UN LEMME DE LA THEORIE DE LA MESURE

par C. DELLACHERIE

ERDOS, KESTELMANN et ROGERS (in Colloquium Mathematicum XI, 1963, p75-80) ont démontré le théorème curieux suivant :

THEOREME.- Soient E un espace métrisable compact et P une mesure de probabilité sur E qui ne charge pas les points. Si (A_n) est une suite de boréliens telle que $\limsup P(A_n) \geq \varepsilon > 0$, alors il existe une sous-suite (A_{n_k}) et un borélien S de mesure $P(S) \geq \varepsilon$ tels que tout point de S soit un point de condensation de $\liminf A_{n_k}$.

Pour démontrer ce théorème, ils utilisent le lemme suivant, dont ils donnent une démonstration astucieuse :

LEMME.- Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé et soit (A_n) une suite d'ensembles mesurables telle que $\limsup P(A_n) \geq \varepsilon > 0$. Il existe une sous-suite (A_{n_k}) et un ensemble mesurable D de mesure $P(D) \geq \varepsilon$ vérifiant la propriété suivante : si B est un ensemble mesurable inclus dans D et si $P(B) > 0$, alors $P(A_{n_k} \cap B) \neq 0$ sauf pour un nombre fini d'indices.

Nous allons donner une version plus forte de ce lemme, ainsi qu'une démonstration qui a l'avantage d'être " démystificatrice".

LEMME.- Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que $0 \leq f_n \leq 1$ et que $\limsup E(f_n) \geq \varepsilon > 0$. Il existe une sous-suite (f_{n_k}) et un ensemble mesurable D de mesure $P(D) \geq \varepsilon$ vérifiant la propriété suivante : si B est un ensemble mesurable inclus dans D et si $P(B) > 0$ alors $\lim E(f_{n_k} . I_B)$ existe et est > 0.

DEMONSTRATION.- Comme il s'agit d'une sous-suite, on peut supposer $E(f_n) \geq \varepsilon$ pour tout n. D'autre part la suite (f_n) est uniformément intégrable : il existe donc une sous-suite (f_{n_k}) qui converge vers une v.a. f pour la topologie $\sigma(L^1,L^\infty)$. On a alors : $E(f) \geq \varepsilon$ et $0 \leq f \leq 1$ (l'intégrale de f et de $1-f$ est ≥ 0 sur tout ensemble mesurable). Il suffit alors de prendre $D = \{f > 0\}$.
En effet, $P(D) \geq E(f) \geq \varepsilon$ et si $B \in \underline{\underline{F}}$, $\lim E(f_{n_k} I_B) = E(f.I_B) > 0$ si $B \subset D$ et $P(B) > 0$.