EINE BESCHREIBUNG CONTEXTFREIER SPRACHEN DURCH ENDLICHE MENGENSYSTEME

Manfred Opp
Inst. f. Informatik, Univ. Hamburg.

Gibt es eine Charakterisierung der contextfreien Sprachen durch endliche Mengensysteme mit gewissen algebraischen Verträglichkeitseigenschaften, analog zur Myhill,Nerode-Charakterisierung der erkennbaren Teilmengen (freier Monoide) durch Kongruenzen von endlichem Index ? (Eine vollständige Charakterisierung durch Sättigung mit gewissen i.a. unendlichen Kongruenzen ist wegen der Komplementeigenschaft contextfreier Sprachen nicht möglich, siehe u.a. Perrot[3].) Diese Fragestellung bildet den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen, die wir im allgemeineren Rahmen der universellen Algebra durchführen werden.

Als für diesen Zweck passende Verallgemeinerungen der Kongruenzen (von endlichem Index) definieren wir (stark) kongruente Familien (von endlichem Index).

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit zeigen wir, daß die gröbste Äquivalenz auf A, die jede Menge einer vorgegebenen stark kongruenten Familie von (A,Ω) sättigt, bereits eine Kongruenz ist.

Im zweiten Abschnitt führen wir die Klasse der 'Ω-Algebren mit Längenabbildung' ein und geben durch eine Verstärkung des Begriffs der kongruenten Familie (zur reduzierenden kongruenten Familie) eine Charakterisierung der gleichungsdefinierten Mengen in dieser Algebrenklasse an. Dies ermöglicht dann Beschreibungen der contextfreien Mengen in Termalgebren, freien Monoiden und freien kommutativen Monoiden durch derartige Mengensysteme. Mithilfe der oben erwähnten Konstruktion von Kongruenzen aus stark kongruenten Familien läßt sich nun in algebraisch übersichtlicher Weise die Gleichheit contextfreier und erkennbarer Teilmengen in Termalgebren (siehe Mezei,Wright[2]) herleiten.

Wir erzielen u.a. mit dieser Kennzeichnung gleichungsdefinierter Mengen eine Reihe beweistechnischer Vorteile, da wir oft auf eine vollständige Induktion verzichten können. (Ω sei stets endlich.)

DER BEGRIFF DER STARK KONGRUENTEN FAMILIE

(1.0) Def.: (A,Ω) sei eine Ω-Algebra.

(a) Sei $t \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $(f,t_1,..,t_n) \in \Omega_n \times A^n$ heißt Zerlegung von t in A, falls $f(t_1,..,t_n) = t$. (Gleichheit von Zerlegungen ist also als Tupel-Gleichheit zu verstehen.)

(b) $\mathrm{Zerl}(t) := \{(f,t_1,..,t_n) \in \Omega_n \times A^n \ / \ n \in \mathbb{N}$ und $(f,t_1,..,t_n)$ ist Zerlegung von $t\}$.

(c) $\mathcal{F} = \{F_i \ / \ i \in I\}$, $F_i \subset A$, sei ein Mengensystem auf A. Dann definieren wir für jedes Paar (t,F_i) mit $t \in F_i$, $i \in I$, die Menge $\mathrm{Zerl}_{\mathcal{F}}(t,F_i) := \{(f,t_1,..,t_n) \in \mathrm{Zerl}(t) \ / \ \exists i_1,..,i_n \in I :$ $t_j \in F_{i_j}$, für $j=1,..,n$ und $f(F_{i_1},..,F_{i_n}) \subset F_i\}$.

Wir wollen hier durchgehend darauf verzichten, die Algebra (A,Ω) als Index der eben definierten Mengen mitzuführen, da aus dem Kontext jeweils hervorgeht, welche Algebra gemeint ist.

Mithilfe der obigen Definition läßt sich nun der zentrale Begriff der kongruenten Familie leicht formulieren :

(1.1) Def.: (A,Ω) sei eine Ω-Algebra. $\mathcal{F} = \{F_i \ / \ i \in I\}$, $F_i \subset A$, heißt kongruente Familie auf A, falls: $\forall i \in I \ \forall t \in F_i : (\mathrm{Zerl}(t) \neq \emptyset \Longrightarrow \mathrm{Zerl}_{\mathcal{F}}(t,F_i) \neq \emptyset)$.

Eine (kongruente) Familie auf A heißt stark kongruent, falls sogar gilt: $\forall i \in I \ \forall t \in F_i : \mathrm{Zerl}(t) = \mathrm{Zerl}_{\mathcal{F}}(t,F_i)$.

$\mathcal{F}$ heißt von endlichem Index, falls I endlich ist.

$A' \subset A$ wird von $\mathcal{F}$ 'gesättigt', falls $A' = \bigcup_{i \in I'} F_i$ für ein passendes $I' \subset I$.

Bemerkungen: (1) Kongruenzen auf (A,Ω) sind stark kongruente Familien.

(2) Für kongruente Familien $\mathcal{F}$ gilt nicht notwendig, daß für $f \in \Omega_n$ die Menge $f(F_{i_1},..,F_{i_n})$ stets in einer der Mengen aus $\mathcal{F}$ enthalten ist (das folgende Beispiel macht auch dies deutlich).

Beispiel: Sei $(X^+, \cdot)$ die von $X = \{a,b\}$ frei erzeugte Halbgruppe.
$F_1 = \{a^n b^n \ / \ n > 0\}$, $F_2 = \{a^{n+1}b^n \ / \ n > 0\}$, $F_3 = \{a\}$, $F_4 = \{b\}$,
$\mathcal{F} = \{F_i \ / \ i=1,..,4\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ eine kongruente, jedoch nicht stark kongruente Familie auf $(X^+, \cdot)$: z.B. $a^7b^7 \in F_1$: $(\cdot,a^7b^6,b) \in \mathrm{Zerl}_{\mathcal{F}}(a^7b^7,F_1)$, denn $a^7b^6 \cdot b = a^7b^7$ und $a^7b^6 \in F_2$, $b \in F_4$ und $F_2 \cdot F_4 \subset F_1$.
$\mathcal{F}$ ist nicht stark kongruent, da z.B. $\mathrm{Zerl}(a^7b^7) \ni (\cdot,a^7,b^7) \notin \mathrm{Zerl}_{\mathcal{F}}(a^7b^7,F_1)$.

Wir werden nun eine dreistufige Konstruktion angeben, die ausgehend von stark kongruenten Familien auf Kongruenzen führt.

(1.2) Def.: $\mathcal{F} = \{F_i \;/\; i \in I\}$, $F_i \subset A$, sei ein Mengensystem auf A. Wir definieren dazu neue Mengensysteme $\overline{\mathcal{F}}, \overline{\overline{\mathcal{F}}}, \overline{\overline{\overline{\mathcal{F}}}}$ auf folgende Weise:

(a) $[t]_{\mathcal{F}} := \bigcap_{\substack{i \in I \\ t \in F_i}} F_i$, $\quad \overline{\mathcal{F}} := \{ [t]_{\mathcal{F}} \;/\; t \in \bigcup_{i \in I} F_i \}$.

(b) $\langle t \rangle_{\mathcal{F}} := [t]_{\mathcal{F}} \setminus (\bigcup_{t \notin [t']} [t'])$, $\quad \overline{\overline{\mathcal{F}}} := \{ \langle t \rangle_{\mathcal{F}} \;/\; t \in \bigcup_{i \in I} F_i \}$.

(c) $\overline{\overline{\overline{\mathcal{F}}}} = \overline{\overline{\mathcal{F}}} \cup \{ \complement_A (\bigcup_{i \in I} F_i) \}$.

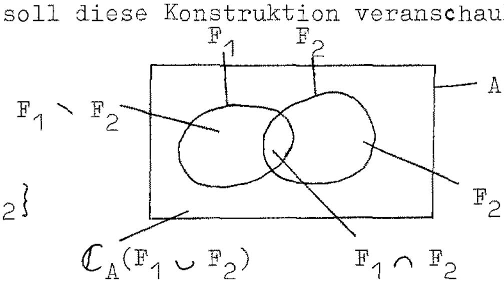
Ein einfaches Beispiel soll diese Konstruktion veranschaulichen:

$\mathcal{F} = \{F_1, F_2\}$

$\overline{\mathcal{F}} = \{F_1, F_2, F_1 \cap F_2\}$

$\overline{\overline{\mathcal{F}}} = \{F_1 \setminus F_2, F_2 \setminus F_1, F_1 \cap F_2\}$

$\overline{\overline{\overline{\mathcal{F}}}} = \overline{\overline{\mathcal{F}}} \cup \{\complement_A(F_1 \cup F_2)\}$



Bemerkung: (1) $\overline{\overline{\overline{\mathcal{F}}}}$ ist die gröbste Partition auf A, die jede der Mengen F_i, $i \in I$, sättigt.

(2) Mit $\mathcal{F}$ besitzt auch $\overline{\overline{\overline{\mathcal{F}}}}$ endlichen Index.

Die für das folgende wesentliche Aussage über die Invarianz stark kongruenter Familien gegenüber der in Definition (1.2) gegebenen Konstruktion wird nun formuliert.

(1.3) Satz: $\mathcal{F} = \{ F_i \;/\; i \in I\}$ sei eine stark kongruente Familie auf (A, Ω).

Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $\overline{\mathcal{F}}$ ist eine stark kongruente Familie auf A.

(b) $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ ist eine stark kongruente Familie auf A.

(c) $\overline{\overline{\overline{\mathcal{F}}}}$ ist eine Kongruenz auf A.

Jede Teilmenge $A' \subset A$ der Ω-Algebra (A, Ω), die von einer stark kongruenten Familie von endlichem Index gesättigt wird, kann ebenso von einer Kongruenz von endlichem Index auf (A, Ω) gesättigt werden.

Die eindeutige Zerlegbarkeit von Elementen in Termalgebren (T_Ω, Ω) läßt nun folgende Aussage zu:

(1.4) Lemma: (T_Ω, Ω) sei die Termalgebra über Ω. $L \subset T_\Omega$ werde von einer kongruenten Familie $\mathcal{F}$ von endlichem Index gesättigt. Dann ist L eine erkennbare Teilmenge von T_Ω (d.h. wird von einer Kongruenz von endlichem Index gesättigt).

Beweis: Aus der Definition (1.1) folgt zusammen mit card(Zerl(t)) ≤ 1, $t \in T_\Omega$, sofort für $t \in F_i$: Zerl(t) = $\mathrm{Zerl}_{\mathcal{F}}(t, F_i)$. Damit ergibt sich alles aus der vorigen Bemerkung.

Als eine Anwendung von Lemma (1.4) wollen wir den bekannten Satz über die Gleichheit der von deterministischen und nichtdeterministischen endlichen Automaten erkannten Wortmengen beweisen.

(1.5) Beh.: $A = (S, X, \delta, S_e, s_a)$, $S_e \subset S$, $s_a \in S$, $\delta \subset S \times X \times S$, sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat. Die von A erkannte Wortmenge aus X^* wird ebenso von einem deterministischen endlichen Automat erkannt.

Beweis: Wir fassen X^* in bekannter Weise als monadische Termalgebra $(T_\Omega, \{f_{x_1}, .., f_{x_n}, \Lambda\})$ auf $(X = \{x_1, .., x_n\})$ und arbeiten von vorneherein mit dieser Identifizierung. Das Mengensystem $\mathcal{F} = \{F_s \,/\, s \in S\}$, $F_s = \{w \in T_\Omega \,/$ w wird von A im Startzustand s erkannt$\}$, ist eine kongruente Familie auf (T_Ω, Ω): Sei also $w \in F_s$ mit Zerl(w) $\neq \emptyset$, d.h. $w = f_x(w')$. Da $w \in F_s$, gibt es ein $s' \in S$ mit $(s,x,s') \in \delta$ und $(s', w', s_e) \in \delta^*$ für ein $s_e \in S_e$, d.h. $w' \in F_{s'}$. Damit ist gezeigt, daß $(f_x, w') \in \mathrm{Zerl}_{\mathcal{F}}(w, F_s)$:

$$\begin{array}{ccc} w & = & f_x(\,w'\,) \\ \cap & & \quad\;\cap \\ F_s & \supset & f_x(\,F_{s'}) \end{array}$$

$\mathcal{F}$ kann nun nach Lemma (1.4) durch eine Kongruenz von endlichem Index verfeinert werden. Dies ist interpretiert in X^* eine Rechtskongruenz, also ein endlicher deterministischer Automat.

GLEICHUNGSDEFINIERTE MENGEN IN ALGEBREN MIT LÄNGENABBILDUNG

Wir wollen nun in der Klasse der Ω-Algebren 'mit Längenabbildung' den Zusammenhang klären zwischen den durch reduzierende kongruente Familien gesättigten Teilmengen von (A, Ω) und den gleichungsdefinierten Teilmengen. Hierbei soll sofort der Gleichungstyp vom Rank = 1 herangezogen werden (dieser Typ ist bzgl. seiner Erzeugungskapazität dem allgemeinen Typ gleichwertig, siehe Mezei, Wright[2], Lemma (3.1)).

(2.0) Def.: (Mezei, Wright[2]). Ein Ω-Gleichungssystem (vom Rank = 1) in den Variablen $X_1, .., X_m$ ist ein System der Form:

$$X_1 = \bigcup_{i \in I_1} t_{1i}, \qquad \ldots \qquad X_m = \bigcup_{i \in I_m} t_{mi} \quad \text{mit } I_1, .., I_m \text{ endlich,}$$

$t_{ji} \in \{f(X_{k_1},..,X_{k_n}) \,/\, f \in \Omega_n,\ X_{k_l} \in \{X_1,..,X_m\}\}$. t_{ji} kann also auch ein nullstelliger Operator sein.

$A' \subset A$ ((A,Ω) sei Ω-Algebra) heißt gleichungsdefiniert, falls A' als Komponente eines minimalen Lösungstupels eines Ω-Gleichungssystems vorkommt.

Bemerkung: Nach allgemeinen verbandstheoretischen Sätzen erhält man die minimale Lösung $(M_1,..,M_m)$ eines Ω-Gleichungssystems in (A,Ω) durch: $M_j^0 = \emptyset$, $M_j^{k+1} = \Big[\bigvee_{i \in I_j} t_{ji}\Big](M_1^k,..,M_m^k)$, $M_j = \bigvee_{i \geqslant 0} M_j^i$ für $j=1,..,m$. $\Big[\bigvee_{i \in I_j} t_{ji}\Big]$ wird in natürlicher Weise aufgefaßt als m-stellige Abbildung von $(\mathfrak{P}(A))^m$ in $\mathfrak{P}(A)$.

Zu einem Gleichungssystem GL bezeichne $\Omega_0(GL)$ die Menge aller auf den rechten Seiten von GL vorkommenden Terme aus Ω_0.

Wir benötigen nun noch folgende Definition :

(2.1) Def.: (A,Ω) sei eine Ω-Algebra, $A_0 \subset \Omega_0$. A_0 heißt 'unwesentlich für $POL(A,\Omega)$ (die Polynommenge von (A,Ω)) , oder auch kurz unwesentlich, falls gilt: $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall p \in Abb(A^n,A)$: $(p \in POL(A,\Omega) \wedge p \notin A_0 \Longrightarrow p \in POL(A,\Omega \setminus A_0))$.

A_0 ist also unwesentlich, falls sich jedes Polynom $p \notin A_0$ in (A,Ω) auch ohne die Elemente aus A_0 aufbauen läßt.

Die Bedeutung unwesentlicher nullstelliger Operationen für die Gleichungsdefiniertheit von Teilmengen ergibt sich aus der folgenden Behauptung :

(2.2) Beh.: (A,Ω) sei eine Ω-Algebra, $A_0 \subset \Omega_0$ sei unwesentlich für $POL(A,\Omega)$. Zu jedem Ω-Gleichungssystem GL in den Variablen $X_1,..,X_m$ mit der minimalen Lösung $(M_1,..,M_m)$ gibt es dann ein Ω-Gleichungssystem $\overline{GL}$ mit $\Omega_0(\overline{GL}) \subset \Omega_0 \setminus A_0$ und der minimalen Lösung $(\overline{M}_1,..,\overline{M}_m)$, wobei $\overline{M}_i = M_i \setminus A_0$ gilt.

Wir legen nun die für unsere Untersuchungen zentrale Klasse von Ω-Algebren fest.

(2.3) Def.: (A,Ω) sei eine Ω-Algebra. $N \in Abb(A,\mathbb{N}_0)$ heißt Längenabbildung für (A,Ω), falls folgendes gilt:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall f \in \Omega_n\ \forall t_1,..,t_n \in A$: $N(f(t_1,..,t_n)) \geqslant N(t_i)$, und '$>$' statt '$\geqslant$', falls $N(t_i) > 0$ für $i=1,..,n$.

(2) $\Omega_0 = N^{-1}(\{0,1\})$.

(3) Die Menge $N^{-1}(\{0\})$ sei unwesentlich für POL(A,Ω).

(4) $\forall t \in A \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists f \in \Omega_n \ \exists t_1,..,t_n \in A : \ (N(t) \geqslant 2 \Longrightarrow$
$t = f(t_1,..,t_n) \wedge N(t_i) < N(t),\ i=1,..,n)$.

Es sind hier folgende Standardbeispiele zu nennen :

(a) Die Termalgebra (T_Ω,Ω) über Ω mit N(t) = Tiefe des Terms t $(N(\Omega_0) = \{1\})$.

(b) Das freie Monoid $(X^*,\{\cdot,\Lambda,x_1,..,x_n\})$, wobei die Erzeugenden $x_1,..,x_n \in X$ als zusätzliche nullstellige Operatoren mitgeführt werden, mit N(w) = Länge von w. $N^{-1}(\{0\})$ ist offensichtlich unwesentlich, da das leere Wort beim Polynomaufbau keine Rolle spielt.

(c) Das freie kommutative Monoid analog (b).

Für Ω-Algebren mit einer Längenabbildung N können wir eine Nichttrivialitätsbedingung für kongruente Familien auf folgende Weise einführen : Sei $t \in A$, unter NTZerl(t) werde die Menge aller nichttrivialen Zerlegungen in A verstanden, d.i. $\mathrm{NTZerl}(t) := \{(f,t_1,..,t_n) \in \mathrm{Zerl}(t) \ / \ 0 < N(t_i)$ für $i=1,..,n\}$. Passend dazu definieren wir $\mathrm{NTZerl}_{\mathcal{F}}(t,F_i) := \mathrm{Zerl}_{\mathcal{F}}(t,F_i) \cap \mathrm{NTZerl}(t)$.

<u>(2.4) Def.:</u> (A,Ω) sei eine Ω-Algebra mit Längenabbildung N. Eine kongruente Familie $\mathcal{F}$ auf (A,Ω) heißt reduzierend, falls :

$$\forall i \in I \ \forall t \in F_i : (\mathrm{NTZerl}(t) \neq \emptyset \Longrightarrow \mathrm{NTZerl}_{\mathcal{F}}(t,F_i) \neq \emptyset).$$

Mit dieser durch den Längenbegriff möglichen Verschärfung des Begriffs der kongruenten Familie können wir den Zusammenhang zu den gleichungsdefinierten Teilmengen herstellen.

<u>(2.5) Satz:</u> (A,Ω) sei eine Ω-Algebra mit der Längenabbildung N.
Die gleichungsdefinierten Teilmengen von A sind genau diejenigen, die durch reduzierende kongruente Familien von endlichem Index gesättigt werden.

Beweis: Wir geben eine kurze Beweisskizze an.

(a) Sei $(M_1,..,M_m)$ die minimale Lösung des Ω-Gleichungssystems GL in den Variablen $X_1,..,X_m$. Dann gibt es ein Gleichungssystem $\overline{GL}$ (vom Rank = 1) mit $\Omega_0(\overline{GL}) \cap N^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ und der minimalen Lösung $(\overline{M}_1,..,\overline{M}_m)$, wobei $\overline{M}_i = M_i \setminus N^{-1}(\{0\})$. Dann ist $\mathcal{F} = \{\overline{M}_i \ / \ i=1,..,m\} \cup \{\{a\} \ / \ a \in \Omega_0\}$

eine reduzierende kongruente Familie von endlichem Index, die jedes M_i sättigt.

(b) Sei umgekehrt $\mathcal{F} = \{F_i / i \in I\}$, $I = \{1,..,m\}$, eine reduzierende kongruente Familie auf (A,Ω). Dann ist die minimale Lösung des Ω-Gleichungssystems :

$$X_1 = \bigcup_{\substack{n \geq 2 \\ f \in \Omega_n \\ f(F_{i_1},..,F_{i_n}) \subset F_1}} f(X_{i_1},...,X_{i_n}) \cup (F_1 \cap \Omega_o) \quad ....$$

$$X_m = \bigcup_{\substack{n \geq 2 \\ f \in \Omega_n \\ f(F_{i_1},..,F_{i_n}) \subset F_m}} f(X_{i_1},...,X_{i_n}) \cup (F_m \cap \Omega_o)$$

gerade $(F_1,..,F_m)$.

Als einfache Folgerungen notieren wir die Aussagen :

(2.6) Korollar: (Mezei, Wright[2]). Gleichungsdefinierte Mengen in Termalgebren (T_Ω,Ω) sind bereits erkennbar.

Beweis: Da T_Ω eine Längenabbildung besitzt, folgt die Behauptung sofort aus Satz (2.5) und Lemma (1.4).

(2.7) Korollar: Reduzierende kongruente Familien von endlichem Index auf freien, endlich erzeugten Monoiden $(X^*, \cdot, \wedge)$ sättigen genau die contextfreien Sprachen.

Beweis: Dies folgt aus dem Zusammenhang contextfreier und gleichungsdefinierter Mengen (siehe Ginsburg, Rice[1]).

Die in der Einleitung angedeutete Möglichkeit, durch den von uns eingeführten Begriff der (reduzierenden) kongruenten Familie beweistechnische Vereinfachungen zu erzielen, soll an der abschließenden Aussage gezeigt werden.

(2.8) Beh.: (A,Ω) sei eine Ω-Algebra (mit Längenabbildung). Die Menge der durch (reduzierende) kongruente Familien von endlichem Index gesättigten Teilmengen von A ist abgeschlossen gegen den Durchschnitt mit erkennbaren Teilmengen von A.

Beweis: Sei $L \subset A$ von der kongruenten Familie $\mathcal{F} = \{F_i / i \in I\}$ und die erkennbare Teilmenge $R \subset A$ von der Kongruenz $\mathcal{K} = \{K_j / j \in J\}$, I,J endlich, gesättigt. Wir zeigen, daß die $L \cap R$ sättigende Familie $\{F_i \cap K_j / i \in I, j \in J\}$ eine kongruente Familie ist:

Für alle $i \in I$, $j \in J$ und $t \in F_i \cap K_j$ mit $\mathrm{Zerl}(t) \neq \emptyset$ ist wegen der Gültigkeit von

$$\begin{array}{ccc} t & = & f(t_1, \ldots, t_n) \\ \pitchfork & & \ \ \pitchfork \qquad \pitchfork \\ F_i & \supset & f(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}) \end{array}$$

für gewisse $f \in \Omega_n$, $t_j \in A$, $F_{i_j} \in \mathfrak{F}$, und der Kongruenzeigenschaft von $\mathcal{K}$ natürlich für $t_k \in K_{j_k}$, $k=1,\ldots,n$, die Gültigkeit von

$$\begin{array}{ccc} t & = & f(t_1, \ldots, t_n) \\ \pitchfork & & \ \ \pitchfork \qquad \pitchfork \\ F_i \cap K_j & \supset & f(F_{i_1} \cap K_{j_1}, \ldots, F_{i_n} \cap K_{j_n}) \end{array}$$

gesichert.

Ebenso wird der Beweis für reduzierende kongruente Familien geführt.

LITERATUR

[1] Ginsburg, S. and H.G. Rice — Two Families of Languages Related to ALGOL. J. ACM No. 9, (1962).

[2] Mezei, J. and J.B. Wright — Algebraic Automata and Contextfree Sets. Inf. and Contr. 11, (1967).

[3] Perrot, J.F. — Monoides syntactique des langages algebriques. Inst. de Programmation, No. I.P. 74-22.

[4] Shepard, C.D. — Languages in General Algebras. Univ. of Illinois, Ph.D. 1969.