TEST D'ISOMORPHIE D'HYPERGRAPHES PLANAIRES

Max FONTET
Institut de Programmation
UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
PARIS

1. INTRODUCTION

Le test d'isomorphie de deux graphes ou de deux hypergraphes est un problème dont on ignore s'il est polynomial complet ou non au sens de la classification des problèmes combinatoires introduite par Karp [10] .

Notre approche de ce problème consiste à utiliser les liens profonds entre le groupe d'automorphismes d'un graphe ou d'un hypergraphe et leurs représentations sur une surface de genre minimum [9]. Ces liens sont particulièrement faciles à mettre en évidence lorsque les hypergraphes sont planaires . En effet, toute représentation planaire d'un hypergraphe connexe est équivalente à la donnée d'une hypercarte [2,8].

Nos résultats fournissent une nouvelle caractérisation des hypercartes planaires (théorème 1) et une formulation algébrique des propriétés de la congruence d'automorphismes de ces hypercartes (théorème 2). Le problème du calcul de cette congruence se réduit alors, au sens de Karp [10], au calcul d'une partition d'imprimitivité associée à une équivalence.

Nous retrouvons ainsi le résultat de Hopcroft et Tarjan [6] sur l'existence d'un test d'isomorphie de deux graphes planaires 3 - connexes en un temps $O(n \log_2 n)$ où n est le nombre de sommets de chaque graphe.

Nous montrons que la même méthode permet de calculer explicitement le groupe d'automorphismes d'un hypergraphe planaire 3-connexe en un temps $O(n^2)$ où n est le nombre de sommets de l'hypergraphe (théorème 3).

2. GENERALITES - DEFINITIONS

Nous rappelons qu'une carte C est un triplet (B, α, σ) formé d'un ensemble B dont les éléments sont appelés brins et d'un couple de permutations (α, σ) de $\mathfrak{S}_B$ engendrant un groupe de permutations transitif sur B tel que α soit une involution sans point fixe.

Edmonds [3] en établissant l'identité entre cette notion combinatoire de carte et la notion de carte topologique définie sur une surface orientée a permis une approche de ces problèmes topologiques.

Cori [2] a étendu ces résultats aux hypergraphes en introduisant la notion d'hypercarte qui est une carte pour laquelle on supprime la restriction sur la permutation α.

Etant donné un hypergraphe [1] $\mathcal{H}=(X,\mathcal{E})$ avec $\mathcal{E}=\{E_y ; y \in Y, E_y \subset X\}$, on peut lui associer son graphe d'incidence $\mathcal{G} = (X \cup Y, R)$ défini par : $(x,y) \in R$ ssi $x \in E_y$. On constate alors que l'hypergraphe $\mathcal{H}$ et le graphe $\mathcal{G}$ ont les mêmes propriétés algébriques. En particulier, il existe une correspondance canonique entre les hypercartes de $\mathcal{H}$ et les cartes de $\mathcal{G}$ [2,14].

Pour énoncer nos résultats, définissons une notion de cheminement sur les cartes qui s'étend aux hypercartes par l'intermédiaire de la correspondance précédente. Etant donné une carte $C = (B, \alpha, \sigma)$, on appelle chemin une suite de brins $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ telle que $b_i = b_{i-1}\alpha\,\sigma^{k_i}$ $(k_i \in Z)$. Un circuit sera un chemin tel que $b_1 = b_n$ et une face un circuit tel que soit $k_i = 1$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$, soit $k_i = -1$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$.

3. RESULTATS

3.1. Caractérisation des hypercartes planaires

Notre premier théorème donne une caractérisation des hypercartes planaires par un théorème équivalent au théorème de Mac Lane pour les graphes planaires [10].

THEOREME I : Une hypercarte 2 - connexe est planaire ssi pour tout circuit c, il existe une face f telle que $c \cap f$ soit un chemin.

La preuve de ce théorème se fait par réduction du problème à un problème analogue sur les cartes que l'on prouve être équivalente à une formulation du théorème de Mac Lane adaptée aux cartes [5].

3.2. Caractérisation de la congruence d'automorphismes d'une hypercarte.

A tout brin b d'une hypercarte H, on associe le quadruplet d'entiers (t, u, v, w) où t (resp. u, v, w) est la longueur du cycle de α (resp. $\sigma, \sigma\alpha, \alpha\sigma$) contenant b.

Nous définissons comme Hopcroft et Tarjan [6] une équivalence d'indiscernabilité I_H sur les brins de l'hypercarte H par :

$$b \; I_H \; b' \Leftrightarrow (t, u, v, w) = (t', u', v', w')$$

Soit $\hat{I}_H$ la congruence la plus grossière contenue dans I_H. Soit ρ_H la congruence d'automorphismes de l'hypercarte H.

THEOREME 2 : Soit H une hypercarte planaire 2-connexe, on a alors $\hat{I}_H = \rho_H$.

La preuve de ce théorème se trouve en appendice.

On déduit du théorème les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 1 : Pour un hypergraphe $\mathcal{H}$ planaire 3-connexe, le calcul de la congruence d'automorphismes se réduit, au sens de Karp [10], au calcul de $\hat{I}_H$ pour l'une de ses représentations H.

COROLLAIRE 2 : Pour tester l'isomorphisme de deux hypergraphes planaires 3-connexes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$, il suffit de calculer $\hat{I}$ pour une représentation de $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$ où l'un des deux hypergraphes est représenté entièrement dans une face de la représentation de l'autre.

Le calcul de $\hat{I}_H$ se fait en étendant aux hypergraphes, selon la méthode de Penaud [12], l'algorithme de Hopcroft et Tarjan [6] convenablement adapté.

3.3. Calcul du groupe d'automorphismes d'un hypergraphe planaire 3-connexe.

Les représentations d'un hypergraphe $\mathcal{H}$ planaire 3-connexe sont données par deux hypercartes $H = (B, \alpha, \sigma)$ et $H^{-1} = (B, \alpha^{-1}, \sigma^{-1})$. Le groupe d'automorphismes de $\mathcal{H}$ est induit par l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_B$ qui commutent avec les permutations α et σ ou qui les inversent. Ces permutations se caractérisent par leurs décompositions en produit d'involutions [4]. On obtient ainsi le résultat suivant:

THEOREME 3 : Le calcul effectif des éléments du groupe d'automorphismes d'un hypergraphe planaire 3-connexe peut se faire en un temps proportionnel au carré du nombre de sommets de l'hypergraphe .

4. CONCLUSION

Nos résultats donnent une justification simple de l'algorithme de Hopcroft et Tarjan et nous en obtenons une extension et une application. L'intérêt de cet algorithme reste entier bien que Hopcroft et Wong aient fourni un algorithme de test de l'isomorphie de deux graphes planaires en un temps linéaire [6]. De leur avis même, cet algorithme n'est pas efficace à cause d'une constante très élevée et n'a donc qu'un intérêt théorique.

Nous venons d'obtenir un nouvel algorithme effectuant le test de l'isomorphie de deux hypergraphes planaires en temps linéaire ; nous en testons actuellement l'efficacité.

APPENDICE

PREUVE DU THEOREME 2

La première étape de la preuve consiste à réduire le problème à un problème identique sur les cartes. Pour cela, on associe à l'hypercarte $H = (B, \alpha, \sigma)$ une carte bipartie $C = (B', \alpha' \sigma')$ définie comme suit :

$$B' = B \times \{0, 1\}$$
$$(b, 0)\,\sigma' = (b\sigma, 0) \qquad (b,0)\,\alpha' = (b,1)$$
$$(b, 1)\,\sigma = (b\alpha, 1) \qquad (b,1)\,\alpha' = (b,0)$$

L'hypercarte H est planaire ssi la carte C l'est [14] ; de même, l'hypercarte H est 2-connexe ssi la carte C l'est.

Les congruences d'automorphismes et d'indiscernabilité de H et de C sont reliées par la proposition suivante :

PROPOSITION 1 :

$$b\ \hat{I}_H\ b' \Leftrightarrow (b,1)\ \hat{I}_C\ (b',1) \Leftrightarrow (b,0)\ \hat{I}_C\ (b',0)$$
$$b\ \rho_H\ b' \Leftrightarrow (b,1)\ \rho_C\ (b',1) \Leftrightarrow (b,0)\ \rho_C\ (b',0)$$

PREUVE : Etant donné un brin b de l'hypercarte H, on note (t, u, v, w) le quadruplet associé définissant I_H. Le quadruplet associé au brin (b, 0) de la carte C est alors (2, u, 2v, 2w) et celui associé au brin (b,1) (2, t, 2w, 2v). On a donc

$$b\ I_H\ b' \Leftrightarrow \begin{cases}(b,0)\ I_C\ (b',0)\\(b,1)\ I_C\ (b',1)\end{cases}$$

On en déduit la caractérisation de $\hat{I}_H$ en regardant l'action de α, σ (resp. α', σ') sur les classes ainsi définies.

La caractérisation de ρ_H traduit le fait qu'un automorphisme de H définit un automorphisme de C et qu'inversement un automorphisme de C respectant la coloration des brins définit un automorphisme de H.

On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1 :

$$\hat{I}_H = \rho_H \Leftrightarrow \hat{I}_C = \rho_C$$

Introduisons quelques définitions supplémentaires sur le cheminement dans une carte.

Un circuit est élémentaire ssi les brins extrèmes sont les seuls brins égaux.

Un circuit (resp. chemin) est propre ssi aucuns brins ne se correspondent dans l'involution α.

Un circuit est complétement impropre ssi tous les brins se correspondent deux à deux dans l'involution α.

Deux chemins $C = (b_1, \dots, b_n)$ et $C' = (b'_1, \dots b'_{n'})$ se correspondent ssi $n = n'$ et $k_i = k'_i$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$.

On a immédiatement le lemme suivant :

Lemme : Dans une carte C, tout circuit se décompose en circuits élémentaires propres et en circuits élémentaires complétement impropres.

Nous avons une première caractérisation de la congruence d'automorphismes d'une carte par la proposition suivante :

PROPOSITION 2 :

Etant donnée une carte C, ρ_C est la congruence θ la plus grossière telle que si deux brins sont congrus modulo θ, tout circuit contenant l'un des brins correspond à un circuit contenant l'autre.

PREUVE : On note G le groupe engendré par les permutations α et σ, et G_b le sous-groupe de G fixant le brin b .

Cette proposition est la traduction d'un résultat classique sur les automates [13] affirmant que ρ_C est la congruence θ la plus grossière telle que

$$b \equiv b' \quad \bmod \theta \Leftrightarrow G_b = G_{b'}$$

On obtient l'énoncé donné en remarquant qu'il y a une bijection entre les éléments de G_b et les circuits contenant b ou $b\alpha$.

Il est maintenant possible de terminer la preuve du théorème 2 :

Preuve du théorème 2

Un automorphisme de carte échange respectivement les sommets, les arêtes et les faces de la carte ; il conserve en particulier leur cardinalité. On a donc : $\rho_C \subseteq \hat{I}_C$

Pour avoir l'inclusion dans l'autre sens, il suffit de montrer d'après la proposition 2 que si deux brins sont indiscernables, tout circuit contenant l'un correspond à un circuit contenant l'autre. On peut ne considérer que des circuits élémentaires propres ou des circuits élémentaires complétement impropres en vertu du lemme sur la décomposition des circuits.

Un circuit élémentaire complétement impropre contenant un brin b se décompose en deux chemins propres disjoints l'un contenant b et l'autre contenant $b\alpha$. On est donc ramené exclusivement à des chemins ou des circuits propres.

Il suffit alors de montrer que si deux brins sont indiscernables, tout circuit élémentaire propre contenant l'un correspond à un circuit contenant l'autre.

Le théorème 1 fournit une décomposition en faces de tout circuit élémentaire propre. D'après la définition de l'indiscernabilité, si deux brins b et b' sont indiscernables, une face contenant l'un correspond à une face contenant l'autre. On montre alors par récurrence sur le nombre de faces définissant une décomposition d'un circuit élémentaire propre que si deux brins b et b' sont indiscernables, un circuit élémentaire propre contenant l'un correspond à un circuit élémentaire propre contenant l'autre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE, C. : Graphes et hypergraphes Dunod 1970.

[2] CORI, R. : Un code pour les graphes planaires et ses applications Thèse PARIS 1973 .

[3] EDMONDS, J.R. : A combinatorial representation for oriented polyhedral surfaces M.A. Thesis University of Maryland (U.S.A.) 1960.

[4] FONTET, M. : Un résultat en théorie des groupes de permutations et son application au calcul effectif du groupe d'automorphismes d'un automate fini dans 2nd Colloquium on Automata, languages and programming Saarbrücken (1974) 335-341.

[5] FONTET, M. : Une caractérisation des hypercartes planaires (en préparation)

[6] HOPCROFT, J.E., R.E. TARJAN : A V log V algorithm for isomorphism of triconnected planar graphs J C S S 7 323-331 (1973)

[7] HOPCROFT, J.E., WONG : Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (Preliminary report) 6th ACM SIGACT (1974)

[8] JACQUES, A. : Sur le genre d'une paire de substitutions, C.R. Acad. Sci. PARIS 267 625-627 (1968)

[9] JACQUES, A. : Constellations et propriétés algébriques des graphes topologiques Thèse 3ème cycle PARIS 1969.

[10] KARP, R.M. : Reducibility among combinatorial problems in Complexity of computer computations Plenum Press IBM Symposium (1972)

[11] MAC LANE, S. : A structural characterisation of planar combinatorial graphs Duke Math. 3 460-472 (1937)

[12] PENAUD, J.G. : Quelques propriétés des hypergraphes planaires - Thèse Docteur - Ingénieur Bordeaux 1974.

[13] PERRIN, D., PERROT, J-F. : Congruences et automorphismes des Automates finis Acta Informatica 1 159-172 (1971)

[14] WALSH, R.S. : Hypermaps versus bipartite maps , J. Comb. Theory (B) 18 155-163 (1975)