|_{\Sigma} = 0 & \\ y(x,o) = y_o(x) & \text{avec } f \in L^2(Q) \;;\; y_o(x) \in L^2(Q) \end{cases}$$

On définit la fonctionnelle

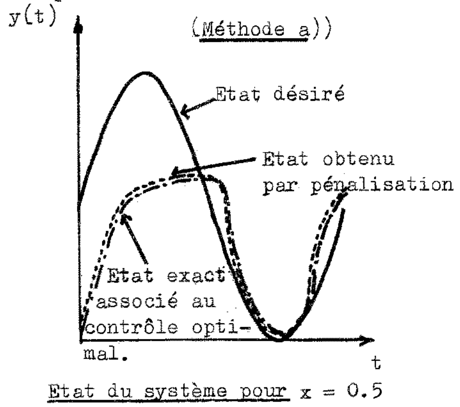
$$J(\alpha) = \int_\Omega \int_o^T |y - z_d|^2 \, dx\, dt \quad ; \; z_d \in L^2(Q)$$

On pose

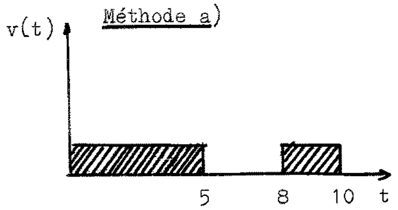
$$I_{ad} = I = \{o,1\}^n$$

Nous avons pris $f(x,t) = 0$ ; $y_o(x) = 0$ ; $\nu = 0$

Nous avons appliqué les méthodes a) et b) et nous avons obtenu des résultats identiques.




Etat du système pour $x = 0.5$




Contrôle optimal obtenu pour $\varepsilon = 1$

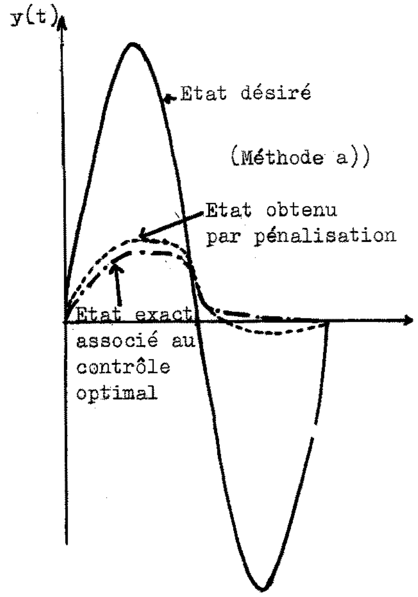
Méthode b)

0,9970 ; 1,0023 ; 0,9997 ; 0,9989 ; 1,0068 ; -0,0052 ; -0,0019 ; -0,0063 ; 1,013 ; 1,0111 .

Exemple 1 : $z_d(x,t) = 1 + \sin 2\Pi t \qquad \mu_i = 10 \quad \forall\, i$

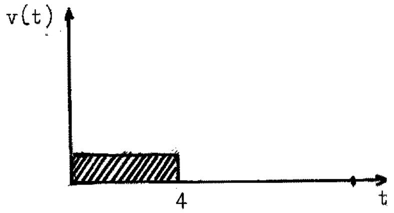
Exemple 2 : $z_d(x,t) = 5 \sin 2 \Pi t$

$\mu_i = 1 \quad \forall\, i$




Etat du système pour x = 0,5

Méthode a)



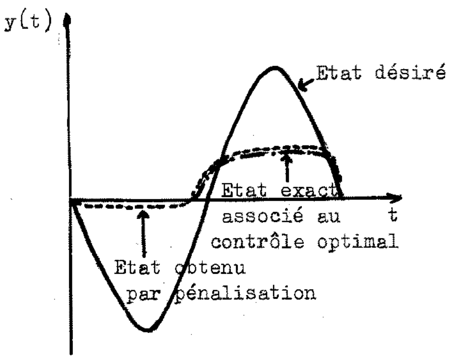

Contrôle optimal obtenu pour $\varepsilon = 1$

Méthode b) on obtient pour le contrôle :

1,0037 ; 0,9990 ; 1,0039 ; 1,0014 ;
- 0,0007 ; -0,0039 ; -0,0035 ;
-0,0043 ; -0,0026 ; -0,0005 .

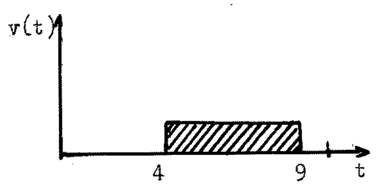
Exemple 3 : $z_d(x,t) = 4\, x(x-1) \sin 2 \Pi t$

$\mu_i = 3 \quad \forall\, i$




Etat du système pour x = 0,5

Méthode a)




Contrôle optimal obtenu pour $\varepsilon = 10^{-1}$

Méthode b)

0,0022 ; 0,0007 ; 0,0015 ; 0,0042 ;
1,0052 ; 0,9923 ; 0,9955 ; 0,9942 ;
0,9923 ; -0,0090 .

Les temps de calcul sont de l'ordre de 1 mn 30 s sur CII 10070 pour la méthode a) et de 2 mn 30 s sur CII 10070 pour la méthode b).

III - Autres applications pour des problèmes de contrôle optimal.

3.1. Tout d'abord nous pouvons remarquer que cette méthode est appréciable, chaque fois que le contrôle intervient sous la forme

$$u = \sum_i \alpha_i f_i \qquad \text{avec } f_i \text{ une fonction donnée dans } \mathcal{U}$$

en particulier on obtient un système linéaire en $\alpha$, si les $f_i$ sont orthogonaux deux à deux.

On obtient également cette propriété quand $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta(x - b_i)$.

3.2. On peut appliquer cette méthode à des sytèmes non linéaires. Par exemple lorsque l'état est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \chi_{[a_i, b_i]}\right) y = f & \text{sur } \Omega \times ]o,T[ \\ y|_{\Sigma} = 0 & \\ y(x,o) = y_o(x) & \end{cases}$$

avec $f \in L^2(Q)$, $y_o(x) \in L^2(\Omega)$, $\{[a_i, b_i]\}$ $i = 1,\dots,n$ une famille d'intervalles de $\Omega$.

Pour cette exemple on a des résultats de convergence analogue au II).

3.3. Cas d'un problème aux valeurs propres :

On se donne le système :

$$\begin{cases} - a \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \chi_{[a_i, b_i]}(x)\right) y = \lambda y & \text{sur } \Omega = ]o,R[ \\ \dfrac{dy}{dn}(o) = 0 & \\ y(R) = 0 & \end{cases}$$

alors l'état du système est la fonction propre associée à la plus petite valeur propre positive, telle que $y(o) = 1$

On prend la fonctionnelle

$$J(\alpha) = \int_{\Omega} |y - zd|^2 \, d\Omega + \nu(\lambda - \lambda_o)^2$$

avec $z_d \in L^2(\Omega)$ , $\nu > 0$ , $\lambda_o$ donné dans $\mathbb{R}$.

On considère le problème de contrôle.

Trouver $\alpha^* \in \{o,1\}^n = I$ tel que

$$J(\alpha^*) = \operatorname*{Min}_{\alpha \in \{o,1\}^n} J(\alpha) .$$

Sur cet exemple on peut montrer que la méthode de pénalisation s'applique et on obtient un résultat de convergence analogue au II). ([7] Saguez] .

Conclusion :

Cette technique de pénalisation permet donc de ramener le problème de contrôle à une minimisation en variables mixtes et dans un certain nombre de cas à un problème continu. On peut ainsi avoir dans un temps de calcul très inférieur aux méthodes d'énumération, la solution exacte ou au moins une bonne estimation de celle-ci.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BOALE : On quadratic programming.
(Naval Research Logesties Quaterly Vol 6, 1969)

[2] GONDRAN : Une approche par pénalisation sur les variables des programmes quadratiques bivalents aux contraintes d'égalité.
(Bulletin E.D.F Etudes et Recherches N° 1 1972).

[3] HAMMER-RUBIN : Some Remarks on quadratic programming with o-1 variables.
(R.I.R.O Vol 3 1970).

[4] LIONS : Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.
(Dunod - Gauthier-Villars 1968).

[5] ROCKAFELLAR : Augmented Lagrange multiplier function and duality in non convex programming.
(SIAM J. Control Vol 12 N° 2 May 1974).

[6] SAGUEZ : Application de la méthode de pénalisation aux problèmes de contrôle en nombres entiers.
(Rapport Laboria à paraître).

[7] YVON : Application de la pénalisation à la résolution d'un problème de contrôle optimal.
(Thèse 3ème cycle Paris 1968).