

IMPLEMENTATION NUMERIQUE EN FILTRAGE OPTIMAL NON-LINEAIRE :
ALGORITHMES PARALLELES ET COMPARAISON AVEC D'AUTRES SOLUTIONS

F. LEVIEUX
I.R.I.A.
Bt. 13
Domaine de Voluceau
B. P. n° 5
78150 Le Chesnay
France

I. INTRODUCTION

Dans une précédente étude (LEVIEUX [5]) on a montré, que l'on pouvait construire des filtres non-linéaires stables par approximation de l'équation d'évolution de la densité conditionnelle due à KUSHNER [2]. En utilisant des travaux plus récents (ZAKAI [12], ROZOVSKII [10]), on prouve que les schémas d'approximation précédents se prêtent aisément à une implémentation sur calculateur parallèle, et conservent sous cette forme leurs propriétés de stabilité et de convergence.

On montre l'efficacité d'une telle solution sur une application à un problème d'interférométrie pour l'observation de rayonnements astronomiques en fréquences millimétriques (LAMBLA [3]). Cette solution est comparée, avec des algorithmes déjà connus, sur le plan des performances et de la fiabilité d'utilisation. On précise ensuite les avantages associés à l'implémentation de cet algorithme, ainsi que le type de problèmes pour lesquels ces avantages sont déterminants.

II. QUELQUES RESULTATS MATHÉMATIQUES

II. 1. Présentation du problème et notations.

Soit $X(t, \omega)$ un processus de diffusion, vectoriel de dimension n , vérifiant l'équation :

$$(2.1) \quad X(t, \omega) = X_0(\omega) + \int_0^t f(X(s, \omega), s) ds + \int_0^t g(X(s, \omega), s) db_1(s, \omega).$$

Les fonctions f et g sont respectivement vectorielles et matricielles de dimension n ; b_1 est un mouvement brownien unitaire. Soit f_i les composantes de f et g_{ij} les composantes de la matrice gg' . Enfin désignons par $A(t)$ l'opérateur de Fokker Planck associé à l'équation (2.1) et défini par :

$$(2.2) \quad A(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial [f_i(x, t)]}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial^2 [\sigma_{ij}(x, t)]}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Introduisons les hypothèses suivantes (cf. LEVIEUX [4]) :

(H1) les coefficients $f_i(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ pour $i, j = \bar{1} \dots n$, sont éléments de $C^{n_1} \{ (0, T) ; C^{n_0}(\mathbb{R}^n) \}$ avec $n_0 = \text{Entier}(\frac{n}{2} + 1)$ et $n_1 = \text{Entier}(\frac{n_0}{2} + 1)$.

(H2) la fonction f_i et σ_{ij} sont bornées et Hölderiennes sur $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ ■

(H3) il existe $\lambda, \mu > 0$ tel que, quelque soit φ élément de $L^2 \{ (0, T) ; V \}$:

$$(2.3) \quad \langle A(t)\varphi, \varphi \rangle_{V, V'} + \lambda \|\varphi\|_H^2 \geq \mu \|\varphi\|_V^2,$$

où $V \cong H^1(\mathbb{R}^n)$ $H \cong H' \cong L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\langle, \rangle_{V, V'}$ désigne le produit de dualité entre V et son dual V' ■

(H4) $p_0(x)$ densité de la loi $X_0(\omega)$ est élément de $H^{n_0}(\mathbb{R}^n)$ ■

(H5) il existe un prolongement $\bar{A}(t)$ de l'opérateur $A(t)$ pour $t < 0$ tel que $p_0(x)$ vérifie :

$$(2.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} p_0(x) dx = 1$$

$$(2.5) \quad \exists \delta > 0, \quad 0 \leq p_0(x) \leq \delta p(x, 0)$$

$$(2.6) \quad \frac{d\rho}{dt}(x,t) + \bar{A}(t)\rho(x,t) = 0$$

$$(2.7) \quad \exists \tau_0 > 0, \rho(x, -\tau_0) = \delta(x) \blacksquare$$

Le processus $x(t,\omega)$ défini par (2.1) et les hypothèses (H1) à (H5) est observé selon une loi physique décrite par la relation :

$$(2.8) \quad z(t,\omega) = \int_0^t H(x(s,\omega),s)ds + db_2(s,\omega),$$

où b_2 est un mouvement brownien scalaire unitaire et H une fonction instantannée sur $\mathbb{R}^n \times (0,T)$, vérifiant l'hypothèse suivante :

(H6) $H(x,t)$ est élément de $L^\infty[\mathbb{R}^n \times (0,T)] \cap C^0[\mathbb{R}^n \times (0,T)]$ et $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial t}$ sont éléments de $L^2[\mathbb{R}^n \times (0,T)] \cap L^\infty[\mathbb{R}^n \times (0,T)]$.

Suivant ici l'exposé de FUJISAKI, KALLIANPUR, KUNITA [1], on introduit le processus innovation $b(t,\omega)$ associé à $z(t,\omega)$, qui sous les hypothèses présentes, est un mouvement brownien unitaire. Ce processus est défini par la relation :

$$(2.9) \quad b(t,\omega) = z(t,\omega) - \int_0^t E\{H[x(s,\omega),s]/B(z_0^s)\}ds,$$

où $B(z_0^t)$ désigne la plus petite σ -algèbre contenant les événements de la forme $\alpha \leq z(s,\omega) \leq \beta$ quelque soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $s \in [0,T]$.

Soit $A^*(t)$ l'opérateur adjoint de l'opérateur A . Une fonction scalaire $\varphi(x)$ est dite élément de l'espace $\mathcal{D}(A^*)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(2.10) \quad E\left\{ \int_0^t [A^*(s)\varphi[x(s,\omega)]]^2 ds \right\} < +\infty.$$

Le processus $M_t(\varphi)$ défini par :

$$(2.11) \quad M_t(\varphi) = \varphi[x(t,\omega)] - E\{\varphi[x_0(\omega)]\} + \int_0^t A^*s\varphi[x(s,\omega)]ds$$

est une martingale mesurable sur $B(b_1, 0^t)$ quelque soit φ dans $\mathcal{D}(A^*)$.

Introduisons B_t l'opérateur de $\mathcal{D}(R^n)^{(*)}$ dans $\mathcal{D}'(R^n)$ défini comme suit : B_t^*

(+) $\mathcal{D}(R^n)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivable à support compact.

désignant l'adjoint de B_t , l'expression :

$$(2.12) \quad C_t = M_t(\varphi) \times b_2(t, \omega) - \int_0^t B_s^* \varphi(x(s, \omega)) ds$$

est une martingale adaptée aux σ -algèbres $B([b_1]_0^t, [b_2]_0^t)$. On montre (voir réf. [14]) que toute fonction φ appartenant à $\mathcal{B}(A^*)$, l'opérateur B^* est défini de façon unique sur la relation (2.12) et, par dualité, l'opérateur B .

Le résultat suivant (théorème 4.1 de la réf. [5]) permet de trouver une relation différentielle liant l'espérance mathématique de la fonction $\varphi[x(t, \omega)]$ conditionnée par les observations passées $z(s, \omega)$ avec $s < t$, ce qui est l'objet même du filtrage récursif.

Théorème II.1.

Sous les hypothèses (H1) à (H6), toute fonction φ élément de $\mathcal{B}(A^*)$ vérifie la relation :

$$(2.13) \quad E\{\varphi[x(t, \omega)]/B(z_0^t)\} + \int_0^t E\{A_s^* \varphi[x(s, \omega)]/B(z_0^s)\} ds = E\{\varphi[x_0(\omega)]\} +$$

$$\int_0^t [E\{\varphi[x(s, \omega)]H[x(s, \omega), s]/B(z_0^s)\} - E\{\varphi[x(s, \omega)]/B(z_0^s)\}] \times E\{H[x(s, \omega), s]/B(z_0^s)\} +$$

$$E\{B_s^* \varphi[x(s, \omega)]/B(z_0^s)\} db(s, \omega) \quad \blacksquare$$

Pour tenir compte de corrélations éventuelles entre b_1 et b_2 , introduisons la fonction vectorielle $S(x(t, \omega), t)$, vérifiant (H6), par la relation formelle :

$$(2.14) \quad E\{db_2(t, \omega)db_1(t, \omega)\} = S(x(t, \omega), t)dt.$$

Notons $p(x, t; \omega)$ la densité de probabilité de la loi $x(t, \omega)$ conditionnée par les réalisations passées $B(z_0^t)$. On peut montrer que, au sens des distributions dans $R^n \times (0, T)$, cette densité vérifie la relation :

$$(2.14) \quad p(x, t; \omega) + \int_0^t A_s p(x, s; \omega) ds = p_0(x) + \int_0^t [p(x, s; \omega)[H(x, s) - \int_{R^n} H(\alpha, s)p(\alpha, s; \omega)d\alpha] - B_s p(x, s; \omega)] db(s, \omega)$$

A_t et B_t se déduisent de A_t^* et B_t^* par dualité. En particulier B_t prend la forme :

$$(2.15) \quad B_t p(x, t; \omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [(g(x, t) S(x; t))_i p(x, t; \omega)]$$

où $(\cdot)_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composante du produit matriciel gS (FUJISAKI, KALLIANPUR, KUNITA [1]).

Il faut remarquer, que la relation (2.14) permet effectivement de caractériser les variations de la fonction p au cours du temps, ce qui n'était pas le cas de la relation (2.13) pour la variable $E\{\varphi/B(z_0^t)\}$.

On peut simplifier formellement la relation (2.14) en effectuant le changement de variable suivant (ZAKAI [12], ROZOVSKII [10]). Soit \tilde{p} une fonction solution des relations :

$$(2.16) \quad \tilde{p}(x, t; \omega) = p(x, t; \omega) \int_{R^n} \tilde{p}(x, t; \omega) dx,$$

$$(2.17) \quad \tilde{p}(x, 0; \omega) = p_0(x).$$

On peut montrer que, parmi les différentes solutions des relations (2.16), (2.17), il en existe une qui vérifie la relation différentielle :

$$(2.18) \quad \tilde{p}(x, t; \omega) + \int_0^t A_s \tilde{p}(x, s; \omega) ds = p_0(x) \\ + \int_0^t [\tilde{p}(x, s; \omega) H(x, s) - B_s \tilde{p}(x, s; \omega)] dz(s, \omega).$$

On remarquera que l'équation (2.18) est linéaire par rapport à la seule variable \tilde{p} et aux conditions initiales p_0 , ce qui sera de grande importance pour la conception d'algorithmes d'approximation de \tilde{p} (et donc de p).

II. 2. Deux résultats d'existence et d'unicité.

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H7) Quelque soit $x \in R^n$ et $t \in [0, T]$ il existe un réel positif α_1 , tel que, au sens des matrices définies positives :

$$(2.19) \quad I_n - S(x, t) S'(x, t) \geq \alpha_1 I_n.$$

Utilisant un résultat abstrait du à PARDOUX [9], on démontre le théorème

suisant :

Théorème II.2.

Sous les hypothèses (H1) à (H7), il existe une solution unique à l'équation (2.18) dans l'espace $L^2\{\Omega x(0,T);V\} \cap L^2\{\Omega,\mu;C^0[(0,T);H]\}$. De plus cette solution est presque partout positive sur $R^n x(0,T)x\Omega$ ■

On doit montrer ensuite, quelles sont les liaisons existantes entre le problème du filtrage non-linéaire d'une part, la solution de l'équation (2.18) d'autre part. Ceci ne peut se faire, qu'en introduisant la fonction $\bar{p}(x,t;\omega)$ par la relation :

$$(2.20) \quad \bar{p}(x,t;\omega) = \frac{\tilde{p}(x,t;\omega)}{\int_{R^n} \tilde{p}(x,t;\omega) dx}$$

et en montrant que $\bar{p}(x,t;\omega)$ est solution de l'équation donnant la densité de probabilité conditionnelle :

$$(2.21) \quad p(x,t;\omega) + \int_0^t A_s p(x,s;\omega) ds = p_0(x) + \int_0^t [p(x,s;\omega)[H(x,s) - \int_{R^n} H(\alpha,s)p(\alpha,s;\omega)d\alpha] - B_s p(x,s;\omega)] db(s,\omega).$$

Pour cela, on procède, en trois étapes (LEVIEUX [5]) : montrer que la relation (2.21) admet une solution unique de carré sommable ; montrer que l'expression (2.20) est presque toujours définie et correspond à un opérateur indéfiniment différentiable opérant sur la fonction \tilde{p} ; enfin, appliquer le lemme de ITO en dimension infinie pour identifier les deux membres de la relation (2.20).

Théorème II.3.

Sous les hypothèses (H1) à (H7), il existe une solution unique dans $L^2\{\Omega x(0,T);V\} \cap L^2\{\Omega,\mu;C^0[(0,T);H]\}$ à l'équation (2.21). Cette solution est liée à celle de l'équation (2.18) par la relation (2.20) pour presque tout ω ■

III. APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE L'EQUATION (2.18)

III. 1. Rappel et extension des résultats connus.

Soit h un réel positif destiné à tendre vers zéro. Soit N la partie entière de T/h et $h, k, x(t)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[hk, h(k+1)]$. Introduisons la fonction suivante $p_h(x, t)$ dite semi-discrétisée en temps de la fonction $p(x, t)$ par la relation :

$$(3.1) \quad p_h(x, t) = \sum_{h=0}^n X_{h,k}(t) p_h(x, k).$$

La fonction $p_h(x, k)$ est donnée par la récurrence :

$$(3.2) \quad p_h(x, 0) = p_0(x)$$

$$(3.3) \quad p_h(x, k+1) - p_h(x, k) + h A_h(k) p_h(x, k+1) = \varphi[p_h(x, k)],$$

où φ est un second membre dépendant de l'équation dont on cherche à approximer la solution. Si il s'agit de l'équation (2.18), alors φ est donné par :

$$(3.4) \quad \varphi[p_h(x, k)] = B_h[k, p(x, k)] [z(k+1, \omega) - z(k, \omega)].$$

Si il s'agit de l'équation (2.21), alors φ est donné par la relation :

$$(3.5) \quad \varphi[p_h(x, k)] = [p_h(x, k) [H(x, k) - \int_{R^n} H(x, k) p_h(x, k) dx] - B_h(k, p_h(x, k))] \\ [z[(k+1)h, \omega] - h \int_{R^n} H(x, k) p_h(x, k) dx].$$

Nous allons montrer le résultat suivant, qui est une extension directe des théorèmes 1.3 et 2.1 chapitre 3 et 2.2 chapitre 5 de la référence [5].

Théorème III.1.

Sous les hypothèses (H1) à (H7), la fonction $p_h(x, t)$ définie par les relations (3.1) (3.2) et (3.5) converge fortement dans $L^2\{\Omega x(0, T) \times R^n\}$ vers la solution de l'équation (2.21). ■

III. 2. Convergence d'un schéma d'approximation implicite et décomposable.

Soit I un ensemble d'indices de cardinal fini et i l'indice courant. Intro-

duisons une famille de fonctions $\xi_i(x)$, $i \in I$, chacune vérifiant les hypothèses (H4) et (H5). Enfin, notons λ_i un ensemble de réels positifs ou nuls vérifiant la relation :

$$(3.6) \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

Soit $\tilde{p}(x,k)$ la suite de fonction définie de la façon suivante :

$$(3.7) \quad \xi_i(x,0) = \xi_i(x)$$

$$(3.8) \quad \xi_i(x,k+1) - \xi_i(x,k) + hA_n \xi_i(x,k+1) = H(x,k) \xi_i(x,k) [z[(k+1)h, \omega] - z(kh, \omega)].$$

$$(3.9) \quad \tilde{p}(x,k) = \sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i(x,k).$$

Enfin, notons $p(x,k)$ la suite de fonction définie par la relation :

$$(3.10) \quad p(x,k) = \frac{\tilde{p}(x,k)}{\int_{R^n} \tilde{p}(x,k) dx}$$

Théorème III.2.

Sous les hypothèses (H1) à (H7), la fonction $p_h(x,t)$ définie par les relations (3.1) et (3.6) à (3.10) converge fortement dans $L^2\{\Omega \times (0,T) \times R^n\}$ vers la solution de l'équation (2.21). ■

La démonstration de ce théorème est détaillée dans LÉVIEUX [7].

III. 3. Implémentation parallèle du schéma d'approximation précédent.

Les conditions imposées aux fonctions $\xi_i(x)$ sont vérifiées par n'importe quelle base d'éléments finis usuelle. Le théorème III.2. implique la convergence d'un algorithme calculant la solution de l'équation (2.21) par normalisation dans $L^1(R^n)$. Le temps affecté à cette normalisation est largement compensé par la simplicité de l'équation (2.18). Une implémentation parallèle de cet algorithme est possible en utilisant la linéarité de l'opérateur qui fait passer d'une condition initiale à la solution correspondante de (2.18). Supposons que l'on dispose de processeurs S_i capables de calculer la fonction $\xi_i(x,k+1)$ connaissant les fonctions $\xi_i(x,k)$ et $z((k+1)h, \omega)$. Il est possible de calculer la valeur de $\tilde{p}(x,k+1)$ à partir de $\tilde{p}(x,k)$ par la procédure suivante :

- effectuer la décomposition de $\tilde{p}(x,k)$ sur une base de fonctions $\xi_i(x,k)$;

- calculer en parallèle les fonctions $\xi_i(x, k+1)$ à l'aide des processeurs S_i ;
- reconstituer $\tilde{p}(x, k+1)$ à partir des $\xi_i(x, k+1)$ et du résultat de la première étape ;
- incrémenter le temps de h et recommencer.

La difficulté d'une telle implémentation réside dans le choix convenable des fonctions de base ξ_i . Elles peuvent varier depuis une simple fonction "chapeau" jusqu'à une combinaison de gaussiennes (voir réf. [11]). Leur choix est un problème spécifique de l'application traitée et ne peut suivre de règles générales.

Cette méthode a été tentée en simulation sur plusieurs exemples, dont celui que nous présentons dans la section IV. La stabilité du schéma est la même que dans une solution non-parallèle. La seconde étape du calcul, qui est la plus longue dans une implémentation classique, devient la plus courte. Il n'est cependant pas possible de chiffrer exactement le gain de temps, qui est toujours important, mais dépend du nombre et de la complexité des fonctions $\xi_i(x)$.

IV. APPLICATION NUMERIQUE A UN PROBLEME D'INTERFEROMETRE A DEUX ANTENNES

IV. 1. Description du dispositif.

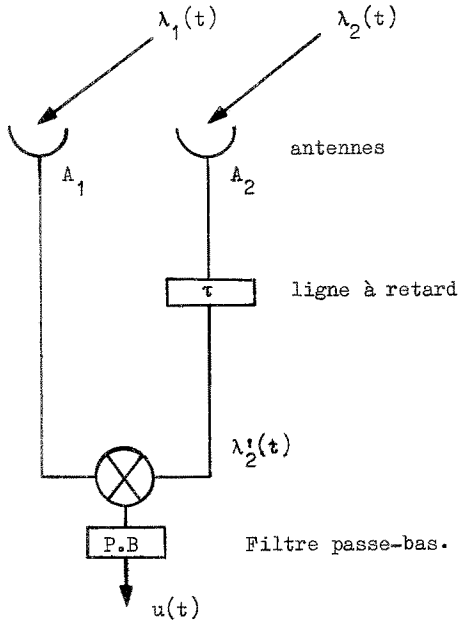


Figure 1.

On dispose de deux antennes A_1 et A_2 avec lesquelles on capte des signaux radio-astronomiques $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$. Ces antennes sont réglées sur une fréquence Ω et un retard τ est placé à la sortie de l'antenne A_2 . Les signaux observés dans l'intervalle de temps $[0, T]$ sont :

$$\lambda_1(t) = A \cos[\Omega t + \varphi_1(t)],$$

$$\lambda'_2(t) = A \cos[\Omega(t - \tau) + \varphi_2(t)].$$

On fait passer $\lambda_1(t)$ et $\lambda'_2(t)$ dans un multiplieur, puis dans un filtre passe-bas, et on obtient le signal :

$$u(t) = \frac{A^2}{2} \cos[-\Omega\tau + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)].$$

Les signaux $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ étant supposés provenir de la même source, la différence de phase $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ correspond à la différence de marche de l'onde observée

entre les deux antennes, qui ne dépend que de la géométrie du système et de la direction de la source émissive. Compte tenu de la rotation de la terre, cette différence de marche est supposée proportionnelle au temps, soit :

$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \Psi_0 + \omega_0 t.$$

En pratique, la fréquence $\omega_0/2\pi$ varie de 0 à 15 Hz. Le signal $u(t)$ a donc la forme suivante :

$$u(t) = \frac{A^2}{2} \cos[\omega_0 t - \Omega \tau + \Psi_0].$$

En prenant pour τ une fonction linéaire du temps, $\tau = \alpha t$, le signal $u(t)$ devient :

$$(4.1) \quad u(t) = a \cos(\omega t + \Psi_0), \text{ avec } \omega = \omega_0 - \Omega \alpha \text{ et } a = \frac{A^2}{2}.$$

On dispose donc à présent d'un signal sinusoïdal $u(t)$ dont on peut faire varier la fréquence en jouant sur le paramètre α . On remarquera que $u(t)$ devient une fonction constante du temps lorsque : $\alpha = \omega_0/\Omega$.

En pratique, les phases $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont soumises à de faibles fluctuations que nous modéliserons sous la forme :

$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \Psi_0 + \omega_0 t + \varphi(t),$$

où $\varphi(t)$ est une fonction aléatoire de moyenne nulle sur l'intervalle d'observation.

D'autre part, au signal observé à la sortie du filtre passe-bas s'ajoutent des perturbations dues au trajet de l'onde entre la source et les antennes. On observera donc à la sortie du filtre le signal :

$$(4.2) \quad y(t) = a \cos[\omega t + \Psi_0 + \varphi(t)] + b(t),$$

où $b(t)$ peut être considéré comme un bruit blanc gaussien stationnaire sur $[0, T]$. Le niveau de ce bruit est très élevé : le rapport de la densité spectrale de puissance du bruit à la puissance moyenne du signal peut atteindre 15 db.

IV. 2. Résultats et comparaison avec le filtre Kalman-Bucy étendu.

Des essais comparatifs des filtres non-linéaires (NL) et Kalman-Bucy étendus

(KBE) ont été effectués sur ordinateur IRIS-80. Le bruit dynamique a été pris très faible ($g = 10^{-4}$) en raison du problème d'interférométrie traité. Des tests statistiques ont été effectués en fonction du niveau de bruit d'observation, du pas de discrétisation spatiale, et du pas de discrétisation temporelle. Les résultats présentés ont été obtenus par statistique sur 500 échantillons par niveau de bruit.

Nous prendrons dans toute la suite comme définition du rapport signal sur bruit la quantité :

$$R = \frac{\text{puissance moyenne du signal}}{\text{densité spectrale du bruit}} = \frac{a^2}{2 r^2}$$

IV. 3. Résultats concernant la mise en oeuvre du filtre ; choix des pas de discrétisations spatiale et temporelle.

Régime transitoire et régime permanent (cf. Fig. 6).

x_0 étant la valeur autour de laquelle la phase x fluctue faiblement, la réponse du filtre NL, c'est-à-dire la courbe $\hat{x}(t)$ a toujours grossièrement la structure présentée sur la figure 6.

On y distingue un régime transitoire de durée TT , et un régime permanent dans l'intervalle (TT, TM) , TM étant la durée totale du filtrage. On appelle erreur permanente e_p , l'erreur quadratique moyenne en régime permanent.

Influence du pas de discrétisation spatiale.

Pour un niveau de bruit donné, l'influence du pas de discrétisation spatiale est représentable par la courbe de l'erreur permanente e_p en fonction du nombre de points en espace NPT. Quel que soit le niveau du bruit cette courbe a l'allure de la figure 2.

Par "points" on peut entendre, soit l'une des fonctions de base $\xi_1(x, k)$, le résultat du calcul étant la fonction $\xi_1(x, k+1)$, soit les noeuds d'un réseau de discrétisation classique, les fonctions ξ_1 ayant pour support un de ces noeuds ou un ensemble connexe pris parmi eux.

Le temps de calcul étant proportionnel à NPT, on a intérêt à prendre la valeur NPT_{opt} au début du palier de la courbe $e_p(NPT)$. Les tests montrent que NPT_{opt} ne dépend que du rapport signal à bruit r . On choisira donc un pas de discrétisation spatiale à l'aide de la courbe $NPT_{opt}(R)$ représentée par la figure 3.

On remarque que le nombre de points d'espace requis diminue lorsque le bruit d'observation augmente.

Influence du pas de discrétisation temporelle.

Les essais montrent que l'influence du pas de discrétisation temporelle est analogue à celle du pas de discrétisation spatiale. Quel que soit le niveau de bruit, 20 points par période semble être une bonne discrétisation. En dessous de 20 points, le filtre est trop imprécis, et au-dessus de 20 points, on ne gagne que très peu en précision.

IV. 4. Résultats globaux en fonction du niveau de bruit d'observation.

Le principal résultat est la stabilité du filtre NL en bruit fort, par opposition au filtre KBE qui diverge fréquemment dès que le bruit devient important.

Bruit faible, $R > 3$ dB.

Lorsque la discrétisation spatiale est trop grossière on observe pour le filtre NL de fortes oscillations haute fréquence autour de la bonne valeur x_0 de la phase (cf.Fig.7). Pour remédier à cela, on est amené à prendre une discrétisation spatiale très fine (100 points par période) ; mais le temps de calcul machine est alors très élevé : 50 fois celui du filtre KBE.

On pourrait également remédier à cet inconvénient en plaçant à la sortie du filtre NL un filtre passe-bas. Le filtre KBE est lui très stable en bruit faible, et précis. Il est donc préférable, dans ce cas, de choisir le filtre KBE qui donne une bonne précision, une bonne stabilité et un temps de calcul machine faible par rapport à celui du filtre NL.

Bruit moyen, $0 < R < 3$ dB (cf.Fig.8).

Le filtre KBE présente souvent des divergences et ne sort pas de son régime transitoire. Le pourcentage de divergence est de 10 à 15 % des essais effectués. Lorsque le filtre KBE converge, les deux filtres ont une précision équivalente (Fig.8). Notons d'autre part, que le temps de calcul du filtre NL est de l'ordre de 7 à 10 fois celui du filtre KBE. Le choix de l'un des deux filtres est donc ici moins évident en raison de l'opposition temps de calcul - risque de divergence.

Bruit fort, $R < 0$ dB (cf.Fig.9).

Le filtre KBE devient ici inutilisable en raison du risque très important de

divergence (60 % pour $R = 15$ dB). Le filtre NL est stable et son temps de calcul est toujours 7 à 10 fois celui du filtre KBE. Le filtre NL sera donc choisi incontestablement dans le cas de bruit fort.

Précision du filtre NL.

La précision obtenue par le filtre NL est mesurable par la variance moyenne de l'erreur permanente pour un niveau de bruit donné, que nous estimons par :

$$V = \text{Moyenne sur l'ensemble des échantillons à bruit donné de } \int_{TT}^{TM} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt.$$

La courbe $V(R)$ est représentée par la figure 4. Remarquons qu'il est difficile de bien définir le régime transitoire du filtre. Ici nous avons pris une définition sévère de TT ; il reste donc encore une partie de transitoire dans (TT, TM) d'où une mesure pessimiste de V . Notons également qu'en bruit fort, les divergences détériorent la précision moyenne du filtre KBE.

Durée des transitoires.

La durée moyenne TT du régime transitoire donne l'ordre de grandeur du temps que met le filtre à accrocher la bonne valeur. Ce temps est mesuré en périodes temporelles $2\pi/\omega$. Il varie avec le niveau de bruit suivant la courbe de la figure 5.

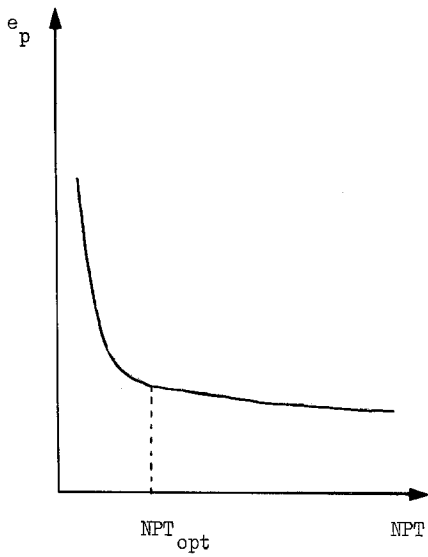


Fig.2 : Allure de la courbe $e_p(NPT)$ à niveau de bruit donné.

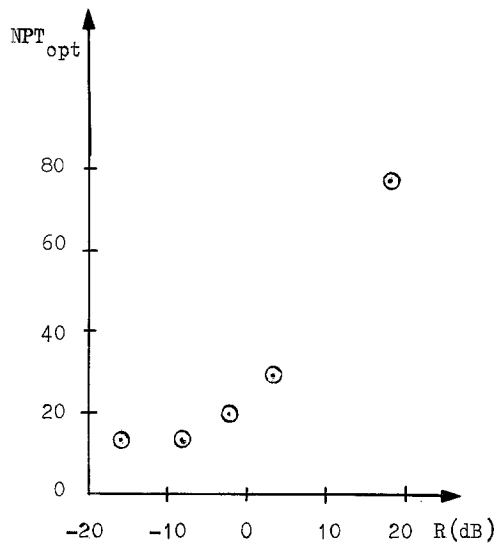
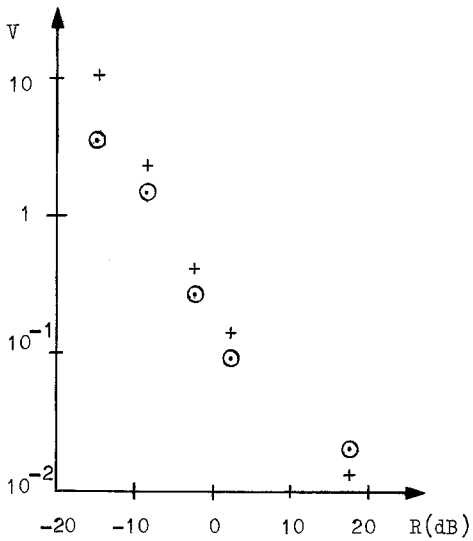
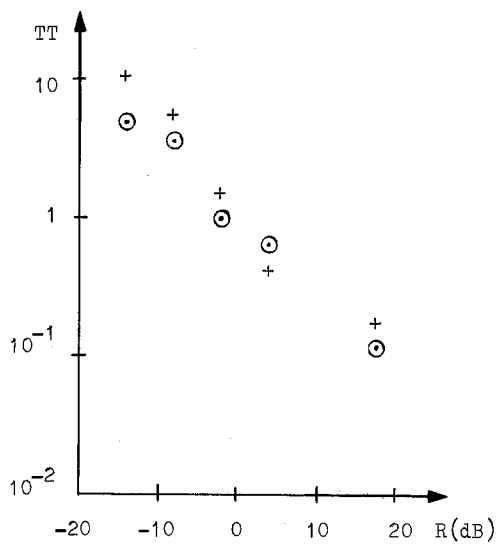


Fig.3 : NPT_{opt} en fonction du rapport signal à bruit R .



○ Filtre NL + Filtre KBE

Fig.4 : Précision des filtres.



○ Filtre NL + Filtre KBE

Fig.5 : Durée des transitoires.

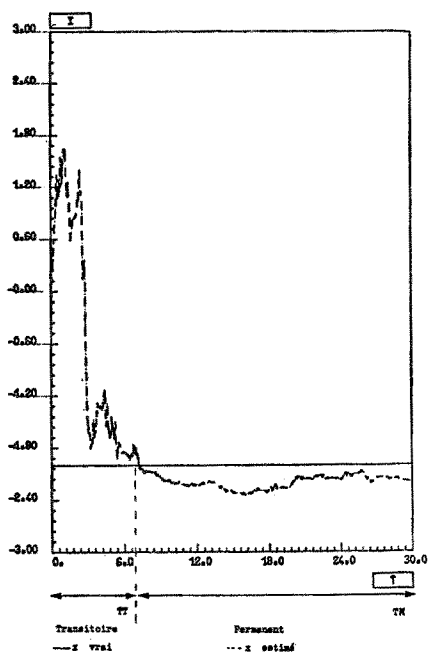


Fig.6 : Régime transitoire et permanent.

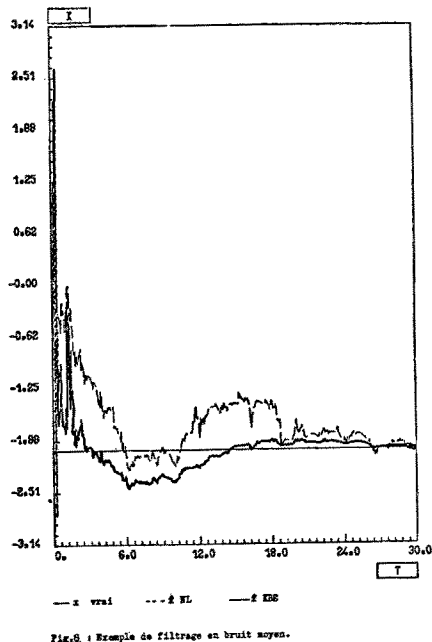


Fig.8 : Exemple de filtrage en bruit moyen.

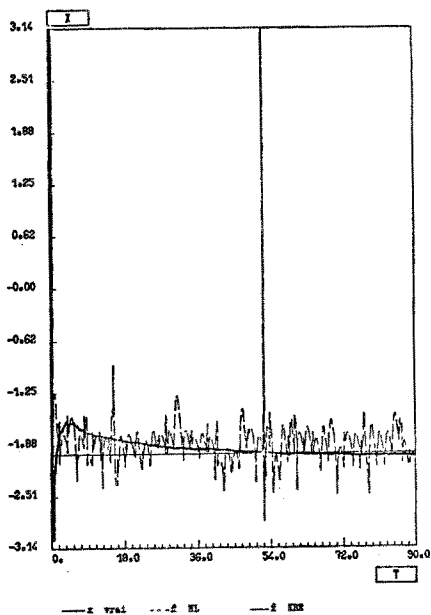


Fig.7 : Oscillations du filtre EL en bruit faible.

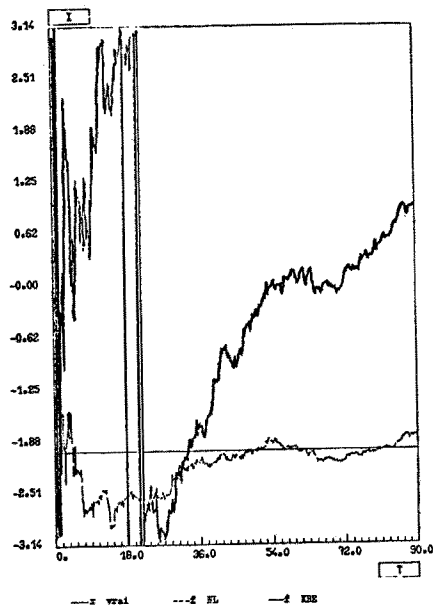


Fig.9 : Divergence du filtre EKF en bruit fort.

V. CONCLUSION

Dans cette étude, on a montré qu'on pouvait simplifier les algorithmes d'approximation de l'équation d'évolution de KUSHNER, sans perdre les propriétés de stabilité et de précision, qui en font l'intérêt. On a d'autre part confirmé, à la suite des travaux de ZAKAI [12] et ROZOWSKII [10], que l'évolution de la densité de probabilité conditionnelle du filtrage non-linéaire récursif est caractérisée par une équation bilinéaire aux dérivés partielles. Pour n suffisamment réduit (inférieur à 4), on a pu montrer que les méthodes par éléments finis, conduisaient à des algorithmes numériques stables et très performants par rapport aux solutions connues. Plusieurs applications en cours confirment, sur le plan pratique, les espoirs que ces résultats fondamentaux avaient fait naître (LAMBLA [3]). En particulier, cette méthode est la seule solution envisageable, lorsque le niveau des bruits perturbateurs est important par rapport aux non-linéarités du dispositif physique de mesures.

VI. REFERENCES

- [1] FUJISAKI, KALLIANPUR, KUNITA, Stochastic differential equations for the non-linear filtering problem. Osaka, Journal of Mathematic n° 9 (1972), pp.19-40.
- [2] H.J. KUSHNER, Dynamical Equations for Optimal non-linear filtering, Journal of Differential Equations, Vol. 3 (1967), pp.179-190.
- [3] J.L. LAMBIA, Application de méthodes récursives de filtrage non-linéaire à l'estimation de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité, Colloque National sur le Traitement du Signal et ses Applications (GRETSI) Nice 16-21 Juin 1975.
- [4] F. LEVIEUX, Un théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation intégral-différentielle stochastique. C.R. Acad. Sciences. Paris. Ser. A. t. 277 (1973), pp.281-284.
- [5] F. LEVIEUX, Filtrage non-linéaire et analyse fonctionnelle. Rapport LABORIA n° 57 (1974).
- [6] F. LEVIEUX, Recursive non-linear filtering : Theoretical approach, numerical analysis and applications. A paraître Applied Mathematics and Optimization (1975).
- [7] F. LEVIEUX, Rapport LABORIA à paraître (1975).
- [8] J.L. LIONS, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod-Gauthier Villars (1968).
- [9] E. PARDOUX, Thèse à la faculté des Sciences de Paris (1975).
- [10] РОЗОВСКИЙ Б. Л. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ - В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ - ТОМ XXVII (1972), pp. 213-214.
- [11] H.W. SORENSON, D.L. ALSPACH, Approximation of density functions by a sum of gaussians for non-linear bayesian estimation, 1st Symposium on non-linear estimation theory and its application, San Diego, Calif. (1970), Western Periodicals, Co, pp.19-31.
- [12] M. ZAKAI, On the optimal filtering of diffusion processes. Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gel. Vol. 11 (1969), pp.230-243.