PROBLEMES DE STABILITE NUMERIQUE POSES PAR LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES

J.J. SMOLDEREN
Directeur de l'Institut von Karman
Professeur à l'Université de Liège

1. Introduction

Un certain nombre de questions importantes de mécanique des fluides font intervenir des équations et systèmes aux dérivées partielles de type hyperbolique. Citons, en particulier, les écoulements instationnaires de fluides compressibles non visqueux, et les écoulements supersoniques stationnaires. Il faut signaler aussi que le traitement numérique de problèmes stationnaires complexes nécessite souvent une approche évolutive, naturelle ou artificielle, dans laquelle l'état stationnaire est obtenu comme limite d'une évolution instationnaire à partir de conditions initiales choisies plus ou moins arbitrairement. En l'absence d'effets dissipatifs, une telle approche conduit également à des systèmes différentiels hyperboliques.

La plupart des problèmes hyperboliques rencontrés en mécanique des fluides font intervenir des conditions aux limites imposées aux frontières du champ d'écoulement. Par exemple, la condition d'annullation de la composante normale de la vitesse, imposée en chaque point d'une paroi solide.

Dans le cas des écoulements supersoniques stationnaires, il est généralement possible d'identifier des conditions d'entrée ou d'amont, qui jouent le même rôle que les conditions initiales de problèmes instationnaires, et des conditions latérales, souvent imposées sur des lignes de courant, qui peuvent être assimilées aux conditions aux limites de ces problèmes.

La solution de systèmes hyperboliques par la méthode des différences finies peut être effectuée explicitement, en progressant de proche en proche suivant la variable temporelle dans les problèmes instationnaires, ou suivant une variable spatiale convenablement choisie dans le problème supersonique stationnaire. Les méthodes partiellement ou totalement implicites, qui nécessitent à chaque étape, la solution d'un grand système algébrique d'équations couplées, ne seront pas abordées dans le présent travail.

Il est connu que la méthode de progression explicite conduit souvent à des instabilités numériques. Il est donc très utile, en pratique, de disposer d'un critère permettant de vérifier si un schéma aux différences finies sera stable ou non. Lorsqu'il s'agit d'équations ou de systèmes aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants, traitées par un maillage uniforme et en l'absence de conditions aux limites, la question est résolue par la condition nécessaire classique de von Neumann (Ref. 1), concernant le module des valeurs propres de la matrice d'amplification de modes de Fourier numériques. Un certain nombre de conditions suffisantes ont été établies (Ref. 2) et Kreiss a étendu la théorie de la stabilité aux systèmes linéaires à coefficients variables (Ref. 3). Les problèmes non liné - aires sont évidemment beaucoup plus ardus et l'étude de leur stabilité ne peut être abordée qu'après une linéarisation par rapport à de petites perturbations.

Le critère classique de von Neumann ne s'applique pas, en général, aux problèmes qui font intervenir des conditions aux limites, parce que les modes de Fourier considérés sont le plus souvent incompatibles avec ces conditions.

De nombreux exemples ont d'ailleurs illustré le fait que des instabilités peuvent se manifester dans le traitement de tels problèmes, même si le schéma aux différences utilisé satisfait largement le critère de von Neumann, confirmant ainsi le point de vue adopté par Moretti (Ref. 4) au cours d'une longue controverse au sujet d'instabilités rencontrées dans le traitement des équations de la mécanique des fluides.

La présente note est consacrée à cet aspect de la théorie de la stabilité numérique. La variété des types d'instabilité induites par la présence de conditions aux limites sera illustrée par des exemples et une importante condition nécessaire de stabilité sera examinée d'un point de vue élémentaire, sans prétendre à la rigueur mathématique. Ces résultats peuvent être d'ailleurs justifiés rigoureusement en faisant appel à la théorie de Godunov et Ryabenkii (Refs. 5 et 6).

Il est important de réaliser qu'un calcul explicite, de proche en proche, nécessite souvent des conditions aux limites plus nombreuses que le problème physique considéré ou que le système aux dérivées partielles qui le représente. En effet, l'utilisation de schémas de discrétisation d'ordre de précision supérieur au premier pour le traitement des dérivées spatiales, nécessitera toujours l'introduction de conditions aux limites additionnelles de nature essentiellement numérique. Le choix de ces conditions reste arbitraire dans une large mesure, même si l'on satisfait aux exigences de la précision.

Malheureusement, un choix apparemment raisonnable peut conduire à des instabilités imprévues, si courantes en analyse numérique.

D'autre part, de nombreux problèmes de mécanique des fluides tels que les écoulements en conduites et les écoulements en champ infini, requièrent l'introduction de conditions d'entrée et de sortie ou de conditions représentant le champ à grande distance. De telles conditions, qui représentent, dans beaucoup de cas, des approximations plus ou moins grossières, ne sont pas entièrement définies par des considérations physiques et leur choix reste donc également arbitraire, dans une certaine mesure. Il faut donc s'attendre à l'apparition de problèmes de stabilité analogues à ceux qui sont introduits par les conditions additionnelles.

L'utilité d'un critère de stabilité permettant d'orienter le choix des conditions additionnelles et des conditions à l'entrée, à la sortie et au large, est donc évidente.

L'intérêt d'un tel critère ne se limite d'ailleurs pas au choix de conditions aux limites numériques ou mal définies, comme le montre l'exemple du paragraphe 4, où des conditions aux limites naturelles créent des instabilités, le schéma utilisé étant du premier ordre et stable au sens de von Neumann.

2. Stabilité numérique en présence de conditions aux limites

Les aspects essentiels du problème de la stabilité du traitement numérique des problèmes aux limites pour les équations et systèmes hyperboliques linéaires à coefficients constants, peuvent être mis en évidence en traitant le cas le plus simple d'une équation à une seule fonction inconnue de deux variables indépendantes t, x. Le domaine considéré sera défini par

$$t > t_0 \qquad x_0 < x < X$$

et un maillage uniforme sera utilisé, les points mailles étant

$$t_k = t_0 + k\Delta t \quad (k = 0,1,2,\dots) \quad \text{et} \quad x_j = x_0 + j\Delta x \quad (j = 0,1,2,\dots,N)$$

u_j^k désignera la valeur approchée de la fonction inconnue au point (t_k,x_j) du maillage.

Des conditions initiales seront donnees en $t = t_0$, ce qui se traduira, généralement, dans la version discrète, par un certain nombre de relations liant les valeurs de u_j^k pour $k = 0,-1,-2$, etc.

Des conditions aux limites seront imposées soit pour $x = x_0$, soit pour $x = X$ et même, dans le cas général, en ces deux points frontières.

L'analyse classique de von Neumann est basée sur l'étude de solutions particulières de l'équation discrétisée à variables discretes séparées, du type

$$u_j^k = (\text{const})\, \rho^k \lambda^j \tag{2.1}$$

Les modes de Fourier discrets analogues des composantes de Fourier d'une fonction d'une variable continue, s'obtiennent en remplaçant λ par les exponentielles complexes

$$\lambda_n = \exp\left(\frac{i\pi n}{N}\right) \qquad (n = 0,1,2,\ldots,N) \tag{2.2}$$

Il en résulte un système complet de fonctions discrètes pour le maillage spatial considéré.

Pour qu'une expression, à variables séparées, du type (2.1) soit solution de l'équation linéaire aux différences finies, obtenue par discrétisation de l'équation hyperbolique proposée, ρ et λ doivent satisfaire une relation algébrique :

$$F(\rho,\lambda) = 0 \tag{2.3}$$

Cette relation caractéristique du schéma de discrétisation s'obtient en substituant l'expression (2.1) dans l'équation aux différences finies (après élimination d'un facteur commun $\rho^k\lambda^j$).

Le critère de von Neumann s'obtient en remplaçant λ par les valeurs (2.2) dans cette relation et en exprimant que toutes les valeurs correspondantes de l'amplification temporelle ρ ont un module inférieur à $\{1 + O(\Delta t)\}$.

Ce critère n'est cependant pas généralement applicable, en présence de conditions aux limites, car les modes de Fourier (2.1), (2.2) ne sont compatibles qu'avec des conditions aux limites homogènes très particulières.

Nous devons donc rechercher d'autres familles, aussi complètes que possible, de solutions simples compatibles avec les conditions aux limites homogènes du problème et étudier leur comportement, borné ou divergent, en fonction de la variable discrète k qui définit l'évolution du calcul.

Nous n'envisageons que les conditions aux limites qui peuvent s'exprimer par des relations linéaires et homogènes, à coefficients constants, liant les valeurs de u en quelques points du maillage voisins de la frontière. A la frontière $x = x_0$, ces relations seront de la forme générale

$$\sum_{j=0}^{j_1} \sum_{\ell=0}^{\ell_1} a_{j\ell}\, u_j^{k-\ell} = 0 \qquad (k = 1,2,\dots) \qquad (2.4)$$

Les coefficients $a_{j\ell}$ sont donnés et j_1, ℓ_1 représentent des entiers dépendant de l'ordre de l'équation différentielle étudiée.et de l'ordre de précision de la discrétisation.

Les relations imposées à la frontière $x = X$ seront de type analogue :

$$\sum_{j=0}^{j_2} \sum_{\ell=0}^{\ell_2} b_{jk}\, u_{N-j}^{k-\ell} = 0 \qquad (k = 1,2,\dots) \qquad (2.5)$$

Il est évidemment toujours possible de combiner des solutions à variables séparées, de type (2.1), correspondant à la même valeur de ρ, de façon à satisfaire certaines relations du type (2.4) ou (2.5), pour toutes valeurs de k.

En effet, la relation caractéristique (2.3) considérée, pour ρ fixé, comme une équation algébrique en λ, possèdera un certain nombre de racines λ_1, λ_2, ..., λ_r, r étant le degré de l'équation (2.3) par rapport à λ. Ces racines seront, en général, des fonctions du paramètre ρ. (Nous n'examinerons pas le cas des racines multiples). Dans le cas simple examiné ici, r sera le produit de l'ordre de l'équation hyperbolique par l'ordre de précision de la discrétisation utilisée.

Une combinaison de la forme

$$u_j^k = \rho^k \left(A_1\lambda_1^j + \dots + A_r\lambda_r^j\right) \qquad (2.6)$$

sera solution de l'équation aux différences finies, et la substitution de cette expression dans des conditions de la forme (2.4), (2.5) fournira une relation entre les constantes arbitraires A.

Le processus numérique ne sera donc possible et déterminé que si le nombre de conditions aux limites (2.4), (2.5) est égal à r. En particulier, ce nombre devra être supérieur à l'ordre de l'équation, si la discrétisation utilisée possède une précision d'ordre supérieur à l'unité.

Admettant que nous ayons ainsi choisi r conditions aux limites adéquates, l'expression (2.6) sera solution de notre problème homogène, à condition que les r constantes A satisfassent un système algébrique de r équations linéaires homogènes. Une solution non triviale n'existera donc que si le déterminant du système est nul, condition qui fournit une relation algébrique liant ρ, λ_1, ..., λ_r. Or les λ_1, ..., λ_r, racines de l'équation (2.3) sont des fonctions algébriques, généralement implicites de ρ, de sorte que la condition de compatibilité peut être ramenée à une équation algébrique, généralement très complexe, en ρ. Les racines ρ_ν de cette équation peuvent être considérées comme des valeurs propres pour notre problème homogène. Les valeurs correspondantes de λ: $\lambda_{\nu 1}$, ..., $\lambda_{\nu r}$ permettront alors de construire des solutions de type (2.6) compatibles avec les r conditions aux limites (naturelles et additionnelles).

Une condition nécessaire de stabilité tout à fait analogue à celle de von Neumann peut donc en être immédiatement déduite, en exprimant tout simplement que les amplifications temporelles ρ_ν des modes compatibles possèdent un module inférieur à $\{1 + \theta(\Delta t)\}$.

En général, les modules des valeurs correspondantes $\lambda_{\nu q}$ $(q = 1,...,r)$ de λ seront différentes de l'unité, de sorte que le nouveau critère de stabilité ne pourra être entièrement équivalent au critère de von Neumann. En fait, il est souvent plus restrictif comme le montreront les considérations et les exemples qui suivent.

L'application concrète du critère présenté paraît cependant conduire à des difficultés algébriques pratiquement insurmontables. En effet, l'existence simultanée de conditions aux limites en $x = x_0$ et en $x = X$ introduit nécessairement des termes en $\lambda_{\nu q}^N$ dans le déterminant du système algébrique des constantes A. L'équation aux valeurs propres ρ_ν possèdera donc un degré croissant très rapidement avec N, nombre qui est, en principe, très élevé. Une étude asymptotique, pour N tendant vers l'infini, semble donc en particulier, présenter des difficultés transcendantes.

Les développements qui vont suivre tendent à montrer que la situation n'est pas aussi inextricable, grâce à une propriété fondamentale, en vertu de laquelle le nombre des modes compatibles instables éventuels est toujours limité, quel que soit le nombre N des mailles.

3. Modes instables de frontière

Les modes compatibles avec les conditions aux limites forment une famille analogue à celle des modes de Fourier et qui comporte le même nombre d'éléments, nombre qui tend d'ailleurs vers l'infini avec le nombre de mailles N. Les propriétés de cette nouvelle famille sont cependant beaucoup plus complexes que celles des modes de Fourier ortho-normés. En particulier, les coefficients de la représentation de conditions initiales quelconques comme combinaison linéaire de modes compatibles, peuvent présenter des comportements anormaux lorsque N tend vers l'infini. L'utilisation de ces modes en vue de la représentation générale des solutions des équations aux différences finies est donc peu commode.

Dans l'étude de la stabilité, nous pouvons cependant nous limiter à l'examen des modes instables éventuels $\left(|\rho| > 1 + \theta(\Delta t)\right)$ et nous allons établir que le nombre de tels modes est toujours borné, quel que soit le nombre des mailles N à condition que le critère de von Neumann soit satisfait. Cette propriété fondamentale, qui simplifie considérablement l'analyse de la stabilité en présence de conditions aux limites, découle d'un découplage remarquable qui se manifeste, pour $N \to \infty$, entre les influences des conditions aux limites appliquées aux différentes frontières.

Nous allons tenter de donner une justification plausible à ces conclusions, sans entrer dans les détails algébriques.

Remarquons, tout d'abord, que la relation caractéristique (2.3) fait correspondanre à chaque point du plan complexe λ, un certain nombre de points du plan complexe ρ. Le critère de von Neumann peut être interprété de la façon suivante: les images des points du cercle unitaire $|\lambda| = 1$, lieu des points représentatifs des modes de Fourier spatiaux, doit nécessairement être contenu (à la limite $\Delta t \to 0$), dans le disque unitaire $|\rho| \leq 1$ du plan ρ.

Les r valeurs de λ correspondant à un mode instable ($|\rho| > 1$) ne peuvent donc être de module unitaire, ce qui permet de les classer en deux groupes suivant que leur module est inférieur ou supérieur à l'unité :

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, s; \qquad |\lambda_i| > 1 \quad \text{pour } i = s+1, \ldots, r.$$

Il est facile de voir que le nombre s des λ de module inférieur à l'unité est indépendant de ρ, pour $|\rho| > 1$. En effet, ce nombre ne peut varier que si un point représentatif de ρ traverse l'image du cercle unitaire $|\lambda| = 1$, ce qui est impossible tant que le module de ρ reste supérieur à l'unité, en vertu du critère de von Neumann.

Cette remarque nous permet d'évaluer le nombre s dans un cas particulier, et le passage à la limite $|\rho| \to \infty$ conduit le plus rapidement au résultat.

En effet, la relation caractéristique (2.3) (non réduite au même dénominateur) comporte des termes en ρ et en les puissances de $\frac{1}{\rho}$, et une série de termes faisant intervenir des puissances positives de λ et de $\frac{1}{\lambda}$. Lorsque ρ tendra vers l'infini, certaines racines λ tendront vers l'infini et d'autres vers zéro. Ce sont ces dernières qui nous intéressent car leur module sera nécessairement inférieur à l'unité. La multiplicité de ces racines est évidemment égale à la puissance la plus élevée de $\frac{1}{\lambda}$ qui apparaît dans la relation caractéristique non réduite.

Or cette puissance représente le nombre d'indices inférieurs à j apparaissant dans l'équation aux différences finies correspondant a la maille (k,j). Cette équation fait donc intervenir les valeurs u_{j-s}, u_{j-s+1}, ..., u_j, u_{j+1}, etc.

Il est clair que le nombre de conditions requises à la frontière $x = x_0$ pour déterminer le processus numérique sera égal à s. Nous pouvons donc conclure que pour chaque valeur de ρ de module supérieur a l'unité, qui pourrait fournir éventuellement un mode instable, correspondent des valeurs de λ de module inférieur à l'unité en nombre égal au nombre s de conditions a imposer en $x = x_0$ et des valeurs de λ de module supérieur à l'unité dont le nombre r-s est égal à celui des conditions à imposer en $x = X$.

Essayons maintenant d'imaginer la configuration du déterminant du système linéaire de r équations à r inconnues A_1, ..., A_r qui s'obtient en écrivant que le mode considéré (2.) satisfait les r conditions aux limites. Ce déterminant peut être décomposé suivant le schéma suivant :

	s colonnes pour $A_1 \dots A_s$	(r-s) colonnes pour $A_{s+1} \dots A_r$		
s conditions en $x = x_0$	I termes en $\lambda_1 \dots \lambda_s$	II termes en $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$		
(r-s) conditions en $x = x_N = X$	III termes en $\lambda_1^N \dots \lambda_s^N$ etc.	IV termes en $\lambda_{s+1}^N, \dots \lambda_r^N$ etc.	= 0	(3.1)

Lorsque le nombre de mailles tendra vers l'infini, les termes du bloc (IV) domineront tous les autres, puisque les modules des $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$ sont supérieurs à l'unité. Si nous développons le déterminant par la règle des mineurs associés, en utilisant les déterminants (s×s) formés à partir des premières colonnes et des déterminants (r-s)×(r-s) formés à partir des r-s des autres colonnes, le terme principal sera évidemment

{déterminant (I)} × {déterminant (IV)}

Tous les autres produits seront négligeables par rapport à ce terme, pour $N \to \infty$, car ils feront intervenir un déterminant (r-s)×(r-s) qui comportera moins de r-s lignes comprenant des termes dominants en $\lambda_{s+1}^N, \dots, \lambda_r^N$.

A la limite $N \to \infty$, l'équation qui définit les modes de frontière se réduira, pour $|\rho| > 1$, à la forme

$$\{\det(I)\} \times \{\det(IV)\} = 0$$

Les racines ρ seront donc obtenues en considérant séparément les équations

$$\det (I) = 0 \tag{3.2}$$

$$\det (IV) = 0 \tag{3.3}$$

La première ne fait intervenir que les conditions aux limites en $x = x_0$ et la seconde les conditions aux limites en $x = X$. C'est la propriété de découplage annoncée.

De plus, il est clair que les colonnes du déterminant (IV) possèdent des facteurs communs $\lambda^N_{s+1}, \ldots, \lambda^N_r$ qui peuvent être supprimés (car les λ sont de module supérieur à l'unité, donc différents de zéro). Il en résulte que le nombre de mailles N n'apparaîtra plus dans la seconde equation, de sorte que le nombre de solutions possibles de l'equation en ρ est indépendant de N pour $|\rho| > 1$.

Nous pouvons donc maintenant définir, du moins pour $N \to \infty$, des modes instables de frontière pour la frontière $x = x_0$ et des modes instables de frontière pour la frontière $x = X$. Les premiers seront de la forme

$$u^k_j = \rho^k \; (A_1\lambda^j_1 + \ldots + A_s\lambda^j_s) \tag{3.4}$$

où

$$|\rho| > 1, \qquad |\lambda_1| < 1, \ldots, |\lambda_s| < 1 \tag{3.5}$$

Un système linéaire homogène de s équations pour les s inconnues $A_1, \ldots, A_s$ s'obtiendra en exprimant que les s conditions homogènes imposées à la frontière $x = x_0$ sont satisfaits. Une telle solution non triviale ne peut exister que si l'équation (3.2) est satisfaite. Cette équation fournira les valeurs possibles de ρ et λ.

L'existence de tels modes n'est pourtant pas garantie, puisque les valeurs de ρ et λ ainsi obtenues ne satisfont pas nécessairement les inégalités (3.5).

En fait, la condition nécessaire qui résulte de cette analyse est tout simplement la suivante: Il ne peut pas exister de mode instable à la frontière compte tenu des conditions aux limites appliquées. C'est la condition de Godunov-Ryabenkii.

La définition des modes instables à la frontière $x = X$ est tout à fait analogue, les modules des λ étant, cette fois, supérieurs à l'unité.

Avant d'ullustrer ces développements par des exemples choisis pour leur simplicité, il ne semble pas inutile d'insister sur les difficultés algébriques posées par l'étude des modes instables de frontière dans les applications pratiques.

Le fait que l'équation algébrique en ρ, dont le degré croît avec N, se réduise pour les modes instables à deux équations de degrés très limités (s et r-s) représente, certes, une simplification très spectaculaire.

Néanmoins, la discussion paramétrique, dans le plan complexe, de solutions d'équations algébriques, même de degré relativement bas, en présence de conditions auxiliaires de type (3.5), présente souvent des difficultés nettement plus considérables que la mise en oeuvre du critère de von Neumann. Cette discussion nécessite souvent l'utilisation d'un ordinateur et il y a lieu de craindre qu'elle ne conduise, dans certains cas, à des temps de calcul non négligeables par rapport au temps de calcul requis par la solution de l'équation aux dérivées partielles.

4. Exemple d'instabilité induite par des conditions aux limites naturelles

Considérons le systèmes hyperbolique du second ordre pour les deux fonctions inconnues u,v des variables t,x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4.1}$$

Ce système est équivalent à l'équation normalisée des ondes dans un espace à une dimension.

Les conditions aux limites seront du type classique :

$$u \text{ (ou } v) \text{ donné aux frontières } x = x_0 \quad \text{et} \quad x = X \tag{4.2}$$

Une discrétisation du premier ordre de précision peut être obtenue par l'artifice suivant : deux combinaisons linéaires indépendantes des équations (4.1) sont formées à l'aide de deux constantes distinctes α, β:

$$\frac{\partial(u+\alpha v)}{\partial t} + \frac{\partial(v+\alpha u)}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial(u+\beta v)}{\partial t} + \frac{\partial(v+\beta u)}{\partial x} = 0$$

Les dérivées par rapport à t sont discrétisées en utilisant des différences avant. La dérivée par rapport à x dans la première équation sera discrétisée en utilisant également des différences avant, mais des différences arrières seront utilisées pour la discrétisation, selon x, de la seconde équation. Le schéma de discrétisation ainsi obtenu s'écrit donc :

$$u_j^{k+1} - u_j^k + \alpha(v_j^{k+1} - v_j^k) + c\{v_{j+1}^k - v_j^k + \alpha(u_{j+1}^k - u_j^k)\} = 0 \qquad (4.3)$$

$$u_j^{k+1} - u_j^k + \beta(v_j^{k+1} - v_j^k) + c\{v_j^k - v_{j-1}^k + \beta(u_j^k - u_{j-1}^k)\} = 0 \qquad (4.4)$$

où c désigne le nombre de Courant

$$c = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

La généralisation de la méthode de séparation des variables au cas des systèmes discrétisés est immédiate et consiste à étudier des solutions de la forme

$$u_j^k = U_k \lambda^j, \qquad v_j^k = V_k \lambda^j$$

Introduisant ces expressions dans les équations discrétisées et en les résolvant par rapport à U_{k+1} et V_{k+1}, nous obtiendrons

$$U_{k+1} = \{1 + \frac{\alpha\beta c}{\alpha-\beta}(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2)\}\, U_k + c\,\frac{\beta\lambda + \frac{\alpha}{\lambda} - (\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}\, V_k$$

$$V_{k+1} = c\,\frac{\alpha+\beta-\alpha\lambda-\frac{\beta}{\lambda}}{\alpha-\beta}\, U_k + \{1 + \frac{c}{\alpha-\beta}(2 - \lambda - \frac{1}{\lambda})\}\, V_k$$

La matrice d'amplification est donc donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\alpha\beta c}{\alpha-\beta}(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2) & c\,\frac{\beta\lambda + \frac{\alpha}{\lambda} - (\alpha+\beta)}{\alpha-\beta} \\ c\,\frac{\alpha+\beta-\alpha\lambda-\frac{\beta}{\lambda}}{\alpha-\beta} & 1 + \frac{c}{\alpha-\beta}(2-\lambda-\frac{1}{\lambda}) \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres ρ de cette matrice satisfont l'équation caractéristique du schéma (4.3), (4.4) :

$$\begin{vmatrix} 1 - \rho + \frac{\alpha\beta c}{\alpha-\beta}(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2) & c\,\frac{\beta\lambda + \frac{\alpha}{\lambda} - (\alpha+\beta)}{\alpha-\beta} \\ c\,\frac{\alpha+\beta-\alpha\lambda-\frac{\beta}{\lambda}}{\alpha-\beta} & 1 - \rho + \frac{c}{\alpha-\beta}(2-\lambda-\frac{1}{\lambda}) \end{vmatrix} = 0$$

Après quelques réductions, cette équation s'écrit :

$$F(\rho,\lambda) = (1-\rho)^2 + c\zeta(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2)(1-\rho) - c^2(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2) = 0 \qquad (4.5)$$

en posant

$$\zeta = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha - \beta}$$

Remarquons que cette équation est réciproque en λ de sorte qu'elle possède pour toute valeur de ρ deux racines λ_1, λ_2 telles que

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 \qquad (4.6)$$

Si nous prenons, pour λ, des valeurs exponentielles complexes du type (2.2), la relation caractéristique s'écrira

$$(1-\rho)^2 - 2c\zeta(1-\cos\theta)(1-\rho) + 2c^2(1-\cos\theta) = 0 \qquad (4.7)$$

en posant

$$\theta = i\pi \frac{n}{N} \qquad (n = 0, 1, \dots N)$$

Le critère de stabilité de von Neumann exige que le modules des racines ρ de l'équation (4.7) soient inférieures à l'unité quel que soit θ.

Il faut donc que le produit de ces modules soit inférieur à l'unité :

$$|1 - 2c\zeta(1-\cos\theta) + 2c^2(1-\cos\theta)| \leq 1$$

Cette condition doit être satisfaite pour toutes valeurs réelles de θ, ce qui implique

$$\frac{1}{2} \geq c(\zeta - c) \geq 0 \qquad (4.8)$$

Il faut également que le premier membre de (4.7) soit non négatif pour $\rho = +1$ et $\rho = -1$, d'où la nouvelle condition

$$4 - 4c\zeta(1-\cos\theta) + 2c^2(1-\cos\theta) \geq 0$$

pour toute valeur réelle de θ. Nous devons donc avoir

$$2c(\zeta-c) \leq 1-c^2 \tag{4.9}$$

Cette inégalité est plus restrictive que l'inégalité gauche dans (4.8).

Le critère de von Neumann conduit donc, dans le cas suivant aux deux inéquations

$$\zeta \geq c, \qquad c(2\zeta-c) \leq 1 \tag{4.10}$$

Ces inéquations montrent que le critère peut **être** satisfait pour toute valeur positive du paramètre ζ, à condition de choisir un nombre de courant inférieur à une certaine borne :

$$c \leq c_m(\zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{pour } 0 \leq \zeta \leq 1 \\ \zeta-\sqrt{\zeta^2-1} & \text{pour } \zeta \geq 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

Considérons maintenant les modes de frontières instables éventuels qui pourraient résulter de l'application d'une condition naturelle du type (4.2), par exemple :

$$u(x,t) = f(t) \qquad \text{pour } x = x_0 \tag{4.12}$$

Les résultats s'appliqueront, évidemment, moyennant modifications évidentes au cas où V serait imposé en $x = x_0$, et aux conditions à la frontière $x = X$. La condition homogène discrétisée correspondant à (4.12) s'écrit

$$u_0^k = 0 \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots \tag{4.13}$$

Pour toute valeur de ρ de module supérieur à l'unite, il existera, en vertu de (4.6), deux racines λ_1, λ_2 de la relation caractéristique telles que

$$|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$$

Seul le mode correspondant à λ_1 pourra être considéré comme mode de la frontière $x = x_0$, en accord avec les conclusions de la section 3. Ce mode s'écrira

$$u_j^k = U_1 \,\rho^k \,\lambda_1^j \qquad v_j^k = V_1 \,\rho^k \,\lambda_1^j$$

et la condition à la limite (4.13) imposera

$U_1 = 0$

L'amplitude V_1 peut être obtenue à partir de l'une ou l'autre des équations aux différences finies (4.3), (4.4) (qui sont équivalentes, du fait que ρ, λ_1 sont liées par la relation caractéristique). Nous avons, par exemple,

$$\{\alpha(\rho-1) + c(\lambda_1-1)\} \quad V_1 = 0$$

Un mode non trivial ne peut donc exister que si la condition suivante est satisfaite :

$$\alpha(\rho-1) + c(\lambda_1-1) = 0$$

Combinant cette relation avec la relation caractéristique (4.5), nous obtiendrons

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \rho = 1 - c\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Ces valeurs définiront donc un mode instable pour la frontière $x = x_0$ à condition que

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1, \qquad \left|1 - c\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\right| > 1$$

Une discussion complète de ces conditions peut être effectuée dans le plan α,β. Nous nous contenterons de démontrer ici qu'un tel mode instable peut exister; même si le critère de von Neumann, exprimé par (4.11), est satisfait. En effet, considérons le cas où

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 1 \qquad\qquad \text{d'où} \quad \zeta = 1$$

La condition de von Neumann sera alors satisfaite si

$$c = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq c_m(1) = 1$$

mais il existera un mode de frontière instable avec $\lambda = \frac{1}{2}$, $\rho = 1 + c$:

$$u_j^k = 0 \qquad\qquad v_j^k = \text{const.}\ (1+c)^k\ 2^{-j}$$

Cet exemple d'instabilité est évidemment surprenant puisqu'il ne peut pas être attribué au choix malencontreux d'une condition aux limites additionnelles plus ou moins arbitraire. Les conditions du type (4.12) sont en effet tout à fait naturelles en physique et conduisent toujours à des problèmes hyperboliques bien posés.

5. Instabilités causées par des conditions additionnelles

Les exemples d'instabilités résultant d'un choix malencontreux des conditions aux limites additionnelles, requises par les discrétisations d'ordre de précision supérieur au premier, sont très nombreux et il importe donc d'attirer l'attention sur cette situation dangereuse. Nous allons donner ici un exemple très simple qui indique sans nécessiter de longs calculs la grande variété des choix "raisonnables" de conditions aux limites additionnelles qui peuvent conduire à des instabilites.

A cet effet, nous examinerons l'équation hyperbolique la plus simple:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.1}$$

que nous discrétiserons à l'aide du schéma du second ordre de précisoin proposé par Lax et Wendroff (ref. 2 et 7) :

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{c}{2}\,(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) + \frac{c}{2}\,(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k - 2u_j^k) \tag{5.2}$$

c désigne le nombre de Courant $\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

On sait que ce schéma est stable au sens de von Neumann, pour $c \leq 1$, ce qui se vérifie d'ailleurs aisément en se reférant à la relation caractéristique

$$\rho - 1 = \frac{c}{2}\,(\lambda - \frac{1}{\lambda}) + \frac{c^2}{2}\,(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2) = \frac{c}{2}\,\frac{\lambda - 1}{\lambda}\,\left\{(1+c)\lambda + 1 - c\right\} \tag{5.3}$$

Les conditions initiales et aux limites naturelles pour le problème hyperbolique dans l'intervalle spatial

$$x_0 \leq x \leq X$$

consistent à imposer u pour $t = t_0$ et pour $x = X$, puisque les caractéristiques $(x + t = \text{const})$ de l'équation (5.1) sont orientées vers les x décroissant pour t croissant.

Cependant, comme l'équation aux différences (5.2) fait intervenir des différences centrées, le processus numérique de progression ne sera défini, dans l'intervalle (x_0, X), que si l'on impose une condition additionnelle numerique en $x = x_0$.

Nous allons considérer des conditions de deux types différents qui forment un ensemble assez général. Le premier type fait intervenir les valeurs de u aux quatre points (k,0), (k,1), (k+1,0), (k+1,1) et seront de la forme

$$u_0^{k+1} + \ell u_1^{k+1} + m u_0^k + n u_1^k = 0 \qquad (5.4)$$

En se servant de la relation (5.2) on peut d'ailleurs éliminer u_1^{k+1} et exprimer la valeur inconnue u_0^{k+1} en fonction des valeurs u_0, u_1 et u_2 à l'étape k.

Le second type de conditions considéré ne fait intervenir que des valeurs à l'instant k + 1, et ces conditions seront de la forme

$$u_0^{k+1} + f u_1^{k+1} + g u_2^{k+1} = 0 \qquad (5.5)$$

De telles conditions additionnelles ne peuvent pas introduire des erreurs O(1), ce qui détruirait la précision du calcul, mais elles deviennent compatibles à l'ordre $O(\Delta x, \Delta t)$ à condition que les sommes des coefficients des u soient nulles :

$$1 + \ell + m + n = 0 \qquad 1 + f + g = 0 \qquad (5.6)$$

Appliquons maintenant la théorie générale de la section 3. Il ne peut y avoir au plus qu'un mode instable pour la frontière $x = x_0$. Soit λ, la valeur correspondante de

$$|\lambda_1| < 1$$

Nous allons montrer que les valeurs de ρ et λ_1 qui permettent de satisfaire les conditions (5.5) sont réelles et que cela est également vrai pour les conditions (5.4) si la précision qu'elle fournit est du second ordre [1].

---

[1] Il faut noter que cette précision n'est pas strictement nécessaire pour obtenir un résultat précis du second ordre.

En effet, écrivons les conditions (5.4) et (5.5) en y introduisant l'expression du mode instable éventuel

$$u_j^k = \text{const } \rho^k \lambda_1^j$$

Nous obtiendrons, respectivement,

$$\rho + \ell\lambda\rho + m + n\lambda = 0 \qquad (5.7)$$

et

$$1 + f\lambda + g\lambda^2 = 0 \qquad (5.8)$$

Si nous exprimons maintenant ρ en fonction de λ, dans (5.7), en utilisant la relation caractéristique (5.3) du schéma, nous obtiendrons une équation du 3me degré en λ :

$$a_3\lambda_1^3 + a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0 = 0 \qquad (5.7')$$

En vertu des conditions de compatibilité (5.6), les équations (5.7') et (5.8) possèderont une racine λ, égale à l'unité, qui correspond d'ailleurs au mode trivial $\rho = 1$ que l'on peut écarter. Si nous exigeons, de plus, que la condition (5.4) présente une précision du second ordre, l'équation (5.7') devra possèder une racine double $\lambda_1 = 1$. Après élimination des facteurs $(\lambda_1 - 1)$ dans l'équations (5.8) et $(\lambda_1 - 1)^2$ dans l'équation (5.7') nous obtiendrons, dans les deux cas, une équation du premier ordre en λ_1 :

$$p\lambda_1 + q = 0$$

dont la racine $-\frac{q}{p}$ est toujours réelle.

Il est facile de vérifier que le rapport $\frac{q}{p}$ sera une fonction rationnelle non constante des paramètres ℓ, m, n, f, g qui définissent les conditions additionnellees considérées. Il existera donc toujours des valeurs de ces paramètres pour lesquelles

$$|\lambda_1| = \left|\frac{p}{q}\right| < 1$$

λ_1 étant réel, il en sera de même pour la valeur correspondante de ρ tirée de (5.3). Nous aurons donc un mode instable si l'une des deux inéqualités suivantes est vérifiée:

$$\rho = 1 + \frac{c}{2} \; \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} \left((1+c)\lambda_1 + 1 - c\right) \qquad \begin{matrix} > 1 \\ < -1 \end{matrix} \qquad \text{ou}$$

Il est facile de vérifier que l'une de ces conditions sera satisfaite (compte tenu de $|\lambda_1| < 1$), si

$$-1 < -\frac{1-c}{1+c} < \lambda_1 = -\frac{p}{q} < \frac{c^2-2+\sqrt{4-3c^2}}{c(c+1)} < 1 \tag{5.9}$$

(les inégalités extrêmes résultent de la condition de Courant $0 < c < 1$).

Nous n'entrerons pas dans les détails d'une discussion complète car les inégalités (5.9) suffisent à montrer qu'il existera toujours des valeurs "raisonnables" des paramètres ℓ, m, n, f, g pour lesquelles l'inégalité (5.9) pourra être satisfaite et qui conduiront donc à des instabilités, malgré le fait que le critère de von Neumann est respecté.

6. Modes de frontière non exponentiels

Kreiss a signalé (réf. 6) que l'absence de mode instable de frontière du type introduit à la section 3 n'est pas suffisante pour assurer la stabilité. Il a pu, en effet, donner un exemple de solution croissante avec t, mais non exponentielle et a égelement établi un critère plus restrictif que celui de Godunov-Ryabenkii, qui tient compte de l'existence de telles solutions.

Un traitement numérique de l'exemple propose par Kreiss fait apparaître certaines propriétés remarquables de ces solutions croissantes et nous nous proposons de clarifier leur nature en utilisant ces propriétés.

L'équation hyperbolique considérée est l'équation simple (5.1) traitée dans le domaine $t \geq 0$, $x_0 \leq x \leq X$.

L'exemple de Kreiss fait appel au schéma aux différences symétrique ("Leap frog")

$$u_j^{k+1} - u_j^{k-1} = c(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k); \qquad c = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{6.1}$$

stable au sens de von Neumann si la condition de Courant (0 < 1) est vérifiée.

Il est important de remarquer que ce schéma fait intervenir trois niveaux temporels k+1, k et k-1; contrairement au schéma de Lax-Wendroff utilisé à la section 5. Cette propriété joue un rôle essentiel dans notre interprétation des solutions de Kreiss.

Le schema (6.1) étant du second ordre de precision par rapport à x, il faudra comme précédemment, ajouter à la condition naturelle en $x = X$, une condition additionnelle en $x = x_0$.

Nous examinerons les con ditions suivantes, dont certaines ont été proposées par Kreiss (rég. 6) et qui dont toutes compatibles à l'ordre $(\Delta t, \Delta x)$ au moins :

(I) Extrapolation linéaire : $u_0^k = 2u_1^k - u_2^k$

(II) Extrapolation modifiée proposée par Kreiss = $u_0^k = (u_1^{k-1}+u_1^{k+1})-u_2^k$
(u_1^{k+1} est calculé en fonction de u_0^k et u_2^k à partir de (6.1))

(III) Extrapolation parabolique $u_0^k = 3u_1^k-3u_2^k+u_3^k$

(IV) Interpolation d'ordre zéro : $u_0^k = u_1^k$.

Montrons tout d'abord qu'il n'existe pas de mode instable de frontière au sens de la section 3. La relation caractéristique du schéma (6.1) s'écrit :

$$\rho - \frac{1}{\rho} = c(\lambda - \frac{1}{\lambda}) \tag{6.2}$$

Il n'existe, comme prévu, qu'un mode instable de frontière possible puisque le produit des racines de (6.2) vaut -1. Les conditions aux limites (I à IV) fournissent respectivement les équations suivantes pour λ_1 :

$$(\lambda_1-1)^2 = 0; \qquad \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} = \rho + \frac{1}{\rho}; \qquad (\lambda_1-1)^3 = 0; \qquad (\lambda_1-1) = 0$$

Ces relations conduisent toutes à des valeurs de λ et ρ dont le module est égal à l'unité, ce qui suggère une stabilité marginale en présence de ces conditions additionnelles.

Kreiss signale cependant que la condition (I) introduit des solutions croissant au delà de toute limite avec k, et que ce phénomène disparaît lorsque l'on utilise la forme légèrement modifiée (II).

Le calcul numérique d'un exemple basé sur la condition (I) fait immédiatement apparaître les faits suivants: Après disparition de contributions transitoires amorties introduites par les conditions initiales numériques particulières, la solution présente un comportement alterné par rapport au temps :

$$u_j^{k+1} \simeq -u_j^k \tag{6.3}$$

et la dépendance de u_j^k par rapport à x est très voisine d'une loi linéaire. Il en est d'ailleurs de même pour la dépendance en fonction de t, des valeurs absolues $|u_j^k|$.

Les fonctions discrètes u_j^{2k} et u_j^{2k+1} apparaissent donc comme essentiellement distinctes et ne peuvent, en vertu de (6.3), être considérées comme formant la représentation discrète d'une fonction dérivable, ni même continue de t. Cependant, si nous posons

$$u_j^{2\ell} = v_j^{\ell}, \qquad u_j^{2\ell+1} = w_j^{\ell},$$

nous pourrons considérer v et w comme représentation discrète de deux fonctions distinctes v et w, continues et même dérivables.

Le schéma aux différences finies (6.1) écrit pour $k = 2\ell$ et $k = 2\ell+1$, peut être considéré comme formant un système de deux équations aux différences couplées pour v et w :

$$w_j^{\ell} - w_j^{\ell-1} = c(v_{j+1}^{\ell} - v_{j-1}^{\ell}) \tag{6.4}$$

$$v_j^{\ell+1} - v_j^{\ell} = c(w_{j+1}^{\ell} - w_{j-1}^{\ell}) \tag{6.5}$$

Nous considèrerons maintenant ces équations comme des discrétisations du système hyperbolique

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{6.6}$$

La solution générale de ce système est donnée par

$$v = F(x-t) + G(x+t); \qquad w = -F(x-t) + G(x+t) \tag{6.7}$$

Il est clair que la contribution G représente la solution générale de l'équation de départ (5.1), tandis que F représente une contribution parasite introduite par la discrétisation d'ordre supérieur. En effet, si $F \equiv 0$, nous avons

$$v = w = G(x+t) = u$$

La contribution parasite F correspond à des caractéristiques parasites $x - t = \text{const}$, introduites par le système (6.6)et est la cause de l'instabilité signalée par Kreiss.

Si la condition initiale est homogène ($u = 0$ pour $t = t_0$), seule la contribution parasite sera présente, comme on le voit facilement en tenant compte de l'orientation des caractéristiques naturelles ($x+t = \text{const}$) et parasites ($x-t = \text{const}$).

Les conditions aux limites (I) à (IV) seront, elles aussi interprétées comme des relations entre v, w et leurs dérivées et nous aurons ainsi, respectivement

(I') $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

(II') $v = w$

(III') $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$

(IV') $\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

Il suffit de substituer dans ces relations les expressions (6.7) après avoir posé $G \equiv 0$, ce qui donne les équations suivantes pour la fonction F qui représente la contribution parasite :

(I") $F''(x_0-t) = 0$ d'où $F = A(x-t) + \text{const}$

(II") $F(x_0-t) = 0$

(III") $F'''(x_0-t) = 0$ d'où $F = B(x-t)^2 + C(x-t) + \text{const}$

(IV") $F'(x_0-t) = 0$ d'où $F = \text{const}$

La croissance lineaire de la perturbation en fonction de x et t apparaît donc clairement pour la première condition, alors que cette perturbation est étouffée par la condition modifiée (II). La condition (III) montre que des croissances suivant n'importe quelle puissance entière de t sont possibles si l'on utilise des extrapolations d'ordre élevé. Par contre, la perturbation reste stationnaire dans le cas de l'extrapolation d'ordre zéro.

Les condidérations qui précèdent ne sont évidemment pas rigoureuses et ne semblent s'appliquer que s'il existe un découplage entre certaines lignes de maillage, qui semble être une caractéristique des schémas de type "leap fog".

Tenant compte de l'existence de cette nouvelle classe d'instabilité, Kreiss a pu établir une condition <u>suffisante</u> de stabilité (réf. 6) qui requiert que le premier membre de l'équation aux valeurs propres ρ_ν, introduite à la section 3, reste supérieur à une constante positive, quel que soit le nombre complexe ρ de module supérieur à l'unité. Cette condition exprime, en fait, qu'il ne doit pas exister de mode de frontière marginalement stable.

Les solutions à croissance algébriques, en

$$k^n = \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^n$$

qui viennent d'être discutées, sont en principe moins génantes que les instabilités exponentielles, et pourraient même être acceptables dans les cas où le maillage temporel utilisé est relativement grossier.

7. Conclusions

Le but de la présente étude était de montrer la variété des instabilités numériques qui peuvent être introduites dans les problèmes hyperboliques par les conditions aux limites.

Notre premier exemple a montré que des conditions aux limites tant à fait naturelles pouvaient conduire à une restriction de la stabilité par rapport au critère de von Neumann.

Les exemples d'instabilités provoquées par l'introduction de conditions numériques additionnelles sont très nombreux. Signalons d'ailleurs que des conditions construites à partir d'extrapolations, couramment utilisées, peuvent conduire à des instabilités si leur ordre est trop élevé, dans le cas de systèmes hyperboliques. Moretti (réf. 4) a préconisé l'utilisation de conditions additionnelles basées sur des considérations physiques inspirées de la théorie des caractéristiques.

Une telle approche semble donner des résultats favorables dans la plupart des exemples traités, mais il n'existe pas, à notre connaissance, de preuve rigoureuse de son efficacité. Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue la nature essentiellement numérique des conditions additionnelles ce qui ne permet pas d'espérer, a priori, que des considérations physiques soient un bon guide pour leur sélection.

Notre manque d'informations générales permettant d'orienter de façon sure, le choix des conditions additionnelles, résulte évidemment de la grande complexité algébrique présentée par la mise en oeuvre des critères de Godunov-Ryabenkii et de Kreiss, pour les problèmes hyperboliques non triviaux rencontrés en pratique.

Nous nous sommes limités aux problèmes à une seule dimension spatiale afin de rendre le traitement algébrique suffisamment accessible. L'extension des résultats et méthodes aux problèmes à plusieurs dimensions spatiales ne présente pas de difficultés fondamentales. Par exemple, si une condition est donnée, dans un cas bidimensionnel, sur la ligne $x = x_0$, il faudra introduire des modes du type

$$u^k_{j\ell} = \text{const}\ \rho^k\ \lambda^j\ \mu^\ell$$

ou l'indice ℓ représente la dépendance par rapport à y. Nous pouvons toujours représenter une telle dépendance par des modes de Fourier du maillage en y, et poserons donc

$$\mu = e^{i\theta}$$

L'introduction du nouveau paramètre θ dans la discussion de la stabilité est évidemment de nature à créer des complications additionnelles.

Enfin, des méthodes analogues pourraient être exploitées pour l'étude des instabilités qui apparaissent dans les "coins" de domaines multidimensionnels. Il s'agirait, par exemple, d'étudier le comportement d'une solution numérique d'un problème d'écoulement bidimensionnel dans une conduite, au voisinage du point de rencontre entre une paroi et une ligne portant les conditions amont ou aval. Nous aurions, par exemple, à traiter une condition (A) à la frontière $x = x_0$, $y > y_0$, et une condition différente (B) à la frontière $y = y_0$, $x > x_0$. Il faudrait alors introduire des "modes de coin", fonctions exponentielles décroissantes de x et y.

Les modes de Kreiss, étudiés à la section 6, n'apparaissent vraisemblablement que dans des cas marginaux qui ne se manifesteront que pour des discrétisations particulières.

Références

1. O'BRIEN, G.G, HYMAN, M.A. et KAPLAN, S.: A study of the numerical solution of partial differential equations. *J. Mathematics and Physics*, Vol. 29, 1950, pp 223-251.
2. RICHTMYER, R.D. et MORTON, K.W.: Difference methods for initial value problems. Interscience, 1967, New York.
3. KREISS, H.O.: On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 17, 1964, p. 335.
4. MORETTI, G.: The importance of boundary conditions in the numerical treatment of hyperbolic equations. *Brooklyn Polytechnic Institute, PIBAL Report 68-34.*
5. GODUNOV, S.K. et RYABENKII, V.S.: Critères speciaux de stabilité des problèmes à conditions aux limites pour les équations

aux différences finies non auto-adjointes. *Uspekhi Mat. Nauk.*, Vol. 18, 1963, p.3

6. KREISS, H.O.: Boundary conditions for difference approximation of hyperbolic differential equations. in *Advances in numerical fluid dynamics*, AGARD Lecture Series No 64, AGARD, Neuilly-sur-Seine, France.
7. LAX, P.D. et WENDROFF, B.: Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy. *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. 17, 1964, p. 381.