# V. Ein polynomialer Algorithmus zur Bestimmung unabhängiger Repräsentantensysteme

von Ernst Specker

## 1. Einleitung

Es sei $\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$ eine Folge von endlichen Mengen; diese Mengen seien Teilmengen der endlichen Menge M, auf welcher eine "Unabhängigkeitsstruktur" gegeben ist. (Zu diesem Begriff - der später definiert wird - kann man etwa das Buch von Mirsky (Mirsky 1971) vergleichen.)
Eine Folge $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ ist ein unabhängiges Repräsentantensystem von $\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$, genau wenn gilt

(1) $a_i \in S_i$ $(i=1,\ldots,m)$

(2) $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ $(i,j=1,\ldots,m)$

(3) Die Menge $\{a_1,\ldots,a_m\}$ ist im Sinne der gegebenen Struktur unabhängig.

Eine der einfachsten Unabhängigkeitsstrukturen ist jene, bei der alle Mengen unabhängig sind. Der Begriff "unabhängiges Repräsentantensystem" fällt dann zusammen mit dem Begriff "Repräsentantensystem" und es gilt dafür bekanntlich der folgende Satz (Frobenius 1917, König 1916, P. Hall 1935):
Zu der Folge $\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$ gibt es entweder ein Repräsentantensystem oder eine Teilmenge T von $\{1,2,\ldots,m\}$, so dass die Anzahl der Elemente von $\bigcup_{i\in T} S_i$ kleiner als die Anzahl $|T|$ der Elemente von T ist (in welchem Fall trivialerweise kein Repräsentantensystem existiert).

(M. Hall 1956) hat einen polynomialen Algorithmus angegeben, welcher entweder ein Repräsentantensystem berechnet oder aber eine Teilmenge T von $\{1,2,\ldots,m\}$ mit den genannten Eigenschaften.

Der im folgenden gegebene Algorithmus ist eine Uebertragung davon auf das Problem unabhängiger Repräsentantensysteme bei beliebiger Unabhängigkeitsstruktur. Entsprechend dem Satz von Rado (Rado 1942) liefert er entweder ein unabhängiges Repräsentantensystem oder aber eine Teilmenge T von $\{1,2,\ldots,m\}$, so dass jede unabhängige Teilmenge von $\bigcup_{i\in T} S_i$ weniger als $|T|$ Elemente besitzt (in welchem Fall trivialerweise kein unabhängiges Repräsentantensystem existiert). Der Algorithmus benötigt eine Schrittzahl der Grössenordnung $O(m^2\cdot|M|\cdot s_0)$. Dabei ist $s_0$ eine Schranke für die grundlegenden mengentheoretischen Operationen sowie für die Entscheidung, ob eine Menge unabhängig ist oder nicht. In allen bekannten Fällen scheint $s_0$ polynomial beschränkt in $|M|$ zu sein.

Wie im klassischen Fall lässt sich aus diesem Algorithmus sehr leicht auch ein Algorithmus für das folgende allgemeinere Problem entnehmen:

Es sei $\langle S_1,S_2,\ldots,S_n\rangle$ eine Folge von Mengen, welche Teilmengen der Menge M mit der Unabhängigkeitsstruktur U sind. Es wird dann ein teilweises unabhängiges Repräsentantensystem von maximaler Länge gesucht, d.h. eine Folge $\langle a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\rangle$ mit $i_1<i_2<\ldots<i_k$ und

(1) $a_{i_j} \in S_{i_j}$ $(j=1,\ldots,k)$

(2) $a_{i_h} \neq a_{i_j}$ für $h \neq j$ $(h,j=1,\ldots,k)$

(3) Die Menge $\{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\}$ ist unabhängig

(4) Für k' mit k<k' existiert keine solche Folge mit (1), (2), (3).

Die Möglichkeit der Erweiterung des Algorithmus beruht auf dem folgenden Satz:

Sei $\langle S_1,\ldots,S_n\rangle$ eine Folge von Mengen, welche Teilmengen der Menge M mit der Unabhängigkeitsstruktur U sind. Besitzt dann die Folge $\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$ ein unabhängiges Repräsentantensystem, besitzt aber keine der Folgen $\langle S_1,\ldots,S_m,S_{m+i}\rangle$ für $1\leq i\leq n-m$ ein unabhängiges Repräsentantensystem, so enthält die Folge $\langle S_1,\ldots,S_n\rangle$ überhaupt keine Teilfolge der Länge m+1 mit unabhängigem Repräsentantensystem.

Der "klassische" Spezialfall dieses Satzes ist schon recht lange bekannt, man vergleiche dazu (Mirsky 1971), worin sich Hinweise auf Arbeiten von Edmonds und Fulkerson sowie Mirsky und H. Perfect finden. Für den allgemeinen Fall hat man mich auf die Arbeit (Burger 1975) hingewiesen.

Was nun konkrete Anwendungen des verallgemeinerten Algorithmus betrifft, so dürfte folgendes eines der einfachsten Beispiele sein:

Es sei M eine endliche Menge, s eine Teilmenge von M, J eine natürliche Zahl und $\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$ eine Folge von Teilmengen von M. Gesucht wird ein Repräsentantensystem $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ von $\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$ mit der Eigenschaft, dass mindestens j der Elemente der Folge $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ zu J gehören.

Um dieses Problem in den allgemeinen Rahmen einzuordnen, wird die Unabhängigkeitsstruktur folgendermassen definiert: Eine Teilmenge C von M ist genau dann unabhängig, wenn C höchstens m-j Elemente der Menge $M\setminus J$

enthält:
(Die - in Abschnitt 2 formulierten - Bedingungen für Unabhängigkeitsstrukturen sind leicht nach nachzuprüfen.)

Neben dem hier verallgemeinerten Algorithmus von M. Hall gibt es für den klassischen Fall einen Algorithmus, der mit kleinerer Schrittzahl auskommt (Hopcroft und Karp 1971). Die Frage, ob auch dieser Algorithmus sich mit Vorteil auf den allgemeineren Fall übertragen lässt, muss offen bleiben. Er ist in anderer Richtung auf ein Problem der Graphentheorie verallgemeinert worden (Kameda und Munro 1971), ein Problem, welches sich anscheinend nicht als Spezialfall der hier betrachteten Problemklasse auffassen lässt.

## 2. Unabhängigkeitsstrukturen

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:
Ist $A$ eine endliche Menge, so ist $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$.

Sind $A$, $B$ Mengen, so ist $A \setminus B$ die Menge der Elemente von $A$, welche nicht zu $B$ gehören.

Es sei $M$ eine endliche Menge. Eine Menge $U$ von Teilmengen von $M$ ist eine Unabhängigkeitsstruktur (über $M$), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind

(U1) Die leere Menge gehört zu $U$.

(U2) Ist $A \subset B$ und $B \in U$, so ist $A \in U$.

(U3) Ist $A \in U$, $B \in U$ und gilt

$$|A| = |B| + 1,$$

so gibt es ein Element $c$ mit $c \in A \setminus B$, so dass

$$(B \cup \{c\}) \in U.$$

Das typische Beispiel einer Unabhängigkeitsstruktur ist das folgende: Sei $M$ eine endliche Teilmenge einer Vektorraumes $V$. Eine Teilmenge $A$ von $M$ gehört genau dann zu $U$, wenn $A$ im Sinne der linearen Algebra unabhängig ist. Die Bedingungen $(U_1)$ und $(U_2)$ folgen unmittelbar aus der Definition. Die Bedingung (U3) ist eine Form des Austauschsatzes von Steinitz.

Die folgenden Hilfssätze folgen alle aus (U1), (U2), (U3). Für den Fall der linearen Algebra sind die Beweise besonders leicht zu führen.

Definition Ist $A \in U$, so sei $\bar{A}$ die folgende Teilmenge von $M$:

$$c \in \bar{A}, \text{ genau wenn } c \in A \text{ oder}$$
$$(A \cup \{c\}) \notin U \text{ (d.h. } A \cup \{c\} \text{ "abhängig")}$$

<u>Lemma 2.1</u> Sind A,B in U und ist $A \subset B$, so ist $\bar{A} \subset \bar{B}$.

<u>Lemma 2.2</u> Ist A in U, so enthält $\bar{A}$ keine Teilmenge mit $|A|+1$ Elementen, welche zu U gehört.

<u>Lemma 2.3</u> Ist A in U und $c \in \bar{A}$, so gibt es eine kleinste Teilmenge B von A, so dass $c \in \bar{B}$. (D.h. es ist $B \subset A$ und $c \in \bar{B}$ und für alle Teilmengen C von A mit $c \in \bar{C}$ gilt $B \subset C$).

<u>Definition</u> Ist A in U und $c \in \bar{A}$, so sei $D(A,c)$ die nach 2.3 existierende minimale Menge.

<u>Lemma 2.4</u> Es ist $c \in \overline{D(A,c)}$, $D(A,c) \subset A$.

<u>Lemma 2.5</u> Sind A,B Elemente von U und ist $D(A,c) \subset B$, so ist

$$D(A,c) = D(B,c).$$

<u>Definition</u> Eine Folge $\langle a_1,\ldots,a_k \rangle$ von Elementen von M ist unabhängig, wenn $a_1,\ldots,a_k$ alle verschieden sind und die Menge $\{a_1,\ldots,a_k\}$ zu U gehört.

Mit einer Folge ist jede ihrer permutierten unabhängig.

<u>Lemma 2.6</u> Es sei $A \in U$, die Elemente $a_1,\ldots,a_k$ gehören zu $\bar{A}$ und $\langle a_1,\ldots,a_k \rangle$ sei unabhängig; ferner sei $a_0 \notin \bar{A}$. Dann ist $\langle a_0, a_1,\ldots,a_k \rangle$ unabhängig.

<u>Lemma 2.7</u> Ist $\langle a_0, a_1,\ldots,a_k \rangle$ unabhängig und ist

$$a_0 \in D(\{a_0,\ldots,a_k\}, a_0'),\text{ so}$$

ist $\langle a_0', a_1,\ldots,a_k \rangle$ unabhängig.

(Man vergegenwärtige sich die Bedeutung dieses Satzes für den Fall, dass die Unabhängigkeitsstruktur durch einen Vektorraum gegeben ist!)

## <u>3. Der Satz von Rado</u>

Es sei $\langle S_1, S_2,\ldots,S_n \rangle$ eine Folge von Teilmengen der Menge M mit der Unabhängigkeitsstruktur U. Nach dem Satz von Rado gibt es dann entweder ein unabhängiges Repräsentantensystem von $\langle S_1,\ldots,S_n \rangle$ oder es gibt eine Teilmenge T von $\{1,2,\ldots,n\}$, sodass die Menge $\bigcup_{i \in T} S_i$ keine unabhängige

Teilmenge mit $|T|$ Elementen besitzt. Der folgende induktive Beweis ist so konzipiert, dass sich ihm leicht ein Algorithmus entnehmen lässt, der dieses Repräsentantensystem oder diese Teilmenge berechnet. Die Induktionsverankerung ergibt sich daraus, dass eine Menge $S_1$ entweder eine einzahlige unabhängige Menge enthält oder nicht. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ ein unabhängiges Repräsentantensystem von $\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$ sei, d.h. es sei

$$a_i \in S_i \quad (i=1,\ldots,m) \text{ und}$$

die Folge $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ sei unabhängig.

Es wird dann entweder ein unabhängiges Repräsentantensystem von $\langle S_1,\ldots,S_m,S_{m+1}\rangle$ konstruiert oder eine Teilmenge T von $\{1,\ldots,m+1\}$ mit der verlangten Eigenschaft.

Zur Vereinfachung der Bezeichnung nennen wir die (m+1)te Menge nicht $S_{m+1}$ sondern $S_o$, und es ist dann die folgende Aufgabe zu lösen:

Zum unabhängigen Repräsentantensystem $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ von $\langle S_1,\ldots,S_m\rangle$ ist entweder ein unabhängiges Repräsentantensystem $\langle a_o,\ldots,a_m\rangle$ von $\langle S_o,\ldots,S_m\rangle$ zu finden oder eine Teilmenge T von $\{0,1,\ldots,m\}$ so dass die Menge $\bigcup_{i\in T} S_i$ keine unabhängige Teilmenge mit $|T|$ Elementen enthält.

Wir setzen $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$. Für a in A sei S(a) die Menge, die a repräsentiert, d.h. es sei $S(a_i)=S_i$, $i=1,\ldots,m$.

Zunächst wird rekursiv eine Folge $\langle A_1,A_2,\ldots\rangle$ von Teilmengen von A definiert.

$$A_1 = \bigcup_{y\in \bar{A}\cap S_o} D(A,y);$$

(wegen $D(A,c)\subset A$ ist $A_1\subset A$).

$$A_{i+1} = A_i \cup \bigcup_{y\in H_i} D(A,y), \text{ wobei}$$

$$H_i = \bigcup_{x\in A_i} (\bar{A}\cap S(x)) = \bar{A}\cap \bigcup_{x\in A_i} S(x)$$

(wegen $A_i\subset A$ und $D(A,y)\subset A$ ist $A_{i+1}\subset A$).

Es ist $A_1\subset A_2\subset \ldots\subset A$. n sei die kleinste Zahl k mit $A_{k+1}=A_k$. Es ist somit $A_n=A_{n+1}=A_{n+2}= \ldots$ .

<u>Bemerkung</u> Ist $\bar{A}\cap S_o$ leer, so ist auch $A_1$ (und die weiteren Mengen der Folgen) leer. In diesem Fall ist die Gültigkeit der Behauptung des Satzes von Rado leicht ersichtlich: Ist $S_o$ leer, so erfüllt die Menge $\{0\}$ die an T gestellten Bedingungen. Gibt es ein Element c, welches zu $S_o$ aber nicht zu $\bar{A}$ gehört, so ist die Folge $\langle c,a_1,\ldots,a_m\rangle$ ein unabhän-

giges Repräsentantensystem.

Lemma 3.1 Für alle i gilt

$$\bar{A} \cap (S_o \cup \bigcup_{x \in A_i} S(x)) \subset \bar{A}_{i+1}.$$

Beweis Sei $b \in \bar{A} \cap S_o$; dann ist $D(A,b) \subset A_1$ und somit

$$b \in \overline{D(A,b)} \subset \bar{A}_1 \subset \bar{A}_{i+1}.$$

Ist $b \in \bar{A} \cap S(x)$ und $x \in A_i$, so ist $D(A,b) \subset A_{i+1}$ und $b \in \overline{D(A,b)} \subset \bar{A}_{i+1}$.

Lemma 3.2 Es ist

$$\bar{A} \cap (S_o \cup \bigcup_{x \in A_n} S(x)) \subset \bar{A}_n.$$

Dies folgt aus 3.1 und $A_{n+1} = A_n$.

Lemma 3.3 Es sei k eine natürliche Zahl mit $k \leq n$ und $b \in A_k \setminus A_{k-1}$ (dabei sei $A_o = \Lambda$).
Dann existiert eine Folge

$$\langle b_1, \ldots, b_k \rangle \text{ von Elementen von } A$$

und eine Folge

$$\langle c_o, \ldots, c_{k-1} \rangle \text{ von Elementen von } \bar{A},$$

so dass gilt

(1) $c_o \in \bar{A} \cap S_o$; $c_j \in \bar{A} \cap S(b_j)$ $(j=1,\ldots,k-1)$;

(2) $b_j \in A_j \setminus A_{j-1}$ $(j=1,\ldots,k)$, $b_k = b$;

(3) $b_{j+1} \in D(A,c_j)$ $(j=o,\ldots,k-1)$;

$b_{j+1} \notin D(A,c_h)$ für $h<j$ $(j=o,\ldots,k-1)$.

(dies ist nichts anderes als eine Auflösung der rekursiven Definition von $A_1, A_2, \ldots$.)

Beweis mit Induktion nach k

(I) $k=1$; wegen $b \in A_1$ existiert $c_o$ mit $c_o \in \bar{A} \cap S_o$ und $b \in D(A,c_o)$. Die Folgen $\langle b \rangle$ und $\langle c_o \rangle$ erfüllen dann die Bedingungen.

(II) Induktionsschritt von k zu k+1. Sei $b \in A_{k+1} \setminus A_k$. Wegen $b \in A_{k+1} \setminus A_k$ gibt es Elemente b' und c, so dass gilt:

(*) $b' \in A_k$, $c \in \bar{A} \cap S(b')$, $b \in D(A,c)$. Wäre $b' \in A_{k-1}$, so wäre $b \in A_k$ entgegen der Voraussetzung.
Es ist somit $b' \in A_k \setminus A_{k-1}$ und nach Induktionsannahme gibt es Folgen

$\langle b_1,\ldots,b_k\rangle$ (mit $b_k=b'$) und $\langle c_o,\ldots,c_{k-1}\rangle$, so dass die Bedingungen erfüllt sind. Wir setzen $b_{k+1}=b$ und $c_k=c$ (mit c aus *) und zeigen, dass die Bedingungen für $\langle b_1,\ldots,b_{k+1}\rangle$, $\langle c_o,\ldots,c_k\rangle$ erfüllt sind.

Neu nachzuprüfen sind die folgenden Aussagen

(a) $c_k\in\bar{A}\cap S(b_k)$.
Dies ist $c\in\bar{A}\cap S(b')$, was in (*) angenommen.

(b) $b_{k+1}\in A_{k+1}\setminus A_k$.
Dies gilt wegen $b=b_{k+1}$.

(c) $b_{k+1}\in D(A,c_k)$.
Dies ist $b\in D(a,c)$.

(d) $b_{k+1}\notin D(A,c_h)$ für $h<k$.
Wäre $b_{k+1}\in D(A,c_h)$ mit $h<k$, so wäre auf Grund von $c_h\in\bar{A}\cap S(b_h)$, $b_h\in A_h$ und $b_{k+1}=b$:
$b\in A_{h+1}\subset A_k$, was der Annahme $b\in A_{k+1}\setminus A_k$ widerspricht.

Wir treffen nun die folgende Fallunterscheidung:

I $S_o\cup\bigcup_{x\in A_n}S(x)\subset\bar{A}$

II $S_o\cup\bigcup_{x\in A_n}S(x)\not\subset\bar{A}$.

Im Falle I ist
$$\bar{A}\cap(S_o\bigcup_{x\in A_n}S(x))=S_o\cup\bigcup_{x\in A_n}S(x)$$
und auf Grund von 3.2 also
$$S_o\cup\bigcup_{x\in A_n}S(x)\subset\bar{A}_n.$$

Die $|A_n|+1$ Mengen $S_o$, $S(x)$, $x\in A_n$, besitzen eine Vereinigung, die als Teilmenge von $\bar{A}_n$ keine unabhängige Teilmenge mit $|A_n|+1$ Elementen besitzt (Lemma 2.2). Besteht somit T aus 0 und den Zahlen i mit $a_i\in A_n$, so erfüllt T die Bedingung, dass $\bigcup_{i\in T}S_i$ keine unabhängige Menge mit $|T|$ Elementen besitzt.

Im Falle II ist
$$S_o\cup\bigcup_{x\in A_n}S(x)\not\subset\bar{A},$$
und es sei c ein Element mit
$$c\in S_o\cup\bigcup_{x\in A_n}S(x)\text{ und }c\notin\bar{A}.$$

Ist $c \in S_o$, so ist $\langle c,a_1,\ldots,a_m\rangle$ ein Repräsentantensystem und wegen $c \notin \overline{\{a_1,\ldots,a_m\}}$ ist nach Lemma 2.6 die Folge $\langle c,a_1,\ldots,a_m\rangle$ unabhängig.
Ist anderseits $c \in \bigcup_{x\in A_n} S(x)$, so sei b ein Element, so dass

$$b \in A_n,\ c \in S(b),\ c \notin \bar{A}.$$

Es sei k ferner die kleinste Zahl i mit $b \in A_i$ (wobei wieder $A_o$ leer).
Es ist somit $b \in A_k \setminus A_{k-1}$. Es seien $\langle b_1,\ldots,b_k\rangle$ und $\langle c_o,\ldots,c_{k-1}\rangle$ mit $b=b_k$ die Folgen nach Lemma 3.3.

Wegen $b_j \in A_j \setminus A_{j-1}$ $(j=1,\ldots,k)$ sind $b_1,\ldots,b_k$ verschiedene Elemente von A. Ferner ist

$$c_o \in \bar{A} \cap S_o,\ c_j \in \bar{A} \cap S(b_j)\ (j=1,\ldots,k-1),\ c \in S(b_k).$$

Wir definieren das Repräsentantensystem für $\langle S_o,S_1,\ldots,S_m\rangle$ folgendermassen: $c_o$ für $S_o$;
$c_j$ für $S_j$ $(j=1,\ldots,k-1)$;
$c$ für $S_k$;
$a_h$ für $S_h$ $(h=k+1,\ldots,m)$.

Setzen wir $d_h=a_{k+h}$ $(h=1,\ldots,m-k=s)$, so bleibt noch zu zeigen, dass die Folge

$$\langle c_o,c_1,\ldots,c_{k-1},c,d_1,\ldots,d_s\rangle$$

unabhängig ist. Dieser Teil des Beweises geht nicht mehr in die Aufstellung des Algorithmus ein, sondern ist nur nötig für den Nachweis, dass er das gewünschte leistet.
Die Elemente $c_j$ $(j=o,\ldots,k-1)$ und $d_i$ $(i=1,\ldots,s)$ sind Elemente von $\bar{A}$, dagegen ist $c \notin \bar{A}$. Nach Lemma 2.6 genügt es somit zu zeigen, dass die Folge

$$\langle c_o,\ldots,c_{k-1},\ \cancel{c}\ ,\ d_1,\ldots,d_s\rangle$$

unabhängig ist.
Die Elemente $b_1,\ldots,b_k$ gehören zu den Mengen $S(b_1),\ldots,S(b_k)$, die Elemente $d_1,\ldots,d_s$ zu den restlichen Mengen $S_1,\ldots,S_m$. Die Folge

$$\langle b_1,\ldots,b_k,d_1,\ldots,d_s\rangle$$

ist somit eine Permutation der Folge $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ und daher unabhängig.
Wir zeigen mit Induktion nach h:
Ist

$$\langle b_1,\ldots,b_{k-h},c_{k-h},c_{k-h+1},\ldots,c_{k-1},d_1,\ldots,d_s\rangle$$

unabhängig, so auch

$$\langle b_1,\ldots,b_{k-h-1},c_{k-h-1},c_{k-h},\ldots,c_{k-1},d_1,\ldots,d_s\rangle.$$

Es wird somit im Falle k=3 etwa betrachtet:

$\langle b_1, b_2, b_3, d_1, \dots, d_s \rangle$,

$\langle b_1, b_2, c_2, d_1, \dots, d_s \rangle$,

$\langle b_1, c_1, c_2, d_1, \dots, d_s \rangle$,

$\langle c_o, c_1, c_2, d_1, \dots, d_s \rangle$.

Es ist

$$b_{k-h} \in D(A, c_{k-h-1});$$

dagegen ist für j $(1 \leq j)$:

$$b_{k-h+j} \notin D(A, c_{k-h-1}).$$

Somit ist

$$D(A, c_{k-h-1}) \subset \{b_1, \dots, b_{k-h}, d_1, \dots, d_s\}$$

und daher

$$D(A, c_{k-h-1}) \subset \{b_1, \dots, b_{k-h}, c_{k-h}, \dots, c_{k-1}, d_1, \dots, d_s\}.$$

Setzen wir

$$C = \{b_1, \dots, b_{k-h}, c_{k-h}, \dots, c_{k-1}, d_1, \dots, d_s\}$$

so ist C unabhängig und $D(A, c_{k-h-1}) \subset C$. Nach Lemma 2.5 ist daher

$$D(A, c_{k-h-1}) = D(C, c_{k-h-1}).$$

Wegen $b_{k-h} \in D(A, c_{k-h-1})$ und nach Lemma 2.7 ist daher

$$\langle b_1, \dots, b_{k-h-1}, c_{k-h-1}, \dots, c_{k-1}, d_1, \dots, d_s \rangle$$

unabhängig.

## 4. Der Algorithmus

Es sei, wie im letzten Abschnitt, M eine endliche Menge, U eine Unabhängigkeitsstruktur über M, $\langle S_o, S_1, \dots, S_m \rangle$ eine Folge von Teilmengen von M und $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ ein unabhängiges Repräsentantensystem von $\langle S_1, \dots, S_m \rangle$. Dem im letzten Abschnitt gegebenen Beweis des Satzes von Rado lässt sich leicht ein Algorithmus entnehmen, der entweder ein unabhängiges Repräsentantensystem der ganzen Folge $\langle S_o, S_1, \dots, S_m \rangle$ liefert oder aber eine Teilmenge T von $\{0, \dots, m\}$, so dass die Menge $\bigcup_{i \in T} S_i$ keine unabhängige Menge mit $|T|$ Elementen enthält (in welchem Fall dann kein solches Repräsentantensystem existiert). Dieser Algorithmus durchläuft etwa die folgenden Etappen (und zwar jede höchstens einmal):

(1) Zu $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ wird die Menge $\bar{A}$ gebildet.

(2) Es wird die Folge $\langle A_1, A_2, \dots \rangle$ gebildet, und zwar bis die Zahl n erreicht ist, für welche (zum ersten Mal) gilt $A_{n+1} = A_n$. (Da die

Mengen $A_i$ Teilmengen von A sind und für alle j gilt $A_j \subset A_{j+1}$, so ist $n \leq m$.)

(3) Es wird entschieden, ob

$$S_o \bigcup_{x \in A_n} S(x) \subset \bar{A} \quad \text{(Fall I)}$$

oder

$$S_o \bigcup_{x \in A_n} S(x) \not\subset \bar{A} \quad \text{(Fall II)}$$

(4) Im Fall I wird die Menge T gebildet, welche definiert ist durch

$$T = \{0\} \cup \{i / a_i \in A_n\}.$$

(Nach dem Beweis im letzten Abschnitt, besitzt T die verlangte Eigenschaft.)

(5) Im Fall II wird c bestimmt mit

$$c \in S_o \bigcup_{x \in A_n} S(x) \text{ und } c \notin \bar{A}$$

(6) Für c mit

$$c \in S_o \bigcup_{x \in A_n} S(x)$$

wird entschieden, ob

$$c \in S_o \quad \text{(Fall A)}$$

oder

$$c \in \bigcup_{x \in A_n} S(x) \quad \text{(Fall B)}.$$

(7) Im Fall A wird die Folge $\langle c, a_1, \ldots, a_m \rangle$ gebildet. Sie ist ein unabhängiges Repräsentantensystem.

Im Fall B werden die folgenden Unterprogramme ausgeführt

(8) Zu c mit $c \in \bigcup_{x \in A_n} S(x)$ wird b bestimmt mit

$$b \in A_n \text{ und } c \in S(b).$$

(9) Für b mit $b \in A_n$ wird eine Zahl k bestimmt mit

$$b \in A_k \setminus A_{k-1}.$$

(10) Zu k und b (mit $k \leq n$ und $b \in A_k \setminus A_{k-1}$) werden die Folgen $\langle b_1, \ldots, b_k \rangle$ und $\langle c_o, \ldots, c_{k-1} \rangle$ gemäss Lemma 3.3 gebildet. (Dies wird nur für eine Zahl k und ein Element b gebraucht.)

(11) Zu c, $\langle c_o, \ldots, c_{k-1} \rangle$, $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ wird gebildet

$$\langle c_o, \ldots, c_{k-1}, c, a_{k+1}, \ldots, a_m \rangle.$$

(Dies ist ein unabhängiges Repräsentantensystem falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Es liegen die Fälle II, B vor; es ist $c \in S(b)$, $b \in A_k \setminus A_{k-1}$ und es ist $\langle c_o, \ldots, c_{k-1} \rangle$ die gemäss (10) zugeordnete Folge.)

Es dürfte klar sein, dass ein solcher Algorithmus in einer Schrittzahl abläuft, die polynomial in $|M|$,m ist - vorausgesetzt natürlich, dass die Frage, ob eine Menge unabhängig ist, in einer solchen Schrittzahl entscheidbar ist. Für eine schärfere Abschätzung ist es aber nötig, die einzelnen Etappen etwas genauer zu analysieren. Wir können uns dazu etwa der folgenden 6 Typen von Objekten bedienen:

(T1) Natürliche Zahlen kleiner gleich m

(T2) Teilmengen von $\{0,1,\ldots,m\}$

(T3) Elemente von M

(T4) Teilmengen von M

(T5) Folgen von Elementen von M einer Länge kleiner gleich m+1

(T6) Folgen von Teilmengen von M einer Länger kleiner gleich m+1.

Wir nehmen an, dass die Grundoperationen (wie Vereinigung und Durchschnitt von Mengen, Konkatenation von Folgen, Entscheidung der $\in$-Relation etc.) in $s_1$ Schritten durchführbar sind. $s_1$ ist offenbar polynomial beschränkt in $|M|$,m; der Grad dieses Polynoms hängt dabei davon ab, wie Mengen und Folgen repräsentiert sind. Die Unabhängigkeitsstruktur U (welches eine Teilmenge der Potenzmenge von U ist!) sei in der Form einer Prozedur gegeben, welche in $s_2$ Schritten entscheidet, ob eine gegebene Teilmenge C von M zu U gehört oder nicht. In den von uns betrachteten Fällen ist $s_2$ polynomial beschränkt in $|M|$.Wir setzen $s_o = \mathrm{Max}(s_1,s_2)$.

Wir gehen die obigen elf Etappen einzeln durch und geben für jede eine Abschätzung der Schrittzahl.

(Ad1) Für spätere Zwecke geben wir allgemein an, wie zu einer Teilmenge B von A (wobei, wie stets, A die Menge $\{a_1,\ldots,a_m\}$ ist) die Menge $\overline{B}$ zu bilden ist: Für x in M ist $x \in \overline{B}$, genau wenn $x \in B$ oder $B \cup \{x\}$ nicht zu U gehört.
Die benötigte Schrittzahl ist $O(|M| \cdot s_o)$.

(Ad2) Wir geben zunächst an, wie zu c in $\bar{A}$ die Menge D(A,c) zu bilden ist. Nach Lemma 2.3 gilt für alle x in M:
$x \in D(A,c)$, genau wenn c nicht zur abgeschlossenen Hülle von $A \setminus \{x\}$ gehört. D(A,c) ist eine Teilmenge von A und es ist somit nur für m Elemente x nachzuprüfen, ob $\{c\} \cup (A \setminus \{x\})$ zu U gehört. die hiefür benötigte Schrittzahl ist $O(ms_o)$.

Die Schrittzahl, welche zur Berechnung sämtlicher Mengen $D(A,c)$ mit $c$ aus $\bar{A}$ benötigt wird, ist somit $O(m\cdot|M|\cdot s_o)$.

Es wird nun als nächstes rekursiv die Folge $\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ gebildet, bis $n$ erreicht ist mit $A_{n+1} = A_n$; es ist $n \leq m+1$.
$A_1$ ist die Menge $\bigcup_{y\in\bar{A}\cap S_o} D(A,y)$; falls die Mengen $\bar{A}\cap S_o$ und $D(A,c)$ verfügbar sind, so ist die benötigte Schrittzahl $O(|M|\cdot s_o)$. $A_{j+1}$ wird aus $A_j$ erhalten gemäss

$$A_{j+1} = A_j \cup \bigcup_{y\in H_j} D(A,y),$$

wobei

$$H_j = \bar{A}\cap \bigcup_{x\in A_j} S(x).$$

Für jeden dieser Schritte reicht ebenfalls eine Schrittzahl $O(|M|\cdot s_o)$.

Für die Berechnung der ganzen Folge ist somit die Schrittzahl $O(m\cdot|M|\cdot s_o)$ anzusetzen.

(Ad3, 5, 6, 8)

Die Entscheidung, ob

$$S_o \cup \bigcup_{x\in A_n} S(x) \subset \bar{A}$$

oder nicht, soll so durchgeführt werden, dass verneinendenfalls ein $c$ gefunden wird mit

$$c\in S_o \cup \bigcup_{x\ A_n} S(x) \quad \text{und} \quad c\notin \bar{A}$$

und von diesem $c$ bekannt ist, ob $c\in S_o$ oder $c\in\bigcup_{x\in A_n} S(x)$, sowie in diesem letzteren Fall ein $b$ bekannt ist mit $b\in A_n$ und $c\in S(b)$.

Es werden dazu für jedes Paar $\langle x,y\rangle$ mit $x\in A_n$ und $y\in M$ die Fragen gestellt: Ist

$$y\in S_o,\ y\in S(x),\ y\in\bar{A}\ ?$$

Es sind dies $2|M|+m\cdot|M|$ Fragen, deren Beantwortung eine Schrittzahl $O(m\cdot|M|\cdot s_o)$ benötigt und - gegebenenfalls - die gesuchten Elemente liefert.

(Ad4) Zur Bildung der Menge $T$ ist für jedes $i$, $i=1,\ldots,m$, zu fragen, ob $a_i\in A_n$. Die benötigte Schrittzahl ist $O(m\cdot s_o)$.

(Ad7) Aus $c$ und $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ ist die Folge $\langle c,a_1,\ldots,a_m\rangle$ zu bilden. Die Schrittzahl ist $s_o$.

(Ad9) Für $b$ und $\langle A_1,\ldots,A_n\rangle$ ist zu fragen, ob $b\in A_j$ $(j=1,\ldots,n)$. Die Schrittzahl ist $O(m\cdot s_o)$.

(Ad10) Nach Lemma 3.3 sind zu b und k mit $b \in A_k \setminus A_{k-1}$ die Folgen $\langle b_1,\dots,b_k\rangle$ und $\langle c_o,\dots,c_{k-1}\rangle$ zu bilden. Dies kann geschehen, indem der Fall k folgendermassen auf den Fall k-1 zurückgeführt wir wird: Ist $1<k$, so ist

$$b \in \bigcup_{y\in H} D(A,y) \text{ mit } H = \bar{A} \cap \bigcup_{x\in A_{k-1}} S(x).$$

Es sind dann c und b' zu bestimmen mit

$$b \in D(A,c),\ c \in \bar{A} \cap S(b'),\ b' \in A_{k-1} \setminus A_{k-2}.$$

Aus den Folgen $\langle b_1,\dots,b_{k-1}\rangle$, $\langle c_o,\dots,c_{k-2}\rangle$ zu b' werden dann jene zu b folgendermassen erhalten:

$$\langle b_1,\dots,b_{k-1},b\rangle,\ \langle c_o,\dots,c_{k-2},c\rangle.$$

Für einen solchen Reduktionsschritt reicht die Schrittzahl $O(|M|\cdot s_o)$ aus, für die Bildung der ganzen Folge somit $O(m\cdot|M|\cdot s_o)$. (Die Verankerung bei k=1 bietet keine Schwierigkeit.)

(Ad11) Aus c, $\langle c_o,\dots,c_{k-1}\rangle$, $\langle a_1,\dots,a_m\rangle$ ist $\langle c_o,\dots,c_{k-1},c,a_{k+1},\dots a_m\rangle$ zu bilden. Die benötigte Schrittzahl ist $O(s_o)$.
Das Verfahren, welches aus einem unabhängigen Repräsentantensystem von $\langle S_1,\dots,S_m\rangle$ ein solches für $\langle S_o,S_1,\dots,S_m\rangle$ oder die Menge T, welche die Nichtexistenz einer solchen Folge nachweist, benötigt im ganzen $O(m\cdot|M|\cdot s_o)$ Schritte.

Der Algorithmus, welcher zu einer Folge $\langle S_1,\dots,S_m\rangle$ ein unabhängiges Repräsentantensystem liefert (oder die Nichtexistenz nachweist) benötigt somit höchstens $O(m^2\cdot|M|\cdot s_o)$ Schritte. Dieselbe Abschätzung gilt auch für den Algorithmus, der zu der Folge $\langle S_1,\dots,S_m\rangle$ ein maximales unabhängiges Repräsentantensystem berechnet. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem in der Einleitung zitierten Satz von Charlotte N. Burger (Burger 1975).

## Literatur

Burger, Ch. N., Bemerkungen zum sogenannten Heiratsproblem, Ergebnisse eines Berliner Kolloquiums 1 (1975) 1-12.

Frobenius, F.G., Ueber zerlegbare Determinanten, Sitz.ber. Preuss. Akad. Wiss. 1917, 274-277.

Hall, M. Jr., An algorithm for distinct representatives, Amer. Math. Monthly 63 (1956) 716-717.

Hall, P., On representatives of subsets, J. London Math. Soc. 10 (1935) 26-30.

Hopcroft, J.E. and Karp Richard M., An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs, Siam J. Comput. 2 (1973), 225-231.

Kameda, T. and Munro, I., A $O(|V|\cdot|E|)$ algorithm for maximum matching for graphs, Computing 12 (1974) 91-98.

König, D., Ueber Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, Math. Ann. 77 (1916) 453-465.

Mirsky, L., Transversal Theory, Academic Press, 1971.

Rado, R., A theorem on independence relations, Quart. J. Math. (Oxford) 13 (1942) 83-89.

Nach Abschluss der Arbeit habe ich erfahren, dass Algorithmen für Transversalen in Unabhängigkeitsstrukturen bekannt sind. Man vergleiche dazu die folgende Arbeit und die darin zitierte Literatur:

J. Edmonds, Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. Combinatorial structures and their applications, Gordon and Breach, New York, London, Paris 1970.