

3. KAPITEL

Abelsche Asymptotik der einseitigen Laplace-Transformation:
Verhalten von $f(s)$ im Unendlichen§ 1. Asymptotische Entwicklung der \mathfrak{L} -Transformierten für $s \rightarrow \infty$

Vorbemerkung: Wir legen im folgenden das \mathfrak{L} -Integral mit dem Intervall $(0, \infty)$ zugrunde. In den Anwendungen handelt es sich häufig um \mathfrak{L} -Integrale über ein endliches Intervall $(0, T)$. Dann ist $F(t) = 0$ für $T > 0$ zu denken.

Wir formulieren für die durch ein \mathfrak{L} -Integral dargestellten Funktionen zunächst einige Sätze über Entwicklungen nach reinen Potenzen.

Satz 1⁵. $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ besitze eine Konvergenzhalbebene. Wenn $F(t)$ eine asymptotische Entwicklung

$$(1) \quad F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} t^{\lambda_{\nu}} \quad (-1 < \Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \dots) \quad \text{für } t \text{ (reell)} \rightarrow 0$$

hat, so lässt sich $f(s)$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$(2) \quad f(s) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu} + 1)}{s^{\lambda_{\nu} + 1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \text{ auf jedem Strahl } |\arcs| < \frac{\pi}{2},$$

gleichmässig in jedem Winkelraum $|\arcs| \leq \psi < \pi/2^*$.

Beweis: Es liegt hier der «Idealfall» der Abelschen Asymptotik vor (siehe 2. 5). Auf Grund von (1) ist

$$F(t) - \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} t^{\lambda_{\nu}} \sim c_{n+1} t^{\lambda_{n+1}} \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Da $\mathfrak{L}\{F\}$ und $\mathfrak{L}\{t^{\lambda_{\nu}}\}$ ($\Re \lambda_{\nu} > -1$) existieren, folgt aus dem Abelschen Satz 1 [I 14.1]:

$$\mathfrak{L}\left\{F(t) - \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} t^{\lambda_{\nu}}\right\} = f(s) - \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu} + 1)}{s^{\lambda_{\nu} + 1}} \sim c_{n+1} \frac{\Gamma(\lambda_{n+1} + 1)}{s^{\lambda_{n+1} + 1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty$$

gleichmässig in jedem Winkelraum $|\arcs| \leq \psi < \pi/2$. Das ist die Behauptung.

*) Das bedeutet:

$$s^{\lambda_n} \left(f(s) - \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu} + 1)}{s^{\lambda_{\nu} + 1}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{oder} \quad s^{\lambda_{n+1}} \left(f(s) - \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu} + 1)}{s^{\lambda_{\nu} + 1}} \right) \rightarrow c_{n+1} \Gamma(\lambda_{n+1} + 1),$$

wenn s zweidimensional in einem Winkelraum $|\arcs| \leq \psi < \pi/2$ gegen ∞ strebt (siehe die Bedeutung dieses Ausdrucks in Anhang I, Nr. 52). An die Stelle des Winkelraums mit dem Scheitel $s = 0$ könnte auch ein Winkelraum mit beliebigem Scheitel s_0 treten.

Trotz seines einfachen Beweises ist dieser Satz von grosser Tragweite, wie die Anwendungen in § 2 zeigen.

Während asymptotische Potenzentwicklungen zwar gliedweise integriert, aber im allgemeinen nicht gliedweise differenziert werden dürfen, gilt für Entwicklungen, die auf Grund von Satz 1 entstanden sind, folgendes:

Satz 2. $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ besitze eine Konvergenzhalbebene. Wenn $F(t)$ für $t \rightarrow 0$ eine asymptotische Entwicklung der Form (1) hat, so lassen sich die Ableitungen von $f(s)$ durch die gliedweise differenzierte Reihe (2) asymptotisch darstellen:

$$(3) \quad f^{(n)}(s) \approx (-1)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu} + n + 1)}{s^{\lambda_{\nu} + n + 1}}.$$

Ist $\Re\lambda_0 > 0$, so lässt sich $\int_s^{\infty} f(\sigma) d\sigma$, erstreckt über einen beliebigen Strahl, der mit der positiv reellen Achse einen Winkel α mit $|\alpha| < \pi/2$ einschliesst, durch die gliedweise integrierte Reihe (2) asymptotisch darstellen:

$$(4) \quad \int_s^{\infty} f(\sigma) d\sigma \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu})}{s^{\lambda_{\nu}}}.$$

(3) und (4) gelten für $s \rightarrow \infty$ auf jedem Strahl $|\arcs| < \pi/2$, gleichmässig in $|\arcs| \leq \psi < \pi/2$.

Beweis: Nach Satz 1 [I 3.2] ist

$$f^{(n)}(s) = \mathfrak{L}\{(-t)^n F(t)\}.$$

Aus (1) folgt:

$$(-t)^n F(t) \approx (-1)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} t^{\lambda_{\nu} + n} \quad \text{für } t \rightarrow 0,$$

also nach Satz 1 die Relation (3). Ferner ist nach (1)

$$F(t) \sim c_0 t^{\lambda_0} \quad \text{und} \quad \frac{F(t)}{t} \sim c_0 t^{\lambda_0 - 1} \quad \text{für } t \rightarrow 0,$$

also $\mathfrak{L}\{F(t)/t\}$ für $\Re\lambda_0 > 0$ konvergent und nach Satz 3 [I 3.6]

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f(\sigma) d\sigma,$$

wobei das Integral über einen Strahl der oben bezeichneten Art erstreckt werden kann. Wegen

$$\frac{F(t)}{t} \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} t^{\lambda_{\nu} - 1} \quad (-1 < \Re\lambda_0 - 1 < \Re\lambda_1 - 1 < \dots) \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

folgt aus Satz 1 die Relation (4).

In den Anwendungen kommt es häufig vor, dass die Reihe für $F(t)$ in einer Umgebung von $t = 0$ konvergiert und nach Potenzen mit ganzen Exponenten

fortschreitet, so dass $F(t)$ in $t = 0$ holomorph ist, oder dass die Exponenten Multipla eines Bruches $1/m$ sind, so dass $F(t)$ auf einer algebraischen Fläche mit m -fachem Windungspunkt holomorph ist. Wir wollen die entsprechenden Sätze eigens formulieren.

Satz 3⁶. *Besitzt $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ eine Konvergenzhalbebene und ist $F(t)$ in $t = 0$ holomorph:*

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\nu!} t^{\nu} \quad \text{für } |t| < \varrho,$$

so ist

$$f(s) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(0)}{s^{\nu+1}}$$

für $s \rightarrow \infty$ auf jedem Strahl $|\arcs| < \pi/2$, gleichmässig in $|\arcs| \leq \psi < \pi/2$.

Bemerkung: Die Reihe für $f(s)$ kann auch (für hinreichend grosse $|s|$) konvergent sein. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $f(s)$ im Unendlichen holomorph, also $F(t)$ nach Satz 1 [I 10. 1] eine ganze Funktion vom Exponentialtyp ist.

Satz 4⁷. *Besitzt $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ eine Konvergenzhalbebene und lässt sich $F(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ durch eine konvergente Reihe der Form*

$$F(t) = \frac{1}{t} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu/m} \quad (m \text{ eine positive ganze Zahl})$$

darstellen, so ist

$$f(s) \approx \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \frac{\Gamma(\nu/m)}{s^{\nu/m}}$$

für $s \rightarrow \infty$ auf jedem Strahl $|\arcs| < \pi/2$, gleichmässig in $|\arcs| \leq \psi < \pi/2$.

Diese Sätze werfen Licht auf eine Frage, die sich bei der praktischen Berechnung von \mathfrak{L} -Transformierten oft erhebt: Wenn eine Originalfunktion F in eine Reihe $\sum F_n$ entwickelbar ist, von der jedes Glied F_n eine Bildfunktion besitzt, so liegt der Versuch nahe, die Bildfunktion von F durch *gliedweise Transformation* zu gewinnen: $\mathfrak{L}\{\sum F_n\} = \sum \mathfrak{L}\{F_n\}$. Dass dies schon in den einfachsten Fällen zu falschen Resultaten führen kann, zeigt folgendes Beispiel. Zu der Funktion $F(t) \equiv e^{-t^2}$ gehört ein \mathfrak{L} -Integral, das für alle s konvergiert.

Entwickelt man aber e^{-t^2} in die für alle t konvergente Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} t^{2\nu}/\nu!$ und führt die \mathfrak{L} -Transformation gliedweise aus, so erhält man die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!} \frac{1}{s^{2\nu+1}},$$

die für jedes s divergiert, da die absolut genommenen Glieder von einer Stelle an zunehmen. Unsere Sätze zeigen nun, dass diese Reihe trotzdem nicht ganz sinnlos ist, denn sie liefert die asymptotische Entwicklung der Bildfunktion für $s \rightarrow \infty$ (siehe hierzu 3.2.1). Allgemein kann man die obigen Sätze dahin deuten, dass *jede Potenzentwicklung einer Originalfunktion* (die selbst gar nicht

zu konvergieren, sondern die Funktion nur asymptotisch für $t \rightarrow 0$ darzustellen braucht) *unbesehen gliedweise transformiert werden darf, wenn man das Resultat nicht als konvergente Reihe, sondern als asymptotische Entwicklung für $s \rightarrow \infty$ in Anspruch nimmt.*

Manchmal tritt bei Fragen der Asymptotik das \mathfrak{L} -Integral in etwas verallgemeinerter Form auf, für die folgender Satz gilt.

Satz 5⁸. *Das Integral*

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st^\alpha} F(t) dt \quad (\alpha > 0)$$

habe eine Konvergenzhalbebene. Wenn $F(t)$ eine asymptotische Entwicklung

$$(5) \quad F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\lambda_\nu} \quad (-1 < \Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \dots) \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

besitzt, so lässt sich $f(s)$ in die asymptotische Reihe

$$(6) \quad f(s) \approx \frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\Gamma((\lambda_\nu + 1)/\alpha)}{s^{(\lambda_\nu + 1)/\alpha}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad (|\arcs| < \frac{\pi}{2})$$

entwickeln.

Beweis: Es ist

$$\int_0^{\infty} e^{-st^\alpha} F(t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t^{1/\alpha}) t^{(1/\alpha)-1} dt.$$

Aus (5) ergibt sich

$$F(t^{1/\alpha}) t^{(1/\alpha)-1} \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{[(\lambda_\nu + 1)/\alpha] - 1} \quad \text{für } t \rightarrow 0,$$

also nach Satz 1 die Behauptung.

Ist $F(t)$ nur auf der positiv reellen Achse definiert, so konvergiert $\mathfrak{L}\{F\}$ in einer rechten Halbebene, und die asymptotische Entwicklung von $f(s)$ gilt für $s \rightarrow \infty$ in dieser Halbebene. Ist $F(t)$ in einem Winkelraum analytisch und vom Exponentialtyp, so lässt sich der Integrationsweg des \mathfrak{L} -Integrals drehen, wobei sich die Konvergenzhalbebene in entgegengesetzter Richtung dreht und die so entstehenden Transformierten die analytische Fortsetzung derselben Funktion $f(s)$ darstellen (I, S. 366–368). Die asymptotische Entwicklung gilt dann in der Vereinigungsmenge der Konvergenzhalbebenen.

Satz 6⁹. $F(t)$ sei in einem Winkelraum $\alpha < \arct < \beta$ mit eventueller Ausnahme von $t = 0$ und $t = \infty$ analytisch. Es sei darin*)

$$F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\lambda_\nu} \quad (-1 < \Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \dots) \quad \text{für } t \rightarrow 0,$$

$$(7) \quad |F(t)| < A e^{a|t|} \quad (a > 0) \quad \text{für } |t| \geq R > 0.$$

*) Die asymptotische Entwicklung von $F(t)$ braucht nicht gleichmässig hinsichtlich \arct zu gelten.

Die durch

$$(8) \quad f(s) = \mathfrak{L}^{(\varphi)}\{F\} = \int_0^{\infty(\varphi)} e^{-st} F(t) dt \quad (\alpha < \varphi < \beta)$$

definierte Funktion ist in dem Gebiet $\Re(s e^{i\varphi}) > a$, $\alpha < \varphi < \beta$, analytisch*). Sie besitzt die asymptotische Entwicklung

$$f(s) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu}+1)}{s^{\lambda_{\nu}+1}}$$

für $s \rightarrow \infty$ auf jedem Strahl mit $-\beta - (\pi/2) < \arg s < -\alpha + (\pi/2)$, gleichmässig in $-\beta - (\pi/2) + \delta < \arg s < -\alpha + (\pi/2) - \delta$ ($\delta > 0$).

Sowohl $F(t)$ als $f(s)$ kann auf einer Riemannschen Fläche analytisch sein: $F(t)$, wenn $\beta - \alpha > 2\pi$; $f(s)$, wenn $\beta - \alpha > \pi$.

Beweis: Ein einzelnes Funktionselement

$$f(s) = \int_0^{\infty(\varphi)} e^{-st} F(t) dt = e^{i\varphi} \int_0^{\infty} e^{-sr e^{i\varphi}} F(r e^{i\varphi}) dr$$

hat wegen $F(t) \sim c_0 t^{\lambda_0}$ ($\Re \lambda_0 > -1$) und (7) in der Variablen $\sigma = s e^{i\varphi}$ mindestens das Konvergenzgebiet $\Re \sigma = \Re(s e^{i\varphi}) > a$. Aus

$$F(r e^{i\varphi}) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} e^{i\lambda_{\nu}\varphi} r^{\lambda_{\nu}} \quad \text{für } r \rightarrow 0$$

folgt nach Satz 1:

$$f(s) \approx e^{i\varphi} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} e^{i\lambda_{\nu}\varphi} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu}+1)}{(s e^{i\varphi})^{\lambda_{\nu}+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu}+1)}{s^{\lambda_{\nu}+1}},$$

wenn s in der Halbebene $\Re(s e^{i\varphi}) > a$ gegen ∞ strebt, und zwar gilt das in jedem Winkelraum \mathfrak{B} mit einer Öffnung $< \pi$ gleichmässig. Lässt man φ von α bis β variieren, so erhält man dieselbe Entwicklung in dem ganzen Gebiet $\Re(s e^{i\varphi}) > a$, $\alpha < \varphi < \beta$, das von dem Kreisbogen $|s| = a$, $-\beta < \arg s < -\alpha$, und den Tangenten in dessen Endpunkten, d. h. von Strahlen unter den Winkeln $-\beta - (\pi/2)$ und $-\alpha + (\pi/2)$ begrenzt wird. Verkleinert man das Gebiet, indem man die Tangenten in den Punkten mit $\arg s = -\beta + \delta$, $\arg s = -\alpha - \delta$ zieht, so lässt sich dieses durch endlich viele der oben genannten Winkelräume \mathfrak{B} überdecken. In jedem gilt die Entwicklung gleichmässig (d. h. wenn s zweidimensional gegen ∞ strebt), also auch in dem ganzen Gebiet.

Bisher haben wir für $F(t)$ und dementsprechend auch für $f(s)$ nur asymptotische Entwicklungen nach reinen Potenzen betrachtet. Wir können aber jeder t -Potenz noch als Faktor eine der in Satz 6 [I 14. 1] mit $L(t)$ bezeichneten Funktionen und der entsprechenden s -Potenz die Funktion $L(1/s)$ beigeben (übrigens jeder eine andere). Wir begnügen uns damit, als Faktor für alle t -Potenzen die

*) Siehe die Gestalt dieses Gebietes in I, S.366, Figur 22.

Funktion $\log 1/t = -\log t$ und demgemäss für die s -Potenzen die Funktion $\log s$ als Faktor zu wählen, was dem in den Anwendungen häufigsten Fall entspricht.

Satz 7¹⁰. $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ besitze eine Konvergenzhalbene. $F(t)$ gestatte die asymptotische Entwicklung

$$(9) \quad F(t) \approx -\log t \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} t^{\lambda_{\nu}} \quad (-1 < \Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \dots) \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Dann hat $f(s)$ die asymptotische Entwicklung

$$(10) \quad f(s) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu}+1)}{s^{\lambda_{\nu}+1}} (\log s - \Psi(\lambda_{\nu}+1)) \quad \text{für } s \text{ (reell)} \rightarrow \infty,$$

wo $\Psi(x) = (d/dx) \log \Gamma(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ ist.

Beweis: Wir können nach dem Schema des Idealfalls (siehe 2.5) vorgehen, wobei hier einmal der Fall vorliegt, dass die dort mit φ_n und χ_n bezeichneten Funktionen verschieden sind. Nach (9) ist

$$F(t) + \log t \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} t^{\lambda_{\nu}} \sim -c_{n+1} t^{\lambda_{n+1}} \log t \quad \text{für } t \rightarrow 0,$$

also nach Satz 6 [I 14. 1]

$$\mathfrak{L} \left\{ F(t) + \log t \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} t^{\lambda_{\nu}} \right\} \sim c_{n+1} \frac{\Gamma(\lambda_{n+1}+1)}{s^{\lambda_{n+1}+1}} \log s \quad \text{für } s \text{ (reell)} \rightarrow \infty.$$

Wegen

$$\mathfrak{L}\{t^{\lambda} \log t\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}} (\Psi(\lambda+1) - \log s)$$

und

$$\frac{1}{s^{\lambda_{n+1}+1}} \log s \sim \frac{1}{s^{\lambda_{n+1}+1}} (\log s - \Psi(\lambda_{n+1}+1)) \quad \text{für } s \rightarrow \infty$$

ergibt sich die Behauptung.

§ 2. Beispiele

1. Das Gaußsche Fehlerintegral

Es ist für jedes komplexe s

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{1}{2} e^{-t^2/4} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st-t^2/4} dt = \frac{1}{2} e^{s^2} \int_0^{\infty} e^{-(s+t/2)^2} dt = e^{s^2} \int_s^{\infty} e^{-u^2} du,$$

wobei das Integral über den Horizontalstrahl von s aus nach rechts zu erstrecken ist. Die Originalfunktion ist eine ganze Funktion, aber nicht vom Exponentialtyp, so dass die Bildfunktion in $s = \infty$ nicht holomorph, d. h. in eine

konvergente Reihe nach Potenzen von $1/s$ entwickelbar sein kann. Sie besitzt dagegen eine asymptotische Entwicklung dieser Art. In dem Winkelraum $|\arct t| < \pi/4$ ist

$$\frac{1}{2} e^{-t^2/4} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{4^\nu \nu!} t^{2\nu} \quad (\text{sogar für alle } t)$$

und ausserdem

$$\left| \frac{1}{2} e^{-t^2/4} \right| < A \quad \text{für } |t| \geq 0,$$

also gilt nach Satz 6 [3. 1] (vgl. Anhang I, Nr. 2):

$$e^{s^2} \int_s^\infty e^{-u^2} du \approx \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{4^\nu \nu! s^{2\nu+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu + (1/2))}{s^{2\nu+1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty$$

in dem Winkelraum $|\arcs s| < 3\pi/4$, in jedem kleineren Winkelraum gleichmässig. Für das komplementäre Fehlerintegral

$$\operatorname{erfc}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_s^\infty e^{-u^2} du$$

ergibt sich hieraus:

$$(1) \quad \operatorname{erfc}(s) \approx \frac{1}{\pi} e^{-s^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu + (1/2))}{s^{2\nu+1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \text{ in } |\arcs s| < \frac{3}{4}\pi,$$

womit man auch über die asymptotische Entwicklung für das Fehlerintegral

$$\operatorname{erf}(s) = 1 - \operatorname{erfc}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-u^2} du$$

in demselben Bereich verfügt.

2. Das Exponentialintegral

Das Exponentialintegral

$$\operatorname{Ei}(s) = \int_{-\infty}^s \frac{e^u}{u} du$$

ist für alle komplexen s mit Ausnahme der positiv reellen definiert; wenn es längs eines horizontalen Strahles erstreckt wird. Durch die Substitution $u = -s - x$ erhält man aus dem Ausdruck für $\operatorname{Ei}(-s)$:

$$-e^s \operatorname{Ei}(-s) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{s+x} dx,$$

wo der Integrationsweg nunmehr die positiv reelle Achse ist. Das Integral ist für alle komplexen s ausser den negativ reellen definiert. Es sei nun $s = r e^{i\varphi}$, $|\varphi| < \pi$, ein fester Wert. Dann setzen wir $x = r t$ und erhalten:

$$-e^s \operatorname{Ei}(-s) = \int_0^\infty \frac{e^{-rt}}{e^{i\varphi} + t} dt = e^{-i\varphi} \int_0^\infty e^{-rt} \frac{1}{1 + t e^{-i\varphi}} dt.$$

Für $|t| < 1$ ist

$$\frac{1}{1 + t e^{-i\varphi}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu e^{-\nu i\varphi} t^\nu,$$

also nach Satz 3 [3. 1]:

$$-e^s \operatorname{Ei}(-s) \approx e^{-i\varphi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu e^{-\nu i\varphi} \frac{\nu!}{r^{\nu+1}} \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

(in diesem Fall kommen nur die reellen Werte der Variablen r in Frage). Das bedeutet:

$$-e^s \operatorname{Ei}(-s) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\nu!}{s^{\nu+1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad \text{in } |\operatorname{arcs} s| < \pi$$

oder

$$(2) \quad \operatorname{Ei}(s) \approx e^s \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{s^{\nu+1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad \text{in } 0 < |\operatorname{arcs} s| \leq \pi.$$

Vgl. hierzu die Ableitungen S. 38, 135, 166.

3. Die Stirlingsche Reihe für $\log \Gamma(s)$

Die Γ -Funktion sei definiert durch die für alle komplexen s ausser $s = 0, -1, -2, \dots$ gültige Gaußsche Produktdarstellung

$$(3) \quad \Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}.$$

Wir suchen nun eine für unsere Zwecke geeignete Darstellung von $\log \Gamma(s)$. Die Eulersche Summenformel in ihrer einfachsten Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^n \varphi(\nu) = \int_0^n \varphi(x) dx + \frac{1}{2} [\varphi(n) + \varphi(0)] + \int_0^n B_1(x) \varphi'(x) dx,$$

wo $B_1(x) = x - (1/2) - [x]$ das erste Bernoullische Polynom bedeutet, liefert für $\varphi(x) = \log(s+x)$ und $s \neq 0, -1, -2, \dots$:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \log(s+\nu) &= \int_0^n \log(s+x) dx + \frac{1}{2} [\log(s+n) + \log s] + \int_0^n \frac{B_1(x)}{s+x} dx \\ &= \left(s+n+\frac{1}{2}\right) \log(s+n) - \left(s-\frac{1}{2}\right) \log s - n + \int_0^n \frac{B_1(x)}{s+x} dx. \end{aligned}$$

Subtrahiert man hiervon die für $s = 1$ aufgeschriebene Formel und fügt auf beiden Seiten $-(s-1) \log n$ hinzu, so entsteht:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \log \frac{s+\nu}{1+\nu} - (s-1) \log n &= \left(s-1+n+\frac{3}{2}\right) \log(s+n) - \left(s-\frac{1}{2}\right) \log s \\ &+ \int_0^n \frac{B_1(x)}{s+x} dx - \left(n+\frac{3}{2}\right) \log(1+n) - (s-1) \log n - \int_0^n \frac{B_1(x)}{1+x} dx \\ &= (s-1) \log\left(1+\frac{s}{n}\right) + (n+1) \log\left(1+\frac{s-1}{n+1}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \log\left(1+\frac{s-1}{n+1}\right) - \left(s-\frac{1}{2}\right) \log s + \int_0^n \frac{B_1(x)}{s+x} dx - \int_0^n \frac{B_1(x)}{1+x} dx. \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $(n+1) \log[1+(s-1)/(n+1)] \rightarrow s-1$ für $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{s(s+1) \cdots (s+n)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} n^{-s+1} \\ = (s-1) - \left(s-\frac{1}{2}\right) \log s + \int_0^\infty \frac{B_1(x)}{s+x} dx - \int_0^\infty \frac{B_1(x)}{1+x} dx. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion \log kann man links \lim und \log vertauschen. Ausserdem darf man den Faktor $n/(n+1)$ weglassen. Dann steht nach (3) auf der linken Seite $\log 1/\Gamma(s)$, so dass man erhält:

$$\log \Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right) \log s - s + 1 + \int_0^\infty \frac{B_1(x)}{1+x} dx - \int_0^\infty \frac{B_1(x)}{s+x} dx$$

für $s \neq 0, -1, -2, \dots$. Bekanntlich kann man durch einfachste Anwendung der Integralrechnung zeigen, dass

$$\log \Gamma(n) - \left(n-\frac{1}{2}\right) \log n + n \rightarrow \frac{1}{2} \log 2\pi \quad \text{für } n \text{ (ganzzahlig)} \rightarrow \infty.$$

Da $\int_0^\infty [B_1(x)/(s+x)] dx$ für $s \rightarrow +\infty$ offenkundig gegen 0 strebt (siehe die unten folgende Abschätzung), muss also

$$1 + \int_0^\infty \frac{B_1(x)}{1+x} dx = \frac{1}{2} \log 2\pi$$

sein. Um das «Restglied»

$$(4) \quad f(s) = \log \Gamma(s) - \left(s-\frac{1}{2}\right) \log s + s - \frac{1}{2} \log 2\pi = - \int_0^\infty \frac{B_1(x)}{s+x} dx$$

weiter zu behandeln, brauchen wir ausser $B_1(x)$ noch die weiteren Bernoulli-schen Polynome

$$B_2(x) = \frac{1}{12} + \int_0^x B_1(\xi) d\xi, \quad B_3(x) = \int_0^x B_2(\xi) d\xi,$$

die im Intervall $0 \leq x < 1$ durch

$$B_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}, \quad B_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}$$

gegeben sind und die Periode 1 haben, weil $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$ ist. Durch zweimalige partielle Integration ergibt sich aus (4):

$$f(s) = \frac{B_2(0)}{s} - \int_0^\infty \frac{B_2(x)}{(s+x)^2} dx = \frac{B_2(0)}{s} - 2 \int_0^\infty \frac{B_3(x)}{(s+x)^3} dx.$$

Setzt man

$$\text{Max } |B_3(x)| = M, \quad s = r e^{i\varphi}, \quad x = r \xi,$$

so ist

$$\left| \int_0^\infty \frac{B_3(x)}{(s+x)^3} dx \right| \leq \frac{M}{r^2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{|e^{i\varphi} + \xi|^3}.$$

Das letzte Integral hat für $|\varphi| < \pi$ einen Sinn und hängt stetig von φ ab, ist daher für $|\varphi| \leq \pi/2$ beschränkt. Also hat $f(s)$ für $\Re s > 0$ die Gestalt

$$f(s) = \frac{1}{12s} + \frac{g(s)}{s^2} \quad (g \text{ beschränkt})$$

und stellt demnach auf Grund von Satz 4 [I 7. 2] eine \mathfrak{L} -Transformierte dar. Ihre Originalfunktion $F(t)$ lässt sich am einfachsten folgendermassen berechnen: Nach (4) ist

$$f'(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \log s + \frac{1}{2s} \quad \text{oder} \quad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = f'(s) + \log s - \frac{1}{2s}.$$

Nun ergibt sich aber aus $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$ durch logarithmische Differentiation die Funktionalgleichung

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{s}.$$

Folglich muss gelten:

$$f'(s+1) + \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} = f'(s) + \log s - \frac{1}{2s} + \frac{1}{s}$$

oder

$$f'(s+1) - f'(s) = -\log \frac{s+1}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right).$$

Wegen

$$f'(s) \bullet \circ -t F(t), \quad f(s+1) \bullet \circ e^{-t} F(t)$$

und

$$\log \frac{s+1}{s} \bullet \circ \frac{1-e^{-t}}{t}, \quad \frac{1}{s} \bullet \circ 1, \quad \frac{1}{s+1} \bullet \circ e^{-t}$$

entspricht der Differentialdifferenzgleichung für $f(s)$ die folgende algebraische Gleichung für $F(t)$:

$$-t e^{-t} F(t) + t F(t) = -\frac{1-e^{-t}}{t} + \frac{1}{2} (1 + e^{-t}),$$

aus der folgt:

$$F(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right).$$

Die sich hiermit ergebende Relation

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \Gamma(s) = s \log s - \frac{1}{2} \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi \\ + \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) dt \end{array} \right.$$

ist als *Binetsche Formel* bekannt. $F(t)$ ist eine meromorphe Funktion mit den Polen $t = 2n\pi i$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, also für $|\arct t| < \pi/2$ einschliesslich $t = 0$ holomorph, und ist überdies $O(1/t)$ für $t \rightarrow \infty$. Infolgedessen ist $\mathcal{L}\{F\}$ durch Drehung des Integrationsweges in die ganze Ebene mit Ausnahme der negativ reellen Achse fortsetzbar (siehe I, S. 366). Die Binetsche Formel gilt mithin bei passend gewähltem Integrationsweg für alle s mit Ausnahme der negativ reellen.

Wir gehen nun zur asymptotischen Entwicklung von $\mathcal{L}\{F\}$ über. Die Funktion $F(t)$ ist für $|t| < 2\pi$ analytisch, also in eine Potenzreihe entwickelbar, und zwar ist sie gerade *die erzeugende Funktion für die Bernoullischen Zahlen* B_2, B_4, \dots :

$$(6) \quad F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} t^{2(\nu-1)}.$$

(Die übrigen definiert man durch $B_0 = 1$, $B_1 = 1/2$, $B_{2\nu+1} = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$)
Nach Satz 6 [3.1] ist also

$$f(s) \approx \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{(2\nu-2)!}{s^{2\nu-1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad \text{in } |\arcs s| < \pi,$$

womit wir die *Stirlingsche asymptotische Reihe* erhalten haben¹¹:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \Gamma(s) \approx s \log s - s - \frac{1}{2} \log s + \frac{1}{2} \log 2\pi \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu-1) 2\nu} \frac{1}{s^{2\nu-1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

die in der ganzen Ebene mit Ausnahme der negativ reellen Achse (wo $\Gamma(s)$ die Pole $s = 0, -1, -2, \dots$ besitzt), in jedem Winkelraum $|\arcs s| \leq \psi < \pi$ sogar gleichmässig gilt. Die ersten Bernoullischen Zahlen lauten:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = \frac{1}{30},$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = \frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = \frac{3617}{510}.$$

Vgl. hierzu die anderen Herleitungen in 3.6.1 und 6.4.4.

4. Die Besselschen Funktionen für nichtreelle Werte der Variablen

Die Besselsche Funktion $J_\alpha(z)$ lässt sich im Falle $\Re\alpha > -1/2$ für alle komplexen z durch ein endliches Fourier-Integral darstellen (siehe I, S. 203):

$$(8) \quad \sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(z) = \int_{-1}^{+1} e^{izx} (1-x^2)^{\alpha-(1/2)} dx.$$

Setzt man $z = is$, $x = t - 1$, so erhält man:

$$(9) \quad \sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{is}{2}\right)^{-\alpha} e^{-s} J_\alpha(is) = \int_0^2 e^{-st} [t(2-t)]^{\alpha-(1/2)} dt,$$

also ein endliches \mathfrak{L} -Integral. Die Originalfunktion lässt sich in der Umgebung des Nullpunktes in eine konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} [t(2-t)]^{\alpha-(1/2)} &= (2t)^{\alpha-(1/2)} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{\alpha-(1/2)} = (2t)^{\alpha-(1/2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha-(1/2)}{\nu} \left(-\frac{t}{2}\right)^\nu \\ &= 2^{\alpha-(1/2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu} \binom{\alpha-(1/2)}{\nu} t^{\nu+\alpha-(1/2)}. \end{aligned}$$

Also gilt nach Satz 1 [3.1] wegen $\Re\alpha > -1/2$:

$$\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) (is)^{-\alpha} e^{-s} J_\alpha(is) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu} \binom{\alpha-(1/2)}{\nu} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+(1/2))}{s^{\nu+\alpha+(1/2)}}$$

für $s \rightarrow \infty$ gleichmässig in $|\arcs s| \leq (\pi/2) - \delta$. Unter Verwendung von Anhang I, Nr. 3 und 4 können wir hierfür schreiben:

$$(10) \quad J_\alpha(is) \approx \frac{\cos \alpha \pi}{\sqrt{2\pi^{3/2}}} i^\alpha e^s \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \nu!} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+(1/2)) \Gamma(\nu-\alpha+(1/2))}{s^{\nu+(1/2)}}.$$

Setzen wir wieder $is = z$, so ergibt sich ($i = e^{i\pi/2}$):

$$(11) \quad J_\alpha(z) \approx \frac{\cos \alpha \pi}{\sqrt{2\pi^{3/2}}} z^{-1/2} e^{-iz} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{[\nu+\alpha+(1/2)]i\pi/2}}{2^\nu \nu!} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+(1/2)) \Gamma(\nu-\alpha+(1/2))}{z^\nu},$$

wenn z in der oberen Halbebene $0 < \operatorname{arcc} z < \pi$ gegen ∞ strebt, gleichmässig in $\delta \leq \operatorname{arcc} z \leq \pi - \delta$. Dabei ist in dem Fall, dass $\nu - \alpha + (1/2)$ negativ ganzzahlig oder 0 wird, d. h. bei $\alpha = \rho + (1/2)$ ($\rho = 0, 1, \dots$) für $\nu = 0, 1, \dots, \rho$, zu setzen:

$$\cos \alpha \pi \cdot \Gamma\left(\nu - \alpha + \frac{1}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2\rho + 1}{2} \pi + h\right) \Gamma(-(\rho - \nu) + h) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{(\rho - \nu)!}.$$

Da aus (8) ersichtlich ist, dass $z^{-\alpha} J_{\alpha}(z)$ eine gerade Funktion darstellt, beherrscht man mit (11) das asymptotische Verhalten von $J_{\alpha}(z)$ in der ganzen Ebene mit Ausnahme der reellen Achse¹². Die asymptotische Entwicklung für reelle Werte der Variablen ist komplizierter und muss auf anderem Wege gewonnen werden, siehe 3.4.1; 7.5.3.

Zur Ergänzung wollen wir noch die asymptotische Entwicklung der mit den *Besselschen Funktionen erster und dritter Art* eng zusammenhängenden Funktion $K_{\alpha}(s)$ ableiten, die für $\Re \alpha > -1/2$ und $\Re s > 0$ durch das Integral

$$(12) \quad K_{\alpha}(s) = \frac{\Gamma(1/2)}{2^{\alpha} \Gamma(\alpha + (1/2))} s^{\alpha} \int_1^{\infty} e^{-sx} (x^2 - 1)^{\alpha - (1/2)} dx$$

dargestellt wird. Durch die Substitution $x = t + 1$ ergibt sich:

$$K_{\alpha}(s) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\Gamma(\alpha + (1/2))} s^{\alpha} e^{-s} \int_0^{\infty} e^{-st} \left[t\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right]^{\alpha - (1/2)} dt.$$

In der Umgebung von $t = 0$ ist

$$\left[t\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right]^{\alpha - (1/2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha - (1/2)}{\nu} \frac{t^{\nu + \alpha - (1/2)}}{2^{\nu}} \quad \left(\Re\left(\nu + \alpha - \frac{1}{2}\right) > -1\right),$$

ferner ist diese Funktion in dem Winkelraum $|\arct t| < \pi$ analytisch und gleich $O(e^{\varepsilon|t|})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Also ist nach Satz 6 [3.1]

$$K_{\alpha}(s) \approx \frac{\sqrt{\pi/2}}{\Gamma(\alpha + (1/2))} e^{-s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha - (1/2)}{\nu} \frac{\Gamma(\nu + \alpha + (1/2))}{2^{\nu} s^{\nu + (1/2)}}$$

für $s \rightarrow \infty$ in $|\operatorname{arcs} s| < (3/2)\pi$. Diese Entwicklung¹³ kann man mit Hilfe von Anhang I, Nr. 3 und 4 noch auf verschiedene andere Formen bringen, z. B.

$$(13) \quad K_{\alpha}(s) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \nu + (1/2))}{2^{\nu} \nu! \Gamma(\alpha - \nu + (1/2))} \frac{1}{s^{\nu + (1/2)}}.$$

Die Entwicklungsfunktionen sind hier nicht Potenzen, sondern die Funktionen $e^{-s} s^{-\nu - (1/2)}$.

Bemerkung: Man sieht an (13), warum der ursprüngliche Ausdruck (12) für die Herleitung einer asymptotischen Potenzentwicklung ungeeignet ist. Dort ist die Originalfunktion in der Umgebung von $t = 0$ identisch 0, so dass (12)

eine identisch verschwindende Potenzentwicklung liefert. In der Tat strebt $K_\alpha(s)$ nach (13) für s (reell) $\rightarrow \infty$ wie e^{-s} gegen 0 (dies folgt auch aus Satz 1 [I 14. 3]), so dass alle Potenzkoeffizienten verschwinden müssen, siehe 2. 2 (5), (6).

5. Die unvollständige Gammafunktion. Asymptotische Halbierung des Gammaintegrals und der Exponentialreihe

Die unvollständige Gammafunktion $\Gamma(\alpha, s)$, auch als Prymsche Funktion $Q(s, \alpha)$ bezeichnet, ist definiert durch

$$\Gamma(\alpha, s) = \int_s^\infty e^{-\tau} \tau^{\alpha-1} d\tau,$$

wobei der Integrationsweg jeder Strahl sein kann, auf dem $\Re \tau \rightarrow \infty$ gilt. Das asymptotische Verhalten von $\Gamma(\alpha, s)$ für $\alpha \rightarrow \infty$ ergibt sich aus der konvergenten Entwicklung [siehe I 13. 3 (1)]

$$(14) \quad \Gamma(\alpha, s) = \Gamma(\alpha) - s^\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{s^\nu}{\nu! (\nu + \alpha)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots).$$

Es bleibt also noch die Frage nach dem Verhalten von $\Gamma(\alpha, s)$, wenn einerseits s (bei festem α) gegen ∞ wächst und andererseits α und s gleichzeitig gegen ∞ wandern. Wir betrachten der einfacheren Schreibweise halber

$$\Gamma(\alpha + 1, s) = \int_s^\infty e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau.$$

Um auf ein \mathfrak{L} -Integral zu kommen, setzen wir $\tau = s(1 + t)$ und erhalten:

$$(15) \quad \Gamma(\alpha + 1, s) = e^{-s} s^{\alpha+1} \int_0^\infty e^{-st} (1+t)^\alpha dt.$$

Der Weg des Integrals kann jeder Strahl von O aus sein mit Ausnahme der negativ reellen Achse, die wir von $t = -1$ an aus der t -Ebene entfernen, damit $(1+t)^\alpha$ für jedes komplexe α eindeutig und integrierbar bleibt. Bei einem festen Integrationsweg $\arg t = \varphi$ kann s jeden Punkt der Halbebene

$$-\varphi - \frac{\pi}{2} < \arg s < -\varphi + \frac{\pi}{2}$$

bedeuten. Wenn φ von $-\pi$ bis $+\pi$ (ausschliesslich der Grenzen) variiert, so erhält man $\Gamma(\alpha + 1, s)$ für die Punkte der Riemannschen Fläche

$$-\frac{3}{2}\pi < \arg s < +\frac{3}{2}\pi.$$

Da in der Nähe von $t = 0$ die nicht bloss asymptotische, sondern konvergente Entwicklung

$$(1+t)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} t^\nu$$

gilt, so ergibt sich nach Satz 6 [3.1]

$$(16) \quad \Gamma(\alpha + 1, s) \approx e^{-s} s^{\alpha+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{s^{\nu+1}}$$

für $s \rightarrow \infty$ in $|\arcs s| < (3/2)\pi$ bei beliebigem, aber festem komplexem α . (Für $\nu = 0$ bedeutet der Zähler 1.)¹⁴ Im Falle $\alpha = 0, 1, \dots$ ist die Summe endlich, und es besteht Gleichheit zwischen linker und rechter Seite für alle s , wie man auch aus (15) ersieht.

Um auch einen Fall zu behandeln, in dem s und α gleichzeitig gegen ∞ wandern, setzen wir $\alpha = s$ und betrachten¹⁵ also $[\tau = s(y + 1)]$

$$\Gamma(s + 1, s) = \int_s^\infty e^{-\tau} \tau^s d\tau = e^{-s} s^{s+1} \int_0^\infty e^{-sy} (y + 1)^s dy.$$

Durch die Substitution $e^{-y}(y + 1) = e^{-t}$, $t = y - \log(y + 1)$, $dt/dy = y/(y + 1)$ nimmt $\Gamma(s + 1, s)$ die Gestalt eines \mathfrak{L} -Integrals an:

$$\Gamma(s + 1, s) = e^{-s} s^{s+1} \int_0^\infty e^{-st} \left(1 + \frac{1}{y(t)}\right) dt = e^{-s} s^s \left(1 + s \int_0^\infty e^{-st} \frac{dt}{y(t)}\right).$$

t ist als Funktion von y in der Umgebung von $y = 0$ analytisch, und es ist $t(0) = 0$, $t'(0) = 0$, $t''(0) = 1$. Infolgedessen hat y als Funktion von t in $t = 0$ einen Windungspunkt erster Ordnung und lässt sich wegen $y(0) = 0$ in der Form

$$y(t) = c_1 t^{1/2} + c_2 t + c_3 t^{3/2} + \dots$$

darstellen. Explizit findet man durch Umkehrung von

$$t = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 - + \dots$$

die Entwicklungen

$$y = (2t)^{1/2} + \dots \quad \text{und} \quad \frac{1}{y(t)} = (2t)^{-1/2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} (2t)^{1/2} - \dots$$

Hieraus ergibt sich nach Satz 4 [3.1]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \frac{dt}{y(t)} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{s} + \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \dots \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{s^{1/2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{s} + \frac{\sqrt{2\pi}}{24} \frac{1}{s^{3/2}} - \dots \end{aligned}$$

und infolgedessen

$$(17) \quad \Gamma(s+1, s) \approx e^{-s} s^s \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{1/2} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2\pi}}{24} \frac{1}{s^{1/2}} - \dots \right)$$

für $s \rightarrow \infty$ in $|\arcs s| < \pi/2$. Diese asymptotische Entwicklung lässt einen interessanten Schluss auf die (vollständige) Gammafunktion zu. Für diese gilt nach der Stirlingschen Formel

$$\log \Gamma(s+1) = \left(s + \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(|s|^{-1}),$$

also wegen $e^{O(|s|^{-1})} = 1 + O(|s|^{-1})$

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s^{-s-(1/2)} e^s \left(1 + O(|s|^{-1})\right) \quad \text{für } s \rightarrow \infty \text{ in } |\arcs s| < \pi.$$

Dies führt zusammen mit (17) zu

$$\frac{\Gamma(s+1, s)}{\Gamma(s+1)} = e^{-s} s^s \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{1/2} + \frac{2}{3} + O(|s|^{-1/2}) \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s^{-s-(1/2)} e^s \left(1 + O(|s|^{-1})\right)$$

oder

$$(18) \quad \frac{\Gamma(s+1, s)}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} s^{-1/2} + O(|s|^{-1}) \quad \text{für } s \rightarrow \infty \text{ in } |\arcs s| < \frac{\pi}{2}.$$

Dieses Resultat kann man so aussprechen:

Die Integrale $\int_0^s e^{-\tau} \tau^s d\tau$ und $\int_s^\infty e^{-\tau} \tau^s d\tau$ liefern asymptotisch für $s \rightarrow \infty$ in $|\arcs s| < \pi/2$ je die Hälfte von $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^s d\tau$. Das erste liegt um einen Betrag von der Grössenordnung $\sqrt{2/\pi} s^{-1/2} \Gamma(s+1)/3$ unter, das zweite über der Hälfte.

Hieraus kann man leicht ein entsprechendes Ergebnis über die Exponentialreihe $E(x) = \sum_{\nu=0}^\infty x^\nu/\nu!$ ableiten. Wir setzen

$$E_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} E_n(n) &= 1 + \frac{n}{1!} + \dots + \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{n!} \left(1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2} + \dots + \frac{n!}{n^n} \right) \\ &= \frac{n^n}{n!} \int_0^\infty e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n dx = \frac{e^n}{n!} \int_n^\infty e^{-\tau} \tau^n d\tau, \end{aligned}$$

also

$$\frac{E_n(n)}{E(n)} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_n^\infty e^{-\tau} \tau^n d\tau.$$

Von dem rechts stehenden Ausdruck haben wir bewiesen, dass er gegen $1/2$ strebt für $n \rightarrow \infty$, also gilt dasselbe für den linken. Das bedeutet¹⁶:

Wird die Exponentialreihe für den Wert n mit dem höchsten Glied $n^n/n!$ abgebrochen), so liefert sie asymptotisch den Wert $e^n/2$.*

Zusatz: Ein vollständigeres Ergebnis erhält man durch die in I, S. 293 erwähnte Methode. Die Funktion $F(t) = 0$ für $0 \leq t < 1$, $F(t) = 1$ für $t \geq 1$ hat die \mathcal{L} -Transformierte $f(s) = (1/s) e^{-s}$. Also ist nach Satz 1 [I 8. 2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 1 \\ 1 & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

Nun ist nach der Leibnizschen Regel für die Ableitungen eines Produkts

$$f^{(n)}(s) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu e^{-s} \frac{(-1)^{n-\nu} (n-\nu)!}{s^{n-\nu+1}} = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} e^{-s} \sum_{\nu=0}^n \frac{s^\nu}{\nu!},$$

folglich

$$\frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) = e^{-n/t} \sum_{\nu=0}^n \frac{(n/t)^\nu}{\nu!}.$$

Ersetzt man noch $1/t$ durch α , so hat man erhalten¹⁷:

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(\alpha n)}{E(\alpha n)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } \alpha = 1 \\ 1 & \text{für } 0 \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

6. Entwicklungen mit logarithmischem Faktor

Satz 7 [3. 1], bei dem in $F(t)$ und $f(s)$ neben den Potenzen noch logarithmische Faktoren auftreten, soll durch zwei Beispiele aus den Anwendungsgebieten illustriert werden.

1. In der *Aerodynamik* tritt das Integral

$$(20) \quad f(s) = \int_0^\infty \cos s x \, dx \int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \quad (s \text{ reell})$$

auf, dessen Verhalten für grosse s festzustellen ist. Man kann es auch durch ein

*) Die Partialsummen der Exponentialreihe spielen in verschiedenen Gebieten der modernen Physik eine Rolle, z. B. in der strahlenbiologischen Treffertheorie und in der Theorie der Geiger-Zähler.

anderes Doppelintegral von symmetrischer Gestalt ausdrücken:

$$(21) \quad f(s) = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} e^{-s \sin \varphi \sin \psi} \sin \varphi \sin \psi \, d\varphi \, d\psi$$

oder durch ein einfaches Integral:

$$(22) \quad f(s) = 2 \int_0^1 e^{-st} t K(\sqrt{1-t^2}) \, dt,$$

wo

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

das vollständige elliptische Normalintegral erster Gattung ist. (Die Übereinstimmung erstreckt sich nur auf positiv reelle s , denn (20) ist eine gerade Funktion von s , (21) und (22) aber nicht.) Für $0 < t < 1$ gilt folgende Entwicklung¹⁸

$$K(\sqrt{1-t^2}) = \log \frac{4}{t} + \frac{1}{4} \left(\log \frac{4}{t} - 1 \right) t^2 + \frac{9}{64} \left(\log \frac{4}{t} - \frac{7}{6} \right) t^4 + \dots,$$

also

$$\begin{aligned} t K(\sqrt{1-t^2}) &= t \log 4 - t \log t + \frac{\log 4 - 1}{4} t^3 - \frac{1}{4} t^3 \log t \\ &+ \frac{9}{64} \left(\log 4 - \frac{7}{6} \right) t^5 - \frac{9}{64} t^5 \log t + \dots \end{aligned}$$

Durch Kombination der Sätze 1 und 7 [3.1] folgt für $s \rightarrow \infty$ (vgl. auch Definition IV in 2.2)¹⁹:

$$\begin{aligned} f(s) &\approx \frac{\log 4}{s^2} + \frac{1}{s^2} (\log s - \Psi(2)) + \frac{3(\log 4 - 1)}{2s^4} + \frac{3}{2s^4} (\log s - \Psi(4)) \\ &+ \frac{135 [\log 4 - (7/6)]}{64s^6} + \frac{135}{8s^6} (\log s - \Psi(6)) + \dots \\ &= \frac{1}{s^2} \log s + \frac{\log 4 - \Psi(2)}{s^2} + \frac{3}{2s^4} \log s + \frac{3(\log 4 - 1 - \Psi(4))}{2s^4} \\ &+ \frac{135}{8s^6} \log s + \frac{135(\log 4 - (7/6) - \Psi(6))}{64s^6} + \dots \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\Psi(2) = -C + 1, \quad \Psi(4) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$\Psi(6) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{5} \quad (C = 0,577 \dots = \text{Eulersche Konstante}).$$

2. In der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* stösst man auf das Integral

$$J_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \left(\frac{1 + \operatorname{erf} x}{2} \right)^m dx \quad (m \text{ positiv ganz}),$$

dessen Verhalten für $m \rightarrow \infty$ zu untersuchen ist²⁰. Setzt man $(1 + \operatorname{erf} x)/2 = e^{-t}$, so ist

$$\operatorname{erf} x = 2 e^{-t} - 1, \quad \frac{d \operatorname{erf} x}{dx} \frac{dx}{dt} = -2 e^{-t}$$

oder wegen $d \operatorname{erf} x/dx = (2/\sqrt{\pi}) e^{-x^2}$:

$$e^{-x^2} \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\pi} e^{-t}.$$

Bezeichnet man noch die inverse Funktion zu $\operatorname{erf} x = y$ mit $x = T(y)$, so ist $x = T(2 e^{-t} - 1)$, und man erhält:

$$J_m = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(m+1)t} T(2 e^{-t} - 1) dt.$$

Wir bestimmen nun allgemeiner das asymptotische Verhalten von

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} T(2 e^{-t} - 1) dt$$

für $s \rightarrow \infty$. Dazu brauchen wir das Verhalten von $T(2 e^{-t} - 1)$ für $t \rightarrow 0$. Da $t \rightarrow 0$ mit $x \rightarrow \infty$ gleichbedeutend ist, gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{[T(2 e^{-t} - 1)]^2}{-\log t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-\log[-\log(1 + \operatorname{erf} x)/2]}.$$

Nun ist nach Formel (1)

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi} x} e^{-x^2} (1 + o(1)) \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

also

$$\frac{1 + \operatorname{erf} x}{2} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi} x} e^{-x^2} (1 + o(1))$$

und daher wegen $\log(1 - z) = -z (1 + o(1))$:

$$\begin{aligned} \log \frac{1 + \operatorname{erf} x}{2} &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi} x} e^{-x^2} (1 + o(1)) (1 + o(1)) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi} x} e^{-x^2} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\log\left(-\log\frac{1+\operatorname{erf}x}{2}\right) &= \log 2\sqrt{\pi} + \log x + x^2 - \log(1+o(1)) \\ &= x^2 + O(\log x). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-\log[-\log(1+\operatorname{erf}x)/2]} = 1,$$

also

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(2e^{-t}-1)}{(-\log t)^{1/2}} = 1.$$

Aus $T(2e^{-t}-1) \sim (-\log t)^{1/2}$ für $t \rightarrow 0$ folgt nach Satz 6 [I 14. 1]:

$$f(s) \sim \frac{(\log s)^{1/2}}{s} \quad \text{für } s \rightarrow \infty.$$

Für das Integral J_m bedeutet dies:

$$J_m \sim \sqrt{\pi} \frac{(\log m)^{1/2}}{m} \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

§ 3.

Asymptotische Entwicklung eines \mathfrak{L} -Integrals mit komplexem Weg. Deformation eines ursprünglich reellen Integrationsweges zwecks Erweiterung des Bereichs der asymptotischen Entwicklung

Bisher wurde die asymptotische Entwicklung von \mathfrak{L} -Integralen in zwei Fällen behandelt: 1. Der Integrationsweg war die positiv reelle Achse, wobei $F(t)$ nicht analytisch zu sein brauchte, also z. B. von $t = T$ an verschwinden konnte, so dass der Integrationsweg eine Strecke ist. 2. Die Funktion $F(t)$ war in einem Winkelraum analytisch und von Exponentialordnung, so dass der Integrationsweg auch im Komplexen, jedoch nur als Strahl von 0 nach ∞ verlaufen konnte. – Nun wird man aber aus verschiedenen Gründen auch auf \mathfrak{L} -Integrale mit *beliebigem komplexem Weg*, insbesondere von endlicher Länge, geführt: Einmal treten derartige Integrale unmittelbar bei gewissen Problemen auf (siehe z. B. S. 85), zum anderen kann man bei analytischer Funktion $F(t)$ einen ursprünglich reellen Weg ins Komplexe deformieren und dadurch, wie wir sehen werden, den Gültigkeitsbereich der asymptotischen Entwicklung erweitern.

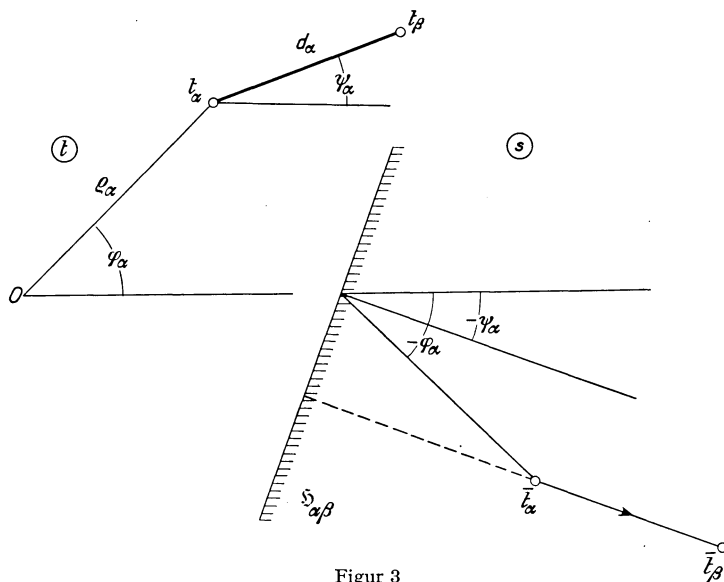
Wir gehen bei Betrachtung komplexer Wege von einer Strecke über Polygone zu beliebigen Kurven über und schliessen als Anwendung die Deformation eines ursprünglich reellen Weges an.

1. Der Integrationsweg ist eine Strecke in der komplexen Ebene

Es sei ein \mathcal{L} -Integral vorgelegt, dessen Weg die Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten t_α, t_β der komplexen Ebene ist²¹. $F(t)$ braucht auf der Strecke nicht analytisch, sondern nur absolut integrel zu sein. Das Integral

$$(1) \quad f(s) = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} e^{-st} F(t) dt$$

ist eine ganze Funktion von s . Hat der Vektor $t_\beta - t_\alpha$, der die gerichtete Strecke



Figur 3

$t_\alpha t_\beta$ bestimmt, in Polarkoordinaten die Gestalt

$$t_\beta - t_\alpha = d_\alpha e^{i\psi_\alpha},$$

so können wir $f(s)$ durch die Substitution $t = t_\alpha + \tau e^{i\psi_\alpha}$ auf die Form eines über ein reelles τ -Intervall erstreckten \mathcal{L} -Integrals mit den Grenzen 0 und $d_\alpha > 0$ bringen:

$$(2) \quad f(s) = e^{i\psi_\alpha - st_\alpha} \int_0^{d_\alpha} e^{-s e^{i\psi_\alpha} \tau} F(t_\alpha + \tau e^{i\psi_\alpha}) d\tau.$$

Wenn $F(t)$ für $t \rightarrow t_\alpha$ (auf der Strecke $t_\alpha t_\beta$) eine asymptotische (eventuell konvergente) Entwicklung der Gestalt

$$(3) \quad F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (t - t_\alpha)^{\lambda_\nu} \quad (-1 < \Re \lambda_0 < \dots)$$

besitzt, so dass

$$F(t_\alpha + \tau e^{i\psi_\alpha}) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{i\lambda_\nu \psi_\alpha} \tau^{\lambda_\nu}$$

ist, so ergibt sich nach Satz 1 [3.1] für $f(s)$ die Entwicklung

$$\begin{aligned} f(s) &\approx e^{i\psi_\alpha - t_\alpha s} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{i\lambda_\nu \psi_\alpha} \frac{\Gamma(\lambda_\nu + 1)}{(s e^{i\psi_\alpha})^{\lambda_\nu + 1}} \\ (4) \quad &= e^{-t_\alpha s} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\Gamma(\lambda_\nu + 1)}{s^{\lambda_\nu + 1}} \end{aligned}$$

für $s \rightarrow \infty$ in der Halbebene $\mathfrak{H}_{\alpha\beta}: \Re(s e^{i\psi_\alpha}) > 0$. Diese hat den Strahl, der den Winkel $-\psi_\alpha$ mit der reellen Achse bildet, also spiegelbildlich zu dem Vektor $t_\alpha t_\beta$ liegt, zur inneren Normalen.

Die Entwicklung (4) entsteht, indem man $f(s)$ in der Form

$$f(s) = e^{-t_\alpha s} \int_0^{t_\beta - t_\alpha} e^{-st} F(t_\alpha + t) dt$$

schreibt und auf

$$F(t_\alpha + t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\lambda_\nu}$$

die \mathfrak{L} -Transformation formal gliedweise anwendet.

Ausschlaggebend für das *infinitere Verhalten* von $f(s)$ ist der *Exponentialfaktor* $e^{-t_\alpha s}$, der sich in den einzelnen Richtungen ganz verschieden verhält. Ist in Polarkoordinaten

$$t_\alpha s = \varrho_\alpha e^{i\psi_\alpha}, \quad s = r e^{i\vartheta},$$

so ergibt sich:

$$t_\alpha s = r \varrho_\alpha e^{i(\vartheta + \psi_\alpha)} \quad \text{und} \quad |e^{-t_\alpha s}| = e^{-r \varrho_\alpha \cos(\vartheta + \psi_\alpha)}.$$

Das Verhalten von $e^{-t_\alpha s}$ hängt also ab von der Grösse

$$w = -\varrho_\alpha \cos(\vartheta + \psi_\alpha).$$

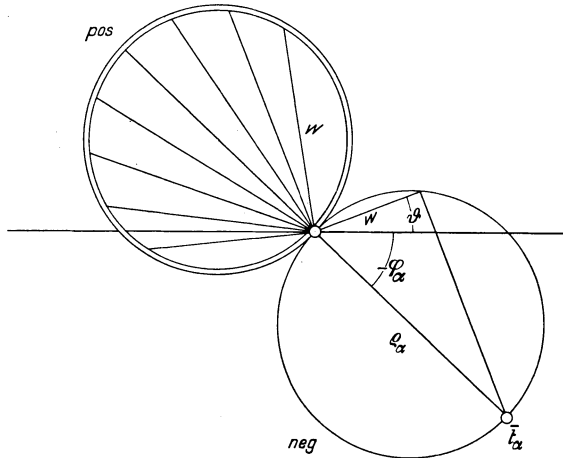
Tragen wir diese, absolut genommen, vom Nullpunkt O der s -Ebene aus auf jeder Richtung ϑ ab, so bilden die Endpunkte insgesamt zwei Kreise durch O vom Durchmesser ϱ_α , deren Mittelpunkte auf den Richtungen $\vartheta = -\psi_\alpha$ (hier ist $w = -\varrho_\alpha$) und $\vartheta = -\psi_\alpha + \pi$ ($w = \varrho_\alpha$) liegen. In dem ersteren sind die Sehnen w negativ, im letzteren positiv zu rechnen. Um das Vorzeichen von w in der Figur zum Ausdruck zu bringen, zeichnen wir den Kreis, in dem w positiv ist, doppelt (Figur 4).

Die Länge w der Sehne mit Vorzeichen in Richtung ϑ heisse die *Wertigkeit* von $f(s)$ in Richtung ϑ , und die ganze Figur das *Wertigkeitsdiagramm* von $f(s)$. Ist speziell $t_\alpha = 0$, so schrumpft dieses auf den Nullpunkt zusammen. – In

Frage kommen natürlich nur die Teile des Wertigkeitsdiagramms, die innerhalb der Halbebene $\mathfrak{H}_{\alpha\beta}$ liegen*).

Wir fassen diese Ergebnisse so zusammen:

Satz 1. *Hat die Funktion $F(t)$ in dem \mathcal{L} -Integral (1) für $t \rightarrow t_\alpha$ die asymptotische Entwicklung (3), so gilt für $f(s)$ die asymptotische Entwicklung (4) für $s \rightarrow \infty$. Für letztere sind zwei Figuren charakteristisch: 1. Die Halbebene $\mathfrak{H}_{\alpha\beta}$, in der die Entwicklung gilt (in jedem kleineren Winkelraum gleichmässig); sie ist bestimmt durch den Vektor $t_\alpha t_\beta$ der t -Ebene: sein Spiegelbild an der reellen Achse, d. h. der Vektor $\bar{t}_\alpha \bar{t}_\beta$ ist die innere Normale von $\mathfrak{H}_{\alpha\beta}$ in der s -Ebene. 2. Das*



Figur 4

Wertigkeitsdiagramm, das die Stärke des exponentiellen Wachstums der Entwicklungsglieder in jeder Richtung angibt; es ist bestimmt durch den Ortsvektor $O t_\alpha$ der t -Ebene: sein Spiegelbild an der reellen Achse, d. h. der Vektor $O \bar{t}_\alpha$ ist in der s -Ebene der Durchmesser des Kreises, der die negativen Wertigkeiten misst.

Man erhält die charakteristischen Figuren, indem man in der s -Ebene die Punkte $\bar{t}_\alpha, \bar{t}_\beta$ markiert, den Kreis über $O \bar{t}_\alpha$ und über dem entgegengesetzten Durchmesser zeichnet und die Halbebene mit der inneren Normalen $\bar{t}_\alpha \bar{t}_\beta$ konstruiert (Figuren 3 und 4).

Das Wertigkeitsdiagramm ist vor allem wichtig, wenn, wie in den folgenden Abschnitten, mehrere Entwicklungen addiert werden.

Wir haben für die ganze Funktion (1) eine asymptotische Entwicklung nur in der Halbebene $\mathfrak{H}_{\alpha\beta}$ bekommen. Schreiben wir nun aber $f(s)$ in der Form

$$f(s) = - \int_{t_\beta}^{t_\alpha} e^{-s t} F(t) dt$$

*) Man könnte statt der beiden Kreise nur den oben doppelt ausgezogenen zeichnen und festsetzen, dass die von einem Richtungsstrahl ausgeschnittene Sehne positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem der Strahl den Kreis wirklich oder erst in seiner Rückwärtsverlängerung schneidet.

und hat $F(t)$ für $t \rightarrow t_\beta$ eine asymptotische Entwicklung der Form (3), so erhalten wir entsprechend zu (4) eine asymptotische Entwicklung für $f(s)$ mit dem Exponentialfaktor $e^{-t_\beta s}$, die nun in der komplementären Halbebene $\mathfrak{H}_{\beta\alpha}$ gültig ist, weil der Vektor $t_\beta t_\alpha$ zu $t_\alpha t_\beta$ entgegengesetzt ist, und deren Wertigkeitsdiagramm durch den Ortsvektor $O t_\beta$ bestimmt wird.

Satz 2. Die durch das \mathcal{L} -Integral (1) definierte ganze Funktion hat in den beiden Halbebenen, die durch das Lot von $s = 0$ auf die Gerade $\bar{t}_\alpha \bar{t}_\beta$ begrenzt werden, verschiedene asymptotische Entwicklungen, die sich aus den Entwicklungen der Form (3) von $F(t)$ bei t_α und t_β nach Formel (4) ergeben. Die von t_β herrührende Entwicklung ist mit dem negativen Vorzeichen zu versehen. Auf der Begrenzungsgeraden selbst ergibt sich keine asymptotische Entwicklung.

2. Der Integrationsweg setzt sich aus zwei Strecken zusammen

Wir betrachten nunmehr den Fall, dass der Integrationsweg \mathfrak{C} aus zwei aneinanderstossenden Strecken $t_0 t_1$ und $t_1 t_2$ besteht²², die nicht in einer Geraden liegen*). Dann kann man das \mathcal{L} -Integral

$$f(s) = \int_{\mathfrak{C}} e^{-ts} F(t) dt$$

auf vier verschiedene Weisen schreiben:

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \equiv f_{01}(s), & f(s) &= \int_{t_0}^{t_1} - \int_{t_2}^{t_1} \equiv f_{02}(s), \\ f(s) &= -\int_{t_1}^{t_0} + \int_{t_1}^{t_2} \equiv f_{11}(s), & f(s) &= -\int_{t_1}^{t_0} - \int_{t_2}^{t_1} \equiv f_{12}(s). \end{aligned}$$

Wenn F in den Eckpunkten t_0, t_1, t_2 asymptotische Potenzentwicklungen besitzt, so haben die hier vorkommenden vier Integrale asymptotische Entwicklungen der Form (4) (mit Gültigkeitshalbebenen und Wertigkeitsdiagrammen), für die wir zur Abkürzung schreiben:

$$\int_{t_0}^{t_1} \approx E_0, \quad \int_{t_1}^{t_0} \approx E_1^0, \quad \int_{t_1}^{t_2} \approx E_1^2, \quad \int_{t_2}^{t_1} \approx E_2.$$

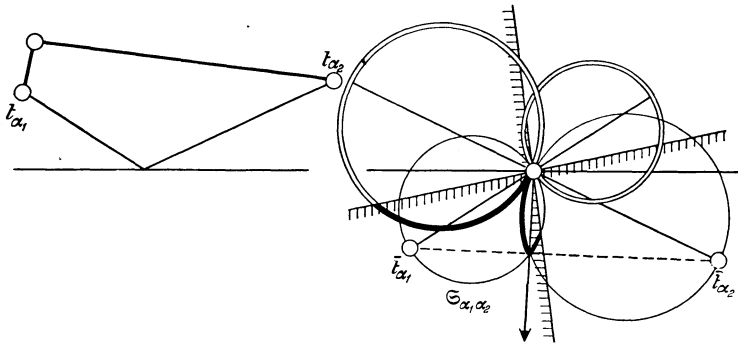
Durch Addition bzw. Subtraktion kommen verschiedene asymptotische Entwicklungen von $f(s)$ in verschiedenen Gebieten zustande (vgl. Definition IV, S. 34), und zwar auf folgende Weise: Zunächst einmal gelten die beiden asymptotischen Reihen $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}$, die in einer Darstellung $f_{\alpha_1 \alpha_2}$ auftreten, zugleich nur

*) Man überzeugt sich an Hand des Folgenden leicht, dass zwei in einer Geraden liegende Strecken kein anderes Resultat liefern als die Gesamtstrecke.

in dem gemeinsamen Sektor $\mathfrak{S}_{\alpha_1, \alpha_2}$ der beiden zugehörigen Gültigkeithalbebenen. Weiterhin aber spielen nunmehr die Wertigkeitsdiagramme eine wichtige Rolle. Betrachtet man nämlich die beiden Entwicklungen

$$E_{\alpha_1} \equiv e^{-t_{\alpha_1} s} \sum \dots, \quad E_{\alpha_2} \equiv e^{-t_{\alpha_2} s} \sum \dots,$$

so streben die Summen (von denen immer nur eine endliche Partialsumme benutzt wird) auf jeden Fall für $s \rightarrow \infty$ gegen 0; die Exponentialfaktoren $e^{-t_{\alpha} s}$ aber streben je nach der ins Auge gefassten Richtung ϑ entweder gegen ∞ (Wertigkeit positiv) oder 0 (Wertigkeit negativ) oder sind absolut genommen



Figur 5

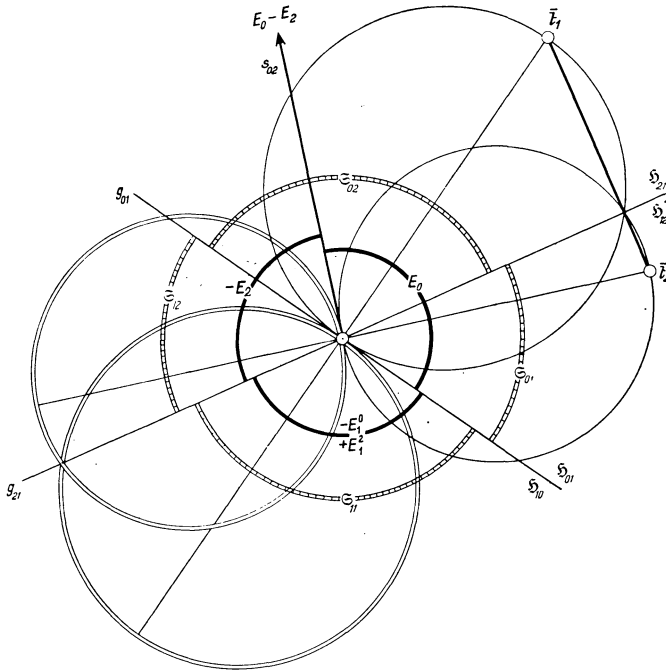
gleich 1 (Wertigkeit 0), und zwar sind diese Funktionen gegenüber den Potenzen ausschlaggebend, da sie viel stärker wachsen oder abnehmen, als diese abnehmen. Haben E_{α_1} und E_{α_2} in einer bestimmten Richtung ϑ die Wertigkeit w_1 bzw. w_2 , so ist bei Verwendung einer bestimmten Partialsumme einerseits der durch E_{α_1} hereinkommende Fehler von der Grössenordnung $e^{w_1 r}$, andererseits der von E_{α_2} gelieferte Beitrag von der Grössenordnung $e^{w_2 r}$. Ist $w_2 < w_1$, so hat es also keinen Sinn, diesen Beitrag mitzuführen, da er in dem Fehler von E_{α_1} untergeht. Hieraus ergibt sich die Schlussfolgerung:

Nachdem der Sektor $\mathfrak{S}_{\alpha_1, \alpha_2}$ gefunden ist, muss an Hand der Wertigkeitsdiagramme festgestellt werden, welche Entwicklung in den einzelnen Richtungen die *grössere Wertigkeit* besitzt. Diese allein ist beizubehalten. Nur wenn in $\mathfrak{S}_{\alpha_1, \alpha_2}$ der Schnittpunkt der zwei einfach oder der zwei doppelt ausgezogenen Kreise liegt, haben in der betreffenden Richtung die Entwicklungen gleiche Wertigkeit und sind *beide* beizubehalten. Da höchstens einer jener Schnittpunkte in $\mathfrak{S}_{\alpha_1, \alpha_2}$ liegen kann, gibt es höchstens eine solche «*singuläre Richtung*». Sie steht offenbar senkrecht auf der Geraden $\bar{t}_{\alpha_1} \bar{t}_{\alpha_2}$. Ist speziell einer der Punkte $t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}$ der Nullpunkt, so ist das entsprechende Wertigkeitsdiagramm der Punkt $s = 0$. Die singuläre Richtung ist dann die Tangente in $s = 0$ an das andere Wertigkeitsdiagramm. In dieser Richtung haben beide Entwicklungen die Wertigkeit 0.

Die Feststellung der Sektoren samt ihren zuständigen Entwicklungen können wir uns durch die Substitution $t = t_0 + \tau$ erleichtern:

$$f(s) = e^{-st_0} \left\{ \int_0^{t_1-t_0} e^{-s\tau} F(t_0 + \tau) d\tau + \int_{t_1-t_0}^{t_2-t_0} e^{-s\tau} F(t_0 + \tau) d\tau \right\}.$$

Sie läuft darauf hinaus, dass wir die Funktion $e^{t_0 s} f(s)$ betrachten. Dadurch wird das Wertigkeitsdiagramm für die Entwicklung E_0 auf den Nullpunkt



Figur 6

reduziert, so dass sich die Figur stark vereinfacht. Diese ist *folgendermassen herzustellen*²³:

In der s -Ebene werden markiert: die Punkte $\bar{t}_0 = 0, \bar{t}_1, \bar{t}_2$; die durch den Nullpunkt gehenden Geraden g_{01} senkrecht zu $\bar{t}_0 \bar{t}_1$ und g_{21} senkrecht zu $\bar{t}_2 \bar{t}_1$; die durch sie bestimmten Halbebenen $\mathfrak{H}_{01}, \mathfrak{H}_{10}$ bzw. $\mathfrak{H}_{21}, \mathfrak{H}_{12}$; die gemeinsamen Sektoren je zweier Halbebenen $\mathfrak{S}_{01}, \mathfrak{S}_{02}, \mathfrak{S}_{12}, \mathfrak{S}_{11}$ (benannt nach den ersten Indizes der beteiligten Halbebenen und mithin nach den unteren Indizes der in ihnen gültigen Entwicklungen). Ferner werden gezeichnet: Die Wertigkeitsdiagramme, d. h. ausser dem Nullpunkt die Kreise über $O\bar{t}_1, O\bar{t}_2$ und den entgegengesetzten Strecken als Durchmessern; die «singulären Richtungen», d. h. die Lote in O auf $\bar{t}_0 \bar{t}_1, \bar{t}_1 \bar{t}_2, \bar{t}_0 \bar{t}_2$. Die beiden ersten fallen nicht in die ent-

sprechenden Sektoren \mathfrak{S}_{01} und \mathfrak{S}_{12} , sondern liegen auf deren Rand, die letzte liegt in ihrem zugehörigen Sektor \mathfrak{S}_{02} . Sie ist die einzige zu berücksichtigende singuläre Richtung und heiße s_{02} . Man liest nun folgendes an den Wertigkeitsdiagrammen ab:

$$\begin{aligned} \text{in } \mathfrak{S}_{01} \text{ ist} & & f(s) &\approx E_0, \\ \text{in } \mathfrak{S}_{02} \text{ zwischen } g_{21} \text{ und } s_{02} \text{ ist} & & f(s) &\approx E_0, \\ \text{auf } s_{02} \text{ ist} & & f(s) &\approx E_0 - E_2, \\ \text{zwischen } s_{02} \text{ und } g_{01} \text{ ist} & & f(s) &\approx -E_2, \\ \text{in } \mathfrak{S}_{12} \text{ ist} & & f(s) &\approx -E_2, \\ \text{in } \mathfrak{S}_{11} \text{ ist} & & f(s) &\approx -E_1^0 + E_1^2; \\ \text{auf } g_{01} \text{ und } g_{21} \text{ ergeben sich keine Entwicklungen.} \end{aligned}$$

Ein *Sonderfall* liegt in dem Sektor \mathfrak{S}_{11} vor. Hat $F(t)$ für $t \rightarrow t_1$ auf den beiden Strecken $t_1 t_0$, $t_1 t_2$ *verschiedene* asymptotische Entwicklungen, so erhält man auch zwei verschiedene Entwicklungen E_1^0, E_1^2 , die in jeder Richtung gleiche Wertigkeit haben und infolgedessen im ganzen Sektor \mathfrak{S}_{11} die Entwicklung $f(s) \approx -E_1^0 + E_1^2$ ergeben. Hat aber $F(t)$ für $t \rightarrow t_1$ auf den beiden Strecken *dieselbe* asymptotische Entwicklung (was z. B. in dem in der Praxis häufigsten Fall eintritt, dass $F(t)$ in der Umgebung von t_1 durch eine konvergente Reihe nach beliebigen Potenzen von $t - t_1$ darstellbar ist), so ist $E_1^0 \equiv E_1^2$, und die Entwicklungen in \mathfrak{S}_{11} heben sich auf. Man erhält also für die ganze Funktion $f(s)$ in \mathfrak{S}_{11} eine *identisch verschwindende* Entwicklung. Dieses zunächst paradox erscheinende Ergebnis findet seine Erklärung darin, dass die Wahl von t_1 als Anfangspunkt der Wege in den beiden Teilintegralen bedeutet, dass man $f(s)$ nach Potenzen mit dem Faktor $e^{-t_1 s}$ entwickeln will. Wenn die Entwicklung nach diesen Funktionen verschwindet, so bedeutet dies, dass $f(s)$ in dem Sektor von geringerer Wertigkeit als $e^{-t_1 s}$ ist. – Die Ergebnisse fassen wir so zusammen:

Satz 3. Das \mathcal{L} -Integral $f(s) = \int e^{-st} F(t) dt$ sei über das zweiseitige Polygon $t_0 t_1 t_2$ der komplexen t -Ebene erstreckt. $F(t)$ habe für $t \rightarrow t_0$ auf $t_0 t_1$ die asymptotische Entwicklung

$$F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(0)} t^{\lambda_{\nu}^{(0)}} \quad (0 < \Re \lambda_0^{(0)} < \dots),$$

für $t \rightarrow t_2$ auf $t_2 t_1$ die Entwicklung

$$F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(2)} t^{\lambda_{\nu}^{(2)}} \quad (0 < \Re \lambda_0^{(2)} < \dots).$$

Die zu $\bar{t}_0 \bar{t}_1$ senkrechte Gerade durch O in der s -Ebene heiße g_{01} , die zu $\bar{t}_2 \bar{t}_1$ senk-

rechte Gerade g_{21} , das Lot*) von O auf $\bar{t}_0\bar{t}_2$ heiße s_{02} . Setzen wir

$$E_0 \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(0)} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu}^{(0)} + 1)}{s^{\lambda_{\nu}^{(0)} + 1}}, \quad E_2 \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(2)} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu}^{(2)} + 1)}{s^{\lambda_{\nu}^{(2)} + 1}},$$

so gelten für die ganze Funktion $f(s)$ folgende asymptotische Entwicklungen für $s \rightarrow \infty$:

$$f(s) \approx E_0 \text{ zwischen } g_{01} \text{ und } s_{02} \text{ mit Ausnahme von } g_{21},$$

$$f(s) \approx -E_2 \text{ zwischen } g_{21} \text{ und } s_{02} \text{ mit Ausnahme von } g_{01},$$

$$f(s) \approx E_0 - E_2 \text{ auf } s_{02}.$$

In dem Restsektor zwischen g_{01} und g_{21} , der s_{02} nicht enthält, ergibt sich eine asymptotische Entwicklung nur dann, wenn $F(t)$ für $t \rightarrow t_1$ auf den beiden Strecken $t_1 t_2$ und $t_1 t_2$ verschiedene asymptotische Entwicklungen besitzt:

$$F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(1)} t^{\lambda_{\nu}^{(1)}} \text{ auf } t_1 t_0, \quad F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu}^{(1)} t^{\mu_{\nu}^{(1)}} \text{ auf } t_1 t_2.$$

Setzt man

$$E_1^0 \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(1)} \frac{\Gamma(\lambda_{\nu}^{(1)} + 1)}{s^{\lambda_{\nu}^{(1)} + 1}}, \quad E_1^2 \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu}^{(1)} \frac{\Gamma(\mu_{\nu}^{(1)} + 1)}{s^{\mu_{\nu}^{(1)} + 1}},$$

so ist in dem Restsektor: $f(s) \approx -E_1^0 + E_1^2$.

Bemerkung: Wie man sieht, beeinflusst die asymptotische Entwicklung von $F(t)$ in einem bestimmten Eckpunkt die Entwicklung von $f(s)$ immer nur in einem gewissen Sektor. Dieser Sektor der Entwickelbarkeit bleibt auch erhalten, wenn $F(t)$ etwa nur in jenem Eckpunkt eine asymptotische Entwicklung besitzt, in den anderen nicht. Denn ein \mathfrak{Q} -Integral (1) lässt sich, wie man durch Anwendung von Satz 1 [I 3. 6] auf die Form (2) erkennt, immer durch $e^{-t\alpha s} \cdot o(1)$ abschätzen, so dass die Betrachtungen über die Wertigkeit von der asymptotischen Entwickelbarkeit von $f(s)$ unabhängig sind.

3. Der Integrationsweg ist ein Polygon

Besteht der Weg des \mathfrak{Q} -Integrals aus einem Polygon mit n Seiten, so gibt es 2^n Möglichkeiten, $f(s)$ als Summe von n Integralen darzustellen, weil man jede Polygonseite in zwei Richtungen durchlaufen kann. Jedes einzelne Integral hat als Gültigkeitsbereich seiner asymptotischen Entwicklung eine Halbebene, und bei einer Summe von solchen Integralen müssen zunächst einmal sämtliche n Halbebenen einen Sektor *gemein* haben. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür lautet: Ihre inneren Normalen (oder, was auf dasselbe hinaus-

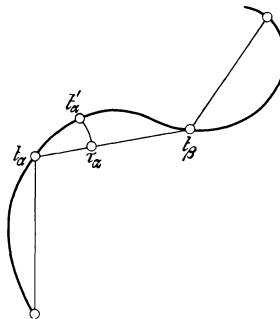
*) s_{02} muss in den oben konstruierten Halbebenen \mathfrak{H}_{01} und \mathfrak{H}_{21} liegen; seine Richtung von O aus ist also so zu wählen, dass es mit $\bar{t}_0\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2\bar{t}_1$ je einen Winkel $< \pi/2$ bildet.

läuft, die gerichteten Polygonseiten) müssen einem Winkelraum $< \pi$ angehören. Hierdurch fallen gewisse Möglichkeiten von vornherein aus. Bei den übriggebliebenen muss man dann an Hand der Wertigkeitsdiagramme feststellen, welche Teilentwicklungen auf einer bestimmten Richtung zum Zuge kommen. Offenbar ist im allgemeinen auf jeder Richtung nur eine Entwicklung zu verwenden. Nur in den Richtungen, auf denen Schnittpunkte von Kreisen gleichen Vorzeichens liegen, kommen mehrere Entwicklungen *zugleich* in Betracht, falls nicht eine andere Entwicklung eine noch höhere Wertigkeit in dieser Richtung besitzt.

Die Tatsache, dass eine Funktion $f(s)$ für $s \rightarrow \infty$ in verschiedenen Sektoren durch ganz verschiedene asymptotische Entwicklungen dargestellt werden kann, wird als *Stokessches Phänomen*²⁴ bezeichnet. Es erklärt sich daraus, dass eine Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle sich sektoriell sehr verschieden verhalten kann.

4. Der Integrationsweg ist eine Kurve endlicher Länge

Das \mathfrak{L} -Integral habe eine rektifizierbare Kurve \mathfrak{C} als Weg. Längs \mathfrak{C} (d. h. in einem Bereich um die Kurve herum) sei $F(t)$ analytisch bis auf endlich viele Punkte t_α , wo $F(t)$ mindestens in einer einseitigen Umgebung der Kurve eine asymptotische oder konvergente Entwicklung der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (t - t_\alpha)^{\lambda_\nu}$ ($-1 < \Re \lambda_0 < \dots$) zulässt. Dann kann man die Kurve durch ein *Sehnenpolygon* ersetzen, unter dessen Ecken jene t_α vorkommen. Bei Ecken im Holomorphiebereich ist das nach dem Cauchyschen Satz klar; bei den Ecken t_α nimmt man



Figur 7

auf einer dort einmündenden Sehne $t_\beta t_\alpha$ einen Nachbarpunkt τ_α an und verbindet ihn durch einen Kreisbogen um t_α mit einem Kurvenpunkt t'_α . Dann ist das Integral über $t_\beta t'_\alpha + t'_\alpha \tau_\alpha$ gleich dem über $t_\beta \tau_\alpha$. Lässt man τ_α und t'_α gegen t_α streben, so konvergiert das Integral über den Kreisbogen $t'_\alpha \tau_\alpha$ gegen 0, weil $F(t)$ bei t_α nur wie $(t - t_\alpha)^{\lambda_0}$, $\Re \lambda_0 > -1$, unendlich wird. Also ist das Integral über den Kurvenbogen $t_\beta t_\alpha$ gleich dem über die Sehne $t_\beta t_\alpha$.

In den Punkten t_α hat $F(t)$ nach Voraussetzung eine asymptotische Potenzentwicklung, in den übrigen Eckpunkten sogar eine konvergente Potenzentwicklung mit ganzzahligen Exponenten, so dass man die oben entwickelte Theorie für ein Polygon benutzen kann.

Als Anwendung behandeln wir:

**Deformation eines ursprünglich reellen Integrationsweges
zwecks Erweiterung des Bereichs der asymptotischen Entwicklung**

Wir kommen hier auf den in § 1 behandelten Fall zurück, dass ein \mathcal{L} -Integral mit reellem Integrationsweg, und zwar von endlicher Länge gegeben ist:

$$(5) \quad f(s) = \int_0^T e^{-st} F(t) dt \quad (T \text{ reell}).$$

In § 1 ergab sich, wenn $F(t)$ für $t \rightarrow 0$ eine asymptotische Entwicklung

$$(6) \quad F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\lambda_\nu} \quad (-1 < \Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \dots)$$

besitzt, für $f(s)$ die asymptotische Entwicklung in der rechten Halbebene:

$$(7) \quad f(s) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\Gamma(\lambda_\nu + 1)}{s^{\lambda_\nu + 1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad \text{in } \Re s > 0.$$

Unter Anwendung der Ergebnisse in Abschnitt 1 erhalten wir nunmehr auch eine Entwicklung in der linken Halbebene:

Satz 4. Wenn $F(t)$ für $t \rightarrow T$ auf OT die asymptotische Entwicklung

$$(8) \quad F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu (t - T)^{\mu_\nu} \quad (-1 < \Re \mu_0 < \dots)$$

besitzt, so gilt für (5) die asymptotische Entwicklung

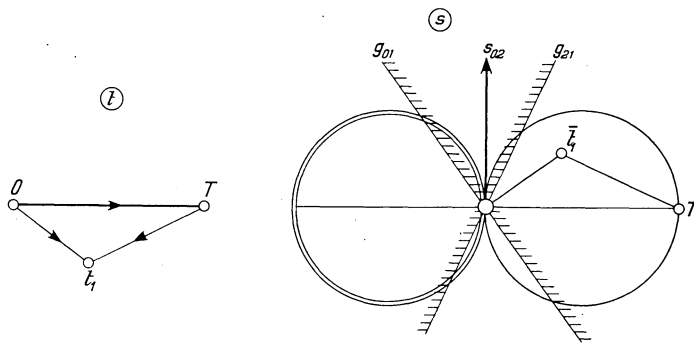
$$(9) \quad f(s) \approx -e^{-Ts} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{\Gamma(\mu_\nu + 1)}{s^{\mu_\nu + 1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad \text{in } \Re s < 0,$$

gleichmässig in jedem Winkelraum $\psi < \arcs < 2\pi - \psi$ mit $\pi/2 < \psi < \pi$.

Auf der imaginären Achse ergibt sich, solange $F(t)$ nur im Reellen definiert ist, keine asymptotische Entwicklung. Existiert aber $F(t)$ in einem an die Strecke OT anschliessenden Bereich als analytische Funktion, so lässt sich auf Grund von Satz 3 und des Ergebnisses in Abschnitt 4 folgendes aussagen²⁵:

Satz 5. Ist $F(t)$ in einem beliebig schmalen Dreieck $O t_1 T$ unterhalb (oberhalb) der Strecke OT analytisch mit eventueller Ausnahme der Punkte O und T und besitzt $F(t)$ in dem Dreieck für $t \rightarrow 0$ die Entwicklung (6), für $t \rightarrow T$ die Entwicklung (8), so gilt für die Funktion (5) auf der positiv (negativ) imaginären Achse die durch Addition von (7) und (9) entstehende Entwicklung.

Beweis: Es liege z. B. t_1 unterhalb OT . Dann können wir zunächst unter Benutzung des in Abschnitt 4 entwickelten Gedankenganges den Integrationsweg auf den gebrochenen Linienzug $O t_1 T$ verlegen, obwohl $F(t)$ in O und T nicht analytisch zu sein braucht. Hierauf haben wir gemäss Satz 3 in der s -Ebene die Strecken $O\bar{t}_1$ und $T\bar{t}_1$ (in der oberen Halbebene) sowie die darauf senkrechten Geraden g_{01}, g_{21} zu zeichnen. Die «singuläre Richtung» s_{02} senkrecht zu OT ist die positiv imaginäre Achse. Zwischen g_{21} und s_{02} gilt die Entwicklung (7), zwischen g_{01} und s_{02} die Entwicklung (9), was beides nichts Neues ist, falls die Entwicklungen von $F(t)$ auf OT und $O t_1$ bzw. TO und $T t_1$ übereinstimmen, da dann (7) sogar in der ganzen rechten, (9) in der ganzen linken Halbebene gilt. Auf der singulären Richtung selbst gilt die Summe beider Entwicklungen.

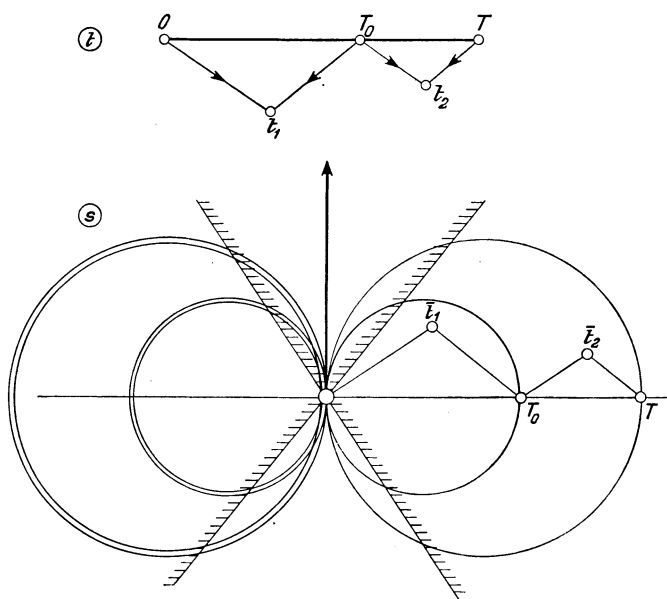


Figur 8

Bemerkung: Da $F(t)$ in t_1 analytisch ist, also in allen Richtungen dieselbe Entwicklung hat, ergibt sich gemäss dem in Abschnitt 2 Gesagten in dem dort mit \mathfrak{S}_{11} bezeichneten Sektor eine identisch verschwindende Entwicklung. In der Tat überzeugt man sich an den Wertigkeitsdiagrammen sofort davon, dass die «wahre» Wertigkeit von $f(s)$, die in der rechten Halbebene gleich der von (7), also gleich 0, in der linken Halbebene gleich der von (9) ist (also durch den Kreis über $O, -T$ repräsentiert wird), kleiner ist als die durch den Kreis über $O, -\bar{t}_1$ repräsentierte Wertigkeit von $e^{-t_1 s}$.

Auf eine bei der Anwendung von Satz 5 auftretende Schwierigkeit sei besonders hingewiesen. Die Entwicklungen für $F(t)$ in den Richtungen $O t_1$ und $T t_1$ sind in der Praxis natürlich nicht von vornherein gegeben, sondern müssen erst berechnet werden. Ist $F(t)$ in dem Dreieck $O T t_1 O$ einschliesslich Rand analytisch, so existieren in O und T sogar konvergente Potenzentwicklungen mit ganzen Exponenten, die für alle Richtungen dieselben sind. In den in der Praxis auftretenden Fällen aber ist $F(t)$ in O und T algebraisch oder logarithmisch verzweigt. Da wir auf das Dreieck $O T t_1 O$ den Cauchyschen Satz angewendet haben, muss man sorgfältig darauf achten, dass die Entwicklungen in O und T zu demselben Blatt der Riemannschen Fläche, also zu demselben Zweig von $F(t)$ gehören. Vgl. hierzu als Musterbeispiel die Entwicklung der Besselschen Funktionen im nächsten Paragraphen.

Liegt auf der Strecke OT ein Punkt T_0 , wo $F(t)$ *nicht holomorph* ist, so wird man *zwei* Hilfspunkte t_1, t_2 einschalten und den geradlinigen Integrationsweg OT durch das Polygon $O t_1 T_0 t_2 T$ ersetzen. Um eine möglichst einfache Figur zu erhalten, kann man die Seiten paarweise parallel nehmen. Wählt man die Integrationsrichtungen so, wie in Figur 9 angegeben, und konstruiert in der s -Ebene die Gültigkeitshalbebenen, so sieht man, dass die (positiv) imaginäre



Figur 9

Achse ihnen allen angehört. Offenbar haben die den einzelnen gerichteten Strecken entsprechenden asymptotischen Entwicklungen sämtlich in Richtung der imaginären Achse die Wertigkeit 0, sie sind also *sämtlich* zu berücksichtigen. Hat jedoch $F(t)$ in den beiden Richtungen $T_0 t_1$ und $T_0 t_2$ dieselbe Entwicklung, so heben sich die beiden entsprechenden asymptotischen Entwicklungen in $f(s)$ auf, und es bleiben nur noch die von O und T herrührenden übrig.

§ 4. Beispiele

1. Die Besselschen Funktionen für reelle Werte der Variablen

In 3.2.4 haben wir aus dem \mathfrak{L} -Integral

$$\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{is}{2}\right)^{-\alpha} e^{-s} J_{\alpha}(is) = \int_0^2 e^{-st} [t(2-t)]^{\alpha-(1/2)} dt \quad \left(\Re\alpha > -\frac{1}{2}\right),$$

nach Satz 1 [3. 1] die asymptotische Entwicklung von $J_\alpha(i s)$ für $-\pi/2 < \arcs < +\pi/2$ und damit von $J_\alpha(z)$ für $0 < \arcs z < \pi$ abgeleitet. Da es sich um ein \mathfrak{L} -Integral mit endlicher oberer Grenze handelt, können wir zunächst nach Satz 4 [3. 3] die asymptotische Entwicklung von $J_\alpha(i s)$ für $\pi/2 < \arcs < 3\pi/2$ finden, indem wir die asymptotische Entwicklung von $[t(2-t)]^{\alpha-(1/2)}$ für $t \rightarrow 2$ auf der Strecke $O2$ aufstellen. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} [t(2-t)]^{\alpha-(1/2)} &= (-1)^{\alpha-(1/2)} (t-2)^{\alpha-(1/2)} t^{\alpha-(1/2)} \\ &= (-1)^{\alpha-(1/2)} (t-2)^{\alpha-(1/2)} \left[2 \left(1 + \frac{t-2}{2} \right) \right]^{\alpha-(1/2)} \end{aligned}$$

und entwickeln den letzten Faktor in eine Potenzreihe. Zuvor muss jedoch festgestellt werden, welche Bedeutung die im allgemeinen unendlich vieldeutigen Ausdrücke haben. Auf der linken Seite sollen für $t^{\alpha-(1/2)}$ und $(2-t)^{\alpha-(1/2)}$ die Hauptzweige genommen werden, d. h. der Arcus der positiv reellen Zahlen t und $2-t$ soll gleich 0 sein (vgl. Anhang I, Nr. 55). Setzen wir fest, dass bei Bestimmung der rechtsstehenden Funktion $(t-2)^{\alpha-(1/2)}$ der Arcus der negativen Zahl $t-2$ gleich π sein soll, so muss der Arcus von -1 gleich $-\pi$ genommen werden, damit $(-1)(t-2) = 2-t$ den Arcus 0 hat. Es ist also $-1 = e^{-\pi i}$ zu setzen. Benutzt man ferner für $(t/2)^{\alpha-(1/2)}$ die Binomialentwicklung

$$\left(\frac{t}{2}\right)^{\alpha-(1/2)} = \left(1 + \frac{t-2}{2}\right)^{\alpha-(1/2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha-(1/2)}{\nu} \left(\frac{t-2}{2}\right)^\nu,$$

so liefert diese bekanntlich gerade den Hauptzweig. Wir können also für $[t(2-t)]^{\alpha-(1/2)}$ auf der Strecke $O2$ für $t \rightarrow 2$ die Entwicklung anschreiben:

$$[t(2-t)]^{\alpha-(1/2)} = e^{-[\alpha-(1/2)]\pi i} 2^{\alpha-(1/2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha-(1/2)}{\nu} \frac{1}{2^\nu} (t-2)^{\nu+\alpha-(1/2)}.$$

Somit gilt nach Satz 4 [3. 3]:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{i s}{2}\right)^{-\alpha} e^{-s} J_\alpha(i s) \\ &\approx -e^{-2s} e^{-[\alpha-(1/2)]\pi i} 2^{\alpha-(1/2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha-(1/2)}{\nu} \frac{1}{2^\nu} \frac{\Gamma(\nu + \alpha + (1/2))}{s^{\nu+\alpha+(1/2)}} \end{aligned}$$

für $s \rightarrow \infty$ in $\pi/2 < \arcs < 3\pi/2$, wofür wir unter Verwendung von Anhang I, Nr. 3 und 4 schreiben können:

$$\begin{aligned} (1) \quad &J_\alpha(i s) \\ &\approx -\frac{\cos \alpha \pi}{\sqrt{2} \pi^{3/2}} i^\alpha e^{-[\alpha-(1/2)]\pi i} e^{-s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu \nu!} \frac{\Gamma(\nu + \alpha + (1/2)) \Gamma(\nu - \alpha + (1/2))}{s^{\nu+(1/2)}}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $[i s = z, i = e^{i\pi/2}, -(-1)^\nu = e^{-(\nu+1)\pi i}]$:

$$(2) \quad J_\alpha(z) \approx \frac{\cos \alpha \pi}{\sqrt{2} \pi^{3/2}} z^{-1/2} e^{iz} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{-[\nu+\alpha+(1/2)]i\pi/2}}{2^\nu \nu!} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+(1/2)) \Gamma(\nu-\alpha+(1/2))}{z^\nu}$$

für $z \rightarrow \infty$ in $\pi < \arg z < 2\pi$.

Nunmehr können wir die Entwicklung von $J_\alpha(z)$ für (positiv) reelle z rasch erledigen. Die vorliegende Funktion $F(t)$ ist in einem Dreieck $O2t_1O$ oberhalb der Strecke $O2$ analytisch mit Ausnahme der Punkte O und 2 . Die in 3.2.4 benutzte Entwicklung von $F(t)$ in der Umgebung von $t=0$ gilt auch auf der Strecke Ot_1 , die oben benutzte Entwicklung in der Umgebung von $t=2$ gilt auch auf $2t_1$ und ist die unmittelbare analytische Fortsetzung der Entwicklung bei $t=0$ innerhalb des Dreiecks, weil wir $\arg(t-2) = \pi$ setzten, was der Fortsetzung durch die obere Halbebene entspricht. Also gilt nach Satz 5 [3.3] für $J_\alpha(is)$ auf der negativ imaginären Achse die durch Addition von 3.2 (10) und 3.4 (1) entstehende Entwicklung. Das ist aber damit gleichbedeutend, dass die Entwicklung von $J_\alpha(z)$ für positiv reelle z durch Addition von 3.2 (11) und 3.4 (2) gegeben ist:

$$(3) \quad J_\alpha(z) = \frac{\cos \alpha \pi}{\pi \sqrt{2} \pi z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+(1/2)) \Gamma(\nu-\alpha+(1/2))}{2^\nu \nu!} \\ \times \left\{ e^{[\nu(\pi/2) + \alpha(\pi/2) + (\pi/4) - z]i} + e^{-[\nu(\pi/2) + \alpha(\pi/2) + (\pi/4) - z]i} \right\} \frac{1}{z^\nu} \\ = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\cos \alpha \pi}{\sqrt{\pi z}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+(1/2)) \Gamma(\nu-\alpha+(1/2))}{2^\nu \nu!} \\ \times \frac{\cos [\nu(\pi/2) + \alpha(\pi/2) + (\pi/4) - z]}{z^\nu} \quad \text{für } z \rightarrow +\infty.$$

Unter Benutzung eines unterhalb der Strecke $O2$ liegenden Dreiecks erhält man die Entwicklung für $z \rightarrow -\infty$, die man aber auch aus (3) mittels der Relation $J_\alpha(-z) = (-1)^\alpha J_\alpha(z)$ ableiten kann. (Vgl. die Ableitung nach anderer Methode in 7.5.3.)

2. Das Integral $\varphi(z) = \int_0^a e^{izx^q} g(x) dx$ für reelle z

Ein in der Literatur mehrfach behandeltes Problem ist die asymptotische Entwicklung des viele wichtige spezielle Funktionen umfassenden Integrals

$$\varphi(z) = \int_0^a e^{izx^q} g(x) dx \quad (a \text{ und } q \text{ reell } > 0)$$

für $z \rightarrow +\infty$ beziehungsweise $-\infty$. Wir machen die Voraussetzung, dass $g(x)$ in einem beliebig schmalen, die Strecke Oa als Sehne enthaltenden konvexen

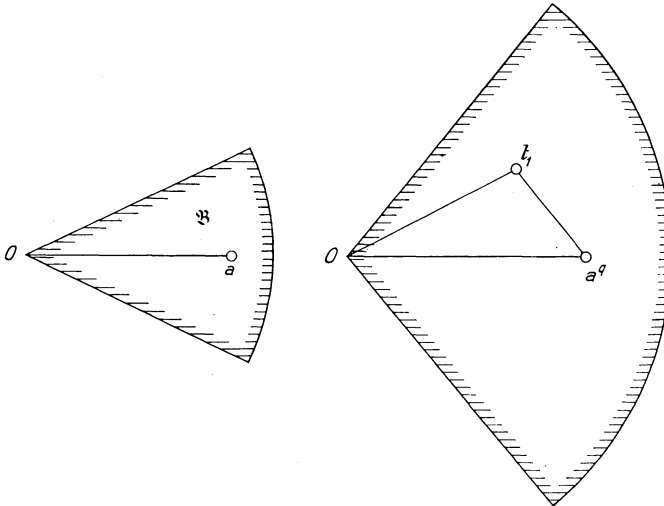
Bereich \mathfrak{B} analytisch ist mit eventueller Ausnahme der Stelle 0, wo aber (zweidimensional innerhalb \mathfrak{B}) die asymptotische Entwicklung existiert:

$$g(x) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\lambda_{\nu}} \quad \text{für } x \rightarrow 0 \quad (-1 < \lambda_0 < \dots).$$

Setzen wir $z = is$ und $x^q = t$, so erhalten wir das \mathfrak{Q} -Integral

$$\varphi(is) = \frac{1}{q} \int_0^{a^q} e^{-st} g(t^{1/q}) t^{(1/q)-1} dt.$$

Die Funktion $F(t) = (1/q) g(t^{1/q}) t^{(1/q)-1}$ ist in einem Dreieck $O t_1 a^q$ oberhalb der



Figur 10

Strecke $O a^q$ analytisch ausser im Punkte $t = 0$, wo aber (zweidimensional) die Entwicklung existiert:

$$F(t) = \frac{1}{q} g(t^{1/q}) t^{(1/q)-1} \approx \frac{1}{q} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} t^{[(\lambda_{\nu}+1)/q]-1} \quad \left(\frac{\lambda_0+1}{q} - 1 > -1 \right).$$

In $t = a^q$ ist $F(t)$ holomorph, besitzt also eine konvergente Potenzentwicklung

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{\nu} (t - a^q)^{\nu}$$

oder

$$F(a^q + t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{\nu} t^{\nu}.$$

Die Koeffizienten k_ν der Entwicklung von

$$\begin{aligned} F(a^q + t) &= \frac{1}{q} g((a^q + t)^{1/q}) (a^q + t)^{(1/q)-1} = g((a^q + t)^{1/q}) \frac{d(a^q + t)^{1/q}}{dt} \\ &= g(x) \frac{dx}{dt} \quad \text{mit } t = x^q - a^q = t(x) \end{aligned}$$

erhalten wir nach der in Anhang II angegebenen Form des Lagrange-Bürmannschen Satzes, der anwendbar ist, weil $t(x)$ und $g(x)$ in der Umgebung von $x = a$ holomorph sind und $t(a) = 0$, $t'(a) = q a^{q-1} \neq 0$ ist. Es ergibt sich

$$k_\nu = \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left[g(x) \left(\frac{x-a}{x^q - a^q} \right)^{\nu+1} \right] \right\}_{x=a},$$

also

$$k_0 = \frac{g(a)}{q a^{q-1}}, \quad k_1 = \frac{a g'(a) - (q-1) g(a)}{q^2 a^{2q-1}}, \dots$$

Nach Satz 5 [3. 3] gilt auf der negativ imaginären s -Achse

$$(4) \quad \varphi(is) \approx \frac{1}{q} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\Gamma((\lambda_\nu + 1)/q)}{s^{(\lambda_\nu + 1)/q}} - e^{-a^q s} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}}.$$

Setzen wir jetzt wieder $is = z$, $s = e^{-\pi i/2} z$, so erhalten wir²⁶:

$$(5) \quad \varphi(z) \approx \frac{1}{q} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\Gamma((\lambda_\nu + 1)/q) e^{[(\lambda_\nu + 1)/q] \pi i/2}}{z^{(\lambda_\nu + 1)/q}} - e^{a^q iz} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{\nu! e^{(\nu+1) \pi i/2}}{z^{\nu+1}}$$

für z (reell) $\rightarrow +\infty$.

Benützt man statt des oberhalb der Strecke Oa^q liegenden Dreiecks ein unterhalb liegendes, so erhält man für $\varphi(is)$ dieselbe Entwicklung (4) auf der positiv imaginären Achse, also für $\varphi(z)$ die Entwicklung (5) auf der negativ reellen Achse. Statt dessen kann man auch schreiben:

$$(6) \quad \varphi(-z) \approx \frac{1}{q} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\Gamma((\lambda_\nu + 1)/q) e^{-[(\lambda_\nu + 1)/q] \pi i/2}}{z^{(\lambda_\nu + 1)/q}} - e^{-a^q iz} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{\nu! e^{-(\nu+1) \pi i/2}}{z^{\nu+1}}$$

für z (reell) $\rightarrow +\infty$.

Denn um aus der für positiv imaginäre s gültigen Entwicklung (4) eine Entwicklung für $\varphi(-z)$ mit $z > 0$ abzuleiten, hat man $s = e^{\pi i/2} z$ ($is = -z$) zu setzen.

Wir wollen nun einige *Spezialfälle* betrachten.

a) Die Funktion $g(x)$ sei an der Stelle $x = 0$ *holomorph* oder besitze wenigstens alle oder einige Ableitungen in einem die positiv reelle Achse einschliessenden Sektor, so dass (eventuell nur bis zu einem gewissen Index) $c_\nu = g^{(\nu)}(0)/\nu!$ und $\lambda_\nu = \nu$ ist (siehe S. 36). Gemäss Definition IV, S. 34, sind die beiden Summen in (5) zu vereinigen und nach der Grössenordnung der Glieder anzu-

ordnen. Die vorkommenden Potenzen sind:

$$z^{-1/q}, z^{-2/q}, \dots \quad \text{bzw.} \quad z^{-1}, z^{-2}, \dots$$

Man sieht, dass je nach der Grösse von q die Anordnung ganz verschieden ausfällt. Um sinnfällig zu machen, zu welchen Konsequenzen das führt, wollen wir einmal festsetzen, dass von der ersten Reihe nur das erste Glied benutzt werden soll*). Die erste Reihe ist dann in der Gestalt

$$\frac{1}{q} g(0) \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) e^{(1/q)\pi i/2} z^{-1/q} + O(z^{-2/q})$$

anzuschreiben.

Ist nun $q \geq 2$, also $2/q \leq 1$, so sind die von der zweiten Reihe herrührenden Glieder von geringerer oder gleicher Grössenordnung wie der Fehler bei der ersten Reihe, brauchen also nicht berücksichtigt zu werden.

Ist $1 \leq q < 2$, also $1 < 2/q \leq 2$, so ist von der zweiten Reihe das erste Glied mitzunehmen, während das zweite bereits durch den Fehler $O(z^{-2/q})$ absorbiert wird.

Ist $0 < q < 1$, also $2/q > 2$, so sind aus der zweiten Reihe die Glieder mit $z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-p}$ mitzunehmen, wo p die grösste ganze Zahl $< 2/q$ ist. Wir erhalten also für $z \rightarrow +\infty^{27}$:

$$(7) \quad \text{für } q \geq 2: \quad \varphi(z) = g(0) \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right) e^{\pi i/2q} z^{-1/q} + O(z^{-2/q}),$$

$$(8) \quad \text{für } 1 \leq q < 2: \quad \varphi(z) = g(0) \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right) e^{\pi i/2q} z^{-1/q} \\ - g(a) \frac{1}{q a^{q-1}} i e^{a^q iz} z^{-1} + O(z^{-2/q}),$$

$$(9) \quad \text{für } 0 < q < 1: \quad \varphi(z) = g(0) \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right) e^{\pi i/2q} z^{-1/q} \\ - e^{a^q iz} \sum_{\nu=0}^{p-1} k_{\nu} \nu! e^{(\nu+1)\pi i/2} z^{-(\nu+1)} + O(z^{-2/q}).$$

b) Für $q = 1$ ergibt sich aus (5) und (6) die asymptotische Entwicklung des «Fourierkoeffizienten» (endliche Fourier-Transformierte)

$$\varphi(z) = \int_0^a e^{izx} g(x) dx.$$

In dem Spezialfall, dass $g(x)$ in $x = 0$ holomorph ist, lautet sie:

$$(10) \quad \varphi(\pm z) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} (g^{(\nu)}(0) - e^{\pm aiz} g^{(\nu)}(a)) \frac{(\pm i)^{\nu+1}}{z^{\nu+1}} \quad \text{für } z \rightarrow +\infty.$$

*) Dann braucht $g(x)$ nur eine stetige erste Ableitung in der Umgebung von $x = 0$ zu haben.

Übrigens kann man sie auch durch sukzessive partielle Integration bekommen, aber nur unter der Voraussetzung, dass in $0 \leq x \leq a$ alle Ableitungen von $g(x)$ existieren²⁸.

c) Unser obiges Resultat umfasst als ein besonders einfaches Beispiel die *Fresnelschen Integrale*. Darunter versteht man

$$\int_0^z \cos x^2 dx \quad \text{und} \quad \int_0^z \sin x^2 dx, \quad \text{zusammengefasst: } k(z) = \int_0^z e^{i x^2} dx.$$

Schreiben wir $k(z)$ in der Form

$$k(z) = z \int_0^1 e^{i z^2 x^2} dx,$$

so ist

$$\frac{k(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \int_0^1 e^{i z x^2} dx$$

gleich der oben behandelten Funktion $\varphi(z)$ in dem Spezialfall $g(z) \equiv 1$, $q = 2$, $a = 1$. Hier ist $g(x)$ in den Punkten $x = 0$ und $x = a = 1$ holomorph und

$$c_0 = 1, \quad \lambda_0 = 0, \quad c_\nu = 0 \quad \text{für } \nu \geq 1;$$

$$k_\nu = \frac{1}{\nu!} \left. \frac{d^\nu (x+1)^{-(\nu+1)}}{dx^\nu} \right|_{x=1} = (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2} 2^{-2\nu-1}.$$

Also ergibt sich nach (5):

$$\frac{k(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i/4} z^{-1/2} - e^{iz} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{\nu! 2^{2\nu+1}} i^{\nu+1} z^{-(\nu+1)}$$

oder

$$(11) \quad k(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i/4} - \frac{i}{2} e^{iz} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{\nu! 4^\nu} i^\nu z^{-2\nu-1} \quad \text{für } z \rightarrow +\infty.$$

Durch Trennung in Real- und Imaginärteil erhält man die Entwicklungen der eigentlichen Fresnelschen Integrale. (Vgl. die andere Herleitung in 3.6.2.) Wegen

$$k(+\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i/4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i)$$

ergibt sich insbesondere:

$$(12) \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**§ 5. Asymptotische Entwicklung eines Integrals der Form $\int_a^b e^{s h(x)} g(x) dx$
(Laplacesches Problem der Funktionen grosser Zahlen).
Die Methode der Sattelpunkte**

LAPLACE hat sich mit der asymptotischen Darstellung von Integralen der Gestalt

$$f(s) = \int_a^b g(x) [H(x)]^s dx \quad \text{mit } H(x) \geq 0$$

oder, w. d. i. ($H(x) = e^{h(x)}$)

$$(1) \quad f(s) = \int_a^b e^{s h(x)} g(x) dx$$

(b kann auch ∞ sein) für $s \rightarrow \infty$ beschäftigt, was er im Stile seiner Zeit als Untersuchung von «Funktionen grosser Zahlen» bezeichnete. Deshalb führt diese Aufgabe auch heute noch in der Literatur den Namen «Laplacesches Problem der Funktionen grosser Zahlen». Den Spezialfall, dass $h(x)$ eine Potenz $-x^\alpha$ ist, haben wir bereits in Satz 5 [3. 1] und in dem 2. Beispiel von 3. 4 erledigt; wir betrachten nun allgemeinere Fälle²⁹.

Wir schreiben (1) in der Form

$$(2) \quad f(s) = e^{h(a)s} \int_a^b e^{-s[h(a)-h(x)]} g(x) dx.$$

Ist die Variable x sowie die Funktion $h(x)$ reell und gilt ausserdem

$$h(x) \leq h(a) \quad \text{für } a \leq x \leq b$$

(wie es bei der Potenz $-x^\alpha$ der Fall war), so können wir

$$h(a) - h(x) = t \geq 0$$

setzen*). Die hierzu inverse Funktion laute $x = k(t)$. Wir setzen nun voraus, dass sich die Substitution $x = k(t)$ in dem Integral (2) ausführen lässt:

$$(3) \quad f(s) = e^{h(a)s} \int_0^T e^{-st} g(k(t)) k'(t) dt \quad [T = h(a) - h(b)].$$

Dies kann auch dann zutreffen, wenn $k'(t) = -1/h'(x)$ an gewissen Stellen nicht existiert, weil $h'(x) = 0$ ist, ein Fall, der in den Anwendungen häufig vorkommt und auf den wegen des Folgenden ausdrücklich aufmerksam gemacht sei.

*) Offenbar braucht nicht $h(x)$ reell zu sein; es genügt, dass $h(a) - h(x)$ reell ist.

Das \mathcal{Q} -Integral (3) lässt sich nach den Methoden von § 1 und 3 in der rechten und linken Halbebene und im Fall eines analytischen Integranden auch auf der imaginären Achse asymptotisch entwickeln. Es genügt, wenn wir die Entwicklung in der rechten Halbebene betrachten, weil die anderen Fälle sich auf diesen zurückführen lassen. Wie wir aus Satz 1 [3. 1] wissen, ist für die Entwicklung in $\Re s > 0$ ausschliesslich das Verhalten des Integranden $g(k(t)) k'(t)$ für $t \rightarrow 0$, also von $g(x)$ und $k(x)$ für $x \rightarrow a$ massgebend. Wir werden sehen, dass in dem Fall der *Holomorphie* beider Funktionen in $x = a$ sich die asymptotische Entwicklung *explizit* angeben lässt. Nach der obigen Bemerkung wird es dabei eine Rolle spielen, ob und von welcher Ordnung h' in a verschwindet.

Wir setzen also jetzt $g(x)$ und $h(x)$ als holomorph in $x = a$ voraus. Es sei

$$h'(a) = h''(a) = \dots = h^{(m-1)}(a) = 0, \quad h^{(m)}(a) \neq 0.$$

(Für $m = 1$ haben wir es mit dem besonders harmlosen Fall $h'(a) \neq 0$ zu tun.) Dann ist in einer Umgebung von a

$$(4) \quad h(a) - h(x) = c_m(x-a)^m + c_{m+1}(x-a)^{m+1} + \dots = t \quad (c_m \neq 0).$$

Die inverse Funktion $x = k(t)$ hat in $t = 0$ einen Verzweigungspunkt $m - 1$ -ter Ordnung und somit die Gestalt

$$x = k(t) = a + \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^{n/m},$$

woraus sich ergibt:

$$(5) \quad g(x) \frac{dx}{dt} = g(k(t)) k'(t) = g\left(a + \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^{n/m}\right) \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n}{m} t^{(n/m)-1}.$$

Die vorliegende Originalfunktion hat demnach in der Umgebung von $t = 0$ eine Entwicklung nach Potenzen mit gebrochenen Exponenten, im allgemeinen anfangend mit $t^{-(m-1)/m}$, so dass Satz 4 [3. 1] angewandt werden kann. Die Berechnung der Koeffizienten dieser Entwicklung ist aber ausserordentlich kompliziert. Wir werden daher statt der Substitution (4) eine andere verwenden, aus der x als eindeutige Funktion der neuen Variablen hervorgeht, worauf wir die Koeffizienten der entsprechenden Entwicklung mit Hilfe des Lagrange-Bürmannschen Satzes werden angeben können*).

Wir setzen

$$(6) \quad \tau = [h(a) - h(x)]^{1/m} = (x-a) [c_m + c_{m+1}(x-a) + \dots]^{1/m} \quad (\tau = t^{1/m}).$$

Wegen $c_m \neq 0$ lässt sich τ in der Umgebung von $x = a$ als eindeutige Funktion von x mit $\tau(a) = 0$ bestimmen, und zwar ist der Zweig auszuwählen, der τ auf einer Strecke $a \leq x \leq b' \leq b$ positiv macht. Da

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_{x=a} = c_m^{1/m} \neq 0$$

*) Der Lagrange-Bürmannsche Satz ist im allgemeinen nicht direkt anwendbar, weil dt/dx für $x = a$ verschwindet.

ist, wird die inverse Funktion $x = l(\tau)$ in der Umgebung von $\tau = 0$ eine eindeutige Funktion von τ mit $l(0) = a$. Ist die Substitution (6) in dem Integral (2) ausführbar, so ergibt sich das Integral mit reellem Weg

$$(7) \quad \begin{aligned} f(s) &= e^{h(a)s} \int_0^{T'} e^{-s\tau^m} g(l(\tau)) \frac{dl(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= e^{h(a)s} \int_0^{T'} e^{-s\tau^m} \left(\frac{g(x)}{d\tau/dx} \right)_{x=l(\tau)} d\tau \quad [T' = (h(a) - h(b))^{1/m}]. \end{aligned}$$

Nun existiert eine Entwicklung mit ganzzahligen Exponenten der Form

$$\left(\frac{g(x)}{d\tau/dx} \right)_{x=l(\tau)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \tau^{\nu},$$

weil $g(x)$ und $d\tau/dx$ als Funktionen von τ in $\tau = 0$ holomorph sind und $d\tau/dx$ für $x = a$, d. h. für $\tau = 0$ von 0 verschieden ist. Die Koeffizienten a_{ν} kann man wegen $\tau(a) = 0$, $\tau'(a) \neq 0$ nach der in Anhang II angegebenen Variante des Lagrange-Bürmannschen Satzes bestimmen, ohne die inverse Funktion $x = l(\tau)$ auszurechnen:

$$a_{\nu} = \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left[g(x) \left(\frac{x-a}{\tau(x)} \right)^{\nu+1} \right] \right\}_{x=a}.$$

Die asymptotische Entwicklung von $f(s)$ ergibt sich dann aus Satz 5 [3. 1]. Das Ergebnis fassen wir so zusammen:

Satz 1. Die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ seien in $x = a$ holomorph; in dem reellen Intervall $a \leq x \leq b$ sei $h(a) - h(x)$ reellwertig und ≥ 0 ; ferner sei

$$h'(a) = h''(a) = \dots = h^{(m-1)}(a) = 0, \quad h^{(m)}(a) \neq 0 \quad (m \geq 1).$$

Lässt sich in dem Integral (2) die Substitution (6) ausführen*), so gilt die asymptotische Entwicklung

$$(8) \quad \int_a^b e^{sh(x)} g(x) dx \approx \frac{1}{m} e^{h(a)s} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \frac{\Gamma((\nu+1)/m)}{s^{(\nu+1)/m}}$$

mit

$$(9) \quad a_{\nu} = \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left[g(x) \left(\frac{x-a}{[h(a) - h(x)]^{1/m}} \right)^{\nu+1} \right] \right\}_{x=a}$$

für $s \rightarrow \infty$ in $|\arcs s| \leq \psi < \pi/2$.

Unter unseren Voraussetzungen war der Integrationsweg in (7) reell. Wenn $h(a) - h(x)$ nicht reellwertig oder nicht $h(x) \leq h(a)$ oder schon der ursprüngliche Integrationsweg in (1) nicht reell ist, so tritt in (7) ein Weg im Komplexen auf.

*) Wir wählen diese allgemeine Formulierung, weil die Substitutionsregel für Riemannsche und Lebesguesche Integrale verschieden lautet und weil sie in den Lehrbüchern nicht immer unter den gleichen Voraussetzungen abgeleitet wird.

Das Integral kann dann nach den in § 3 entwickelten Methoden behandelt werden.

In dem Fall, dass $g(x)$ und $h(x)$ nicht bloss in $x = a$, sondern in einem den Integrationsweg enthaltenden Gebiet holomorph sind, kann man es jedoch manchmal durch *Deformation des Integrationsweges* erreichen, dass auf ihm $h(a) - h(x)$ reell und ≥ 0 ist, so dass durch die Substitution (6) wieder das Integral (7) mit *reellem Weg* entsteht. Diese Deformation des Integrationsweges ist bekannt unter dem Namen*)

Methode der Sattelpunkte

(Passmethode, méthode du col, method of steepest descents)³⁰.

Wenn das Integral (2) zunächst einen beliebigen komplexen Weg hat, so sucht man einen Punkt a und einen durch ihn hindurchlaufenden Weg ausfindig zu machen derart, dass $h(a) - h(x)$ auf ihm reell ist und nach beiden Seiten monoton wächst. Setzt man

$$x = \xi + i \eta, \quad a = \xi_0 + i \eta_0, \quad h(x) = X + i Y,$$

so soll also der *Weg* durch die *Vorschrift* $Y(x) = Y(a)$ gekennzeichnet sein, und auf ihm soll X in $x = a$ ein *Maximum* besitzen. Ist es auf Grund des Cauchyschen Satzes möglich, den ursprünglichen Weg durch diesen neuen zu ersetzen, so ist das gegebene Integral gleich der Differenz zweier Integrale, deren Wege in a beginnen und für die die geforderten Bedingungen erfüllt sind.

Wir denken uns $\zeta = X(\xi, \eta)$ als Fläche im $\xi \eta \zeta$ -Raum dargestellt. Als Realteil einer analytischen Funktion kann X im Innern des Gebietes kein Maximum im zweidimensionalen Sinn besitzen. Denn in einem solchen muss zunächst

$$X_\xi = X_\eta = 0, \quad \text{also} \quad \frac{dh(x)}{dx} = X_\xi - i X_\eta = 0$$

sein, so dass die Taylorentwicklung von X lautet:

$$\begin{aligned} X(\xi, \eta) = & X(\xi_0, \eta_0) + \frac{1}{2} [X_{\xi\xi}(\xi_0, \eta_0) (\xi - \xi_0)^2 \\ & + 2 X_{\xi\eta}(\xi_0, \eta_0) (\xi - \xi_0) (\eta - \eta_0) + X_{\eta\eta}(\xi_0, \eta_0) (\eta - \eta_0)^2] + \dots \end{aligned}$$

Damit in (ξ_0, η_0) ein Maximum vorläge, müsste das quadratische Glied (negativ) definit, also die Diskriminante

$$D = X_{\xi\xi} X_{\eta\eta} - X_{\xi\eta}^2$$

in (ξ_0, η_0) positiv sein. Nun ist aber

$$\frac{d^2h}{dx^2} = X_{\xi\xi} - i X_{\xi\eta}$$

*) Die in der Literatur über angewandte Mathematik nach der Deformation des Weges ausgeführte asymptotische Entwicklung des Integrals beruht auf Plausibilitätsbetrachtungen und ist mathematisch nicht exakt. Die einwandfreie Grundlage für die Entwicklung liefert der obige Satz 1.

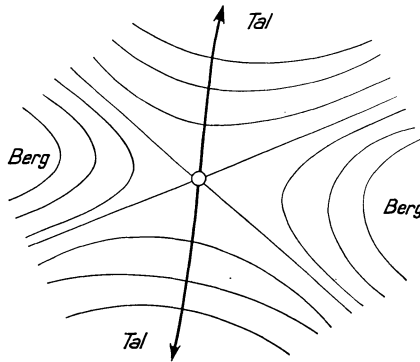
und auf Grund der Laplaceschen Gleichung $X_{\xi\xi} + X_{\eta\eta} = 0$:

$$\left| \frac{d^2h}{dx^2} \right|^2 = X_{\xi\xi}^2 + X_{\xi\eta}^2 = -X_{\xi\xi} X_{\eta\eta} + X_{\xi\eta}^2,$$

also

$$D = - \left| \frac{d^2h}{dx^2} \right|^2.$$

D ist daher nie positiv, so dass X kein Maximum (und kein Minimum) haben kann. Es liegt vielmehr an jeder Stelle, wo $dh/dx = 0$ ist, ein *Sattelpunkt* vor, und zwar, wenn $h''(a) \neq 0$, ein solcher mit zwei Bergen und zwei Tälern; wenn $h''(a) = \dots = h^{(m-1)}(a) = 0$, $h^{(m)}(a) \neq 0$, ein solcher mit m Bergen und m Tälern.



Figur 11

Diese Konfiguration *genügt* aber für unsere Zwecke: wir brauchen den Integrationsweg nur durch zwei von a auslaufende Täler zu legen, dann hat X auf ihm in a ein Maximum. Um weiter zu erreichen, dass auf ihm $Y(x) = Y(a)$ ist, brauchen wir ihn nur noch speziell mit der Projektion der durch $x = a$ laufenden *Falllinien* zu identifizieren. Denn die Kurven $X(\xi, \eta) = \text{const}$ sind die Projektionen der Niveaulinien der Fläche $\zeta = X(\xi, \eta)$, und das konjugierte Potential $Y(\xi, \eta)$ liefert in den Kurven $Y(\xi, \eta) = \text{const}$ die Projektionen der Falllinien.

Man hat also so vorzugehen: *Zunächst werden die Sattelpunkte a von $h(x)$, d. h. die Punkte, wo $h'(x) = 0$ ist, festgestellt. Dann werden die durch diese Punkte hindurchgehenden Falllinien $Y(x) = Y(a)$ konstruiert, und zwar diejenigen, die in die Täler hinunterführen. Schliesslich wird untersucht, ob der ursprüngliche Integrationsweg sich so deformieren lässt, dass er längs solcher Falllinien verläuft*).*

*) In der technischen Literatur wird bei Anwendung der Passmethode oft besonders betont, dass X sich auf der Falllinie am schnellsten von $X(a)$ entfernt und daher $h(a) - h(x)$ schon in geringem Abstand von a gross, also $e^{-s[h(a) - h(x)]}$ klein sei, so dass aus diesem Grund der Beitrag der weiter von a entfernten Wegteile vernachlässigt werden könne. Wie wir aus Satz 1 und auch aus 3. 1 wissen, hängt aber das asymptotische Verhalten des Integrals auf jeden Fall ausschliesslich von dem Verhalten von $g(x)$ und $h(x)$ in einer beliebig kleinen Umgebung von $x = a$ ab, so dass es völlig belanglos ist, ob $h(a) - h(x)$ rasch oder langsam wächst.

Im einzelnen kann die Methode je nach den besonderen Verhältnissen verschiedene Ausgestaltungen erfahren. So kann der Weg über *mehrere* Sattelpunkte oder auch nur über einen *Teil* der Fallinie gehen (nicht über den Punkt a selbst), da es ja genügt, dass $h(a) - h(x)$ reell und zunehmend ist. Liegt der Integrationsweg fest, so ist er in Einzelstücke zu zerlegen, die in einem Sattelpunkt beziehungsweise in dem Punkt, wo X seinen grössten Wert annimmt, anfangen. Die Einzelintegrale sind dann nach Satz 1 auszuwerten. Dabei ist besonders darauf zu achten, dass in jedem einzelnen Integral für die Funktion (6) derjenige Zweig ausgewählt werden muss, der τ auf dem betreffenden Weg positiv macht.

§ 6. Beispiele

Das Beispiel, durch das die Methode der Sattelpunkte hauptsächlich bekannt geworden ist, ist die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktionen. Da diese sich in zahlreichen Lehrbüchern findet, geben wir hier zwei andere Beispiele.

1. Die Stirlingsche Reihe für $\Gamma(s)$

Wir leiten die Stirlingsche Reihe für $\Gamma(s)$ [nicht wie in 3. 2. 3 für $\log \Gamma(s)$] ab, wobei wir uns auf reelle $s > 0$ beschränken³¹. Aus

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{s-1} dz$$

ergibt sich durch die Substitution $z = sx$:

$$\Gamma(s) = s^s e^{-s} G(s) \quad \text{mit} \quad G(s) = \int_0^{\infty} e^{s(\log x - x + 1)} \frac{1}{x} dx.$$

$h(x) = \log x - x + 1$ ist auf dem Integrationsweg reell, aber es ist nicht $h(x) \leq h(0)$. Ausserdem ist weder $g(x) = 1/x$ noch $h(x)$ in $x = 0$ holomorph. Durch Nullsetzen von $h'(x) = (1/x) - 1$ finden wir den einzigen Sattelpunkt $a = 1$, in den wegen $h''(a) = -1$ zwei Berge und zwei Täler einmünden. Es ist

$$h(\xi + i\eta) = \log(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} + i \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} - \xi - i\eta + 1,$$

also

$$Y(\xi, \eta) = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} - \eta.$$

Es ist $Y(a) = Y(1, 0) = 0$, so dass die Gleichung der Fallinien durch a lautet:

$$\operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} = \eta.$$

Eine davon ist die Gerade $\eta = 0$, und da auf ihr $X(\xi, \eta) = (1/2) \log(\xi^2 + \eta^2) - \xi + 1$

von $a = (1, 0)$ aus auf beiden Seiten fällt, so ist sie die in die Täler führende, die wir brauchen. (Um die Gestalt der anderen, die auf die Berge führt, brauchen wir uns nicht zu kümmern.) Es zeigt sich also, dass wir den Weg nicht zu deformieren brauchen, dass wir ihn aber in zwei von $a = 1$ auslaufende Stücke zerlegen müssen:

$$G(s) = \int_1^{\infty} e^{s(\log x - x + 1)} \frac{1}{x} dx - \int_1^0 e^{s(\log x - x + 1)} \frac{1}{x} dx.$$

Wir haben nun gemäss 3.5 (6)

$$\begin{aligned} \tau &= [-h(x)]^{1/2} = (-\log x + x - 1)^{1/2} = [x - 1 - \log(1 + (x - 1))]^{1/2} \\ &= (x - 1) \left(\frac{1}{2} - \frac{x - 1}{3} + \dots \right)^{1/2} \end{aligned}$$

zu setzen und für jedes Teilintegral den Zweig auszusuchen, der τ positiv macht. Da in dem ersten Integral $x - 1 \geq 0$, im zweiten $x - 1 \leq 0$ ist, müssen wir im ersten für die Wurzel $[(1/2) - (x - 1)/3 + \dots]^{1/2}$ den positiven, im zweiten den negativen Wert wählen. Statt dessen können wir auch im zweiten Integral die positive Wurzel nehmen und ihr ein Minuszeichen vorsetzen. Dann ist nach 3.5 (8)

$$G(s) \approx \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{s^{(\nu+1)/2}} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{s^{(\nu+1)/2}},$$

wobei die Koeffizienten sich nach 3.5 (9) so bestimmen:

$$\begin{aligned} a_{\nu} &= \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{x-1}{[-h(x)]^{1/2}} \right)^{\nu+1} \right] \right\}_{x=1}, \\ b_{\nu} &= \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{x-1}{-[-h(x)]^{1/2}} \right)^{\nu+1} \right] \right\}_{x=1}. \end{aligned}$$

Für ungerades ν ist $a_{\nu} = b_{\nu}$, so dass die entsprechenden Glieder sich aufheben, während für gerades ν sich $a_{\nu} = -b_{\nu}$ ergibt. Also ist

$$G(s) \approx \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{2\mu} \frac{\Gamma(\mu + (1/2))}{s^{\mu + (1/2)}} \quad \text{für } s \rightarrow +\infty$$

mit

$$\begin{aligned} a_{2\mu} &= \frac{1}{(2\mu)!} \left\{ \frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{x-1}{(x-1-\log x)^{1/2}} \right)^{2\mu+1} \right] \right\}_{x=1} \\ &= \frac{1}{(2\mu)!} \left\{ \frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \left[x^{-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x-1}{3} + \dots \right)^{-\mu - (1/2)} \right] \right\}_{x=1}. \end{aligned}$$

Für $\Gamma(s)$ führt dies zu der Entwicklung

$$\Gamma(s) \approx \sqrt{2\pi} s^s e^{-s} \left(\frac{1}{s^{1/2}} + \frac{1}{12} \frac{1}{s^{3/2}} + \frac{1}{288} \frac{1}{s^{5/2}} + \dots \right) \quad \text{für } s \rightarrow \infty.$$

Vergleiche hierzu die Herleitungen in 3.2.3 und 6.4.4.

2. Die Fresnelschen Integrale

Diese haben wir schon einmal in 3.4.2.c, zu einem komplexen Integral zusammengefasst, nach der Methode von 3.3 behandelt. Wir werden jetzt die asymptotische Entwicklung nach der Passmethode ableiten³² und dabei sehen, dass die frühere Methode die zugkräftigere ist. In der Bezeichnung von 3.4.2.c handelt es sich um das Integral

$$\frac{h(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} = \int_0^1 e^{s i x^2} dx.$$

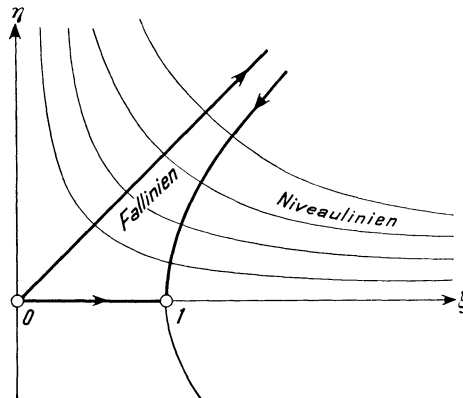
In diesem Fall ist $h(x) = i x^2$, $h'(x) = 2 i x$, so dass der einzige Sattelpunkt $a = 0$ ist; wegen $h''(a) = 2 i \neq 0$ münden in ihm zwei Berge und zwei Täler. Aus

$$h(\xi + i \eta) = i (\xi + i \eta)^2 = -2 \xi \eta + i (\xi^2 - \eta^2)$$

folgt

$$X(\xi, \eta) = -2 \xi \eta, \quad Y(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta^2,$$

so dass die Falllinien der Fläche $\zeta = X(\xi, \eta)$ durch $\xi^2 - \eta^2 = \text{const}$ gegeben sind. Das sind gleichseitige Hyperbeln sowie (für $\text{const} = 0$) die Winkelhalbierenden der Achsen. Durch den Punkt $a = (0, 0)$ gehen nur die letzteren. Da $X(0, 0) = 0$ ist, kommen für den Abstieg nur die Gebiete in Frage, wo X negativ, also $\xi \eta > 0$ ist, das heisst der erste und dritte Quadrant. Der Sattelpunkt $a = 0$



Figur 12

liegt bereits auf dem gegebenen Integrationsweg. Um von 0 nach 1 auf einem neuen Weg zu gelangen, auf dem $h(a) - h(x) = -h(x)$ dauernd reell und positiv ist, gehen wir auf der Falllinie $\eta = \xi$ im ersten Quadranten von 0 nach ∞ und von dort auf der Falllinie $\xi^2 - \eta^2 = 1$ zum Punkt 1. Dass das Integral über diesen Weg gleich dem über die Strecke von 0 nach 1 ist, folgt daraus, dass das Integral über ein zwischen die Winkelhalbierende und die Hyperbel einge-

schaltetes Verbindungsstück gegen 0 konvergiert, wenn dessen Endpunkte gegen ∞ streben. (x liegt dabei nämlich in der Nähe der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten, $s i x^2$ also für $s > 0$ in der Nähe der negativ reellen Achse, so dass $e^{s i x^2} \rightarrow 0$.) Das Integral über den ersten Wegteil lässt sich explizit ausrechnen: Auf ihm ist $s^{1/2} x = (1+i)u$ ($0 \leq u < \infty$) für $s > 0$, also

$$\int_0^{(1+i)\infty} e^{s i x^2} dx = s^{-1/2} \int_0^\infty e^{-2u^2} (1+i) du = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{-1/2}.$$

Der Endpunkt $x=1$ des zweiten Wegteils ist zwar kein Sattelpunkt, aber X steigt (aus der Tiefe von $-\infty$ her kommend) gegen den Wert 0 in $x=1$, was nach der Bemerkung am Schluss von 3.5 für die Anwendung der Methode genügt. Wir schreiben daher für den Beitrag des zweiten Wegteils

$$-\int_1^{(1+i)\infty} e^{s i x^2} dx = -e^{is} \int_1^{(1+i)\infty} e^{-s i(1-x^2)} dx.$$

Hierin ist, weil x auf der Hyperbel $\xi^2 - \eta^2 = 1$ läuft:

$$i(1-x^2) = i(1-\xi^2-2i\xi\eta+\eta^2) = 2\xi\eta,$$

also positiv reell. Gemäss 3.5 (6) haben wir

$$\tau = [i(1-x^2)]^{1/2}$$

zu setzen (τ positiv). Da sich in diesem Fall die inverse Funktion leicht ausrechnen lässt:

$$x = (1+i\tau^2)^{1/2}, \quad \frac{dx}{d\tau} = i\tau(1+i\tau^2)^{-1/2},$$

machen wir nicht von 3.5 (9) Gebrauch, sondern führen die Substitution unmittelbar aus:

$$-e^{is} \int_1^{(1+i)\infty} e^{-s i(1-x^2)} dx = -i e^{is} \int_0^\infty e^{-s\tau^2} \tau (1+i\tau^2)^{-1/2} d\tau.$$

Entwickelt man $(1+i\tau^2)^{-1/2}$ in die Binomialreihe und wendet Satz 5 [3.1] an, so erhält man dasselbe Resultat wie in 3.4 (11).

Wie man sieht, erfordert die Methode mehr Aufwand als die von 3.3, da man erst die Falllinien bestimmen und dann noch überlegen muss, wie sich der Integrationsweg auf solche Falllinien verlegen lässt. Enthielte das Integral noch eine allgemeine Funktion $g(x)$ wie in 3.4.2, so müsste deren Holomorphie und eine gewisse Beschränkung in einem sich ins Unendliche erstreckenden Gebiet vorausgesetzt werden, während wir in 3.4.2 nur die Holomorphie in einem beliebig schmalen, an $(0,1)$ anstossenden Dreieck brauchten.

§ 7. Asymptotische Entwicklungen nach anderen Funktionen als Potenzen

Bisher haben wir im wesentlichen für die Originalfunktion $F(t)$ eine Entwicklung nach Potenzen zugrunde gelegt und hieraus eine Entwicklung ebenfalls nach Potenzen für die Bildfunktion $f(s)$ abgeleitet. Eine Ausnahme bildete nur Satz 7 [3. 1], wo bei beiden Funktionen ein logarithmischer Faktor hinzutrat, und weiterhin der Fall, dass das \mathfrak{L} -Integral nicht bei 0, sondern an einer Stelle a begann, wodurch bei der Bildfunktion der Faktor e^{-as} entstand. Es wäre nun für die Erfassung weiterer Singularitätentypen wünschenswert, sowohl bei der Original- als der Bildfunktion auch Entwicklungen nach ganz anderen Funktionen zugrunde legen zu können. Hier ist für die Forschung noch ein weites Feld. Wir wollen als ein *Beispiel*, nach dessen Muster man weitere bilden könnte, eine Asymptotik anführen, bei der die Originalfunktion im Nullpunkt eine *Singularität vom Typus* $e^{-1/t}$ haben kann.

Dazu gehen wir von der Korrespondenz

$$(1) \quad \mathfrak{L}\{e^{-1/t} t^{-\alpha-1}\} = 2 s^{\alpha/2} K_{\alpha}(2\sqrt{s}) \quad (\Re s > 0)$$

aus, durch welche die Besselsche Funktion K_{α} für alle (komplexen) α definiert werden kann und aus der man leicht ersieht, dass $K_{-\alpha} = K_{\alpha}$ ist*). Nun hatten wir in 3. 2 (13) für $K_{\alpha}(s)$ die asymptotische Entwicklung

$$(2) \quad K_{\alpha}(s) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \nu + (1/2))}{2^{\nu} \nu! \Gamma(\alpha - \nu + (1/2))} s^{-\nu - (1/2)}$$

für $s \rightarrow \infty$ in $|\arcs| < 3/2\pi$ abgeleitet, allerdings nur für $\Re\alpha > -1/2$. Da aber $K_{\alpha}(s)$ und, wie man aus Anhang I, Nr. 3 entnehmen kann**), bei ganzzahligem ν auch

$$\frac{\Gamma(\alpha + \nu + (1/2))}{\Gamma(\alpha - \nu + (1/2))}$$

*) Durch die Substitution $t = 1/(sv)$ erhält man zunächst für positiv reelle s und damit nachträglich im ganzen Konvergenzbereich:

$$\begin{aligned} 2 K_{\alpha}(2\sqrt{s}) &= s^{-\alpha/2} \int_0^{\infty} e^{-st - (1/t)} t^{-\alpha-1} dt = s^{-\alpha/2} \int_0^{\infty} e^{-(1/v) - sv} (sv)^{\alpha+1} \frac{dv}{s v^2} \\ &= s^{\alpha/2} \int_0^{\infty} e^{-sv - (1/v)} v^{\alpha-1} dv = 2 K_{-\alpha}(2\sqrt{s}). \end{aligned}$$

**) Es ist $\Gamma((1/2) + z) \Gamma((1/2) - z) = \pi/\cos\pi z$, also

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha + \nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - \nu\right) &= \frac{\pi}{\cos(\alpha + \nu)\pi} = \frac{\pi}{\cos\alpha\pi \cos\nu\pi} \quad (\nu \text{ ganzzahlig}), \\ \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - \nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + \nu\right) &= \frac{\pi}{\cos(\alpha - \nu)\pi} = \frac{\pi}{\cos\alpha\pi \cos\nu\pi}, \end{aligned}$$

und folglich $\Gamma((1/2) + \alpha + \nu) \Gamma((1/2) - \alpha - \nu) = \Gamma((1/2) + \alpha - \nu) \Gamma((1/2) - \alpha + \nu)$.

eine gerade Funktion von α ist, gilt die Entwicklung für alle α . Setzen wir noch $-\alpha - 1 = \lambda$, so ergibt sich aus (1) und (2) für alle λ :

$$(3) \quad \mathfrak{L}\{e^{-1/t} t^\lambda\} \approx \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{s}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\lambda + \nu - (1/2))}{4^\nu \nu! \Gamma(-\lambda - \nu - (1/2))} s^{-(\lambda/2) - (\nu/2) - (3/4)}$$

für $s \rightarrow \infty$ in $|\arcs s| < 3\pi$. Das erste Glied liefert:

$$(4) \quad \mathfrak{L}\{e^{-1/t} t^\lambda\} \sim \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\lambda/2) - (3/4)} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \text{ in } |\arcs s| < 3\pi.$$

Wir beweisen nun folgenden Satz von Abelscher Art:

Satz 1. Wenn $\mathfrak{L}\{F\} = f(s)$ eine Konvergenzhalbebene besitzt und wenn

$$F(t) \sim c e^{-1/t} t^\lambda \quad (\lambda \text{ beliebig}) \quad \text{für } t \rightarrow 0,$$

so gilt:

$$f(s) \sim c \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\lambda/2) - (3/4)} \quad \text{für } s \text{ (reell)} \rightarrow +\infty.$$

Beweis: Mit $F(t) = c e^{-1/t} t^\lambda [1 + \varepsilon(t)]$, wo $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$, ergibt sich

$$f(s) = c \int_0^\infty e^{-st - (1/t)} t^\lambda dt + c \int_0^T e^{-st - (1/t)} t^\lambda \varepsilon(t) dt + c \int_T^\infty e^{-st - (1/t)} t^\lambda \varepsilon(t) dt,$$

also nach (4):

$$\begin{aligned} f(s) &= c \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\lambda/2) - (3/4)} (1 + o(1)) + c \int_0^T e^{-st - (1/t)} t^\lambda \varepsilon(t) dt \\ &\quad + c e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su - [1/(T+u)]} (T+u)^\lambda \varepsilon(T+u) du. \end{aligned}$$

Wählt man T so klein, dass $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$ für $0 \leq t \leq T$ ist, so erhält man unter Verwendung von Satz 1 [I 3.6] für das letzte Integral bei *reellem* s :

$$\begin{aligned} &|f(s) - c \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\lambda/2) - (3/4)}| \\ &\leq o(1) e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\Re\lambda/2) - (3/4)} + c \varepsilon \int_0^\infty e^{-st} e^{-1/t} t^{\Re\lambda} dt + e^{-sT} o(1) \\ &= o(1) e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\Re\lambda/2) - (3/4)} + c \varepsilon \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\Re\lambda/2) - (3/4)} (1 + o(1)) + e^{-sT} o(1) \end{aligned}$$

oder

$$\left| \frac{f(s)}{\sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\lambda/2) - (3/4)}} - c \right| \leq o(1) + c \varepsilon (1 + o(1)) + o(1) e^{-sT + 2\sqrt{s}} s^{(\Re\lambda/2) + (3/4)}.$$

Für alle hinreichend grossen positiven s ist die rechte Seite $\leq K\varepsilon$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung: Für komplexe s ist der Beweis nicht durchführbar. Bei der Abschätzung des Integrals \int_0^T würde der Faktor $e^{-2\sqrt{\Re s}}$ und bei der Division

durch $|\sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{s}} s^{-(\lambda/2) - (3/4)}|$ der Faktor $e^{-2(\sqrt{\Re s} - \Re \sqrt{s})}$ auftreten. Mit $s = r e^{i\varphi}$ ist $\sqrt{\Re s} - \Re \sqrt{s} = r^{1/2} [\cos^{1/2} \varphi - \cos(\varphi/2)]$. In $0 < |\varphi| \leq \pi/2$ ist $\cos^{1/2} \varphi < \cos(\varphi/2)$, also strebt der Faktor gegen ∞ .

Aus Satz 1 und Formel (1) für $-\alpha - 1 = \lambda_\nu$ folgt nun nach dem Schema des «Idealfalls» (siehe 2.5):

Satz 2³³. Wenn $\mathfrak{L}\{F\} = f(s)$ eine Konvergenzhalbebene hat und $F(t)$ die asymptotische Entwicklung

$$(5) \quad F(t) \approx e^{-1/t} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\lambda_\nu} \quad (\Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \dots) \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

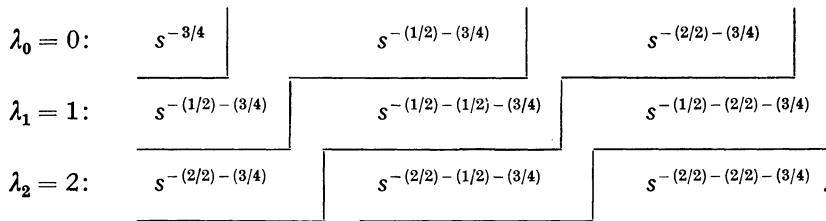
besitzt, so gilt für $f(s)$:

$$(6) \quad f(s) \approx 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu s^{-(\lambda_\nu+1)/2} K_{-\lambda_\nu-1}(2\sqrt{s}) \quad \text{für } s \text{ (reell)} \rightarrow +\infty.$$

(Statt $K_{-\lambda_\nu-1}$ kann auch $K_{\lambda_\nu+1}$ geschrieben werden.)

An diesem Beispiel sieht man, wie wertvoll es ist, dass man in dem «Idealfall» bei dem benutzten Abelschen Satz mit χ_ν statt φ_ν (in der dortigen Bezeichnung) arbeiten darf. Man kann sich daher unter den möglichen *Vergleichsfunktionen* mit demselben asymptotischen Verhalten eine *möglichst einfache* aussuchen.

Bemerkung: Für praktische Rechnungen wird man in (6) die Funktionen $K_{-\lambda_\nu-1}(2\sqrt{s})$ wieder durch ihre asymptotischen Entwicklungen gemäss (2) bzw. (3) ersetzen. Wieviel Glieder von jeder einzelnen Entwicklung zu berücksichtigen sind, hängt, wenn man bis zu einer bestimmten Potenz geht, von der Grösse der λ_ν ab. Ist zum Beispiel $\lambda_\nu = \nu$, so enthalten die ersten Entwicklungen folgende Potenzen:



Will man z. B. die Potenzen bis $s^{-(2/2) - (3/4)}$ berücksichtigen, so muss man von der Entwicklung für $\nu = 0$ die drei ersten, von der für $\nu = 1$ die zwei ersten Glieder und von der für $\nu = 2$ das erste Glied mitnehmen.

§ 8. Asymptotische Entwicklung von komplexen Faltungsintegralen

In den vorhergehenden Paragraphen dieses Kapitels sind wir immer von der asymptotischen Entwicklung einer Originalfunktion $F(t)$ ausgegangen und haben auf die asymptotische Entwicklung ihrer Bildfunktion $f(s)$ geschlossen. Sind nun zwei Funktionen $F_1(t), F_2(t)$ mit ihren asymptotischen Entwicklungen, z. B. an der Stelle $t = 0$, gegeben, so kann man die asymptotische Entwicklung ihres Produktes durch gliedweise Multiplikation dieser Entwicklungen erhalten (siehe Hilfssatz 1 [6.6]). Dem Produkt $F(t) = F_1(t) F_2(t)$ entspricht aber in gewissen Funktionsräumen die komplexe Faltung der Bildfunktionen

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f_1(s-\sigma) f_2(\sigma) d\sigma$$

(siehe Satz 2 [I 6.4]). Man kann also nach den früheren Sätzen die asymptotische Entwicklung der Funktion $f(s)$ erhalten. (Funktionen dieser Bauart finden sich im 28. und 29. Kapitel behandelt.) Wir begnügen uns damit, dasjenige Ergebnis zu formulieren, das durch Anwendung des grundlegenden Satzes 1 [3.1] entsteht.

Satz 1. Für die Funktionen $F_1(t), F_2(t)$ seien folgende Integrale konvergent:

$$\int_0^\infty s^{-2x_1 t} |F_1(t)|^2 dt, \quad \int_0^\infty e^{-2x_2 t} |F_2(t)|^2 dt.$$

Es mögen die asymptotischen Entwicklungen gelten:

$$F_1(t) \approx \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu t^{\lambda_\nu} \quad (-1 < \Re\lambda_0 < \Re\lambda_1 < \dots),$$

$$F_2(t) \approx \sum_{\mu=0}^\infty b_\mu t^{\kappa_\mu} \quad (-1 < \Re\kappa_0 < \Re\kappa_1 < \dots) \quad \text{für } t \text{ (reell)} \rightarrow 0,$$

und es sei $\Re(\lambda_\nu + \kappa_\mu) > -1$. Wenn die durch gliedweise Multiplikation dieser Reihen und Ordnen nach ansteigenden Potenzen entstehende Reihe die Gestalt

$$\sum_{\varrho=0}^\infty c_\varrho t^{\sigma_\varrho} \quad (-1 < \Re\sigma_0 < \Re\sigma_1 < \dots)$$

hat, so besitzt die Funktion

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f_1(s-\sigma) f_2(\sigma) d\sigma \quad (x_2 < x < \Re s - x_1),$$

wo $f_1(s) = \mathfrak{L}\{F_1\}, f_2 = \mathfrak{L}\{F_2\}$, die asymptotische Entwicklung

$$f(s) \approx \sum_{\varrho=0}^\infty c_\varrho \frac{\Gamma(\sigma_\varrho + 1)}{s^{\sigma_\varrho + 1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \text{ in } |\arcs s| \leq \psi < \frac{\pi}{2}.$$

Ein einfaches Anwendungsbeispiel wird durch die *Derivierte beliebiger positiver Ordnung einer \mathcal{L} -Transformierten* geliefert. Diese wird nach 28.1 (8) definiert durch

$$D^\mu f(s) = \frac{e^{\pi i \mu} \Gamma(\mu + 1)}{2 \pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{f(\sigma)}{(s-\sigma)^{\mu+1}} d\sigma.$$

Hier ist

$$F_1(t) = e^{\pi i \mu} t^\mu, \quad f_1(s) = e^{\pi i \mu} \frac{\Gamma(\mu + 1)}{s^{\mu+1}}.$$

Man erhält also:

Satz 2³⁴. Es sei $f(s) = \mathcal{L}\{F\}$ und

$$F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\lambda_\nu} \quad (-1 < \Re \lambda_0 < \Re \lambda_1 < \dots) \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Dann ist

$$f(s) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\Gamma(\lambda_\nu + 1)}{s^{\lambda_\nu + 1}}$$

und

$$D^\mu f(s) \approx e^{\pi i \mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\Gamma(\lambda_\nu + \mu + 1)}{s^{\lambda_\nu + \mu + 1}} \quad \text{für } s \rightarrow \infty \text{ in } |\arg s| \leq \psi < \frac{\pi}{2}.$$

Man vergleiche hierzu Satz 2 [3. 1], der den Spezialfall $\mu = n = \text{ganzzahlig}$ darstellt.