

METHODES NUMERIQUES EN ELECTROMAGNETISME

J. Ch. BOLOMEY

Laboratoire d'Electronique Générale

Ecole Supérieure d'Electricité

Université de Paris VI

INTRODUCTION

Dans la technique, les problèmes d'électromagnétisme peuvent revêtir des aspects très variés. Aussi convient-il de préciser, dès maintenant, que l'on se limite ici aux problèmes de rayonnement, de diffraction, de propagation guidée, tels qu'ils se posent essentiellement dans le domaine des ondes courtes et ultracourtes, c'est-à-dire pour des longueurs d'ondes comprises environ entre un mètre et un millimètre.

Pour les besoins pratiques, la description macroscopique de MAXWELL - équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites - est suffisante et conduit à résoudre des problèmes intérieurs (guides, cavités) ou extérieurs (rayonnement, diffraction). Il est bien connu que seuls quelques cas simples se prêtent à une résolution complète par les méthodes de l'analyse classique [JONES - BOWMAN et al.]. Toutefois, des méthodes approchées permettent d'aborder les cas extrêmes des longueurs d'onde très grandes ou très petites par rapport aux dimensions des obstacles, ou de traiter, par perturbation, des cas voisins de ceux qui sont analytiquement solubles.

Dans le domaine dit de résonance où la longueur d'onde est du même ordre que les dimensions des corps rayonnants ou diffringents, seules des approches numériques peuvent être envisagées.

La progression constante des performances des ordinateurs a largement favorisé ce genre de résolution. Le traitement numérique peut être appliqué à différents stades de la mise en équation. Il peut l'être directement aux équations de MAXWELL par les méthodes usuelles : différences finies, éléments finis. Cependant, l'ordinateur a rendu possible l'exploitation directe de la transposition des problèmes sous forme d'équations intégrales.

En gros, le point de vue des équations aux dérivées partielles a surtout été utilisé pour les problèmes intérieurs, celui des équations intégrales pour les problèmes extérieurs.

Cet exposé est divisé en trois parties. La première est consacrée à la formulation intégrale et aux développements successifs dont elle a fait l'objet au cours des dernières années. On s'est proposé de présenter une synthèse de méthodes qui ont été récemment développées par différents auteurs et d'en dégager les principes les plus significatifs sans entrer dans le détail des algorithmes qui sont connus par ailleurs. La bibliographie permettra au lecteur d'obtenir des renseignements plus complets sur une méthode plus particulière et sur son champ d'application.

Dans la seconde partie, au contraire, un exemple complet est traité. Il consiste en l'adaptation d'une méthode récurrente originale à un problème de diffraction multiple. Il s'agit plus précisément du calcul d'un réseau limité. Dans ce cas, on est conduit à résoudre des systèmes linéaires de rang élevé.

Enfin, il ne nous a pas semblé nécessaire d'insister sur le traitement direct des équations de MAXWELL. En dépit des applications pratiques de plus en plus nombreuses de cette méthode de résolution, le principe en reste toujours plus ou moins le même. Toutefois, des procédés efficaces permettent d'accélérer la convergence de ces méthodes numériques. Ce point sera illustré dans la troisième partie à propos de la microligne à ruban (microstrips).

PREMIERE PARTIE

=====

I.1. - REPRESENTATION INTEGRALE EN REGIME HARMONIQUE -

=====

Un exemple simple permet de rappeler brièvement le genre d'équations auxquelles conduisent les représentations intégrales du champ électromagnétique. C'est également l'occasion de préciser les notations qui seront utilisées dans la suite.

La diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle parfaitement conducteur constitue un cas simple. Il permet, néanmoins, d'illustrer la plupart des propriétés caractéristiques de la formulation intégrale.

Soit donc un obstacle S parfaitement conducteur placé dans une onde incidente connue $\vec{E}^o(\vec{x})$, $\vec{H}^o(\vec{x})$ créée par les courants $\vec{J}^o(\vec{x})$ (Fig. 1). Comme dans tous les paragraphes consacrés au régime harmonique, la dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$ est implicite. Le problème consiste à déterminer, par exemple, le champ électrique total $\vec{E}(\vec{x})$ au moyen des équations :

- (1) $\text{rot rot } \vec{E}(\vec{x}) - k^2 \vec{E}(\vec{x}) = -i\omega\mu \vec{J}^o(\vec{x}) \quad ; \quad \vec{x} \in \Omega_e$
- (2) $\vec{n} \wedge \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad ; \quad \vec{x} \in S$
- (3) $\int_{\Omega_e \subset \mathbb{R}^3} |\vec{E}(\vec{x})|^2 d\vec{x} < +\infty \quad ; \quad \int_{\Omega_e \subset \mathbb{R}^3} |\text{rot } \vec{E}(\vec{x})|^2 d\vec{x} < +\infty$
- (4) $|\vec{x}| \vec{E}(\vec{x}) = o\left\{\frac{1}{|\vec{x}|}\right\} \quad ; \quad |\vec{x}| \left[\vec{E}(\vec{x}) - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \wedge \text{rot } \vec{E}(\vec{x}) \right] = o\left\{\frac{1}{|\vec{x}|}\right\} \quad ; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty$
- (5) $\vec{E}(\vec{x}) \equiv 0 \quad ; \quad \vec{x} \in \Omega_i$

où $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ est la constante de propagation dans l'ouvert Ω_e extérieur à S , supposé linéaire, homogène et isotrope ; ϵ et μ désignent respectivement la permittivité et la perméabilité du milieu correspondant (Unités du système M.K.S.A.).

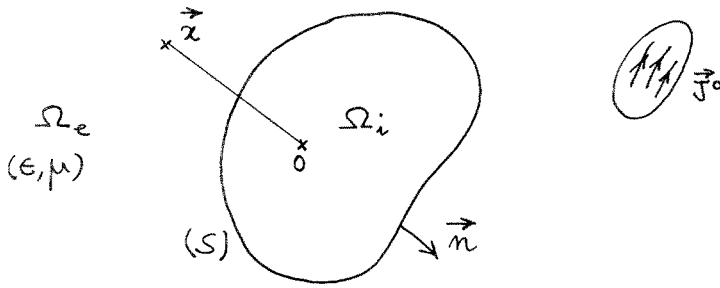


Figure 1.

La condition (3), dite de MEIXNER, limite les singularités possibles du champ, la condition (4), dite de SILVER-MULLER, en fixe le comportement à l'infini. Par ailleurs, le corps étant parfaitement conducteur, le champ électrique est normal à S et identiquement nul dans l'ouvert Ω_i intérieur à S .

Le problème ainsi posé admet une solution unique qui peut être écrite sous la forme [JESSEL]:

$$(6) \quad \mathbb{1}_{\Omega_e} \vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}^0(\vec{x}) + \frac{1}{i\omega\epsilon} (k^2 + \text{grad div}) \int_S G(\vec{x}; \vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') d\vec{x}'$$

$$(7) \quad \mathbb{1}_{\Omega_e} \vec{H}(\vec{x}) = \vec{H}^0(\vec{x}) + \text{rot} \int_S G(\vec{x}; \vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') d\vec{x}'$$

avec

$$G(\vec{x}; \vec{x}') = \frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$\mathbb{1}_{\Omega_e}$: fonction caractéristique de Ω_e

$$\vec{J}(\vec{x}) = \vec{n} \wedge \vec{H}(\vec{x}) ; \vec{x} \in S$$

L'intérêt de cette représentation est d'inclure les conditions (2) et (4). Par passage à la limite $\vec{x} \rightarrow S$ et en utilisant à nouveau la condition (2), on obtient deux équations intégrales en \vec{J} :

$$(8) \quad \frac{1}{i\omega\epsilon} \vec{n} \wedge (\mathbf{k}^i + \text{grad div}) \int_S G(\vec{x}; \vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') d\vec{x}' = -\vec{n} \wedge \vec{E}^i(\vec{x}) ; \vec{x} \in S$$

$$(9) \quad \frac{1}{2} \vec{J}(\vec{x}) - \vec{n} \wedge \text{rot} \int_S G(\vec{x}; \vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') d\vec{x}' = \vec{n} \wedge \vec{H}^i(\vec{x}) ; \vec{x} \in S$$

En raison des singularités des noyaux, les intégrales doivent être prises au sens des parties finies. Connaissant $\vec{E}^i(\vec{x})$ et $\vec{H}^i(\vec{x})$ pour $\vec{x} \in S$, on peut déterminer \vec{J} au moyen de l'une d'entre elles, puis calculer le champ en un point quelconque de Ω_e par report dans (6) et (7).

Ces équations vectorielles se ramènent à deux équations scalaires couplées pour les deux composantes de \vec{J} dans un système de coordonnées convenable. A défaut de pouvoir utiliser un même système pour décrire toute la surface, on adopte plusieurs systèmes adaptés aux différentes parties de S . Dans certains cas très particuliers, on obtient une seule équation (conducteurs filiformes [THIELE], problèmes cylindriques ou de révolution).

Comme en théorie du potentiel, la formulation intégrale est à la base des premières études théoriques sur la diffraction. L'équation (9) par exemple est due à MAUE. Très longtemps, ces équations ont fourni le point de départ à de nombreuses méthodes approchées dans les cas extrêmes où les dimensions de l'obstacle étaient très grandes ou très petites devant la longueur d'onde. Pour le reste, elles ne présentaient qu'un intérêt très formel.

Il fallut attendre les possibilités offertes par les ordinateurs pour aborder numériquement le domaine de résonance. Parmi les pionniers de ce genre de résolution, il convient de citer ROW, MEI et VAN BLADEL, ANDREASEN, RICHMOND. D'autres références peuvent être consultées dans l'excellent ouvrage édité récemment par MITTRA.

I.2. - RESOLUTION NUMERIQUE EN REGIME HARMONIQUE - =====

I.2.1. - La méthode des moments -

La théorie des équations intégrales permet, du moins pour l'équation (9),

la discussion des conditions d'existence et d'unicité d'une solution. Il en résulte que cette solution existe et est unique pour toute fréquence distincte du spectre discret du problème complémentaire de la cavité S [HONL et al.]. En dehors de ce spectre, de nombreux procédés peuvent être utilisés pour rechercher une solution approchée. Dans la technique, on les regroupe sous l'appellation de méthode des moments [HARRINGTON a]. Rappelons-en très rapidement le principe.

L'une ou l'autre des équations (8) ou (9) peut être écrite sous la forme :

$$(10) \quad L \vec{f} = \vec{g}$$

où \vec{g} est un vecteur connu, \vec{f} est à déterminer. Tous deux appartiennent à \mathcal{H} , espace de HILBERT des vecteurs dont les composants sont de carré sommable sur S . On définit en particulier la norme :

$$\|\vec{f}\|^2 = \langle \vec{f}, \vec{f} \rangle = \int_S \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{f}^*(\vec{x}) d\alpha < +\infty$$

L est un opérateur linéaire borné de \mathcal{H} dans \mathcal{H} . \vec{f} est approché par sa projection $\vec{f}^{(N)}$ sur N éléments d'une base totale $\{\vec{f}_m\}$:

$$\vec{f}^{(N)} = \sum_{m=1}^N \alpha_m \vec{f}_m$$

de telle sorte que l'on a la convergence normale :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\vec{f} - \vec{f}^{(N)}\| = 0$$

Lorsque la surface S est régulière, \vec{f} et \vec{g} sont continus et $\vec{f}^{(N)}$ converge uniformément vers \vec{f} .

L'équation (10) devient :

$$\sum_{m=1}^N \alpha_m L(\vec{f}_m) - \vec{g} \simeq 0$$

Par projection sur une base de fonctions d'essai $\{\vec{g}_m\}$, on est conduit à un système linéaire de rang fini N :

$$AX = B$$

où

$$A_{mn} = \langle \vec{g}_m, L\vec{f}_n \rangle, \quad B_m = \langle \vec{g}_m, \vec{g} \rangle, \quad X_m = \alpha_m.$$

Le choix des bases $\{\vec{f}_m\}$ et $\{\vec{g}_m\}$ est en principe arbitraire. En pratique, il conditionne la simplicité du calcul des coefficients A_{mn} ainsi que la rapidité de convergence de la solution, donc le temps de calcul et la capacité de mémoire requise.

Chaque fonction \vec{f}_n ou \vec{g}_m est décomposée dans un système de coordonnées adapté à S ou à des parties de S :

$$\vec{f}_n = f_{n,1} \vec{e}_1 + f_{n,2} \vec{e}_2$$

Les composantes $f_{n,i}$ sont le plus souvent recherchées sous forme séparable :

$$f_{n,i}(x_1, x_2) = u_{n,i}(x_1) v_{n,i}(x_2)$$

Les fonctions u et v peuvent être des polynômes, des fonctions trigonométriques, ou bien encore des fonctions à support borné de type rectangle ou triangle. Pour la commodité de la présentation, la méthode des moments précédemment décrite pour l'approximation normale dans un espace de HILBERT peut être étendue formellement à l'approximation locale en utilisant des mesures de DIRAC dont le rôle s'apparente à celui des fonctions de type rectangle. Ce procédé peut être justifié de façon plus rigoureuse. Les notions d'approximation et de convergence sont alors à considérer au sens des distributions. Le tableau I indique les fonctions qui sont le plus couramment utilisées.

Méthode d'approximation	f_n	g_m	
Collocation	Approx. Point-Point (PP)	$\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)$	$\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)$
	Approx. Point-Segment (PS)	$\text{rect}(\vec{x}-\vec{x}_n)$	$\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)$
GALERKIN	$f_n(\vec{x})$	$f_m(\vec{x})$	

TABLEAU I

La rapidité des variations de \vec{f} dépend de la longueur d'onde et de la régularité de S . Au voisinage d'arêtes, par exemple, la densité de courant peut présenter des singularités intégrables [VAN BLADEL, BOLOMFY et WIRGIN a]. En règle générale, la densité d'échantillonnage pour les méthodes de collocation varie entre 5 et 10 points par longueur d'onde.

Le rang de la matrice \mathbf{A} devient élevé dès que l'obstacle est grand devant la longueur d'onde, ou lorsque plusieurs obstacles se trouvent couplés. A titre

d'exemple, le rang N atteint environ 500 pour un cube dont le côté est égal à une longueur d'onde. Aussi de nombreuses études ont elles été consacrées tant à la réduction de ce rang qu'à celle du temps de calcul.

Le conditionnement de \mathbf{A} est bon à condition de choisir l'équation intégrale la mieux adaptée à la surface S . L'équation déduite du champ électrique convient pour les obstacles minces. Au contraire, celle déduite du champ magnétique est mieux adaptée aux obstacles épais. Les éléments diagonaux sont alors prépondérants vis à vis des autres éléments, ce qui est un facteur de bon conditionnement.

Lorsque la fréquence coïncide avec l'une des fréquences propres de la cavité S , les équations intégrales admettent une infinité de solutions et les matrices correspondantes sont singulières. Ce phénomène est d'autant plus gênant que l'on ignore, en général, les fréquences propres de la cavité et que les matrices ne sont jamais réellement singulières, du fait des erreurs d'arrondi et de la limitation du nombre de chiffres significatifs. Les résultats calculés diffèrent localement très sensiblement des résultats exacts sans qu'il soit possible de s'en apercevoir immédiatement car les ordres de grandeur moyens sont comparables.

Il est alors nécessaire de modifier quelque peu la formulation intégrale ou de contrôler à posteriori la validité de la solution calculée par des tests d'inspiration physique (conservation d'énergie), ou bien encore d'utiliser des techniques de régularisation [OSHIRO et al., BOLOMEY et TABBARA, KLEIN et MITTRA].

Les systèmes sont généralement résolus par des algorithmes directs, celui de GAUSS JORDAN par exemple. Plus récemment, l'algorithme itératif de LE FOLL a permis de résoudre ces systèmes dans des conditions de temps comparables à celles des algorithmes directs. Des systèmes de rang 300 ou plus sont ainsi solubles sans problème particulier.

1.2.2. - Réduction du temps de calcul et de la mémoire requise -

La formulation intégrale, telle qu'elle a été décrite, est extrêmement générale et permet de résoudre des problèmes très variés (forme de l'obstacle, structure de l'onde incidente) dans les limites de rapidité et de capacité disponibles des ordinateurs actuels. Ces contraintes peuvent varier de façon sensible d'un ordinateur à l'autre, mais en moyenne, dès que N dépasse 300, le temps de calcul, et donc le coût du calcul deviennent non négligeables. Ce temps inclut le calcul des coefficients A_{mn} (variation en N^2) et la résolution du système (variation en N^3). Lorsque la mémoire centrale est insuffisante il est nécessaire de recourir aux mémoires périphériques dont les temps d'accès doivent être pris en

considération.

Aussi de nombreux procédés ont-ils été proposés pour réduire le temps de calcul et/ou la capacité de mémoire requise. Ces procédés peuvent revêtir des aspects très différents, mais ils ont ceci en commun que tous exploitent un caractère spécifique du problème abordé. Ainsi tout gain sur le temps ou la mémoire se traduit par une perte de généralité.

a) - Procédés utilisables au stade de la formulation -

Le nombre des coefficients A_{mn} à calculer ainsi que celui des inconnues peut être réduit très sensiblement en tenant compte des éventuelles symétries du corps diffringent ou celles de l'onde incidente. Pour les corps de révolution, l'utilisation de bases orthogonales adéquates permet de substituer à un système de rang élevé plusieurs systèmes de rangs inférieurs [ANDREASEN b].

On peut également tirer parti de toute connaissance a priori de la solution. L'exemple classique du ruban conducteur (Fig. 2) se prête bien à la description de différentes méthodes qui peuvent être étendues, pour la plupart, à des problèmes plus complexes.

Le champ de l'onde incidente plane est supposé polarisé parallèlement au ruban. Le problème vectoriel se ramène à un problème scalaire à une dimension. La densité \vec{J} est également parallèle aux bords du ruban et vérifie l'équation :

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} J(\alpha_1) G(\alpha; \alpha_1) d\alpha_1 = F(\alpha) \quad -\frac{\alpha}{2} \leq \alpha \leq +\frac{\alpha}{2}$$

avec $G(\alpha; \alpha_1) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\alpha - \alpha_1|)$ $H_0^{(2)}$ fonction de HANKEL de seconde espèce et d'ordre zéro ; $F(\alpha) = \frac{4}{k} \exp(ik\alpha \sin\theta)$, θ étant l'angle d'incidence.

L'étude locale de \vec{J} au voisinage de $|\alpha| = \pm \frac{\alpha}{2}$ montre qu'il peut exister une singularité intégrale en $(\alpha \pm \frac{\alpha}{2})^{-1/2}$. Pour des rubans dont la longueur est de l'ordre de la longueur d'onde, l'effet de ces singularités est important. La convergence du processus d'approximation peut être accéléré en tenant compte de ces

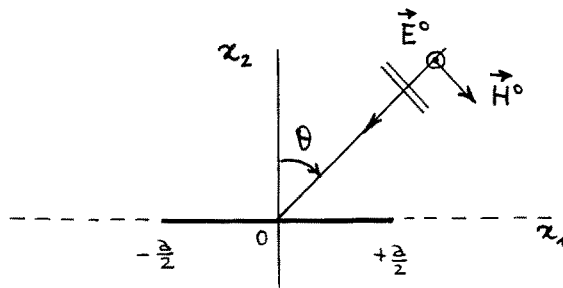


Figure 2

singularités dans le développement de \vec{J} . Leur contribution peut être complétée par un polynôme [ABDELMESSIH ET SINCLAIR, NEUREUTHER ET ZAKI] de degré peu élevé :

$$J(x) = \sum A_n x_n + \frac{B}{\sqrt{x - \frac{\pi}{2}}} + \frac{C}{\sqrt{x + \frac{\pi}{2}}}$$

Les constantes A_n, B et C constituent les inconnues du problème et sont déterminées en résolvant le système issu du report de cette expression dans l'équation intégrale.

Pour des rubans larges devant la longueur d'onde, l'effet des singularités est relativement localisé aux extrémités du ruban, mais le rang de la matrice \hat{A} devient élevé. Il est alors possible de tirer parti des approximations de type optique. Le champ magnétique total peut être décomposé (Fig. 3) de la façon suivante :

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{H}^o(\vec{x}) + \vec{H}^r(\vec{x}) + \vec{H}^d(\vec{x})$$

où les deux derniers termes représentent les contributions des rayons réfléchis et diffractés (théorie géométrique de la diffraction, KELLER, KOUYOUMJIAN). Sur le ruban, cette décomposition se transpose aux courants. L'onde réfléchie s'obtient directement à partir du champ incident : $J^r(x) = J^o(x)$. En négligeant le courant dû aux rayons diffractés, $J(x) = 2J^o(x)$: c'est l'approximation dite de l'optique physique

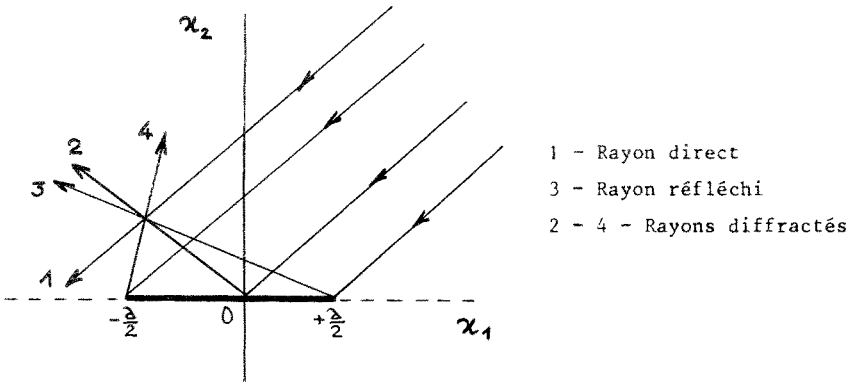


Figure 3

A une certaine distance des extrémités, l'onde diffractée peut être simplement reliée au champ incident par l'intermédiaire d'un coefficient de diffraction, connu analytiquement lorsque l'identification à un problème canonique est possible. Dans le cas du ruban :

$$J^d(x) = D^+ \frac{e^{-ik|x-\frac{a}{2}|}}{\sqrt{x-\frac{a}{2}}} J^o(\frac{a}{2}) + D^- \frac{e^{-ik|x+\frac{a}{2}|}}{\sqrt{x+\frac{a}{2}}} J^o(-\frac{a}{2})$$

En fait, il est apparu que des développements de ce genre étaient très vite utilisables, dès que la distance à la discontinuité dépassait une fraction de longueur d'onde [TSAI et al.] .

Ces approximations de type optique peuvent être utilisées de différentes manières. Elles donnent, bien souvent, des résultats convenables en dehors des zones d'ombre ou de discontinuité [voir par exemple BODY et ESSAYAG] . Aussi, dans le cas du ruban, peut-on se contenter de déterminer plus soigneusement la densité de courant au voisinage des bords. Il en résulte alors une réduction sensible du nombre des inconnues. L'approximation de l'optique physique a été largement utilisée dans ce sens pour le calcul des antennes à réflecteur et celui des sections radar d'engins [OSHIRO et al.] . L'utilisation conjointe de la formulation intégrale et de la théorie géométrique de la diffraction a fait l'objet d'études récentes [BURNSIDE et al., THIELE et NEWHOUSE] . Ce procédé semble promis à des développements intéressants. Il permettrait, en particulier, de déterminer numériquement des coefficients de diffraction qui, actuellement, ne sont pas connus analytiquement.

Une autre manière d'utiliser ces approximations consiste à retrancher le courant approché du courant vrai et à résoudre l'équation intégrale pour le terme correctif. [TEW et TSAI] . De façon plus générale, on peut déterminer la perturbation à apporter à la solution d'un problème connu pour résoudre un problème voisin [CHOW et SETH] . Il semble aussi que dans cette voie le gain en mémoire et en temps de calcul soit appréciable.

En complément de ces méthodes qui tendent à utiliser tout ce que l'on peut connaître de la solution, d'autres, également applicables au stade de la résolution, consistent à transformer l'équation intégrale initiale. MITTRA et LI ont proposé d'utiliser la transformation de FOURIER. L'équation intégrale peut être réécrite sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J(x_1) G(x; x_1) dx_1 = F(x) \mathbb{1}_R + K(x) [1 - \mathbb{1}_R]$$

où $\mathbb{1}_R$ est la fonction caractéristique du ruban, $K(x)$ est une fonction inconnue. La transformée de FOURIER de $J(x)$, notée $j(\xi)$ peut être développée dans une base $\{w_m(\xi)\}$ dont les éléments originaux $w_m(x)$ sont nuls en dehors du ruban :

$$j(\xi) = \sum_{n=1}^N \gamma_n w_n(\xi)$$

On peut choisir par exemple :

$$w_m(x) = e^{i \xi_m x} \mathbb{1}_R$$

$$w_m(\xi) = 2a \frac{\sin(\xi - \xi_m)a}{(\xi - \xi_m)a}$$

Par report dans l'équation intégrale, et après projection de deux membres de l'équation sur la base $\{w_m\}$, on obtient le système matriciel :

$$a x = b$$

avec

$$a_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} w_m(\xi) w_n(\xi) g(\xi) d\xi$$

$$b_m = \int_{-\infty}^{+\infty} w_m(\xi) f(\xi) d\xi$$

$$x_m = \delta_m$$

Lorsque le ruban est large devant la longueur d'onde, le rang de a est sensiblement inférieur à celui de la matrice originale A . De plus, les éléments a_{mn} décroissent rapidement lorsque $|m-n|$ augmente. Il est alors possible d'envisager de résoudre le nouveau système par des méthodes itératives utilisées pour les matrices creuses. Pour une largeur de ruban égale à 10 longueurs d'onde, le temps de calcul est réduit par un facteur 10, la capacité de mémoire par un facteur 4. De plus, le diagramme de diffraction s'exprime directement en fonction de j sans avoir à intégrer des courants. Cette méthode est toutefois limitée à des surfaces planes ou constituées de plusieurs surfaces planes.

b) - Procédés utilisables au stade la résolution numérique -

Le temps de calcul peut être réduit en utilisant les propriétés des matrices A et B : A ne dépend, pour une technique d'approximation donnée, que de S et ω ; B ne dépend que de la répartition spatiale du champ incident et de ω . Pour connaître les solutions $X_1, X_2 \dots X_M$ d'un même obstacle soumis à plusieurs ondes de même fréquence $B_1, B_2 \dots B_M$, le moyen le plus rapide consiste à résoudre simultanément tous les systèmes avec des seconds membres différents. Dans ce cas, le gain de temps est compensé par une augmentation de la capacité de mémoire nécessaire. Mais ce gain est très appréciable comparativement aux deux autres solutions qui consisteraient à résoudre les M systèmes séparément ou encore à calculer A^{-1} puis les différents produits avec les différents seconds membres.

L'inconvénient de la résolution d'un système par une méthode directe provient de ce qu'il est nécessaire de réserver en mémoire la totalité des éléments de la matrice \mathbf{A} .

Les méthodes itératives peuvent être utilisées avec profit pour de grands obstacles ou pour plusieurs obstacles en couplage lâche. Ces algorithmes permettent de tirer parti de la décroissance des termes non diagonaux et procurent une réduction du temps de calcul et de la capacité requise. Dans le cas général, une réduction de mémoire peut être obtenue par des techniques de minimisation, au détriment du temps de calcul.

Au lieu de résoudre le système :

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} X_j = B_i \quad 1 \leq i \leq N$$

on minimise la quantité :

$$e = \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N A_{ij} X_j - B_i \right|^2$$

au moyen d'algorithmes variés [PERINI] qui ne nécessitent plus le stockage simultané des N^2 éléments de \mathbf{A} . La perte de temps provient de ce qu'il est alors nécessaire de recalculer plusieurs fois les mêmes éléments. Toutefois, le développement d'algorithmes rapides permet d'espérer une extension de cette méthode.

1.2.3. - Détermination des modes caractéristiques de l'obstacle -

Comme on l'a souligné dans le paragraphe précédent, la matrice \mathbf{A} ne dépend, à une pulsation donnée, que de l'obstacle. Plutôt que de caractériser cet obstacle par un tableau de N^2 coefficients complexes, il est parfois préférable de la caractériser par des grandeurs physiques. C'est là l'objectif des méthodes développées par GARBACZ, HARRINGTON et MAUTZ. Si la matrice \mathbf{A} est obtenue à partir de l'équation intégrale du champ électrique, c'est une matrice complexe symétrique. U et V désignant, respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire de \mathbf{A} , on appelle courants caractéristiques de l'obstacle S les vecteurs X_n tels que :

$$V X_n = \lambda_n U X_n$$

Les valeurs propres λ_n sont réelles, les vecteurs X_n sont également réels et constituent une base orthogonale. La définition des courants caractéristiques au moyen de l'équation précédente implique l'orthogonalité des champs rayonnés par chacun d'entre eux sur une sphère de grand rayon entourant l'obstacle. Ces champs constituent une base utile dans les problèmes de synthèse de rayonnement et dans les problèmes de diffraction inverse.

La solution recherchée X s'écrit alors simplement :

$$X = \sum_m \frac{1}{1+i\lambda_m} \beta_m X_m$$

$$\beta_m = (\tilde{X}_m B) / (\tilde{X}_m U X_m)$$

où \tilde{X}_m désigne la matrice transposée de X_m . Pour des obstacles dont les dimensions ne sont pas trop grandes devant la longueur d'onde, il suffit de déterminer les courants caractéristiques correspondant aux valeurs propres les plus faibles.

De façon pratique, la détermination numérique de λ_m et de X_m peut s'effectuer directement au moyen d'un algorithme QR appliqué à $(V^{-1}U)$. De fait, l'expérience a montré qu'il était préférable de se ramener à une équation aux valeurs propres classique dont les solutions μ_m et Y_m s'expriment simplement en fonction de λ_m, X_m et où C est maintenant une matrice réelle définie positive.

$$C Y_m = \lambda_m Y_m$$

Cette équation peut alors être résolue par l'algorithme de JACOBI. A titre de test, le quotient de RAYLEIGH :

$$\mu_m = (\tilde{Y}_m C Y_m) / (\tilde{Y}_m Y_m)$$

peut ensuite être calculé, ce qui procure, du même coup, une précision accrue sur μ_m en raison de la nature stationnaire de cette expression pour des erreurs commises sur Y_m .

Lorsque l'onde incidente est modifiée, il suffit de recalculer le numérateur des coefficients β_m . Jusqu'à présent, cette méthode n'a été appliquée qu'à des corps de révolution de dimensions comparables à la longueur d'onde.

I.3. - RESOLUTION NUMERIQUE POUR UNE DEPENDANCE TEMPORELLE QUELCONQUE -

=====

I.3.1. - Utilisation de la transformée de FOURIER -

La maîtrise des techniques numériques en régime harmonique a conduit tout naturellement à tenter de les étendre aux régimes quelconques, d'autant plus que ces derniers sont l'objet de nombreuses applications, en radar notamment. La transformée de FOURIER peut être appliquée aux résultats numériques : la réponse harmonique est calculée dans le spectre de l'onde incidente. La réponse temporelle s'en déduit

alors par un algorithme de transformée de FOURIER rapide. L'inconvénient de ce procédé réside dans le fait que pour des signaux incidents de spectres étendus, l'analyse harmonique doit être répétée un grand nombre de fois.

La transformation de FOURIER peut également être appliquée aux équations intégrales. Pour celle déduite du champ magnétique, on obtient une équation intégral-différentielle :

$$\frac{1}{2} \vec{J}(\vec{x}; t) = \vec{n} \wedge \vec{H}^0(\vec{x}; t) + \vec{n} \wedge \int_S \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{x}'; t')}{\partial t'} + \vec{J}(\vec{x}'; t') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \wedge \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} d\vec{x}'$$

$$t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide. Le phénomène de retard à la propagation peut être mis à profit pour éviter l'inversion d'une matrice pleine de rang élevé comme cela est nécessaire en régime harmonique. Après une double discrétisation, dans l'espace et dans le temps, et compte tenu de ce que l'intégrale est à prendre au sens des parties finies, la densité de courant $\vec{J}(\vec{x}_i; t_j)$ se déduit des densités précédemment calculées (voir diagramme de la figure 4). Le point de départ de cette détermination récurrente est :

$$\vec{J}(\vec{x}_1; t_1) = 2 \vec{n} \wedge \vec{H}^0(\vec{x}_1; t_1)$$

La dérivée de la densité de courant par rapport au temps s'obtient par dérivation analytique d'une approximation polynômiale de la densité. Les coefficients du polynôme sont déterminés à partir des valeurs prises par la densité à des instants antérieurs. Ce procédé est d'autant meilleur que les pas de discrétisation sont faibles.

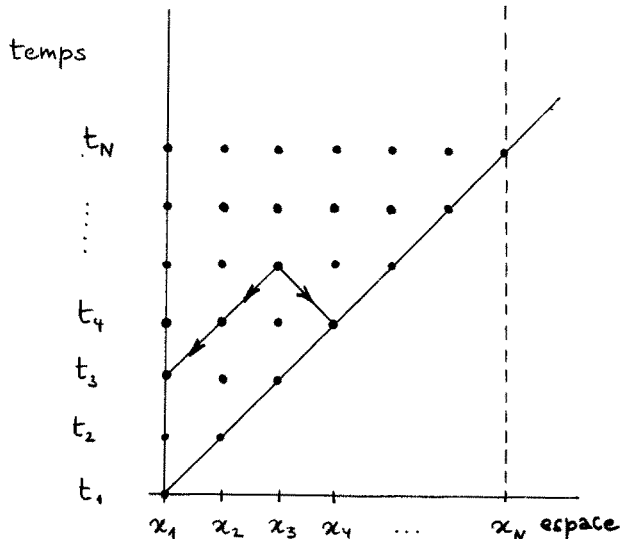


Figure 4

Ces pas dépendent du signal incident, par sa forme et sa durée, de l'obstacle par ses dimensions. En règle générale, le pas spatial Δx ne doit être qu'une fraction de la longueur d'onde la plus petite contenue dans le spectre incident. Pour que le procédé récursif soit possible, il faut que $\Delta t \leq \Delta x / c$.

De nombreux exemples d'application pourront être consultés dans la référence [POGGIO et MILLER]. Il s'agit le plus souvent d'obstacles de forme simple et de révolution. L'inconvénient de cette approche est qu'il est nécessaire de reprendre le calcul à son début dès que l'on modifie la structure du signal incident.

1.3.2. - Utilisation de la transformation de LAPLACE -

La transformation de LAPLACE peut être utilisée dans les problèmes de rayonnement et de diffraction comme elle l'est en théorie des circuits. Bien que cette extension puisse paraître évidente, cette approche est récente [BAUM] et son application à des problèmes concrets n'en est qu'à ses débuts [par exemple MARIN, TESCHE]. L'aspect numérique est sensiblement plus complexe comparativement aux méthodes reposant sur la transformation de FOURIER. Mais le gain en temps de calcul est sensible lors de l'étude systématique d'un même obstacle soumis à des signaux incidents variés.

Par extension de l'analyse harmonique au plan des pulsations complexes $p = \sigma + i\omega$, la méthode des moments conduit au système matriciel :

$$A(p) X(p) = B(p)$$

La théorie spectrale des équations de FREDHOLM permet d'écrire la solution recherchée sous la forme

$$X(p) = \sum_n \frac{1}{p - p_n} R(n) B(p) + F(p)$$

où $R(n)$ est une matrice indépendante de p , $F(p)$ est une fonction entière de p et les p_n sont les zéros du déterminant de A :

$$\det \{A(p_n)\} = 0$$

La matrice $R(n)$ s'exprime en fonction des vecteurs P_n et Q_n vérifiant :

$$A(p_n) P_n = 0$$

$$\tilde{A}(p_n) Q_n = 0$$

Il apparaît ainsi que les singularités proviennent en partie des pôles p_m , et en partie des singularités de l'excitation $B(p)$. Les pôles p_m sont caractéristiques de l'obstacle S . Pour des obstacles de dimensions finies, il n'intervient que des pôles simples. Comme en théorie des circuits, ceux-ci se répartissent dans le demi-plan $\sigma < 0$ soit sur l'axe réel, soit par paire de conjugués.

Par transformation de LAPLACE inverse, on obtient la réponse temporelle $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \left\{ \sum_n \frac{1}{p - p_n} R(n) B(p) + F(p) \right\} e^{pt} dp$$

Pour des excitations quelconques, l'intégrale peut être évaluée numériquement. Toutefois, dans la majorité des cas usuels, le développement de $B(p)$ est suffisamment simple pour pouvoir utiliser la technique des résidus. Ainsi, pour une excitation de type échelon :

$$B(p) = \frac{B_0(p)}{p} \quad B_0(p) \text{ fonction entière de}$$

il vient

$$x(t) = \sum_n \frac{R(n)}{p_n} B_0(p_n) e^{p_n t} + x_0$$

où x_0 est indépendant du temps et doit donc être nul puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Le problème consiste pratiquement à déterminer p_m, P_m, Q_m . Par diagonalisation de la matrice $A(p)$ au moyen de l'algorithme de HOUSEHOLDER, il est possible de construire une matrice unitaire $U(p)$ telle que :

$$U(p) A(p) = T(p)$$

où $T(p)$ est une matrice diagonale supérieure. Il en résulte que :

$$\det \{ A(p) \} = \det \{ T(p) \} = \prod_i t_{ii}$$

Si p_m est un pôle du premier ordre, $A(p_m)$ est une matrice $N \times N$ de rang $N-1$. Il suffit alors de rechercher les zéros du dernier élément diagonal de $T(p)$:

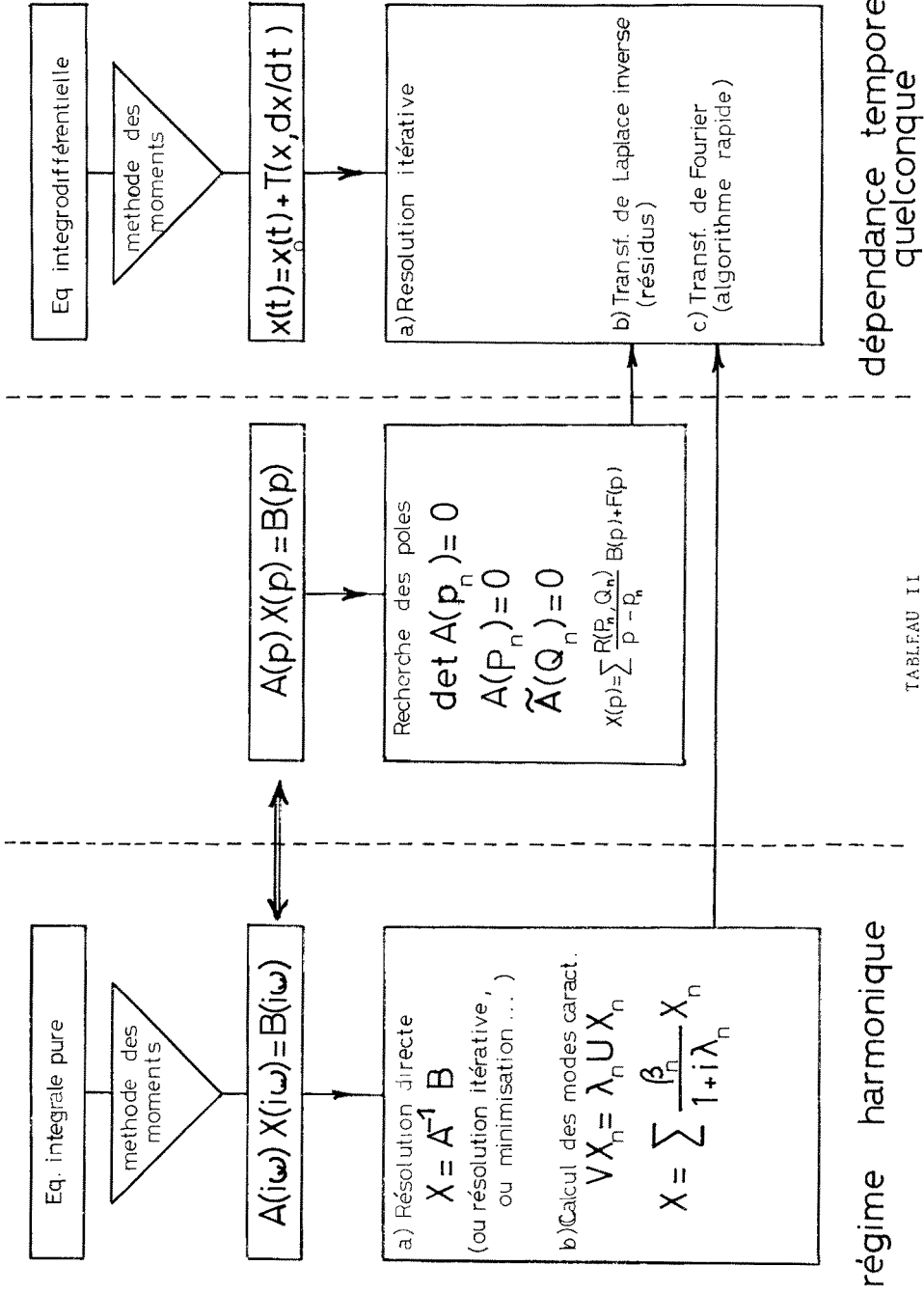
$$t_{NN}(p_m) = 0$$

Les vecteurs P_m et Q_m peuvent se déduire des équations :

$$\begin{aligned} T(p_m) P_m &= 0 \\ Q_m &= \tilde{U}(p_m) S_m \quad \text{ou} \quad \tilde{T}(p_m) S_m = 0 \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que comparée aux méthodes précédentes, celle-ci qui utilise la transformation de LAPLACE requiert un effort numérique sensiblement plus important (recherche des zéros dans le plan complexe). Fort heureusement, dans la pratique, l'évaluation de la réponse temporelle ne nécessite la détermination que de quelques pôles simples. Une fois ces pôles déterminés, ainsi que les vecteurs P_m et Q_m correspondants, cette réponse temporelle s'obtient très rapidement pour toutes les excitations possibles sous la forme d'une superposition de sinusoides amorties.

L'objet de cette première partie était de présenter les différentes méthodes numériques utilisables à partir de la formulation intégrale des problèmes extérieurs. Le tableau II en résume les traits caractéristiques et fait apparaître les liens qui existent entre elles.



TABEAU II

DEUXIEME PARTIE

=====

ETUDE D'UN RESEAU LIMITE

=====

Le réseau étudié est constitué d'un nombre limité L de lames métalliques, cylindriques, de longueur infinie et de section rectangulaire. Ces lames sont placées dans une onde incidente plane dont le champ magnétique est polarisé parallèlement aux bords des lames (Fig. 5). Le problème vectoriel se ramène à un problème scalaire dans un plan de section droite.

Ce genre de structure peut être utilisé pour concentrer toute l'énergie incidente dans un seul ordre diffracté. La direction du rayonnement correspondant dépend de la fréquence ; en modifiant la fréquence, on réalise ainsi simplement des réseaux dits à balayage.

Pour un réseau infini, la périodicité de la répartition du champ permet de raisonner sur un seul motif du réseau. Cette périodicité n'existe plus pour un réseau fini et il faut considérer globalement les L lames. On est alors conduit à des systèmes linéaires de rang élevé.

Parmi les approches possibles, deux sont à retenir : la première consiste à résoudre globalement le problème au moyen d'un système d'équations intégrales couplées (Voir 1ère Partie). La seconde consiste à utiliser un processus récurrent permettant de résoudre le problème à l lames à partir du problème à $l-1$ lames [BOLOMEY et WIRGIN b.]. La seconde méthode procure un certain gain de temps quand il est utile de connaître la solution des problèmes intermédiaires.

Sur le plan numérique, les deux approches posent des problèmes comparables [BODY]. La technique d'approximation la plus simple (collocation de type P.P.) a été abandonnée. Les lames étant minces, la convergence des résultats était trop lente. Aussi n'a-t-on conservé cette approximation que pour évaluer l'interaction de segments éloignés. Par contre, on a utilisé une approximation de type P.S. pour des segments proches.

La fig. 6 permet de comparer ces méthodes dans le cas de deux lames.

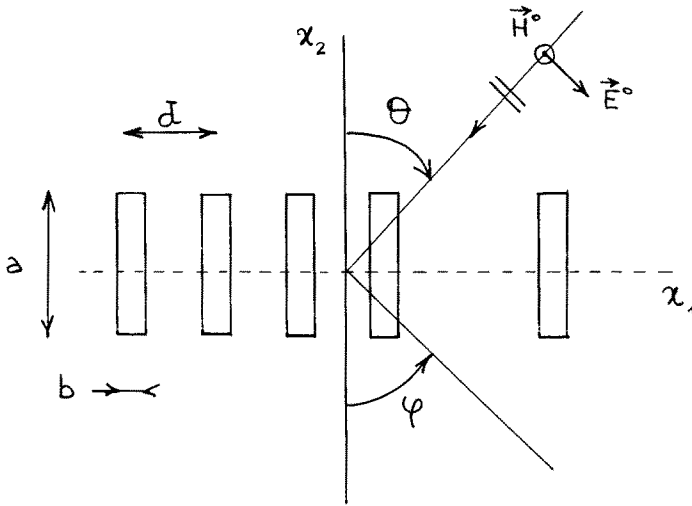


Figure 5

La quantité représentée $\hat{H}(\varphi)$ est le diagramme de diffraction qui caractérise la répartition angulaire du champ diffracté à grande distance.

La figure 7 représente cette même quantité pour un réseau de 13 lames. Les densités de 40 et 56 points par lame conduisent à résoudre des systèmes complexes de rangs 520 et 728. Les temps de calcul respectifs sont de 16 et 44 minutes sur un ordinateur UNIVAC 1110. Les résultats se stabilisent à partir de 56 points par lame. Il est en effet nécessaire de prendre davantage de points par lame lorsque celle-ci est en couplage avec de nombreuses autres lames.

La précision globale au stade de la résolution a été évaluée par substitution en calculant $\epsilon = |AX - B|$. Tous les éléments de ϵ ont été trouvés inférieurs à 10^{-5} .

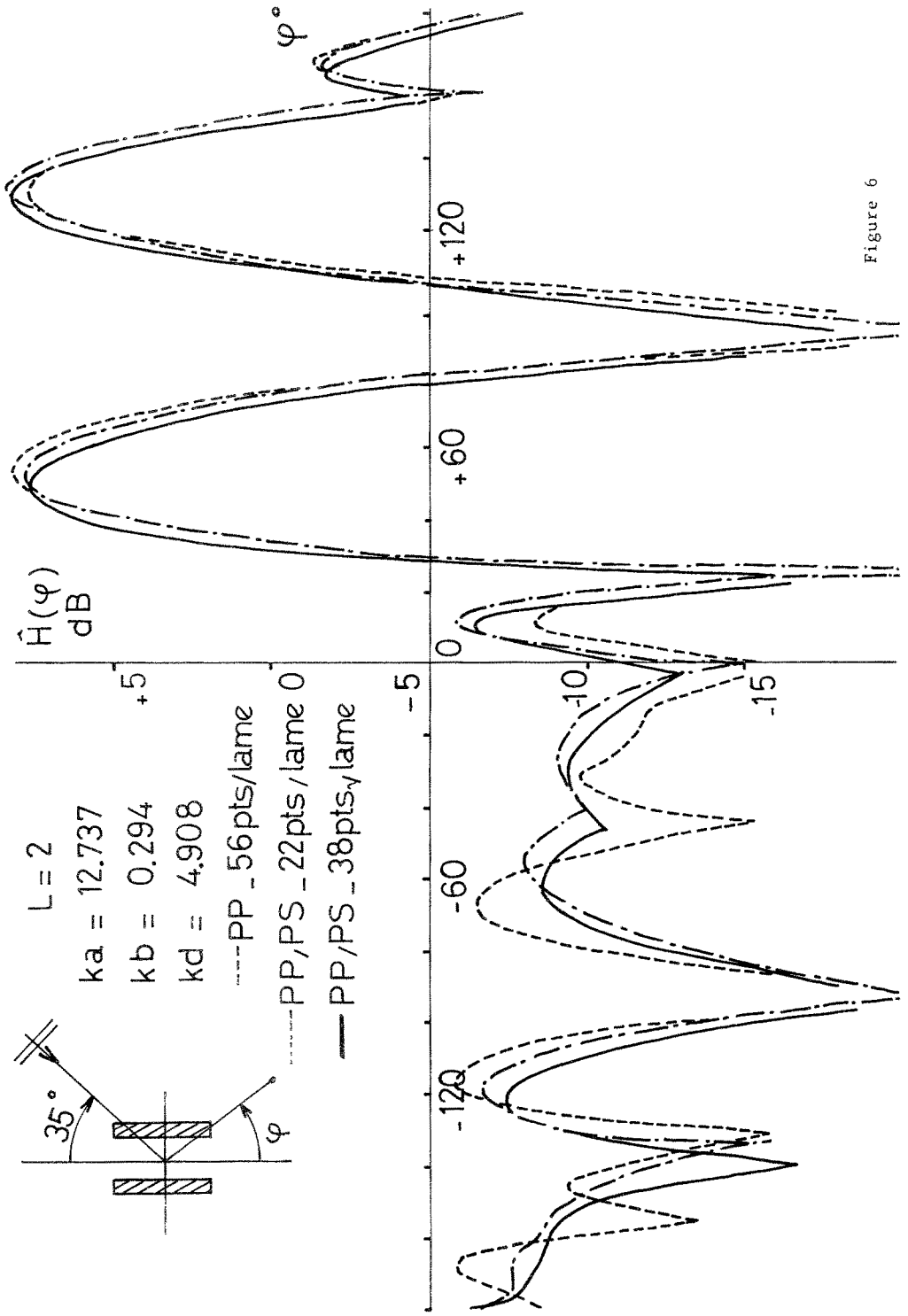


Figure 6

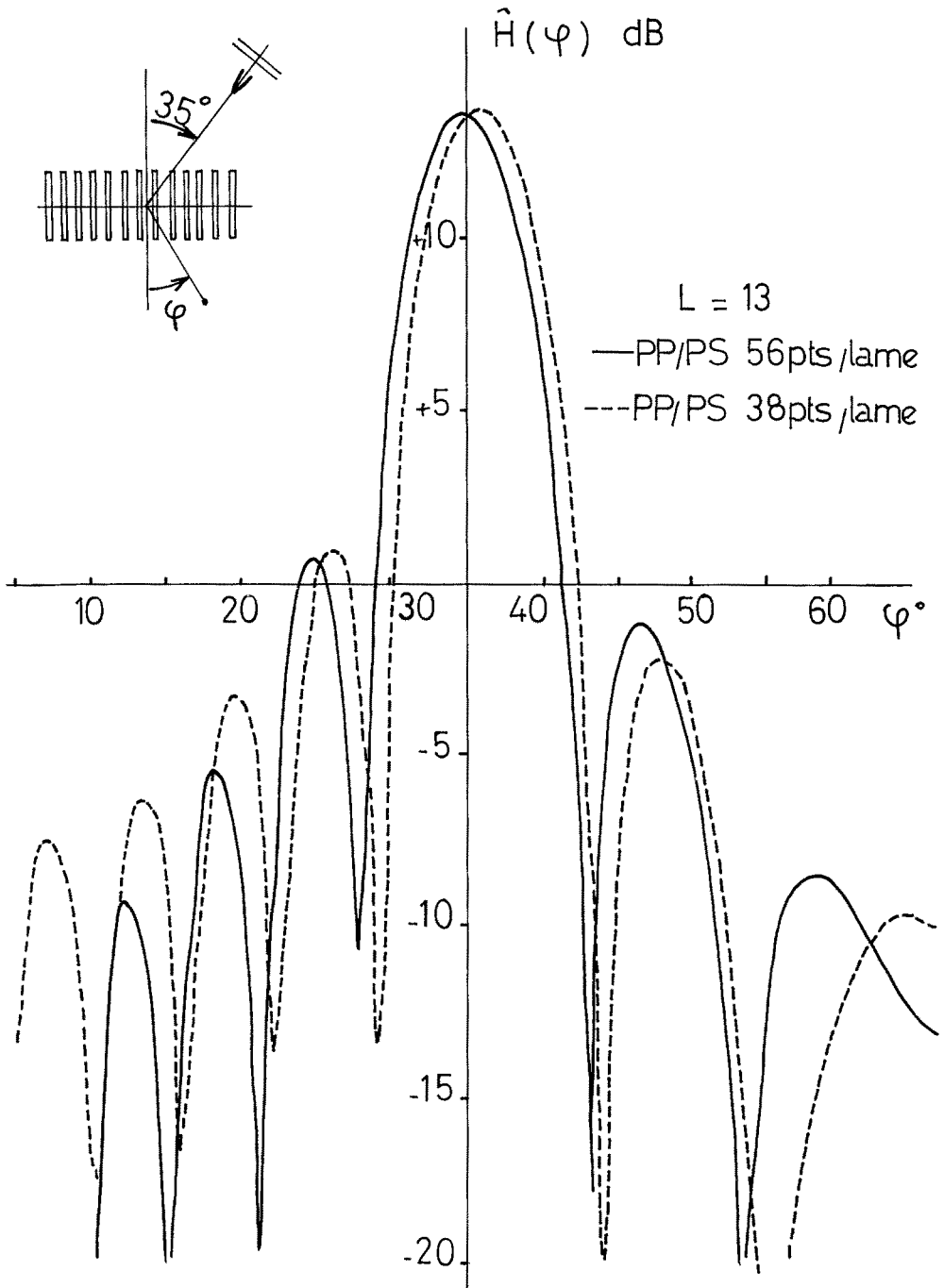


Figure 7

TROISIEME PARTIE

=====

ETUDE D'UNE MICROLIGNE A RUBAN

=====

La microligne à ruban, plus souvent appelée "microstrip" est une structure très utilisée dans la microélectronique des ondes courtes et ultracourtes. La Fig.8 en donne une coupe transversale. En dépit de sa simplicité apparente, le problème est relativement complexe en raison de la présence de la couche diélectrique. La propagation par ondes transversales est impossible. Il faut rechercher la solution sous forme d'une onde hybride, c'est-à-dire, d'une combinaison d'ondes semi-transversales T.E. et T.M.

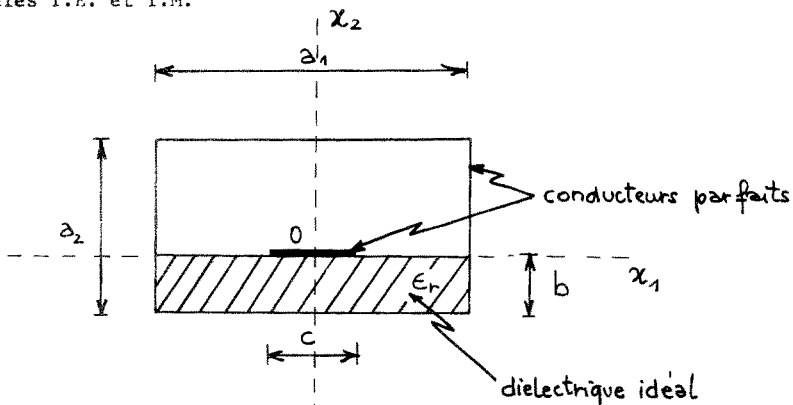


Figure 8

Ce problème a fait l'objet de très nombreuses études [pour les références correspondantes, consulter SAUVE et ESSAYAG a et b] au moyen de méthodes variées : perturbation de la solution électrostatique, différences finies, raccordement modal, équation intégrale singulière. Les deux dernières méthodes ont été plus spécialement étudiées dans le cadre d'une étude générale numérique et expérimentale.

La technique du raccordement modal tire parti du caractère séparable de la structure : les surfaces de discontinuité coïncident avec des lignes de coordonnées rectangulaires. Il est alors possible de représenter le champ électromagnétique dans le vide ($\chi_2 > 0$) et dans le diélectrique ($\chi_2 < 0$) comme combinaison linéaire de

solutions de l'équation des ondes, vérifiant déjà les conditions aux limites sur le boîtier externe. (condition de DIRICHLET pour les ondes TM, de NEUMANN pour les ondes TE). Les coefficients de ces développements sont déterminés en écrivant les conditions de raccordement dans le plan $\alpha_2 = 0$.

La méthode de l'équation intégrale singulière a été développée par LEWIN pour les problèmes de discontinuités dans les guides d'onde. MITTRA et ITOH l'ont appliquée au cas du microstrip. Elle consiste à ramener les conditions de raccordement de la méthode précédente à une équation intégrale dont la solution s'exprime sous forme d'une série très rapidement convergente.

Dans les deux cas, il faut résoudre un problème à valeurs propres. La Fig. 9 donne les diagrammes de phase du mode fondamental et des trois premiers modes pairs d'ordre supérieur. La concordance des résultats est satisfaisante. Mais pour la méthode de raccordement modal, il faut considérer une matrice de rang 40, alors que pour la méthode de l'équation intégrale singulière un rang 8 est suffisant. La lenteur de convergence de la première s'explique par les singularités du champ aux extrémités du ruban qui sont difficilement décrites par les développements modaux.

L'accélération de convergence de la seconde s'obtient au prix de calculs analytiques non négligeables et d'un effort de programmation accru. Ce genre de techniques se justifie pleinement en cas d'exploitation intensive des programmes, mais leur développement ne peut rester que l'affaire des spécialistes. La première méthode, au contraire, ne repose que sur des notions élémentaires et peut être mise en oeuvre facilement.

Cet exemple illustre bien la difficulté de trouver un juste compromis entre l'efficacité au niveau de l'exploitation et la rapidité de mise en oeuvre.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Roubine pour ses conseils lors de la rédaction de cet article ainsi que les chercheurs du Laboratoire d'Electronique Générale pour leur collaboration dans les deux dernières parties.

DIAGRAMMES DE PHASE D'UNE MICROLIGNE A RUBAN

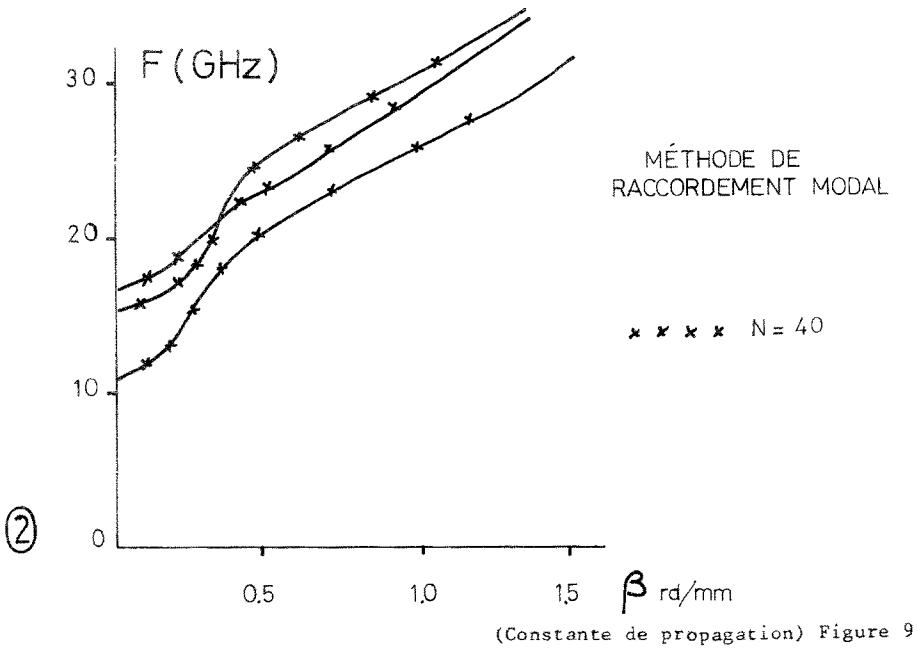
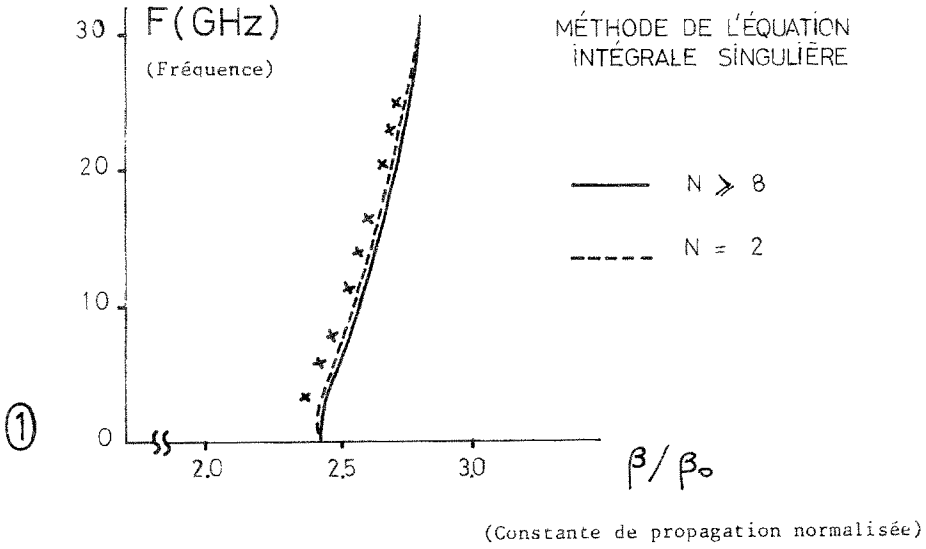
$a = 12,7 \text{ mm}$

$b = 1,27 \text{ mm}$

$\epsilon_r = 8,875$

($a_1 = a_2 = a$)

($c = b$)



B I B L I O G R A P H I E

=====

- ABDELMESSIH S., SINCLAIR G., *Can. Journ. Phys.*, 45, 1305 (1967)
- ANDREASEN M.G. a, *I.E.E.E. Trans. AP - 12*, 746 (1964)
- ANDREASEN M.G. b, *I.E.E.E. Trans. AP - 13*, 303 (1965)
- BAUM C.E. *I.E.E.E. G - AP Int. Symp., Boulder, Symp. Digest*, 459 (1973)
- BODY Y., Réseaux limités à effet de blaze, *Rapp. Techn., Lab. Electron. Gén.* (1973)
- BODY Y., ESSAYAG G., *Nouv. Rev. Opt. Appliquée*, 3, 337 (1972)
- BOLOMEY J. Ch., WIRGIN A. a, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, XIV, 97 (1971)
- BOLOMEY J. Ch., WIRGIN A. b, *I.E.E.E. G - AP Int. Symp. Boulder, Symp. Digest*, 75 (1973)
- BOLOMEY J. Ch., TABBARA W., *I.E.E.E. Trans. AP - 21*, 356 (1973)
- BOWMAN J.J., SENIOR T.B.A., USLENGHI P.L.E., *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, North Holland, Amsterdam (1969)
- BURNSIDE W.D., YU C.L., MARHEFKA R.J., *I.E.E.E. Int. Symp., Boulder, Symp. Digest*, 253 (1973)
- CHOW Y.L., SETH D.P.S., *I.E.E.E. Int. Symp., Boulder*, 259 (1973)
- ESSAYAG G., SAUVE B. a, *Electron. Lett.*, 8, n° 21, 108 (1972)
- ESSAYAG G., SAUVE B. b, *Electron. Lett.*, 8, n° 23, 110 (1972)
- GARBACZ R.J., *Proc. I.E.E.E.*, 53, 856 (1965)
- HARRINGTON R.F. a, *Field Computation by Moment Methods*, Mac Millan (1968)
- HARRINGTON R.F. b, MAUTZ J.R., *I.E.E.E. Trans. AP - 19*, 622 et 629 (1971)
- HÖNL H., MAUE A.W., WESTPFAHL K., *Theorie der Beugung, Handbuch der Physik 25/1*, Springer Verlag (1961)
- JESSEL M., *Contributions aux théories du principe de Huyghens et de la diffraction*, Sedocar 401 (1963)
- JONES D.S., *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press (1964)
- KELLER J.B., *Journ. Opt. Soc. Am.*, 52, 116 (1962)
- KLEIN C.A., MITTRA R., *I.E.E.E. G - AP Int. Symp., Boulder, Symp. Digest*, 271 (1973)
- KOUYOUMJIAN R.G., *Communication Orale, XVII Assemblée Générale de l'URSI, Varsovie* (1972)
- LEWIN L., *Advances in Microwaves*, vol. 1, Academic Press (1966)
- MAUE A.W., *Zeit. Phys.*, 126, 601 (1949)
- MARIN L., *I.E.E.E. G - AP Int. Symp., Boulder, Symp. Digest*, 467 (1973)
- MEI K.K., VAN BLADFL J.G., *I.E.E.E. Trans. AP - 11*, 185 (1963)
- MITTRA R., ITOH T., *I.E.E.E. Trans. MTT - 19*, 47 (1971)
- MITTRA R., LI T.S., *Int. Symp. on Electromagn. Wave Theory, Tbilissi, Symp. Digest*, 270 (1971)

- MITTRA R., Computer Techniques for Electromagnetics, Pergamon Press (1973)
- NEUREUTHER A.R., ZAKI K., Rad. Sc., 3, New Series, 1158 (1968)
- OSHIRO F.K., MITZNER K.M., LOCUS S.S., Techn. Rept. AFAL - TR - 70 - 21 et II,
Northrop Corporation Aircraft Division (1970)
- PERINI J., I.E.E.E. G - AP Int. Symp., Boulder, Symp. Digest, 263, (1973)
- POGGIO A.J., MILLER E.K. dans Computer Techniques... voir MITTRA (1973)
- RICHMOND J.H., Proc. I.E.E.E., 53, 796 (1965)
- ROW R.V., Journ. Appl. Phys., 26, 666 (1955)
- TESCHE F.M., I.E.E.E. G - AP Int. Symp., Boulder, Symp. Digest, 463 (1973)
- TEW M.D., TSAI L.L., Proc. I.E.E.E., 60, 1436 (1972)
- THIELE G.A., dans Computer Techniques ... voir MITTRA (1973)
- THIELE G.A., NEWHOUSE T., I.E.E.E. G - AP Int. Symp., Boulder, Symp. Digest, 257
(1973)
- TSAI L.L., WILTON D.R., HARRISON M.G., WRIGHT E.H., I.E.E.E. Trans. AP - 20, 705
(1972)
- VAN BLADEL J.G., Electromagnetic Fields, Mc Graw Hill (1964)